

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

**Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre,
 $F(x, y, z, p, q, z, s, t) = 0$, intégrables par la méthode de Darboux; (suite)**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 21 (1942), p. 1-66.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__1_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre,

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

intégrables par la méthode de Darboux;

(Suite).

PAR E. VESSIOT.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

Ce travail fait suite au Mémoire qui a paru récemment, sous le même titre, dans ce Journal ⁽¹⁾ et dans lequel j'ai déterminé les faisceaux de transformations infinitésimales associés aux équations

(1) $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$

dont chacun des deux systèmes de caractéristiques (supposés distincts), a deux invariants au moins du premier ou du second ordre. J'applique

⁽¹⁾ E. VESSIOT, *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$, intégrables par la méthode de Darboux* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 9^e série, t. 18, 1939, p. 1).

les résultats et les méthodes de ce Mémoire, ainsi que je l'avais annoncé, à la recherche de celles de ces équations qui s'intègrent explicitement.

Elles se répartissent en classes, toutes les équations d'une même classe se déduisant de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de contact de l'espace (x, y, z) . Je donne pour chacune de ces classes C un représentant type T, et, pour chacune de ces équations types T, ses invariants et son intégrale générale.

Conformément au fait fondamental que mes recherches ont mis en évidence, c'est la théorie des groupes continus finis qui domine la question. Chaque type T est fourni par l'une des structures des groupes à deux ou trois paramètres; mais certaines de ces structures donnent plusieurs types distincts.

Comme je l'avais démontré ⁽¹⁾, pour qu'une équation (1), dont chaque système de caractéristiques a deux invariants au moins du premier ou du second ordre, ait une intégrale générale explicite, il faut et il suffit que chaque système ait un invariant au moins du premier ordre. Cela équivaut à dire qu'elle est réductible par une transformation de contact à la forme

$$(2) \quad s = f(x, y, z, p, q),$$

ou, en d'autres termes, que dans la classe C dont elle fait partie, figure une équation (2). J'ai donc pu choisir, pour les types T, des équations de cette forme.

On sait que Goursat a étudié autrefois ⁽²⁾ les équations (2) dont chaque système de caractéristiques a un invariant du second ordre et trouvé que ce sont celles qui se ramènent, par des transformations de la forme

$$(3) \quad x' = \xi(x), \quad y' = \eta(y), \quad z' = \zeta(x, y, z),$$

soit à des équations de Laplace (intégrables par la méthode de Laplace), soit à certaines formes canoniques G, déterminées par lui.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, nos 16, 17, 31, 34.

⁽²⁾ E. GOURSAT, *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. 1, 1899, p. 31-78 et 439-464).

Ces équations G de Goursat, ayant deux invariants du premier ou du second ordre pour chaque système de caractéristiques, et étant de la forme (2), doivent, d'après ce que je viens de dire, se retrouver dans les classes C ; mais le principe de classification de Goursat, relatif aux transformations (3), étant moins extensif que le nôtre, relatif aux transformations de contact, certaines classes C peuvent, *a priori*, contenir plus d'une équation G . J'indique à quel type T peut effectivement se ramener chaque équation G , et je donne une transformation (ponctuelle ou de contact) qui opère cette réduction.

Les types T sont au nombre de douze; l'un d'eux dépend d'une constante arbitraire, et un autre de fonctions arbitraires d'un argument. Trois, dont celui-ci, sont des équations de Laplace.

Il y a onze équations G . Deux d'entre elles, qui dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments, se ramènent, par des transformations de contact à des types T ne dépendant d'aucun arbitraire, et dont l'un est une équation de Laplace. Les neuf autres sont irréductibles entre elles vis-à-vis des transformations (2): trois sont d'emblée identiques à des types T ; les transformations qui ramènent les six autres à des types T sont des transformations ponctuelles très simples.

Le fait que les équations G appartiennent à des classes C explique que Goursat ait pu les intégrer. Mais il n'y est arrivé, pour plusieurs, que par des artifices cachés et des calculs difficiles qui ne sont pas toujours donnés complètement.

Les intégrales générales que je donne pour les divers types T découlent d'une méthode unique, sûre et régulière (¹), fondée sur l'emploi des équations finies des groupes paramétriques de la structure dont chaque classe provient. La forme en est entièrement explicite et garde, même dans les cas difficiles, un caractère d'élégance.

Voici, pour terminer cet aperçu, un tableau des types T , avec quelques indications sur leur origine (²).

(¹) Cette méthode d'intégration a été donnée dans la première partie du Mémoire, *loc. cit.*, nos 15 et 31.

(²) Ces résultats ont été publiés dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris (*C. R. Acad. Sc.*, t. 205, 1937, p. 779).

a. TROIS INVARIANTS POUR CHAQUE SYSTÈME. — Un seul type,

$$(A) \quad s = 0.$$

b. TROIS INVARIANTS POUR UN SYSTÈME, DEUX POUR L'AUTRE. — Les types qui correspondent à ce cas sont associés à des faisceaux de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \quad (\alpha = 1, 2),$$

où $\boxed{L_1, L_2}$, $\boxed{M_1, M_2}$ sont des transformations infinitésimales de base d'un couple de groupes paramétriques de l'une ou l'autre des deux structures de groupes à deux paramètres ⁽¹⁾.

1° *Structure abélienne.* — Un type unique,

$$(B_1) \quad s = \frac{p}{x+y},$$

équation de Laplace dont les invariants h_1 et k (au sens et avec les notations de Darboux) sont nuls.

Les équations VIII de Goursat ⁽²⁾ s'y ramènent par des transformations de contact.

2° *Structure non abélienne.* — Un type unique,

$$(B_{II}) \quad s = q e^z,$$

équation de Moutard, qui ne diffère pas de l'équation X de Goursat, et à laquelle les équations VI de Goursat se ramènent par des transformations de contact.

⁽¹⁾ Voir la première partie du Mémoire, *loc. cit.*, n° 30. Il s'agit ici de réduire le nombre des arbitraires, et de calculer des types d'équations associés aux faisceaux ainsi obtenus.

⁽²⁾ Les équations G ont été numérotées par Goursat avec des chiffres romains, par lesquels nous les désignons ici. Ses équations VI et VIII sont celles qui dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments. Il y a donc, en fait, une infinité d'équations de la forme VI et de la forme VIII.

c. DEUX INVARIANTS POUR CHAQUE SYSTÈME. — Les types qui correspondent à ce cas sont associés à des faisceaux de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

où $\boxed{L_1, L_2, L_3}$, $\boxed{M_1, M_2, M_3}$ sont des transformations infinitésimales de base d'un couple de groupes paramétriques de l'une quelconque des cinq structures de groupes à trois paramètres ⁽¹⁾.

1° *Structure simple du groupe projectif à une variable.* — Trois types,

$$(C_1^1) \quad s + 2e^z = 0,$$

équation de Liouville. En posant $z' = z + \log 2$, $y' = -y$, on obtient l'équation IX de Goursat

$$(C_1^2) \quad s = e^z \sqrt{p^2 - 1}.$$

Le changement de variable $x = e^{2x'}$, $z = z' - x'$ ramène à ce type l'équation VII de Goursat.

$$(C_1^3) \quad s = \frac{\sqrt{p^2 - 1} \sqrt{q^2 - 1}}{\operatorname{sh} z}.$$

Le changement de variables $z = iz'$, $x = -x'$ ramène à ce type l'équation III de Goursat.

2° *Structure à dérivé de degré 2, dépendant d'une constante arbitraire* ⁽²⁾,

$$(W_1, W_2) = (m - 1)W_2, \quad (W_3, W_1) = W_3, \quad (W_2, W_3) = 0.$$

Trois types : d'abord le *type général*,

$$(C_{II}^1) \quad s = \frac{1-m}{z} \theta(p) \theta(q) \quad (m \neq 0, 1),$$

⁽¹⁾ Voir la première partie du Mémoire, *loc. cit.*, n° 23. Ici encore, il s'agit de réduire autant que possible les arbitraires que comporte cette forme de faisceaux et de calculer des types pour les divers cas de réduction obtenus.

⁽²⁾ Le mot « degré » désigne ici le nombre de paramètres du groupe en question, qui est, d'après les formules de structure écrites, $\boxed{W_2, W_3}$.

où la fonction $\theta(w)$ est définie par l'équation

$$w + (m-1)\theta = (w-\theta)^{1-m}.$$

Un changement de fonction, de la forme $z = hz'$, y ramène l'équation IV de Goursat. Chaque valeur de m donne une classe différente : pour $m=2$, on obtient l'équation II de Goursat en posant $x' = ix, y' = iy, z' = -z$.

On a ensuite deux types spéciaux : pour $m=0$,

$$(C_{II}^2) \quad \frac{s}{pq} = \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y},$$

et, pour $m=1$,

$$(C_{II}^1) \quad s = \frac{1}{x+y} \theta(p) \theta(q),$$

où la fonction $\theta(w)$ est définie par

$$\log(1+\theta) = w + \theta.$$

L'équation C_{II}^2 est une équation de Moutard, et il suffit de poser

$$z' = \log(z-x) - \log(z-y)$$

pour la ramener à l'équation XI de Goursat.

D'autre part, l'équation V de Goursat se ramène à C_{II}^3 par le changement de fonction $z' = i\frac{\pi}{2}(x+y) - z$.

3° *Structure spéciale à dérivé de degré 2,*

$$(W_1, W_2) = W_3 - W_2, \quad (W_3, W_1) = W_3, \quad (W_2, W_3) = 0.$$

Type unique :

$$(C_{III}) \quad s = \frac{1}{z} \theta(p) \theta(q),$$

la fonction $\theta(w)$ est ici définie par l'équation

$$\theta = (w+\theta) \log(w+\theta).$$

Ce type résulte de C_{II}^1 par un passage à la limite, qui fait passer de la structure précédente à celle-ci. Il suffit de faire tendre m vers zéro.

L'équation C_{III} se confond, du reste, avec un cas singulier de l'équation IV de Goursat, signalé par lui incidemment.

4° *Structure à dérivé de degré 1,*

$$(W_1, W_2) = 0, \quad (W_1, W_3) = 0, \quad (W_2, W_3) = W_1.$$

Type unique :

$$(C_{IV}) \quad s + \frac{2}{x+y} \sqrt{pq} = 0.$$

C'est, au changement près du signe + en signe — (qui est sans importance), l'équation I de Goursat.

5° *Structure abélienne.* — Une infinité de classes, représentées par un type général dépendant de fonctions arbitraires,

$$(C_V) \quad s + ap + bq + cz = 0,$$

avec

$$a = -\frac{\partial \log G}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial \log E}{\partial x}, \quad c = ab,$$

$$E = \text{déterminant } |\varphi_x \psi_x \psi'_x|, \quad G = \text{déterminant } |\psi_x \varphi_x \varphi'_x|, \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant trois fonctions arbitraires de x et ψ_1, ψ_2, ψ_3 , trois fonctions arbitraires de y .

C'est le type des équations de Laplace dont les invariants h_1, k_1 (dans le sens et avec les notations de Darboux) sont nuls.

VI. — Recherche des équations E, ayant deux invariants au moins, du premier ou du second ordre, pour chaque système de caractéristiques, qui sont intégrables explicitement. Types fournis par les groupes à deux paramètres.

35. Dans ce paragraphe et dans les suivants, nous allons former et intégrer les diverses équations, types T, auxquelles on peut ramener, par des transformations de contact, les équations E ayant deux invariants au moins du premier ou du second ordre pour chaque système de caractéristiques, qui sont intégrables explicitement.

Le plus simple de ces types T, qui convient au cas de trois invariants de chaque système, sera, d'après les n^{os} 32, 33, 34, l'équation

$$(A) \quad s = 0.$$

Pour les deux autres hypothèses, trois invariants pour l'un des systèmes seulement, et deux invariants pour chaque système, nous avons donné, au n^o 30 et au n^o 23 respectivement, la forme générale des faisceaux Φ associés à de telles équations. Ce sera le point de départ de notre étude.

Nous avons vu, par ailleurs, aux n^{os} 16, 17, 31, 34, que pour qu'une équation E satisfasse à la question, il faut et il suffit qu'elle ait deux invariants au moins du premier ou du second ordre pour chaque système et qu'il y ait, dans la classe à laquelle elle appartient, une équation de la forme

$$(E_0) \quad s = f(x, y, z, p, q).$$

Il sera donc naturel de chercher, pour les types T, des équations de cette forme.

Ils feront, dès lors, partie des équations E_0 qui ont un invariant du second ordre de chaque système. On sait que Goursat a montré autrefois ⁽¹⁾ que celles-ci peuvent se ramener, par des *transformations ponctuelles*, soit au type linéaire de Laplace, soit à un certain nombre d'équations types G, qu'il a données, et ce qui précède explique que Goursat ait réussi, de plus, à intégrer ses diverses équations G.

Le problème que nous traitons ainsi diffère cependant de celui de Goursat, car nous ne considérons deux types T comme distincts que s'ils représentent deux classes différentes, c'est-à-dire si l'on ne peut pas passer de l'un à l'autre par une *transformation de contact*. Mais nous aurons à examiner auquel de nos types T appartient chacune des équations G de Goursat. On verra que celles qui ne dépendent pas de fonctions arbitraires font partie de classes différentes, et qu'elles sont identiques ou se ramènent, par des transformations ponctuelles très simples, aux types T de ces classes.

(¹) *Loc. cit.*, p. 2, note (²).

36. Nous nous occuperons d'abord du cas où l'un des sous-faisceaux singuliers a trois invariants et l'autre deux. Nous avons trouvé dans ce cas, pour les faisceaux associés $\mathcal{F}$ qui sont *intégrables* (nos **29**, **30**), la forme canonique

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, & X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_1} \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) M_\alpha, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0} \end{aligned} \quad (\alpha = 1, 2),$$

où l'on doit prendre, pour L_1 , L_2 et M_1 , M_2 des transformations de base d'un couple $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ de groupes paramétriques d'une quelconque des structures des groupes à deux paramètres.

On peut en faire disparaître tout signe de fonction arbitraire. En effet, le rapport $\varphi_2 : \varphi_1$ n'est pas une constante, car si l'on avait $\varphi_2 = c \varphi_1$, X_1 aurait un troisième invariant, distinct de v et v_0 , à savoir un invariant de $L_1 + c L_2$. On pourra donc prendre $u' = \varphi_2 : \varphi_1$ comme variable nouvelle à la place de u . Cela donnera, au lieu de X_1 , une transformation de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \varphi(u) \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \varphi_0(u) (L_1 + u L_2)$$

(en laissant tomber l'accent de u'). On pourra ensuite poser

$$u'_0 = u_0 \varphi_0(u), \quad u'_1 = u_0 \varphi'_0(u) + u_1 \varphi(u) \varphi_0(u),$$

ce qui donnera, pour $\mathcal{F}_1$ (en laissant tomber les accents), la base

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 (L_1 + u L_2), \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

En opérant de même sur $\mathcal{F}_2$, on aura le type annoncé

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 (L_1 + u L_2), & X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 (M_1 + v M_2), & X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{cases}$$

36 bis. Les deux types de structure, pour les groupes à deux paramètres, sont représentés par les deux groupes

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2}; \quad z'_1 = z_1 + a_1, \quad z'_2 = z_2 + a_2,$$

$$(II) \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad z \frac{\partial f}{\partial z}; \quad z' = a_1 z + a_2,$$

dont les formules de structure ⁽¹⁾ sont respectivement,

$$(I \text{ bis}) \quad c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2,$$

$$(II \text{ bis}) \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2.$$

On en tire, pour les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$,

$$(2) \quad \begin{cases} (\mathcal{L}_I) & L_1 = \frac{\partial f}{\partial w_1}, & L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}; \\ (\mathcal{M}_I) & M_1 = \frac{\partial f}{\partial w_1}, & M_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} (\mathcal{L}_{II}) & L_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, & L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}; \\ (\mathcal{M}_{II}) & M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1}, & M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}. \end{cases}$$

Pour trouver une équation E associée à (1), nous avons à considérer le dérivé de (1) qui est ⁽²⁾

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} + u_0(L_1 + u L_2), & \frac{\partial f}{\partial u_0}; & \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial v}, & M_1 + v M_2; & \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{cases}$$

et à en chercher une intégrale complète. Pour avoir une équation de la forme $s = \tau(x, y, z, p, q)$, nous devons prendre comme variables indépendantes un invariant du premier ordre de chaque sous-faisceau singulier. Il est naturel de prendre ici $x = u, y = v$. Nous cherchons

⁽¹⁾ Équations (45) du n° 31.

⁽²⁾ Nous séparons par un « point et virgule » les transformations distinguées

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

donc une intégrale complète qui comprenne ces deux fonctions, elle sera fournie par le sous-faisceau de (4) qui les admet pour invariants, c'est-à-dire

$$(5) \quad M_1 + v M_2, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Ce serait, dans les deux cas,

$$(6) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = v w_1 - w_2,$$

et, $\frac{\partial f}{\partial u_1} = X_3$, $\frac{\partial f}{\partial v_0} = X_4$ étant transformations principales, on aura

$$(7) \quad p = X_1 z, \quad q = X_2 z, \quad \sigma = X_1 q = X_2 p.$$

Cela donne, dans le premier cas,

$$(8) \quad p = u_0(v - u), \quad q = w_1, \quad \sigma = u_0,$$

c'est-à-dire l'équation (du type de Laplace)

$$(9) \quad p = s(y - x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{y - x} \right) = 0;$$

et, dans le deuxième cas,

$$(10) \quad p = u_0(v w_1 - w_2 - u), \quad q = w_1, \quad \sigma = u_0 w_1,$$

c'est-à-dire l'équation

$$(11) \quad pq = s(z - x) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{z - x} \right) = 0.$$

37. Appliquons la méthode d'intégration du n° 31. Nous avons, dans le premier cas, à intégrer les deux faisceaux $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$,

$$(12) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u u_0 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(13) \quad \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + v v_0 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

qu'on réduit à la forme canonique en y réduisant d'abord leurs dérivés

$$(\mathcal{F}'_1) \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_1} + u \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(\mathcal{F}'_2) \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_1} + v \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

On peut garder u et v , respectivement, comme variables indépendantes, en leur associant un invariant de $\frac{\partial f}{\partial w_1} + u \frac{\partial f}{\partial w_2}$ et $\frac{\partial f}{\partial w_1} + v \frac{\partial f}{\partial w_2}$, (respectivement), soient $a = uw_1 - w_2$ et $b = vw_1 - w_2$.

Il vient ainsi

$$(12 \text{ bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + w_1 \frac{\partial f}{\partial a} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

dont l'intégrale générale est, $\xi(u)$ étant une fonction arbitraire,

$$(14) \quad a = \xi(u), \quad w_1 = \xi', \quad u_0 = \xi'', \quad u_1 = \xi''', \quad w_2 = u\xi' - \xi;$$

et

$$(13 \text{ bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial v} + w_1 \frac{\partial f}{\partial b} + v_0 \frac{\partial f}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

dont l'intégrale générale est, $\eta(v)$ étant une fonction arbitraire,

$$(15) \quad b = \eta(v), \quad w_1 = \eta', \quad v_0 = \eta'', \quad w_2 = v\eta' - \eta.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}$ est alors, d'après la formule (47) du n° 31, où les Ω_i sont les seconds membres de 1 bis,

$$(16) \quad w_1 = \xi'(u) + \eta'(v), \quad w_2 = u\xi'(u) + v\eta'(v) - \xi(u) - \eta(v);$$

et l'on a, par suite, d'après (6), pour l'intégrale générale de (9),

$$(17) \quad z = (y - x)\xi'(x) + \xi(x) + \eta(y).$$

37 bis. Opérons de même dans le deuxième cas. Nous aurons à intégrer les deux faisceaux $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$,

$$(18) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \left[w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + (w_2 + u) \frac{\partial f}{\partial w_2} \right], \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(19) \quad \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \left[w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + vw_1 \frac{\partial f}{\partial w_2} \right], \quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et considérerons, à cet effet, encore leurs dérivés

$$(\mathcal{F}_1') \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + (w_2 + u) \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(\mathcal{F}_2') \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial w_1} + v \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

En raisonnant comme ci-dessus, nous serons conduit à introduire, respectivement, les variables auxiliaires $a = \frac{w_2 + u}{w_1}$ et $b = v w_1 - w_2$. On obtient ainsi, à la place de (18),

$$(18 \text{ bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{w_1} \frac{\partial f}{\partial a} + u_0 w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

dont la réduction s'achèverait en posant

$$w'_1 = \frac{1}{w_1}, \quad u'_0 = -u_0 w'_1, \quad u'_1 = (u_0^2 - u_1) w'_1,$$

ce qui donne, pour intégrale,

$$(20) \quad a = \zeta(u), \quad \frac{1}{w_1} = \zeta', \quad w_2 = \frac{\zeta \zeta'}{\zeta'} - u.$$

On a, de même, pour (19),

$$(19 \text{ bis}) \quad \frac{\partial f}{\partial v} + w_1 \frac{\partial f}{\partial b} + v_0 w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

dont la réduction s'achèverait en prenant $v'_0 = v_0 w_1$, d'où l'intégrale

$$(21) \quad b = \eta(v), \quad w_1 = \eta', \quad w_2 = v \eta' - \eta.$$

L'intégrale générale de (11) est ainsi, comme conséquence de celle de $\mathcal{F}$,

$$(22) \quad w_1 = \frac{\eta'}{\zeta'}, \quad w_2 = \frac{v \eta' - \eta}{\zeta'} + \frac{\zeta}{\zeta'} - u,$$

la suivante

$$(23) \quad z = \frac{\eta(y) - \xi(x)}{\xi'(x)} + x.$$

38. Nous modifierons légèrement les types (9) et (11) trouvés. Pour le premier, en changeant x en $-x$, nous aurons le type (1),

$$(B_1) \quad s = \frac{p}{x + y}.$$

(1) On vérifie facilement que les invariants k et h_1 de Darboux, pour cette équation de Laplace, sont nuls. La forme (17) de l'intégrale générale est d'accord avec la théorie de Darboux pour les équations de Laplace.

Pour le second, en posant

$$(24) \quad z - x = e^{z'},$$

on le ramène d'abord à

$$s' e^{z'} = q';$$

et en changeant z' en $-z'$, on aura le type

$$(B_{II}) \quad s = q e^z,$$

qui appartient à la catégorie des *équations de Moutard*.

Ce dernier type est (au changement près de x en y et y en x) le type X de Goursat. Goursat a donné deux autres types, pour le cas que nous considérons ici (trois invariants pour un des systèmes de caractéristiques et deux invariants pour l'autre), à savoir les types

$$(VI) \quad p - z \frac{s}{q} + F\left(x, \frac{s}{q}\right) = 0,$$

et

$$(VIII) \quad p - sy + F(x, s) = 0,$$

la fonction F étant, dans les deux cas, une fonction arbitraire de ses deux arguments. Mais, quelle que soit cette fonction, ces équations appartiennent, la première à la classe de B_{II} et la seconde à la classe de B_I . Nous le montrerons en réduisant aux formes canoniques que nous avons trouvées [équations (18), (19) et équations (12), (13) respectivement], les faisceaux associés à ces deux types.

39. Les sous-faisceaux singuliers du faisceau $\mathcal{F}$ associé à une équation

$$(25) \quad s = \sigma(x, y, z, p, q),$$

c'est-à-dire du faisceau

$$(26) \quad \begin{cases} Xf = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + r \frac{\partial f}{\partial p} + \sigma \frac{\partial f}{\partial q}, \\ Yf = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + \sigma \frac{\partial f}{\partial p} + t \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}, \end{cases}$$

sont

$$(27) \quad (\mathcal{F}_1) \quad X_1 = Xf + Y\sigma \frac{\partial f}{\partial t}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial r},$$

$$(28) \quad (\mathcal{F}_2) \quad X_2 = Yf + X\sigma \frac{\partial f}{\partial r}, \quad X_4 = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

On vérifie, en effet, immédiatement, que ces faisceaux (27), (28) satisfont aux relations de structure $(X_{2i-1}, X_{2j}) = 0$ ($i, j = 1, 2$).

Si l'on applique les opérations Xf et Yf aux deux membres de l'équation VIII, on trouve

$$(29) \quad r + F'_x(x, s) - [y - F'_s(x, s)]Xs = 0, \quad Ys = 0.$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}_2$ admet les invariants u, u_0, u_1 (dont les deux premiers sont de premier ordre) donnés par les formules (1)

$$(30) \quad u = x, \quad p - yu_0 + F(x, u_0) = 0, \quad u_1 = Xu_0.$$

D'autre part, $Y\sigma$ étant nul, $\mathcal{F}_1$ admet les invariants

$$(31) \quad v = y, \quad v_0 = t.$$

Si nous prenons ces invariants comme variables, nous obtenons, pour base de $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + [vu_0 - F(u, u_0)] \frac{\partial f}{\partial z} + u_0 \frac{\partial f}{\partial q}, & X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + q \frac{\partial f}{\partial z} + v_0 \frac{\partial f}{\partial q}, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{aligned}$$

Pour ramener X_2 à sa forme canonique, il faut prendre pour variable, à la place de z , un invariant de $\frac{\partial f}{\partial v} + q \frac{\partial f}{\partial z}$, soit

$$(32) \quad w_2 = vq - z,$$

(1) D'après le n° 4, on déduit des invariants du premier ordre u et u_0 l'invariant du second ordre $u_1 = X_1 u_0 : X_1 u = Xu_0$. On a, d'après (29), pour l'expression de u_1 ,

$$u_1 = [r + F'_x(x, u_0)] : [y - F'_s(x, u_0)],$$

formule où u_0 devra être remplacé par la fonction de x, y, p tirée de (30).

et, si nous posons encore

$$(33) \quad w_1 = q,$$

nous aurons la forme

$$(34) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + F(u, u_0) \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(35) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \left(\frac{\partial f}{\partial w_1} + v \frac{\partial f}{\partial w_2} \right), \quad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

qui est du type obtenu au n° 29. Elle met en évidence la structure I pour les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, et ceci suffit à prouver que l'équation VIII de Goursat appartient à notre classe B_1 .

Nous allons cependant poursuivre la réduction de $\mathcal{F}$, suivant la méthode du n° 30, de manière à arriver à une transformation de contact faisant passer de (VIII) à (B_1) .

Nous devons chercher pour cela un *invariant spécial*, du premier ordre, de $\mathcal{F}_2$. Les dérivés $\mathcal{F}'_1$ et $\mathcal{F}''_1$ de $\mathcal{F}_1$ sont

$$(\mathcal{F}'_1) \quad \mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \frac{\partial f}{\partial w_1} + F \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad \mathfrak{X}_2 = \frac{\partial f}{\partial u_0}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_1},$$

$$(\mathcal{F}''_1) \quad \mathfrak{X}_1, \quad \mathfrak{X}_2, \quad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial w_1} + F'_{u_0} \frac{\partial f}{\partial w_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_1}.$$

Nous avons à considérer la transformation principale de $\mathcal{F}'_1$,

$$\Omega f = \omega_1 \mathfrak{X}_1 + \omega_2 \mathfrak{X}_2,$$

qui est définie par la condition $(\Omega, \mathfrak{X}_3) \equiv 0 \pmod{\mathcal{F}''_1}$. Or, celle-ci s'écrit $\Omega F'_{u_0} = 0$, ce qui prouve que

$$(36) \quad u' = F'_{u_0}(u, u_0)$$

pourra être pris pour l'invariant spécial cherché. La transformation (34) sera alors divisée par $X_1 u' = F''_{u_0} + u_1 F''_{u_0^2}$, et donnera ainsi, en remplaçant u , par

$$(37) \quad u_1 = \frac{u_1}{F''_{u_0} + u_1 F''_{u_0^2}},$$

la transformation de la base nouvelle

$$(38) \quad \frac{\partial f}{\partial u'} + \frac{1}{F''_{uu_0}} \left(u_0 \frac{\partial f}{\partial v_1} + F \frac{\partial f}{\partial v_0} \right) + u'_1 \left(\frac{\partial f}{\partial u_0} - a_1(u', u_0) \frac{\partial f}{\partial v_1} - a_2(u', u_0) \frac{\partial f}{\partial v_2} \right),$$

où l'on a, sous le bénéfice de (36),

$$(39) \quad a_1(u', u_0) = \frac{u_0 F''_{u_0^2}}{F''_{uu_0}}, \quad a_2(u', u_0) = \frac{F F''_{u_0^2}}{F''_{uu_0}}.$$

On devra ensuite remplacer v_1 et v_2 par deux invariants de la transformation infinitésimale qui figure dans (38) en facteur de u'_1 , à savoir, par exemple (c étant une constante arbitrairement choisie),

$$(40) \quad v'_1 = v_1 + \int_c^{u_0} a_1 du_0, \quad v'_2 = v_2 + \int_c^{u_0} a_2 du_0.$$

La base de F_1 prend ainsi la forme

$$(41) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u'} + u'_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + \varphi_1(u', u_0) \frac{\partial f}{\partial v'_1} + \varphi_2(u', u_0) \frac{\partial f}{\partial v'_2}, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u'_1},$$

les fonctions φ_1 , φ_2 étant, sous le bénéfice de (36),

$$(42) \quad \varphi_1(u', u_0) = \frac{u_0}{F''_{uu_0}} + \int_c^{u_0} \frac{\partial a_1}{\partial u'} du_0, \quad \varphi_2(u', u_0) = \frac{F}{F''_{uu_0}} + \int_c^{u_0} \frac{\partial a_2}{\partial u'} du_0,$$

et l'on conclut de ces formules, par un calcul facile,

$$(43) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_0} = \frac{1}{F''_{uu_0}}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_0} = \frac{u'}{F''_{uu_0}}.$$

Nous supposons ici, pour simplifier les formules, que $F(u, u_0)$ s'annule pour $u = u_0$, ce que l'on obtiendra en faisant, dans VIII, le changement de variable préliminaire $\bar{z} = z + \int F(x, 0) dx$.

On conclut alors, de (43) et (42) ⁽¹⁾,

$$(44) \quad \varphi_1 = \int_c^{u_0} \frac{du_0}{(F''_{uu_0})}, \quad \varphi_2 = u' \varphi_1.$$

(¹) Les parenthèses de (F''_{uu_0}) indiquent que u est remplacé dans F''_{uu_0} par la fonction de u' et u_0 définie par (36).

Le calcul se termine dès lors en posant $u'_0 = \varphi_1(u', u_0)$, c'est-à-dire

$$(45) \quad u'_0 = \int_{\epsilon}^{u_0} \frac{du_0}{(F''_{uu_0})}, \quad u'_1 = \frac{u_1}{F''_{uu_0}} - \int_{\epsilon}^{u_0} \left(\frac{F'''_{u^2 u_0}}{(F''_{uu_0})^2} \right) du_0,$$

ce qui donne, pour $\mathcal{F}$, la base

$$(46) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u'} + u'_1 \frac{\partial f}{\partial u'_0} + u'_0 \left(\frac{\partial f}{\partial w'_1} + u' \frac{\partial f}{\partial w'_2} \right), \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u'_1},$$

$$(47) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \left(\frac{\partial f}{\partial w'_1} + v \frac{\partial f}{\partial w'_2} \right), \quad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Le faisceau associé à l'équation VIII a été ainsi transformé dans le faisceau associé à l'équation

$$(48) \quad p' = s'(y - x');$$

et l'on a, d'après (6) et (8), les formules

$$(49) \quad x' = u', \quad y = v, \quad z' = v w'_1 - w'_2, \quad p' = u'_3 (v - u'), \quad q' = w'_1,$$

qui, rapprochées des formules (30), (31), (32), (33), (36), (39), (40) et (45) définissent une transformation de contact faisant passer de l'une des équations à l'autre.

40. On donne au résultat une forme un peu plus simple en prenant, dans les intégrations des formules (40) et (45), au lieu de la variable u_0 , la variable u qui lui est liée par l'équation (36), et en désignant par $\omega(x, x')$ la fonction définie par

$$(50) \quad x' = F_{\omega}(x, \omega).$$

La transformation de contact obtenue est ainsi définie par le système d'équations suivant :

$$(51) \quad \begin{cases} p - \omega y + F(x, \omega) = 0, & z' = z - \int [\omega y - F(x, \omega)] dx, \\ p' = (x' - y) \int \frac{dx}{F_{\omega'}(x, \omega)}, & q' = q - \int \omega dx, \end{cases}$$

étant entendu que x' joue le rôle de paramètre constant dans les intégrations effectuées par rapport à x . Vérifions que ces formules satisfont bien à la question : nous verrons que cela est vrai en laissant aux

intégrales le caractère d'intégrales indéfinies, et sans avoir besoin de faire sur $F(x, s)$ l'hypothèse $F(x, 0) = 0$.

Différentions, en effet, totalement la seconde des équations (51), en tenant compte des autres. Il vient, eu égard à (50),

$$\begin{aligned} dz' &= dz - p dx - dx' \int (y - F'_{\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial x'} dx - dy \int \omega dx \\ &= dz - p dx + (q' - q) dy - (y - x') dx' \int \frac{\partial \omega}{\partial x'} dx \\ &= dz - p dx + (q' - q) dy + (x' - y) dx' \int \frac{dx}{F''_{\omega^2}}. \end{aligned}$$

D'où

$$dz' - p' dx' - q' dy = dz - p dx - q dy.$$

On a donc bien affaire à une transformation de contact.

Considérant, d'autre part, x' et y comme variables indépendantes et dérivant la première et la troisième des équations (51) par rapport à y , nous avons

$$\begin{aligned} s &= \omega + (y - F'_{\omega}) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} - F'_x \frac{\partial x}{\partial y} - r \frac{\partial x}{\partial y}, \\ s' &= - \int \frac{dx}{F''_{\omega^2}} + (x' - y) \frac{1}{F''_{\omega^2}} \frac{\partial x}{\partial y}. \end{aligned}$$

D'où, comme conséquence des formules de transformation; l'identité

$$s - \omega(x, x') = M \left(s' - \frac{p'}{y - x'} \right), \quad M = \frac{(y - x') \frac{\partial \omega}{\partial x} - F'_{\omega}}{(x' - y)} F''_{\omega^2},$$

où M est une fonction de r, x, x' et y . L'équation (51) devient donc, par la transformation de contact considérée, le résultat de l'élimination de x' entre $s = \omega(x, x')$ et la première des équations (51), qui définit x' , c'est-à-dire précisément l'équation VIII,

$$p - sy + F(x, s) = 0.$$

41. Occupons-nous maintenant de l'équation VI de Goursat. Calcul et raisonnements étant analogues à ceux que nous venons de développer pour l'équation VIII, nous les abrégons. Les invariants de $\mathcal{F}_2$ sont ici, u, u_0, u_1 , définis par

$$(52) \quad u = x, \quad p - zu_0 + F(x, u_0) = 0, \quad u_1 = Xu_0;$$

et ceux de $\mathcal{F}_1$ sont

$$(53) \quad v = \gamma, \quad v_0 = \frac{t}{q}.$$

En posant

$$(54) \quad w_1 = q, \quad w_2 = vq - z,$$

nous avons, pour le faisceau $\mathcal{F}$ associé à l'équation, la base

$$(55) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_1 \frac{\partial f}{\partial u_0} + u_0 \left(w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} \right) + F(u, u_0) \frac{\partial f}{\partial v_2}, & X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \left(w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + v w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} \right), & X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}; \end{cases}$$

ce qui met en évidence les groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ relatifs à l'équation (11), et prouve, par là même, que VI est réductible à (11), et par conséquent à B_{II}, c'est-à-dire encore à l'équation X de Goursat, par des transformations de contact appropriées.

En raisonnant comme aux n^{os} 30 et 40, on est conduit à la transformation définie comme il suit. Soit $\omega(x, x')$ l'intégrale générale de l'équation

$$(56) \quad F''_{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} + F'_{x\omega} - \omega F'_{\omega} + F = 0,$$

x' étant la constante d'intégration; et $a(x, x')$, $b(x, x')$ deux autres fonctions définies par les équations

$$(57) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + \omega a = 0, \quad \frac{\partial b}{\partial x} = F a.$$

Nous considérerons la transformation $\mathfrak{T}$ définie par les équations

$$(58) \quad p - z\omega + F(x, \omega) = 0, \quad z' = az + b,$$

$$(59) \quad p' = (z' - x') \frac{\partial \log a}{\partial x'}, \quad q' = aq.$$

En différentiant totalement la seconde des équations (58), et tenant compte des autres, on trouve

$$dz' - p' dx' = a(dz - p dx) + \left[\frac{\partial b}{\partial x'} - \frac{b - x'}{a} \frac{\partial a}{\partial x'} \right] dx'.$$

La transformation $\mathfrak{C}$ sera donc une transformation de contact si la fonction de x et x' ,

$$(60) \quad G(x, x') = (b - x') \frac{\partial \log a}{\partial x'} - \frac{\partial b}{\partial x'}$$

est identiquement nulle. Or, on a, en tenant compte de (57),

$$(61) \quad G'_x = - \frac{\partial \omega}{\partial x'} (b - x' + a F'_\omega).$$

G'_x sera donc nulle si

$$(62) \quad H(x, x') = b - x' + a F'_\omega$$

est elle-même nulle. Or on a, d'après (57),

$$(63) \quad H'_x = a \left(F''_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + F''_{x\omega} - \omega F'_\omega + F \right),$$

ce qui s'annule identiquement d'après (56).

La transformation $\mathfrak{C}$ sera donc de contact si $H(x, x')$ et $G(x, x')$ sont nulles pour une valeur particulière quelconque x_0 de x . Si nous désignons par $a_0(x')$, $b_0(x')$ les valeurs (laissées arbitraires jusqu'ici), auxquelles a et b se réduisent pour $x = x_0$, et par $f(x')$ la valeur à laquelle se réduit $F'_\omega(x, \omega)$ pour $x = x_0$ [valeur qui est connue dès que la fonction $\omega(x, x')$ est choisie], nous aurons à satisfaire aux deux conditions

$$(64) \quad b_0 - x' + a_0 f = 0, \quad (b_0 - x') \frac{a'_0}{a_0} - b'_0 = 0,$$

qui se réduisent à

$$(65) \quad 1 + a_0 f'' = 0, \quad b_0 - x' + a_0 f = 0,$$

et se résolvent sans difficulté.

42. Vérifions que la transformation de contact $\mathfrak{C}$, ainsi définie, change l'équation VI en (II). Considérons, à cet effet, x' et y comme des variables indépendantes, et dérivons, par rapport à y , la

première des équations (58) et la première des équations (59). Il viendra, compte tenu de (59),

$$s - q\omega + \left[r - p\omega - z \frac{\partial \omega}{\partial x} + F_x + F_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \frac{\partial x}{\partial y} = 0,$$

$$s' - \frac{p'q'}{z' - x'} + (x' - z') \frac{\partial^2 \log a}{\partial x' \partial x} \frac{\partial x}{\partial y} = 0;$$

d'où, par l'élimination de $\frac{\partial x}{\partial y}$, une identité de la forme

$$s' - \frac{p'q'}{z' - x'} = M(s - q\omega),$$

où M est une fonction de r, p, z, x, z', x' . Ce qui fournit la vérification cherchée, puisque l'élimination de ω entre (58) et $s - q\omega = 0$ donne l'équation VI.

VII. — Types intégrables fournis par les groupes à trois paramètres.
1° Structure simple du groupe projectif à une variable.

43. Passons à la recherche des types d'équations E, intégrables explicitement pour lesquelles chacun des systèmes de caractéristiques a deux invariants. D'après le n° 23, nous aurons à trouver les équations E associées à des faisceaux $\mathcal{F}$ de la forme

$$(1) (\mathcal{F}_1) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \varphi_\alpha(u) L_\alpha, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$(2) (\mathcal{F}_2) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(u) M_\alpha, \quad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$(L_1, L_2, L_3), (M_1, M_2, M_3)$ étant deux groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, en w_1, w_2, w_3 , simplement transitifs et réciproques, qui seront un couple de groupes paramétriques de l'une des cinq structures de groupes à trois paramètres.

Les cinq types de structure à considérer seront ⁽¹⁾

- (I) $(w_1, w_2) = w_1, \quad (w_2, w_3) = w_3, \quad (w_1, w_3) = 2w_2,$
 (II) $(w_1, w_2) = 0, \quad (w_1, w_3) = w_1, \quad (w_2, w_3) = c w_2,$
 (III) $(w_1, w_2) = 0, \quad (w_1, w_3) = w_1, \quad (w_2, w_3) = w_1 + w_2,$
 (IV) $(w_1, w_2) = 0, \quad (w_1, w_3) = 0, \quad (w_2, w_3) = w_1,$
 (V) $(w_1, w_2) = 0, \quad (w_1, w_3) = 0, \quad (w_2, w_3) = 0.$

44. Considérons le premier. Il a pour représentant le groupe projectif à une variable

$$(I) \quad w' = \frac{a_1 w + a_2}{a_3 w + 1},$$

pour lequel les équations de structure (11) du n° 14 sont :

$$(3) \quad c_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_3}{a_3 b_2 + 1}, \quad c_2 = \frac{a_1 b_2 + a_2}{a_3 b_2 + 1}, \quad c_3 = \frac{a_3 b_1 + b_3}{a_3 b_2 + 1}.$$

Les équations finies des groupes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont donc

$$(4) (\mathcal{L}) \quad w'_1 = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_3}{a_3 w_2 + 1}, \quad w'_2 = \frac{a_1 w_2 + a_2}{a_3 w_2 + 1}, \quad w'_3 = \frac{a_3 w_1 + w_3}{a_3 w_2 + 1},$$

$$(5) (\mathcal{M}) \quad w'_1 = \frac{b_1 w_1 + b_3 w_2}{b_2 w_3 + 1}, \quad w'_2 = \frac{b_2 w_1 + w_2}{b_2 w_3 + 1}, \quad w'_3 = \frac{b_1 w_3 + b_3}{b_2 w_3 + 1};$$

et leurs transformations infinitésimales de base seront :

$$(6) (\mathcal{L}) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad L_2 = w_3 \frac{\partial f}{\partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad L_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3} - w_2 w_3 \frac{\partial f}{\partial w_2} \\ (\alpha = 1, 2, 3), \end{array} \right.$$

$$(7) (\mathcal{M}) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_3 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \quad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2} - w_3 w_2 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \quad M_3 = w_2 \frac{\partial f}{\partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial w_3} \\ (\alpha = 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

On remarque que l'on passe de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{M}$ en permutant w_2 et w_3 . Cela permute L_1 et M_1 , L_2 et M_3 , L_3 et M_2 ; et pour passer de (4) à (5), et inversement, on permutera a_1 et b_1 , a_2 et b_3 , a_3 et b_2 .

⁽¹⁾ Voir par exemple, S. LIE et FR. ENGEL, *Theorie der Transf. Gruppen*, t. 3, p. 716.

Si l'on effectue, dans les transformations (6), le changement de variables (4), les transformations (L_i) obtenues sont données par les formules

$$(8) \quad \begin{cases} a(L_1) = (a_1 + a_2 a_3) L'_1 - a_1 a_2 L'_2 + a_3 L'_3 \\ a(L_2) = -2 a_1 a_3 L'_1 + a_1^2 L'_2 - a_3^2 L'_3 \\ a(L_3) = 2 a_2 L'_1 - a_2^2 L'_2 + L'_3 \end{cases} \quad (a = a_1 + a_2 a_3),$$

où les L'_i sont les L_i écrits avec les lettres accentuées $\mathfrak{w}'_i$, au lieu des lettres $\mathfrak{w}_i$.

On en conclut la possibilité de ramener $\varphi_\alpha(u) L_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 3)$, par un changement de variables (4), où les a_i seront des fonctions de u convenablement choisies, à la forme $\varphi_1(u) L_1$, ou $\varphi_2(u) L_2$, suivant que $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3$ sera non nul, ou nul.

Ce changement de variables changera, dans (1), le terme $\frac{\partial f}{\partial u}$ en

$$(9) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{da_\alpha}{du} \frac{\partial \mathfrak{w}'_\beta}{\partial a_\alpha} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{w}'_\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Or, d'après des équations fondamentales de la théorie des groupes⁽¹⁾, les expressions $\frac{\partial \mathfrak{w}'_\beta}{\partial a_i} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{w}'_\beta}$ sont des combinaisons linéaires et homogènes des L'_i , à coefficients fonctions des a_i . Donc les expressions (9) seront de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_\alpha(u) L'_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3);$$

de sorte que, en remplaçant u_0 par une autre variable, de la forme $mu_0 + m_1$, dans le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 \neq 0$, et $mu_0 + m_2$ dans le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 = 0$, on aura ramené (1) à la forme

$$(10) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(u) L_3 + u_0 L_1, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

pour le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 \neq 0$; et à la forme

$$(11) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_1(u) L_1 + m_3(u) L_3 + u_0 L_2, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

dans le cas $\varphi_1^2 + 4\varphi_2\varphi_3 = 0$.

(1) S. LIE et FR. ENGEL, *Theorie der Transf. Gruppen*, t. 1.

En opérant de même sur le sous-faisceau (2) de $\mathcal{F}$, on est conduit à décomposer le cas de la structure I en trois cas distincts, que nous devrons traiter séparément.

45. Le cas le plus simple est celui où l'on aura

$$(12) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_1(u) L_1 + m_3(u) L_3 + u_0 L_2, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n_1(v) M_1 + n_2(v) M_2 + v_0 M_3. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_1 L_1 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_1 M_1 + n_2 M_2, \quad L_2, \quad M_3; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Pour le réduire à sa forme canonique (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

nous prendrons comme variables les éléments de l'intégrale complète $u, v, \omega = \omega_1 - \omega_2 \omega_3$, constituée par trois invariants du sous-faisceau complet $\{L_2, M_3\}$. Si l'on remarque que l'on a

$$(13) \quad \begin{cases} L_1 \omega = \omega, & L_2 \omega = 0, & L_3 \omega = -2 v_2 \omega, \\ M_1 \omega = \omega, & M_2 \omega = -2 v_3 \omega, & M_3 \omega = 0, \end{cases}$$

on est conduit à poser

$$(14) \quad e^z = \omega = \omega_1 - \omega_2 \omega_3, \quad x = u, \quad y = v,$$

ce qui donne, en omettant des termes en $\frac{\partial f}{\partial u_0}$ et $\frac{\partial f}{\partial v_0}$,

$$(15) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial z} + \rho \frac{\partial f}{\partial p} + \sigma \frac{\partial f}{\partial q} + \dots, & X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial z} + \sigma \frac{\partial f}{\partial p} + \tau \frac{\partial f}{\partial q} + \dots, & X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}, \end{cases}$$

(1) Voir M_2 , n° 7, p. 212. On observera que $\frac{\partial f}{\partial u_0}, \frac{\partial f}{\partial v_0}$ sont des transformations distinguées de $\mathcal{F}'$.

avec

$$(16) \quad p = \frac{X_1 \omega}{\omega} = m_1 - 2 m_3 \omega_2, \quad q = \frac{X_2 \omega}{\omega} = n_1 - 2 n_2 \omega_3,$$

$$(17) \quad \rho = X_1 p, \quad \tau = X_2 q, \quad \sigma = X_1 q = X_2 p = -2 m_3 n_2 \omega.$$

D'où, pour l'équation E,

$$(16) \quad s = -2 m_3(x) n_2(x) e^z.$$

Elle se réduira à la forme de Liouville

$$(C_1') \quad s + 2 e^z = 0,$$

si l'on prend pour variables indépendantes, au lieu de u et v ,

$$(17) \quad x = \int m_3(u) du, \quad y = \int n_2(v) dv,$$

ce qui équivaut à supposer

$$(18) \quad m_3(u) = 1, \quad n_2(v) = 1$$

dans le faisceau initial.

Tous les faisceaux $\mathcal{F}$ considérés appartiennent donc à une même classe, et l'on obtiendrait l'équation C_1' en partant du faisceau, obtenu en faisant $m_3 = n_2 = 1$, $m_1 = n_1 = 0$,

$$(19) \quad \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + L_3 + u_0 L_2, & X_3 &= \frac{\partial f}{\partial u_0}; \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial v} + M_2 + v_0 M_3, & X_4 &= \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{aligned}$$

Les formules (16) deviendront ainsi

$$p = -2 \omega_2, \quad q = -2 \omega_3,$$

et l'on aura, par suite,

$$\rho = X_1 p = 2 \omega_2^2 - 2 u_0, \quad \tau = X_2 q = 2 \omega_3^2 - 2 v_0,$$

ce qui donne les invariants du second ordre de E

$$(20) \quad -2 u_0 = r - \frac{p^2}{2}, \quad -2 v_0 = t - \frac{q^2}{2}.$$

46. Appliquons maintenant la méthode du n° 15 pour intégrer le faisceau (19), et par suite, l'équation C_1 . Nous avons à intégrer d'abord le faisceau $\mathcal{F}_1$,

$$(21) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_3 + u_0 L_2, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

en le réduisant à la forme canonique ⁽¹⁾

$$(22) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3},$$

dont l'intégrale générale est

$$(23) \quad \alpha_0 = \varphi(\alpha), \quad \alpha_1 = \varphi'(\alpha), \quad \alpha_2 = \varphi''(\alpha), \quad \alpha_3 = \varphi'''(\alpha),$$

φ étant une fonction arbitraire de α .

Les variables α et α_0 constituant une intégrale complète du 2° dérivé de (12)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_3}.$$

Nous prenons donc le 2° dérivé $\mathcal{F}_1''$ de (21), qui est ⁽²⁾

$$\frac{\partial f}{\partial u} + L_3, \quad L_2; \quad L_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

L_1 est transformation distinguée, et $\{L_2, L_1\}$ est complet : il admet pour invariants u et ω_3 . Nous posons donc

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha = u, & \alpha_0 = \omega_3, & \alpha_1 = X_1 \alpha_0 = \omega, \\ \alpha_2 = X_1 \alpha_1 = -2\omega_2 \omega, & \alpha_3 = X_1 \alpha_2 = 2(3\omega_2^2 - u_0) \omega, \end{cases}$$

et la réduction sera effectuée.

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est donc

$$(25) \quad \omega_3 = \varphi(u), \quad \omega = \varphi'(u), \quad \omega_2 = -\frac{\varphi''}{2\varphi'}, \quad \omega_1 = \varphi' - \frac{\varphi\varphi''}{2\varphi'},$$

⁽¹⁾ Voir M_2 , nos 14 et 15, p. 231 et suivantes.

⁽²⁾ Les formules de structure de $\mathcal{L}$ sont $(L_1, L_2) = -L_2$, $(L_1, L_3) = L_3$, $(L_2, L_3) = -2L_1$.

en omettant la valeur de u_0 , qui n'aura pas à intervenir. Et nous aurons de même pour $\mathcal{F}_2$,

$$(26) \quad w_2 = \psi(\nu), \quad \omega = \psi', \quad w_3 = -\frac{\psi''}{2\psi'}, \quad w_1 = \psi' - \frac{\psi\psi''}{2\psi'}.$$

Les formules, déduites de (3),

$$(27) \quad w_1 = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_3}{a_3 b_2 + 1}, \quad w_2 = \frac{a_1 b_2 + a_2}{a_3 b_2 + 1}, \quad w_3 = \frac{a_3 b_1 + b_3}{a_3 b_2 + 1},$$

qui entraînent

$$(28) \quad \omega = \frac{(a_1 - a_2 a_3)(b_1 - b_2 b_3)}{(a_3 b_2 + 1)^2},$$

donnent dès lors l'intégrale générale de $\mathcal{F}$, en y remplaçant les a_i par l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ et les b_i par l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$. On a ainsi, en particulier,

$$(29) \quad \omega = \frac{\varphi'(u)\psi'(\nu)}{[\varphi(u)\psi(\nu) + 1]^2};$$

ce qui suffit à donner l'intégrale générale de C_1 , en vertu des formules (14), sous la forme classique ⁽¹⁾

$$(30) \quad e^z = \frac{\varphi'(x)\psi'(y)}{[\varphi(x)\psi(y) + 1]^2}.$$

47. Passons au second cas de la structure I,

$$(31) \quad \begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(u) L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial \nu} + n_1(\nu) M_1 + n_2(\nu) M_2 + \nu_0 M_3. \end{aligned}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu} + n_1 M_1 + n_2 M_2, \quad L_1, \quad M_3; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial \nu_0}.$$

⁽¹⁾ Si l'on pose $z' = z + \log 2$, $y' = -y$, $\varphi(x) = X(x)$, $\psi(y) = \frac{1}{Y(y')}$,

l'équation C_1 prend la forme $s = e^z$, et l'intégrale (30) devient $e^z = \frac{2 X' Y'}{(X + Y)^2}$.
 C_1 est alors identique à l'équation X de Goursat.

Le faisceau complet $\{L_1, M_3\}$ admet les invariants, u, v et $\frac{\omega}{\omega_2}$. Nous pourrions donc poser

$$(32) \quad x = u, \quad y = v, \quad e^z = \frac{\omega}{\omega_2},$$

et il viendra, pour la forme canonique (15), en particulier,

$$(33) \quad p = X_1 z = -m_3 \omega_2 - m_2 \frac{1}{\omega_2}, \quad \sigma = X_2 p = \left(-m_3 + m_2 \frac{1}{\omega_2^2}\right) n_2 \omega.$$

En éliminant u, v, ω, ω_2 entre les équations (32), (33), et $s = \sigma$, on obtient l'équation E cherchée :

$$(34) \quad s e^{-z} = n_2(y) \sqrt{p^2 - 4m_2(x)m_3(x)}.$$

On voit qu'en faisant

$$(35) \quad x = 2 \int \sqrt{m_2(u)m_3(u)} du, \quad y = \int n_2(y) dy,$$

on aurait obtenu le type, débarrassé de fonctions arbitraires,

$$(C_1^2) \quad s = e^z \sqrt{p^2 - 1},$$

auquel l'équation VII de Goursat,

$$(VII) \quad s = e^z \sqrt{x p^2 + p},$$

se ramène par le changement de variables

$$(36) \quad x = e^{2x'}, \quad z = z' - x'.$$

Ici encore, les faisceaux $\mathcal{F}$ considérés, comme les équations E associées, constituent une même classe. Le choix primitif de variables [équations (32)] conduirait, par ailleurs, à l'équation type C_1^2 directement, si les $m_i(u)$ et les $n_i(v)$ étaient choisis, — ce qui est loisible puisque le type ne dépend pas du choix de ces fonctions — de manière que l'on ait

$$(37) \quad 4m_2 m_3 = 1, \quad n_2 = 1.$$

Ceci nous permettra de supposer, pour les calculs qui vont suivre,

$$(38) \quad m_2 = m_3 = \frac{1}{2}, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 1.$$

On a ainsi, pour $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_2 p = X_1 q$,

$$(39) \quad p = -\frac{1}{2} \left(w_2 + \frac{1}{w_2} \right), \quad q = -2w_3 - e^z, \quad s = -(w_2 + p)e^z = e^z \sqrt{p^2 - 1};$$

et l'on en déduit ⁽¹⁾, pour $r = X_1 p$, $t = X_2 q$,

$$(40) \quad \begin{cases} r = (w_2 + p) \left(\frac{1}{w_2} + p + u_0 \right) = -\sqrt{p^2 - 1} (\sqrt{p^2 - 1} + u_0), \\ t = 2w_3^2 - 2v_0 - qe^z = \frac{1}{2} (q^2 + e^{2z}) - 2v_0. \end{cases}$$

De là les invariants du second ordre, des deux systèmes de caractéristiques de C_1^2 :

$$(41) \quad -u_0 = \frac{r}{\sqrt{p^2 - 1}} + \sqrt{p^2 - 1}, \quad -2v_0 = t - \frac{1}{2} (q^2 + e^{2z}).$$

48. Pour intégrer C_1^2 , nous avons à intégrer d'abord $\mathcal{F}_1$, qui est

$$(42) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} (L_2 + L_3) + u_0 L_1, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Suivant la méthode appliquée au n° 46, nous considérons son dérivé second $\mathcal{F}_1''$, qui a pour base, outre $\frac{\partial f}{\partial u_0}$, les transformations

$$(43) \quad \Omega f = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} (L_2 + L_3), \quad L_1, \quad L_2 - L_3.$$

Ωf est transformation distinguée, et a pour l'un de ses invariants tout invariant de $\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2} (1 - w_2^2) \frac{\partial f}{\partial w_2}$: l'un de ceux-ci est

$$(44) \quad w'_2 = e^u \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$$

Si alors on effectue dans Ωf la transformation (4), avec

$$(45) \quad a_1 = e^u, \quad a_2 = -e^u, \quad a_3 = 1,$$

le terme en $\frac{\partial f}{\partial w'_2}$ sera nul. Or le raisonnement employé au n° 44 montre

⁽¹⁾ La valeur de w_2 a été tirée de la première des équations (39); et on l'a écrite $w_2 = -p - \sqrt{p^2 - 1}$, afin d'obtenir C_1^2 telle quelle. En réalité, le radical $\sqrt{p^2 - 1}$ y est susceptible de deux déterminations.

que Ωf prend, par ce changement de variables, la forme

$$(46) \quad \frac{\partial f}{\partial u} + l_1(u)L'_1 + l_2(u)L'_2 + l_3(u)L'_3,$$

dans laquelle le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial w'_2}$ est $l_1 w'_2 + l_2 - l_3 w'^2_2$. Puisque ce coefficient est nul, c'est que l_1, l_2, l_3 le sont tous trois. Donc le changement de variables considéré réduit Ωf à $\frac{\partial f}{\partial u}$; ce qui revient à dire que les trois fonctions w'_1, w'_2, w'_3 définies par les formules (4) et (45) sont trois invariants (indépendants) de Ωf .

Par ailleurs, d'après les formules (8), ce même changement de variables donne

$$(47) \quad (L_1) = \frac{1}{2}(e^u L'_2 + e^{-u} L'_3), \quad (L_2) - (L_3) = e^u L'_2 - e^{-u} L'_3.$$

$\mathcal{F}_4''$ étant ainsi devenu

$$(48) \quad \left\{ \begin{array}{l} L'_2 = w'_3 \frac{\partial f}{\partial w'_1} + \frac{\partial f}{\partial w'_2}, \quad L'_3 = w'_1 \frac{\partial f}{\partial w'_3} - w'_2 w'_\alpha \frac{\partial f}{\partial w'_\alpha}; \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0} \\ (\alpha = 1, 2, 3), \end{array} \right.$$

nous pourrions prendre comme variables conjuguées α, α_0 , pour réduire $\mathcal{F}_4$ à sa forme canonique, deux invariants de L'_2 , soit :

$$(49) \quad \alpha = w'_3, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}(w'_2 w'_3 - w'_1) = -\frac{1}{2} w'.$$

Or on a maintenant, à cause de l'identité

$$X_1 = \Omega + u_0 L_1,$$

et de (47), la formule

$$(50) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{u_0}{2}(e^u L'_2 + e^{-u} L'_3);$$

et l'introduction des variables α, α_0 , à la place de w'_3 et w'_1 , donne

$$(L'_2) = \frac{\partial f}{\partial w'_2}, \quad (L'_3) = -w'^2_2 \frac{\partial f}{\partial w'_2} - 2\alpha_0 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} + w'_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} \right).$$

Le faisceau $\mathcal{F}_1$ prend ainsi la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_0} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - \frac{e^u}{\alpha_0 u_0} \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

avec

$$(51) \quad \alpha_1 = w'_2, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1^2 - e^{2u}}{2\alpha_0},$$

et la réduction à la forme canonique (26) s'achèverait facilement.

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est donc donnée par les formules (4) et (45), avec

$$(52) \quad w'_1 = \alpha \varphi' - 2\varphi, \quad w'_2 = \varphi', \quad w'_3 = \alpha, \quad w' = -2\varphi,$$

φ étant une fonction arbitraire de α , et u étant donné, en fonction de α , par

$$(53) \quad e^{2u} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''.$$

On peut, du reste, résoudre les formules (4) sous la forme

$$(54) \quad w_1 = \frac{a'_1 w'_1 + a'_2 w'_3}{a'_3 w'_2 + 1}, \quad w_2 = \frac{a'_1 w'_2 + a'_2}{a'_3 w'_2 + 1}, \quad w_3 = \frac{a'_3 w'_1 + w'_3}{a'_3 w'_2 + 1},$$

avec

$$(55) \quad a'_1 = e^{-u}, \quad a'_2 = 1, \quad a'_3 = -e^{-u}, \quad a' = a'_1 - a'_2 a'_3 = 2e^{-u}.$$

49. L'intégrale générale de $\mathcal{F}$ est donnée, dès lors, par les formules (27), où les a_i et les b_i sont fournis par les équations donnant les intégrales de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{e^{-u} \varphi_1 + \alpha}{-e^{-u} \varphi' + 1}, \quad a_2 = \frac{e^{-u} \varphi' + 1}{-e^{-u} \varphi' + 1}, \quad a_3 = \frac{-e^{-u} \varphi_1 + \alpha}{-e^{-u} \varphi' + 1}, \\ a_1 - a_2 a_3 = \frac{-4\varphi e^{-u}}{(-e^{-u} \varphi' + 1)^2}, \quad \varphi_1 = \alpha \varphi' - 2\varphi, \quad e^{2u} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'', \\ b_1 = \psi' - \frac{\psi\psi''}{2\psi'}, \quad b_2 = \psi, \quad b_3 = -\frac{\psi''}{2\psi'}, \quad b_1 - b_2 b_3 = \psi', \end{array} \right.$$

où φ est une fonction arbitraire de α et ψ une fonction arbitraire de v .
D'où l'intégrale générale de C_1^2 :

$$e^z = \frac{(a_1 - a_2 a_3)(b_1 - b_2 b_3)}{(a_1 b_2 + a_2)(a_3 b_2 + 1)}, \quad x = u, \quad y = v,$$

ou, sous forme explicite ⁽¹⁾,

$$(57) \quad 2\psi'e^{x-z} = \varphi''(\alpha\psi + 1)^2 - 2\varphi'\psi(\alpha\psi + 1) + 2\varphi\psi^2, \quad e^{2x} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'',$$

avec les deux fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\gamma)$. On remarquera qu'il en résulte, pour l'intégrale de l'équation VII de Goursat,

$$(58) \quad 2\psi'e^{-z} = \varphi''(\alpha\psi + 1)^2 - 2\varphi'\psi(\alpha\psi + 1) + 2\varphi\psi^2, \quad x = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''.$$

50. Pour le troisième et dernier cas de la structure I, nous aurons

$$(59) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u)L_2 + m_3(u)L_3 + u_0L_1, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n_2(v)M_2 + n_3(v)M_3 + v_0M_1. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2L_2 + m_3L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_2M_2 + n_3M_3, \quad L_1, \quad M_1; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et son sous-faisceau complet $\{L_1, M_1\}$ admet les invariants u, v et $\frac{\omega}{w_1}$.

L'équation E que l'on obtiendrait en posant, par analogie avec les cas précédents,

$$x = u, \quad y = v, \quad e^z = \frac{\omega}{w_1} \quad (\omega = w_1 - w_2w_3),$$

se simplifie par le changement de variables défini par

$$dz' = \frac{dz}{\sqrt{1 - e^z}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{sh} \frac{z'}{2} = 2e^{-z} \sqrt{1 - e^z}, \quad \text{ou} \quad \operatorname{ch} \frac{z'}{2} = e^{-\frac{z}{2}}.$$

Nous poserons donc, d'emblée,

$$(60) \quad x = u, \quad y = v, \quad \operatorname{ch} \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{w_1}{\omega}} \quad (\omega = w_1 - w_2w_3),$$

⁽¹⁾ Si l'on posait $\psi(\gamma) = \frac{1}{Y(\gamma)}$, on aurait, plus simplement encore,

$$(57 \text{ bis}) \quad 2Y'e^{x-z} + \varphi''(\alpha + Y)^2 - 2\varphi'(\alpha + Y) + 2\varphi = 0, \quad e^{2x} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi''.$$

d'où

$$(60 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \operatorname{sh} \frac{\bar{z}}{2} = \sqrt{\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega}}, & \operatorname{th} \frac{\bar{z}}{2} = \sqrt{\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1}}, \\ \operatorname{ch} z = \frac{\omega_1 + \omega_2 \omega_3}{\omega}, & \operatorname{sh} z = 2 \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2 \omega_3}}{\omega}. \end{cases}$$

Le calcul de $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_1 q = X_2 p$ donne alors

$$(61) \quad \begin{cases} p = \frac{m_2}{\omega_2} \operatorname{th} \frac{\bar{z}}{2} + m_3 \omega_2 \coth \frac{\bar{z}}{2}, & q = \frac{n_3}{\omega_3} \operatorname{th} \frac{\bar{z}}{2} + n_2 \omega_3 \coth \frac{\bar{z}}{2}, \\ s = \left(\frac{m_2}{\omega_2} \operatorname{th} \frac{\bar{z}}{2} - m_3 \omega_2 \coth \frac{\bar{z}}{2} \right) \left(\frac{q}{\operatorname{sh} z} - n_2 \omega \frac{1}{\omega_2} \right). \end{cases}$$

D'où, compte tenu de (60 bis) et (61),

$$s \operatorname{sh} z = \left(\frac{m_2}{\omega_2} \operatorname{th} \frac{\bar{z}}{2} - m_3 \omega_2 \coth \frac{\bar{z}}{2} \right) \left(\frac{n_3}{\omega_3} \operatorname{th} \frac{\bar{z}}{2} - n_2 \omega_3 \coth \frac{\bar{z}}{2} \right),$$

et par conséquent

$$(62) \quad s \operatorname{sh} z = \sqrt{p^2 - 4m_2 m_3} \sqrt{q^2 - 4n_2 n_3}.$$

Si donc on prend pour variables, au lieu de $x = u$, $y = v$,

$$(63) \quad x = 2 \int \sqrt{m_2(u) m_3(u)} du, \quad y = 2 \int \sqrt{n_2(v) n_3(v)} dv,$$

on aura la forme type

$$(C_1^3) \quad s \operatorname{sh} z = \sqrt{p^2 - 1} \sqrt{q^2 - 1},$$

à laquelle l'équation III de Goursat,

$$(III) \quad s \sin z = \sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1},$$

se ramène par le changement de variables

$$z = iz', \quad x = -x'.$$

Ce troisième cas donne donc, comme les autres, une seule classe de faisceaux Φ et d'équations E associées; et l'on obtiendra directement la forme type C_1^3 , avec les variables (60), si l'on a choisi des m_i et des n_i satisfaisant aux conditions

$$(64) \quad 4m_2 m_3 = 1, \quad 4n_2 n_3 = 1.$$

Nous prendrons, pour les calculs qui restent à faire,

$$(65) \quad {}_2m_2 = 1, \quad {}_2m_3 = 1, \quad {}_2n_2 = 1, \quad {}_2n_3 = 1.$$

Nous aurons alors

$$(66) \quad {}_2p = \frac{1}{w_2} \operatorname{th} \frac{z}{2} + w_2 \coth \frac{z}{2},$$

d'où, pour $r = X_1 p$,

$${}_2r = \left(\frac{1}{w_2} \operatorname{th} \frac{z}{2} - w_2 \coth \frac{z}{2} \right) \left[\frac{p}{\operatorname{sh} z} - u_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w_2} - w_2 \right) \right];$$

et, en éliminant w_2 au moyen de (66),

$$(67) \quad r = -\sqrt{p^2 - 1} (\sqrt{p^2 - 1} \coth z + u_0).$$

On aura, de même, par raison de symétrie

$$(68) \quad t = -\sqrt{q^2 - 1} (\sqrt{q^2 - 1} \coth z + v_0).$$

De là les invariants du second ordre de E

$$(69) \quad -u_0 = \frac{r}{\sqrt{p^2 - 1}} + \sqrt{p^2 - 1} \coth z, \quad -v_0 = \frac{t}{\sqrt{q^2 - 1}} + \sqrt{q^2 - 1} \coth z.$$

51. D'après les formules obtenues au n° 48 pour l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$, l'intégrale générale du faisceau $\mathcal{F}$ considéré ici sera donnée par les formules (27) avec

$$(70) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{\varphi_1 + \alpha e^u}{-\varphi' + e^u}, & a_2 = \frac{\varphi' + e^u}{-\varphi' + e^u}, & a_3 = \frac{-\varphi_1 + \alpha e^u}{-\varphi' + e^u}, & \varphi_1 = \alpha \varphi' - 2\varphi, \\ b_1 = \frac{\psi_1 + \beta e^v}{-\psi' + e^v}, & b_2 = \frac{-\psi_1 + \beta e^v}{-\psi' + e^v}, & b_3 = \frac{\psi' + e^v}{-\psi' + e^v}, & \psi_1 = \beta \psi' - 2\psi, \end{cases}$$

φ et ψ étant des fonctions arbitraires $\varphi(\alpha)$ et $\psi(\beta)$ des variables auxiliaires α et β , et u et v étant liées à ces variables par les formules

$$(70 \text{ bis}) \quad e^{2u} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'', \quad e^{2v} = \psi'^2 - 2\psi\psi''.$$

On aura donc, pour l'intégrale générale de C_1^3 , sous le bénéfice des mêmes formules (70), et des relations (60),

$$(71) \quad e^{2x} = \varphi'^2 - 2\varphi\varphi'', \quad e^{2y} = \psi'^2 - 2\psi\psi'', \quad \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_3)(a_3 b_2 + 1)}{(a_1 - a_2 a_3)(b_1 - b_2 b_3)};$$

et la dernière de ces formules devient, sous forme explicite,

$$(72) \quad 4\varphi\psi e^{x+y} \operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = [\varphi_1\psi_1 + \varphi'\psi' + (\alpha\beta + 1)e^{x+y}]^2 \\ - [(\alpha\psi_1 + \psi')e^x + (\beta\varphi_1 + \varphi')e^y]^2,$$

et, en tenant compte de (71),

$$(73) \quad 4\varphi\psi e^{x+y} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} - 1 \right) = (\alpha\beta + 1)^2 (4\varphi\psi\varphi''\psi'' - \varphi'^2\psi'^2) \\ + 4(\alpha\beta + 1) [2\varphi\psi(\varphi'\psi')' - \varphi'\psi'(\varphi\psi)'] \\ + 8\varphi\psi(\varphi\psi'' + \psi\varphi'') - 4(\varphi^2\psi'^2 + \psi^2\varphi'^2).$$

VIII. — Suite des Types intégrables fournis par les groupes à trois paramètres. 2° Structures pour lesquelles le groupe dérivé est à deux paramètres.

§2. Le type de structure II dépend d'un paramètre c . Les deux valeurs $c = 1$, $c = 0$ constituent des cas singuliers, qui devront être examinés à part. Pour le cas général, nous prendrons comme représentant du type le groupe linéaire

$$(1) \quad x' = a_1x + a_2y + a_3, \quad y' = a_4^m y,$$

dont les formules de structure sont [voir n° 14, équations (11)],

$$(2) \quad c_1 = a_1b_1, \quad c_2 = a_1b_2 + a_2b_1^m, \quad c_3 = a_1b_3 + a_3.$$

Les deux groupes paramétriques $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont donc

$$(3) (\mathcal{L}) \quad w'_1 = a_1w_1, \quad w'_2 = a_1w_2 + a_2w_1^m, \quad w'_3 = a_1w_3 + a_3,$$

$$(4) \quad L_1 = w_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad L_2 = w_1^m \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3};$$

$$(5) (\mathcal{M}) \quad w'_1 = b_1w_1, \quad w'_2 = b_2w_1 + b_1^mw_2, \quad w'_3 = b_3w_1 + w_3,$$

$$(6) \quad M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + mw_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

avec les formules de structure

$$(7) \quad (L_1, L_2) = (m-1)L_2, \quad (L_1, L_3) = -L_3, \quad (L_2, L_3) = 0,$$

$$(8) \quad (M_1, M_2) = (1-m)M_2, \quad (M_1, M_3) = -M_3, \quad (M_2, M_3) = 0.$$

Les valeurs exceptionnelles de m , à réserver, seront $m=1$ et $m=0$: elles correspondent respectivement à $c=0$ et $c=1$.

Si l'on effectue dans les L_i la transformation (3), on obtient

$$(9) \quad (L_1) = L'_1 + (m-1) a_2 a_1^{-m} L'_2 - a_3 L'_3, \quad (L_2) = a_1^{1-m} L'_2, \quad (L_3) = a_1 L'_3.$$

On passe de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{M}$ et inversement par l'inversion

$$(10) \quad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \quad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1^{m+1}}, \quad w'_3 = -\frac{w_3}{w_1};$$

elle échange L_1 et $-M_1$, L_2 et $-M_2$, L_3 et $-M_3$.

En raisonnant comme au n° 44, on en conclut que l'on pourra prendre

$$(11) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(v) L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n_2(v) M_2 + n_3(v) M_3 + v_0 M_1. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_2 M_2 + n_3 M_3, \quad L_1, \quad M_1; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

et, pour chercher l'équation E associée, on prendra comme variables trois invariants du sous-faisceau complet $\{L_1, M_1\}$,

$$(12) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = \log(w_1^{-m} w_2 w_3^{m-1}).$$

Cela donne, pour $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_1 q = X_2 p$, les formules

$$\begin{aligned} p &= m_2 \frac{w_1^m}{w_2} + (m-1) m_3 \frac{1}{w_3}, & q &= n_2 \frac{w_1}{w_2} + (m-1) n_3 \frac{w_1}{w_3}, \\ -s &= m_2 n_2 \frac{w_1^{m+1}}{w_2^2} + (m-1) m_3 n_3 \frac{w_1}{w_3^2}, \end{aligned}$$

qui s'écrivent, en tenant compte de (12),

$$(13) \quad \begin{cases} p = m_2 e^{-z} w_3^{m-1} + (m-1) m_3 w_3^{-1}, & q = n_2 e^{-z} \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{m-1} + (m-1) n_3 \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{-1}, \\ -s = m_2 n_2 e^{-2z} \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{m-1} w_3^{m-1} + (m-1) m_3 n_3 \left(\frac{w_3}{w_1}\right)^{-1} w_3^{-1}; \end{cases}$$

et il ne reste plus qu'à éliminer w_3 et $\frac{w_3}{w_1}$ entre ces trois équations.

Nous les simplifierons, à cet effet, en posant, au lieu de $x = u$, $y = v$,

$$(14) \quad x = \int m_2^{\frac{1}{m}} m_3^{\frac{m-1}{m}} du, \quad y = \int n_2^{\frac{1}{m}} n_3^{\frac{m-1}{m}} dv,$$

$$(15) \quad \lambda = \left(\frac{m_3}{m_2} \right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{z}{m}} w_3^{-1}, \quad \mu = \left(\frac{n_3}{n_2} \right)^{\frac{1}{m}} e^{\frac{z}{m}} \left(\frac{w_1}{w_3} \right);$$

ce qui donne

$$(16) \quad \begin{cases} p e^{\frac{z}{m}} = \lambda^{1-m} + (m-1) \lambda, & q e^{\frac{z}{m}} = \mu^{1-m} + (m-1) \mu, \\ -s e^{\frac{z}{m}} = (\lambda \mu)^{1-m} + (m-1) \lambda \mu. \end{cases}$$

On est alors conduit à poser

$$(17) \quad z' = e^{\frac{z}{m}} = w_1^{-1} w_2^{\frac{1}{m}} w_3^{\frac{m-1}{m}},$$

ce qui donne

$$(18) \quad \begin{cases} m p' = \lambda^{1-m} + (m-1) \lambda, & m q' = \mu^{1-m} + (m-1) \mu, \\ m^2 s' z' = (1-m) \lambda \mu (\lambda^{-m} - 1) (\mu^{-m} - 1). \end{cases}$$

On en conclut le type cherché (où nous laissons tomber les accents),

$$(C_H) \quad sz + (m-1) \theta(p) \theta(q) = 0,$$

la fonction $\theta(\omega)$ étant définie par l'élimination de λ entre les équations

$$(19) \quad m\omega = \lambda^{1-m} + (m-1) \lambda, \quad m\theta = \lambda^{1-m} - \lambda,$$

c'est-à-dire par l'équation

$$(20) \quad [\omega + (m-1) \theta] (\omega - \theta)^{m-1} = 1,$$

Ce type correspond à l'équation IV de Goursat, qui est

$$(IV) \quad sz + \varphi(p) \varphi(q) = 0,$$

la fonction $\varphi(\omega)$ étant définie par l'équation

$$(21) \quad (\varphi - \alpha\omega)^\alpha = (\varphi - \beta\omega)^\beta \quad \text{où} \quad \alpha\beta = -1.$$

On ramènerait (IV) à C_{II}^I , en posant

$$(22) \quad \alpha = \sqrt{m-1}, \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{m-1}},$$

et en effectuant sur z un changement de variable de la forme

$$(22 \text{ bis}) \quad z' = k z,$$

k étant une constante convenablement choisie. Le cas $\beta = \alpha$ correspond donc au cas $m = 0$; et le cas $m = 1$ se trouve écarté.

52 bis. Rappelons que les variables dont le choix a donné C_{II}^I sont

$$(23) \quad \begin{cases} x = \int m_2(u)^{\frac{1}{m}} m_3(u)^{\frac{m-1}{m}} du, & y = \int n_2(v)^{\frac{1}{m}} n_3(v)^{\frac{m-1}{m}} dv, \\ z = w_1^{-1} w_2^{\frac{1}{m}} w_3^{\frac{m-1}{m}}. \end{cases}$$

On pourra conserver le choix $x = u, y = v$ pour les variables indépendantes, à condition de choisir les m_i et n_i , ce qui sera loisible, de manière à satisfaire aux relations

$$(24) \quad m_2 = m_3^{1-m}, \quad n_2 = n_3^{1-m}.$$

Nous prendrons

$$(25) \quad m_2 = m_3 = 1, \quad n_2 = n_3 = 1.$$

Calculons les invariants de E. Nous aurons ici

$$\lambda = \frac{z}{w_3}, \quad mp = \lambda^{1-m} + (m-1)\lambda;$$

d'où, pour $r = X_1 p$, l'équation

$$\begin{aligned} mr &= (1-m)(\lambda^{1-m} - \lambda) \left(\frac{p}{z} - \frac{1}{w_3} - u_0 \right) \\ &= (1-m)m\theta \left(\frac{p-\lambda}{z} - u_0 \right) = (1-m)m\theta \left(\frac{\theta}{z} - u_0 \right). \end{aligned}$$

Donc E a pour invariants (¹)

$$(26) \quad (m-1)u_0 = \frac{r}{\theta(p)} + (m-1)\frac{\theta(p)}{z}, \quad (1-m)v_0 = \frac{t}{\theta(q)} + (m-1)\frac{\theta(q)}{z}.$$

53. Pour trouver l'intégrale générale de (C_{II}') , nous avons à intégrer d'abord $\mathcal{F}_1$, qui est, sous l'hypothèse (25),

$$(27) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2 + L_3 + u_0 L_1, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Le dérivé second $\mathcal{F}_1''$ est

$$\Omega f = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2 + L_3, \quad (m-1)L_2 - L_3, \quad L_1; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Ωf en est une transformation distinguée. Prenons pour variables nouvelles ses invariants évidents

$$(28) \quad w'_1 = w_1, \quad w'_2 = w_2 - u w_1^m, \quad w'_3 = w_3 - u.$$

Ces formules définissent une transformation (3) de $\mathcal{L}$, avec

$$(29) \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -u, \quad a_3 = -u.$$

Les formules (9) deviennent par suite,

$$(L_1) = L'_1 - (m-1)u L'_2 + u L'_3, \quad (L_2) = L'_2, \quad (L_3) = L'_3;$$

de sorte que X_1 devient

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \{ L'_1 - u[(m-1)L'_2 - L'_3] \}.$$

Pour le réduire à sa forme canonique, nous prenons pour variables conjuguées deux invariants de $(m-1)L'_2 - L'_3$, soit

$$(30) \quad \alpha = w'_1, \quad \alpha_0 = w'_3 + \frac{1}{m-1} w'_2 w'_1{}^{-m}.$$

(¹) On obtient, pour $t = X_2 q$, par un calcul analogue,

$$t = (1-m)\theta(q) \left[\frac{\theta(q)}{z} + v_0 \right].$$

Il vient alors, pour les autres variables canoniques,

$$(31) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{X_1 \alpha_0}{X_1 \alpha} = w'_3 w_1^{-1} - w'_2 w_1^{-(m+1)}, \\ \alpha_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = m w'_2 w_1^{-(m+2)} + m u w_1^{-2}, \end{cases}$$

et l'on tire de ces équations

$$(32) \quad \begin{aligned} m w'_2 &= (m-1) \alpha^m (\alpha_0 - \alpha \alpha_1), & m w'_3 &= (m-1) \alpha_0 + \alpha \alpha_1, \\ m u &= \alpha^2 \alpha_2 + (m-1) (\alpha \alpha_1 - \alpha_0); \end{aligned}$$

puis, au moyen de (28),

$$(33) \quad w_1 = \alpha, \quad m w_2 = \alpha^{m+2} \alpha_2, \quad m w_3 = \alpha^2 \alpha_2 + m \alpha \alpha_1;$$

et les équations (32) et (33) donnent l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$, si l'on y considère α_0 comme une fonction arbitraire $m\varphi(\alpha)$, et α_1 , α_2 comme les dérivées, première et seconde, de α_0 .

Nous déduirons l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$,

$$(34) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M_2 + M_3 + v_0 M_1, \quad X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0},$$

de celle que nous venons de trouver pour $\mathcal{F}_1$ au moyen du changement de variables (10). Il donnera le faisceau

$$\frac{\partial f}{\partial v} = L'_2 + L'_3 + v_0 L'_1, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et il suffira de changer encore w'_2 en $-w'_2$, w'_3 en $-w'_3$ et v_0 en $-v_0$, pour revenir à la forme de $\mathcal{F}_1$. L'intégrale générale cherchée sera donc donnée par

$$(35) \quad w_1 = \beta^{-1}, \quad m w_2 = \beta^2 \beta_2, \quad m w_3 = \beta \beta_2 + m \beta_1,$$

$$(36) \quad m v = \beta^2 \beta_2 + (m-1) (\beta \beta_1 - \beta_0), \quad \beta_0 = m \psi(\beta), \quad \beta_1 = m \psi'(\beta), \quad \beta_2 = m \psi''(\beta).$$

Les formules (2) conduiront alors à l'intégrale générale de $\mathcal{F}$,

$$(37) \quad w_1 = a_1 b_1, \quad w_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1^m, \quad w_3 = a_1 b_3 + a_3,$$

avec

$$(38) \quad a_1 = \alpha, \quad a_2 = \alpha^{m+2} \varphi'', \quad a_3 = \alpha^2 \varphi'' + m \alpha \varphi',$$

$$(39) \quad b_1 = \beta^{-1}, \quad b_2 = \beta \psi'', \quad b_3 = \beta \psi'' + m \psi'.$$

$$(40) \quad u = \alpha^2 \varphi'' + (m-1)(\alpha \varphi' - \varphi), \quad v = \beta^2 \psi'' + (m-1)(\beta \psi' - \psi),$$

φ étant une fonction arbitraire de α et ψ une fonction arbitraire de β .

L'intégrale générale de C_{II}^1 est alors définie par

$$(41) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = \alpha_1^{-1} \alpha_2^{\frac{m-1}{m}} \alpha_3^{\frac{m-1}{m}},$$

et donnée, par suite, par les formules définitives

$$(42) \quad \begin{cases} x = \alpha^2 \varphi'' (m-1)(\alpha \varphi' - \varphi), & y = \beta^2 \psi'' + (m-1)(\beta \psi' - \psi), \\ z^m = (\alpha^{m+1} \varphi'' + \beta^{m+1} \psi'') [(\alpha \varphi'' + m \varphi') + (\beta \psi'' + m \psi')]^{m-1}. \end{cases}$$

§4. Cas $m = 0$. — Les formules (1) à (10) du n° 52 deviennent

$$(43) \quad x' = a_1 x + a_2 y + a_3, \quad y' = y,$$

$$(44) \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2, \quad c_3 = a_1 b_3 + a_3.$$

$$(45) \quad (\mathcal{L}) \quad w'_1 = a_1 w_1, \quad w'_2 = a_1 w_2 + a_2, \quad w'_3 = a_1 w_3 + a_3,$$

$$(47) \quad L_1 = w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(48) \quad (\mathcal{M}) \quad w'_1 = b_1 w_1, \quad w'_2 = b_2 w_1 + w_2, \quad w'_3 = b_3 w_1 + w_3,$$

$$(49) \quad M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(50) \quad (L_1, L_2) = -L_2, \quad (L_1, L_3) = -L_3, \quad (L_2, L_3) = 0,$$

$$(51) \quad (M_1, M_2) = M_2, \quad (M_1, M_3) = M_3, \quad (M_2, M_3) = 0,$$

$$(52) \quad (L_1) = L'_1 - a_2 L'_2 - a_3 L'_3, \quad (L_2) = a_1 L'_2, \quad (L_3) = a_1 L'_3,$$

$$(53) \quad (\text{Inversion}) \quad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \quad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1}, \quad w'_3 = -\frac{w_3}{w_1},$$

et l'on peut prendre, par suite, encore, pour définir $\mathcal{F}_1$

$$(54) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(u) L_3 + u_0 L_1, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n_2(v) M_2 + n_3(v) M_3 + v_0 M_1. \end{cases}$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m_2 L_2 + m_3 L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n_2 M_2 + n_3 M_3, \quad L_1, \quad M_1; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

et il a pour intégrale complète les invariants de $\{L_1, M_1\}$

$$(55) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{w_2}{w_3}.$$

On a alors, pour $p = X_1 z$ et $q = X_2 z$,

$$(56) \quad p = \frac{1}{w_3} (m_2 - m_3 z), \quad q = \frac{w_1}{w_3} (n_2 - n_3 z);$$

et l'on en déduit, pour $s = X_2 p = X_1 q$,

$$(57) \quad s = \frac{w_1}{w_3} [m_3 (n_3 z - n_2) + n_3 (m_3 z - m_2)].$$

L'élimination de $\frac{1}{w_3}$ et $\frac{w_1}{w_3}$ entre (56) et (57) donne alors, pour l'équation E associée à $\mathcal{F}$,

$$(58) \quad \frac{s}{pq} = \frac{m_3}{m_3 z - m_2} + \frac{n_3}{n_3 z - n_2}.$$

Le rapport $\frac{m_2}{m_3}$ n'est pas une constante; car si c'était une constante k , $\mathcal{F}$, admettrait, outre les invariants y et v_0 , l'invariant du sous-faisceau complet $\{kL_2 + L_3, L_1\}$. On pourra donc prendre pour variable x , au lieu de u , et de même, pour y , à la place de v , les variables

$$(59) \quad x = \frac{m_2(u)}{m_3(u)}, \quad y = \frac{n_2(v)}{n_3(v)};$$

ce qui donnera, au lieu de (58), le type

$$(C_{II}^2) \quad \frac{s}{pq} = \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z-y}.$$

Pour les calculs ultérieurs, nous pourrions prendre les variables (55), avec

$$m_3 = n_3 = 1, \quad m_2(u) = u, \quad n_2(v) = v.$$

On aura ainsi, directement, l'équation C_{II}^2 , le faisceau $\mathcal{F}$ étant

$$(60) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + uL_2 + L_3 + u_0L_1, \\ X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + vM_2 + M_3 + v_0M_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0}. \end{cases}$$

Les formules (56) deviendront

$$(61) \quad p = \frac{u-z}{w_3}, \quad q = \frac{v-z}{w_3} w_1;$$

et la première donnera, par exemple, pour $r = X_1 p$,

$$\frac{r}{p} = \frac{1-p}{u-z} = \frac{1+u_0 w_3}{w_3} = \frac{1-2p}{u-z} - u_0.$$

D'où les invariants du second ordre de C_{II}^2 ,

$$(62) \quad -u_0 = \frac{r}{p} - \frac{2p-1}{z-x}, \quad -v_0 = \frac{t}{q} - \frac{2q-1}{z-y}.$$

55. Passons à l'intégration de C_{II}^2 , qui va résulter de celle de $\mathcal{F}_1$,

$$(63) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u L_2 + L_3 + u_0 L_1, \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Le dérivé second, $\mathcal{F}_1''$, est

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad u L_2 + L_3; \quad L_1, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

On peut donc prendre pour variables conjuguées deux invariants du sous-faisceau $\left\{ \frac{\partial f}{\partial u}, L_1, \frac{\partial f}{\partial u_0} \right\}$, qui est complet, car L_1 est une transformation distinguée de $\mathcal{F}_1''$. Nous poserons

$$(64) \quad \alpha = \frac{w_3}{w_1}, \quad \alpha_0 = \frac{w_2}{w_1},$$

et, par suite,

$$\alpha_1 = \frac{X_1 \alpha_0}{X_1 \alpha} = u, \quad \alpha_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = w_1.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi, φ étant une fonction arbitraire de α (variable auxiliaire),

$$(65) \quad u = \varphi', \quad w_1 = \varphi'', \quad w_2 = \varphi \varphi'', \quad w_3 = \alpha \varphi''.$$

On en déduit l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ par la transformation (53), accompagnée du changement de w'_1 en $-w'_1$, de u en v et de u_0 en $-v_0$, qui change X_1 en

$$X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v M_2 + M_3 + v_0 M_1.$$

On obtient ainsi, ψ étant une fonction arbitraire de β (variable auxiliaire), l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$

$$(66) \quad v = \psi', \quad w_1 = -\frac{1}{\psi''}, \quad w_2 = \psi, \quad w_3 = \beta;$$

et les formules, déduites de (44),

$$(67) \quad w_1 = a_1 b_1, \quad w_2 = a_1 b_2 + a_2, \quad w_3 = a_1 b_3 + a_3,$$

— où $(a_1, a_2, a_3); (b_1, b_2, b_3)$ sont les valeurs de (w_1, w_2, w_3) données respectivement par (65) et (67) — donnent l'intégrale générale de $\mathcal{F}$,

$$(68) \quad u = \varphi', \quad v = \psi', \quad w_1 = -\frac{\varphi''}{\psi''}, \quad w_2 = \varphi''(\varphi + \psi), \quad w_3 = \varphi''(\alpha + \beta).$$

De là l'intégrale générale de C_{II}^2

$$(69) \quad x = \varphi'(\alpha), \quad y = \psi'(\beta), \quad z = \frac{\varphi(\alpha) + \psi(\beta)}{\alpha + \beta}.$$

56. On aperçoit que cette intégrale générale peut se transformer en appliquant la transformation de Legendre à chacun des systèmes de quantités $[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)]$, $[\beta, \psi(\beta), \psi'(\beta)]$. En désignant par X une fonction arbitraire de x , et Y une fonction arbitraire de y , il vient

$$\begin{aligned} \varphi' = x, \quad \alpha = X', \quad \varphi = xX' - X, \\ \psi' = y, \quad \beta = Y', \quad \psi = yY' - Y; \end{aligned}$$

d'où, pour l'intégrale générale de C_{II}^2 ,

$$(70) \quad z = x + y - \frac{X + Y}{X' + Y'}.$$

L'équation est une équation de Moutard.

Effectivement, si l'on cherche à faire disparaître le terme en pq par un changement de variables $z' = \theta(x, y, z)$, on a, pour déterminer θ , la condition (1)

$$\frac{\partial}{\partial z} \log \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-y},$$

(1) Comparez une Note de Cosserat, dans la *Théorie des surfaces* de Darboux, t. IV, p. 407.

qui est vérifiée, par exemple, par $\theta = \log(z - x) - \log(z - y)$; et si l'on pose, en conséquence,

$$(71) \quad e^z = \frac{z - x}{z - y},$$

on obtient, en laissant tomber les accents, la transformée suivante, qui est le type XI de Goursat et a la forme canonique des équations de Moutard,

$$(XI) \quad s + \frac{d}{dx} \left(\frac{e^z}{x - y} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{e^{-z}}{x - y} \right) = 0.$$

Son intégrale générale est, d'après (70) et (71),

$$(72) \quad e^z = \frac{y(X' + Y') - (X + Y)}{x(X' + Y') - (\lambda + Y)}.$$

§7. Cas $m = 1$. — Les formules fondamentales du début du n° 52 deviennent, dans ce cas,

$$(73) \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad c_3 = a_1 b_3 + a_3,$$

$$(74) \quad (\mathcal{L}) \quad w'_1 = a_1 w_1, \quad w'_2 = a_2 w_1 + a_1 w_2, \quad w'_3 = a_1 w_3 + a_3,$$

$$(75) \quad (\mathcal{M}) \quad w'_1 = b_1 w_1, \quad w'_2 = b_2 w_1 + b_1 w_2, \quad w'_3 = b_3 w_1 + w_3,$$

$$(76) \quad L_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2} + w_3 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \quad L_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(77) \quad M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(78) \quad (L_1, L_2) = 0, \quad (L_1, L_3) = -L_3, \quad (L_2, L_3) = 0,$$

$$(79) \quad (M_1, M_2) = 0, \quad (M_1, M_3) = M_3, \quad (M_2, M_3) = 0.$$

Les transformations L_2 et M_2 , respectivement distinguées dans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$, sont identiques, conformément à la théorie de Lie.

L'inversion

$$(80) \quad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \quad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1^2}, \quad w'_3 = -\frac{w_3}{w_1},$$

échange L_1 et $-M_1$, L_2 et $-M_2$, L_3 et $-M_3$. Enfin la transformation (74), effectuée dans les L_i , donne

$$(81) \quad (L_1) = L'_1 - a_3 L'_3, \quad (L_2) = L'_2, \quad (L_3) = a_1 L'_3.$$

Par suite

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 [\varphi_1(u) L_1 + \varphi_2(u) L_2 + \varphi_3(u) L_3]$$

devient, par cette transformation (74),

$$(X_1) = \frac{\partial f}{\partial u} + \left(\frac{a'_1}{a_1} + u_0 \varphi_1 \right) L'_1 + \left(\frac{a'_2}{a_1} + u_0 \varphi_2 \right) L'_3 + (a'_3 - a_3 u_0 \varphi_1 + a_1 u_0 \varphi_3) L'_3.$$

Aucun des φ_i n'est nul; car, si l'un d'eux était nul, $\{X_1, X_3\}$ admettrait, outre les invariants v et v_0 , tout invariant de l'un des trois groupes (L_h, L_j) . De plus $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ n'est pas une constante, car si l'on avait $\varphi_2 = c \varphi_1$, ($c = \text{const.}$), $\{X_1, X_3\}$ admettrait tout invariant du groupe $(L_1 + c L_2, L_3)$. On peut donc prendre $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ pour nouvelle variable; et, par conséquent, en supposant ce changement de variable effectué, supposer $\varphi_2 = u \varphi_1$. Si l'on prend alors

$$a_1 = u \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad a_2 = u a_1 - \int a_1 du, \quad a_3 = u, \quad u'_0 = \frac{a'_1}{a_1} + u_0 \varphi_1,$$

$\mathcal{F}_1$ sera réduit à la forme

$$(82) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_3 + u_0 (L_1 + u L_2), \quad X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

En effectuant dans cette transformation l'inversion (80), accompagnée du changement de u en $-v$ et de u_0 en v_0 , on obtiendra la forme à laquelle on peut réduire $\mathcal{F}_2$, à savoir

$$(83) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M_3 + v_0 (M_1 - v M_2), \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial v_0}.$$

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} + L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + M_3, \quad L_1 + u L_2, \quad M_1 - v M_2; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0};$$

et une de ses intégrales complètes sera fournie par trois invariants du sous-faisceau complet $\left\{ L_1 + u L_2, M_1 - v M_2, \frac{\partial f}{\partial u_0}, \frac{\partial f}{\partial v_0} \right\}$, soit

$$(84) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{w_2}{w_1} - u \log w_3 - v \log \frac{w_3}{w_1}.$$

En portant ces variables dans X_1 et X_2 , on obtient, pour

$$p = X_1 z, \quad q = X_2 z, \quad s = X_2 p = X_1 q,$$

les expressions

$$(85) \quad \begin{cases} p = -\log w_3 - (u + v) \frac{1}{w_0}, & q = -\log \frac{w_3}{w_1} - (u + v) \frac{w_1}{w_3}, \\ s = -\frac{1}{w_3} - \frac{w_1}{w_3} + (u + v) \frac{w_1}{w_3^2}; \end{cases}$$

et il ne reste qu'à éliminer w_3 et $\frac{w_3}{w_1}$ entre ces équations pour avoir l'équation E cherchée. On simplifie en posant

$$(86) \quad \lambda = (u + v) \frac{1}{w_3}, \quad \mu = (u + v) \frac{w_1}{w_3},$$

ce qui donne

$$(87) \quad p + \log(u + v) = \log \lambda - \lambda, \quad q + \log(u + v) = \log \mu - \mu,$$

$$(88) \quad s + \frac{1}{u + v} = \frac{1}{u + v} (\lambda - 1)(\mu - 1).$$

ceci conduit à remplacer z par

$$(89) \quad z' = z + (u + v) \log(u + v),$$

ce qui ramènera (88) à la forme

$$(C_{II}) \quad s(x + y) = \theta(p)\theta(q),$$

la fonction $\theta(w)$ étant définie par l'équation

$$(90) \quad \log(1 + \theta) - \theta = w.$$

Le changement de variable

$$(91) \quad z' = i \frac{\pi}{2} (x + y) - z.$$

transforme cette équation en l'équation (V) de Goursat

$$(V) \quad s(x + y) + \varphi(p) \varphi(q) = 0$$

dans laquelle $\varphi(w)$ est définie par l'équation

$$(92) \quad \log(\varphi - 1) + \varphi = w.$$

58. Passons à l'intégration de C_{II}^3 . Le dérivé second de $\mathcal{F}$,

$$\Omega = \frac{\partial f}{\partial u} + L_3, \quad \Omega_1 = L_1 + u L_2, \quad \Omega_2 = L_2 + L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

a pour transformation distinguée Ω , qui admet pour invariants $w_1, w_2, w_3 - u$. Nous prendrons, pour réduire $\mathcal{F}$, à sa forme canonique, deux variables conjuguées α et α_0 qui soient des invariants communs à Ω et Ω_2 , soit

$$(93) \quad \alpha = w_1, \quad \alpha_0 = w_3 - u - \frac{w_2}{w_1}.$$

Comme on a $X_1 = \Omega + u_0 \Omega_1$, il vient ensuite

$$X_1 \alpha = u_0 \Omega_1 \alpha = u_0 \alpha, \quad X_1 \alpha_0 = u_0 \Omega_1 \alpha_0 = u_0 (w_3 - u), \quad \alpha_1 = \frac{X_1 \alpha_0}{X_1 \alpha} = \frac{w_3 - u}{\alpha},$$

$$X_1 \alpha_2 = u_0 \Omega_1 \alpha_2 = u_0 \frac{u}{\alpha}, \quad \alpha_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = \frac{u}{\alpha^2},$$

donc

$$(94) \quad \alpha_1 = \frac{w_3 - u}{\alpha}, \quad \alpha_2 = \frac{u}{\alpha^2}.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}$, est ainsi, φ étant une fonction arbitraire de α ,

$$(95) \quad u = \alpha^2 \varphi'', \quad w_1 = \alpha, \quad w_2 = \alpha(\alpha \varphi' - \varphi), \quad w_3 = \alpha(\alpha \varphi'' + \varphi').$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ en résultera par l'inversion (80), accompagnée du changement de u en $-v$; en remplaçant α par β et $\varphi(\alpha)$ par $-\psi(\beta)$, ce sera donc

$$(96) \quad v = \beta^2 \psi'', \quad w_1 = \frac{1}{\beta}, \quad w_2 = \frac{\beta \psi' - \psi}{\beta}, \quad w_3 = \beta \psi'' + \psi'.$$

Les formules (73), où les w_i remplacent les c_i , et où les a_i et b_i sont remplacés par les expressions des w_i données, respectivement, par (95) et (96), donnent alors l'intégrale générale de $\mathcal{F}$

$$(97) \quad \begin{cases} u = \alpha^2 \varphi'', & v = \beta^2 \psi'', & w_1 = \frac{\alpha}{\beta}, & w_2 = \frac{\alpha}{\beta} (\alpha \varphi' - \varphi + \beta \psi' - \psi), \\ & & & w_3 = \alpha (\alpha \varphi'' + \varphi' + \beta \psi'' + \psi'); \end{cases}$$

et les formules (84) fournissent l'intégrale générale de C_{II}^3

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha^2 \varphi'', \quad y = \beta^2 \psi'', \\ z = \alpha \varphi' - \varphi + \beta \psi' - \psi - x \log(\alpha H) - y \log(\beta H) + (x + y) \log(x + y) \\ \text{où } H = \alpha \varphi'' + \varphi' + \beta \psi'' + \psi'. \end{array} \right.$$

59. CAS $m = 2$. — Ce cas ne présente rien d'exceptionnel, mais nous devons le signaler parce qu'il conduit à l'équation II de Goursat, à savoir

$$(II) \quad sz = \sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + q^2}.$$

L'équation (20) devient, en effet, dans ce cas

$$\alpha^2 - \theta^2 = 1, \quad \theta = \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

de sorte que C_{II}^4 est alors

$$(99) \quad sz + \sqrt{p^2 - 1} \sqrt{q^2 - 1} = 0,$$

d'où on passe à l'équation (II) par le changement de variables

$$(100) \quad x' = ix, \quad y' = iy, \quad z' = -z.$$

60. — Comme représentant de la structure III, nous prendrons le groupe

$$(1) \quad x' = c_1 x + c_2 y + c_3, \quad y' = y + \log c_1,$$

qui donne les équations de structure

$$(2) \quad c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2, \quad c_3 = a_1 b_3 + a_2 \log b_1 + a_3,$$

et les deux groupes paramétriques

$$(3) \quad (\mathcal{F}), \quad w'_1 = a_1 w_1, \quad w'_2 = a_1 w_2 + a_2, \quad w'_3 = a_1 w_3 + a_2 \log w_1 + a_3,$$

$$(4) \quad (\mathcal{M}), \quad w'_1 = b_1 w_1, \quad w'_2 = w_2 + b_2 w_1, \quad w'_3 = w_3 + (\log b_1) w_2 + b_3 w_1.$$

Les transformations infinitésimales de base de ceux-ci seront

$$(5) \quad L_1 = w_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2} + \log w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \quad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

$$(6) \quad M_1 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_3}, \quad M_2 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad M_3 = w_1 \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

avec les formules de structure

$$(7) \quad (L_1, L_2) = L_3 - L_2, \quad (L_1, L_3) = -L_3, \quad (L_2, L_3) = 0,$$

$$(8) \quad (M_1, M_2) = M_2 - M_3, \quad (M_1, M_3) = M_3, \quad (M_2, M_3) = 0.$$

Si l'on effectue dans les L_i la transformation (3), on obtient

$$(9) \quad (L_1) = L'_1 - a_2 L'_2 + (a_2 - a_3) L'_3, \quad (L_2) = a_1 L'_2, \quad (L_3) = a_1 L'_3.$$

On en conclut, comme au n° 44, que l'on pourra prendre

$$(10) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + m_2(u) L_2 + m_3(u) L_3 + u_0 L_1.$$

Par ailleurs, on passe de $\mathcal{L}$ à $\mathcal{M}$, et inversement, par l'inversion

$$(11) \quad w'_1 = \frac{1}{w_1}, \quad w'_2 = -\frac{w_2}{w_1}, \quad w'_3 = \frac{w_2 \log w_1 - w_3}{w_1} :$$

elle échange L_1 et $-M_1$, L_2 et $-M_2$, L_3 et $-M_3$. On pourra donc prendre aussi

$$(12) \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + n_2(v) M_2 + n_3(v) M_3 + v_0 M_1.$$

Le faisceau $\mathcal{F}$ étant ainsi défini, cherchons l'équation E associée. Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ contient le sous-faisceau complet $\left\{ L_1, M_1; \frac{\partial f}{\partial u_0}, \frac{\partial f}{\partial v_0} \right\}$, où figurent les transformations distinguées de $\mathcal{F}'$, à savoir $\frac{\partial f}{\partial u_0}$ et $\frac{\partial f}{\partial v_0}$. On a donc, comme intégrale complète de $\mathcal{F}'$, le système fondamental d'invariants de ce sous-faisceau

$$(13) \quad x = u, \quad v = v, \quad z = \frac{w_3}{w_2} + \log \frac{w_2}{w_1}.$$

Le changement de variables défini par ces équations (13), effectué dans X_1 et X_2 , donne d'abord

$$p = \frac{1}{w_2} [m_2(1 - z + \log w_2) + m_3], \quad q = \frac{v_1}{v_2} \left[n_2 \left(1 - z + \log \frac{w_2}{w_1} \right) + n_3 \right];$$

et ces formules peuvent s'écrire simplement

$$(14) \quad pe^z = m_0 \alpha (1 - \log \alpha), \quad qe^z = n_0 \beta (1 - \log \beta),$$

si l'on pose

$$(15) \quad \lambda = \frac{1}{w_2} e^{z - \frac{m_3}{m_2}}, \quad \mu = \frac{w_1}{w_2} e^{z - \frac{n_1}{n_2}}, \quad m_0 = m_2 e^{\frac{m_3}{m_2}}, \quad n_0 =$$

ce qui est licite parce que ni m_2 , ni n_2 n'est nul ⁽¹⁾.

Ceci conduit à prendre pour variables, au lieu des v ,

$$(16) \quad x = \int m_0 du, \quad y = \int n_0 dv, \quad z = \frac{w_2}{w_1} e^{\frac{w_3}{w_2}},$$

de sorte qu'on aura

$$(17) \quad p = \lambda(1 - \log \lambda), \quad q = \mu(1 - \log \mu), \quad \lambda = \frac{z}{w_2} e^{-\frac{m_3}{m_2}},$$

On tire alors de là

$$s = -\lambda \log \lambda \left(\frac{q}{z} - \frac{1}{w_2} \frac{1}{n_0} X_2 w_2 \right) = -\lambda \log \lambda \left(\frac{q}{z} - \frac{w_1}{n_0 w} \right)$$

ou, compte tenu de (17) et de la valeur de n_0 donnée par

$$(18) \quad sz = (\lambda \log \lambda) (\mu \log \mu).$$

L'équation E cherchée est donc

$$(C_{III}) \quad sz = \theta(p) \theta(q),$$

où la fonction $\theta(w)$ est définie par l'élimination de λ entre

$$(19) \quad w = \lambda(1 - \log \lambda), \quad \theta = \lambda \log \lambda,$$

c'est-à-dire par l'équation

$$(20) \quad \theta = (w + \theta) \log (w + \theta).$$

Ce type C_{III} correspond au cas singulier signalé par Goursat, équation IV, que nous avons rencontrée au n° 52,

$$(IV) \quad sz + \varphi(p) \varphi(q) = 0,$$

(1) Si l'on avait, par exemple, $m = 0$, $\mathcal{F}_1$ admettrait, outre v et v invariant, qui serait tout invariant du faisceau complet $\{L_1, L_3\}$. nous supposons que ni $\mathcal{F}_1$, ni $\mathcal{F}_2$ n'a plus de deux invariants indép

où la fonction $\varphi(w)$ peut être définie comme intégrale de l'équation

$$(21) \quad \frac{d\varphi}{dw} = \frac{w}{\varphi} + k,$$

k étant une constante arbitraire. Le cas singulier a lieu pour $k = \pm 2i$.

La fonction $\theta(w)$, définie par l'équation (20), est, en effet, une intégrale de l'équation

$$(22) \quad \frac{d\theta}{dw} + \frac{w}{\theta} + 2 = 0,$$

qui se ramène à (21) en posant $\theta = i\varphi$: ce qui change C_{III} en (IV).

61. — L'équation C_{III} provient, du reste de C_{II} par un passage à la limite. Si l'on fait tendre, en effet, m vers zéro dans les équations C_{II} et (19) du n° 52, on obtient la forme C_{III} , la fonction θ étant définie par l'élimination de λ entre les équations

$$(23) \quad w = \lambda(1 - \log \lambda), \quad \theta = -\lambda \log \lambda.$$

Or celles-ci ne diffèrent des équations (19) que par le changement de θ en $-\theta$, lequel n'altère pas la forme de C_{III} .

La structure III peut, du reste, être considérée comme un cas limite de la structure II, obtenu en faisant tendre m vers zéro. Si, en effet, on prend comme représentant de la structure II le groupe

$$(24) \quad \mathcal{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathcal{X}_2 = e^{m-1} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathcal{X}_3 = e^{-x} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

qui a les mêmes formules de structure

$$(25) \quad (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = (m-1)\mathcal{X}_2, \quad (\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3) = -\mathcal{X}_3, \quad (\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = 0,$$

que le groupe (4) du n° 52 ⁽¹⁾, on ne peut y faire $m=0$, car cela rendrait $\mathcal{X}_2$ identique à $\mathcal{X}_3$; mais on peut faire tendre m vers zéro en prenant comme transformations de base

$$\mathcal{X}_1, \quad \mathcal{X}_2' = \frac{\mathcal{X}_2 - \mathcal{X}_3}{m}, \quad \mathcal{X}_3.$$

⁽¹⁾ Le groupe (1) du n° 52 donne aussi, bien entendu, ces mêmes formules de structure (25). On les obtient en le définissant par ses transformations infinitésimales

$$\mathcal{X}_1 = x \frac{\partial f}{\partial x} + my \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathcal{X}_2 = y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathcal{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Cela donne, à la limite, le groupe

$$(26) \quad \mathfrak{X}_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathfrak{X}'_2 = x e^{-x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathfrak{X}_3 = e^{-x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

dont les formules de structure,

$$(27) \quad (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}'_2) = \mathfrak{X}_3 - \mathfrak{X}'_2, \quad (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_3) = -\mathfrak{X}_3, \quad (\mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3)$$

sont identiques à celles du groupe (5) du n° 60 ci-dessus, par conséquent, un représentant de la structure III.

62. — L'équation C_{III} ne dépendant pas du choix de m_i et n_i introduits dans les formules initiales (10) et (12), nous supposons maintenant

$$(28) \quad m_2 = 1, \quad m_3 = 0, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(29) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2 + u_0 L_1, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + M_2 + v_0 M_1;$$

et au lieu de (16) et (17),

$$(30) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{w_2}{w_1} e^{\frac{w_2}{w_1}},$$

$$(31) \quad p = \lambda(1 - \log \lambda), \quad q = \mu(1 - \log \mu), \quad \lambda = \frac{z}{w_2}, \quad \mu$$

On aura donc, pour $r = X_1 p$, $t = X_2 q$,

$$\begin{aligned} r &= -\lambda \log \lambda \left[\frac{p}{z} - \frac{1}{w_2} (1 + u_0 w_2) \right] = \theta(p) \left[\frac{\theta(p)}{z} + u \right] \\ t &= -\mu \log \mu \left[\frac{q}{z} - \frac{w_1}{w_2} + v_0 \right] = \theta(q) \left[\frac{\theta(q)}{z} - v \right] \end{aligned}$$

De là les invariants du second ordre de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$, et de C_{III} ,

$$(32) \quad u_0 = \frac{r}{\theta(p)} - \frac{\theta(p)}{z}, \quad -v_0 = \frac{t}{\theta(q)} - \frac{\theta(q)}{z}.$$

(¹) Le groupe (1) du même numéro donne aussi, naturellement de structure (27). Il suffit pour les obtenir, de le définir par ses infinitésimales

$$\mathfrak{X}_1 = x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \mathfrak{X}'_1 = y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \mathfrak{X}_3 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

On remarquera que ces formules sont celles qu'on obtiendrait en faisant $m=0$ dans les formules (26) du n° 32, au changement près de θ en $-\theta$.

63. Passant à l'intégration de C_{III} , nous réduirons d'abord $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique. Son second dérivé $\mathcal{F}_1''$ est

$$\Omega f = \frac{\partial f}{\partial u} + L_2, \quad L_1, \quad \Omega_1 f = L_2 - L_3, \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Ω en est une transformation distinguée, de sorte qu'on aura une intégrale complète en prenant deux invariants du sous-faisceau complet $\left\{ \Omega, \Omega_1, \frac{\partial f}{\partial u_0} \right\}$, soit

$$(33) \quad \alpha = w_1, \quad x_0 = u - w_3 + w_2(\log w_1 - 1).$$

On a alors, X_1 étant $\Omega + u_0 L_1$,

$$X_1 \alpha = u_0 \alpha, \quad X_1 x_0 = u_0 (w_2 - x_0 - u),$$

d'où

$$(34) \quad \alpha_1 = \frac{X_1 x_0}{X_1 \alpha} = \frac{w_2 - x_0 - u}{\alpha}.$$

Ensuite, on trouve

$$X_1 x_1 = u_0 \frac{w_2}{\alpha},$$

d'où

$$(35) \quad x_2 = \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = \frac{w_2}{\alpha^2}.$$

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi, φ étant une fonction arbitraire de α ,

$$(36) \quad w_1 = \alpha, \quad w_2 = x^2 \varphi'', \quad u = x^2 \varphi'' - x \varphi' + \varphi, \quad w_3 = x^2 \varphi'' \log \alpha - x \varphi'.$$

On passe de X_1 à X_2 par le changement de variables (11), accompagné du changement de u en $-v$ et de u_0 en v_0 . On déduit ainsi, de (36), l'intégrale de $\mathcal{F}_2$

$$(37) \quad w_1 = \frac{1}{\beta}, \quad w_2 = \beta \psi'', \quad v = \beta^2 \psi'' - \beta \psi' + \psi, \quad b_3 = -\psi'.$$

Pour la symétrie des valeurs de u et v , nous avons remplacé la fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ par $-\psi(\beta)$. Des formules (2) on déduit,

comme dans les calculs analogues, l'intégrale générale de

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad w_2 = \alpha(\alpha\varphi'' + \beta\psi''), \quad w_3 = \alpha^2\varphi'' \log \frac{\alpha}{\beta} \\ u = \alpha^2\varphi'' - \alpha\varphi' + \varphi, \quad v = \beta^2\psi'' - \beta\psi' + \psi; \end{array} \right.$$

et les équations (30) donnent alors l'intégrale générale de

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha^2\varphi'' - \alpha\varphi' + \varphi, \quad y = \beta^2\psi'' - \beta\psi' + \psi, \\ \log z = \frac{\alpha\varphi'' \log \alpha + \beta\psi'' \log \beta - \varphi' - \psi'}{\alpha\varphi'' + \beta\psi''} + \log(\alpha\varphi'' + \beta\psi'') \end{array} \right.$$

Remarquons pour terminer que, d'après ce que l'on a vu, on doit pouvoir obtenir l'intégrale générale de C_{III} en faisant zéro dans les formules (42), du n° 53, qui donnent l'intégrale générale de C_{II} . On retrouve ainsi exactement les équations que nous venons d'obtenir. Cela est évident pour les expressions de x et de y , et, pour z , cela résulte de l'application de la règle de l'hôpital à la formule

$$\log z = \frac{\log(\alpha^{m+1}\varphi'' + \beta^{m+1}\psi'') + (m-1) \log(\alpha\varphi'' + \beta\psi'') + m \log \alpha}{m}$$

qui équivaut à l'équation en z^m des formules (42) du n° 53.

IX. — Suite et fin des Types intégrables fournis par les Structures à trois paramètres. 3° Structure comportant une trajectoire distinguée et Structure abélienne.

64. Comme représentant de la structure IV, je prends

$$(40) \quad x' = x + c_3 y + c_1, \quad y' = y + c_2,$$

dont les formules de structure sont

$$(41) \quad c_1 = a_1 + b_1 + a_3 b_2, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3$$

Les groupes paramétriques seront donc

$$(42) \quad (L) \quad w'_1 = w_1 + a_3 w_2 + a_1, \quad w'_2 = w_2 + a_2, \quad w'_3 = w_3$$

$$(42 \text{ bis}) \quad L_1 = \frac{\partial f}{\partial w_1}, \quad L_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2}, \quad L_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3} + w_2 \frac{\partial f}{\partial w_1},$$

et

$$(43) \quad w'_1 = w_1 + b_2 w_3 + b_1, \quad w'_2 = w_2 + b_2, \quad w'_3 = w_3 + b_3,$$

$$(43 \text{ bis}) \quad M_1 = \frac{\partial f}{\partial w_1}, \quad M_2 = \frac{\partial f}{\partial w_2} + w_3 \frac{\partial f}{\partial w_1}, \quad M_3 = \frac{\partial f}{\partial w_3},$$

avec les formes de structure

$$(44) \quad (L_1, L_2) = 0, \quad (L_1, L_3) = 0, \quad (L_2, L_3) = L_1,$$

$$(45) \quad (M_1, M_2) = 0, \quad (M_1, M_3) = 0, \quad (M_2, M_3) = -M_1.$$

La transformation (42) change les L_i en

$$(46) \quad (L_1) = L'_1, \quad (L_2) = a_3 L'_1 + L'_2, \quad (L_3) = L'_3 - a_2 L'_1;$$

et, par suite, elle change

$$X_i = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \varphi_i(u) L_i \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial u} + [u_0(\varphi_1 + a_3 \varphi_2 - a_2 \varphi_3) - a_2 a'_3] L'_1 + (a'_2 + u_0 \varphi_2) L'_2 + (a'_3 + u_0 \varphi_3) L'_3.$$

On en conclut que l'on peut ramener X_i à la forme

$$(47) \quad X_i = \frac{\partial f}{\partial u} + m(u) L_i + u_0 (L_2 + u L_3),$$

en posant

$$(48) \quad \varphi_1 + a_3 \varphi_2 - a_2 \varphi_3 = 0, \quad a'_2 \varphi_3 - a'_3 \varphi_2 = 0, \quad u' = \frac{\varphi_3}{\varphi_2},$$

et modifiant u_0 en conséquence.

Par ailleurs, l'inversion

$$(49) \quad w'_1 = -w_1 + w_2 w_3, \quad w'_2 = -w_2, \quad w'_3 = -w_3$$

échange L_i et $-M_i$; de sorte que si on l'accompagne du changement de v en $-v$, elle change (47) en

$$(50) \quad X_i = \frac{\partial f}{\partial v} + n(v) M_i + v_0 (M_2 - v M_3),$$

u_0 étant remplacé par $-v_0$. On définira donc le faisceau $\mathcal{F}$ par les transformations (47) et (50), jointes à $X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}$, $X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0}$.

Le dérivé $\mathcal{F}'$ sera, abstraction faite de ces dernières,

$$\frac{\partial f}{\partial u} + m L_1, \quad \frac{\partial f}{\partial v} + n M_1, \quad L_2 + u L_3, \quad M_2 + v M_3;$$

et pour sa réduction à la forme canonique qui conduira à l'associée à $\mathcal{F}$, on pourra prendre l'intégrale complète f et un invariant de $\{L_2 + u L_3, M_2 + v M_3\}$, soit

$$(51) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = w_1 + \frac{w_3^2 - 2u w_2 w_3 - uv w_2^2}{2(u + v)}$$

Le changement de variables défini par ces formules de X_1 et X_2 ,

$$p = X_1 z = m - \frac{1}{2} \left(\frac{w_3 + v w_2}{u + v} \right)^2, \quad q = X_2 z = n - \frac{1}{2} \left(\frac{w_3 - u w_2}{u} \right)^2$$

ce qui conduit à introduire, à la place de z ,

$$(52) \quad z' = 2 \left(\int m du + n dv - z \right).$$

On aura alors

$$(53) \quad \sqrt{p'} = \frac{w_3 + v w_2}{u + v}, \quad \sqrt{q'} = \frac{w_3 - u w_2}{u + v};$$

et $s' = X_2 p' = X_1 q'$ sera donnée, par exemple, par

$$\frac{s'}{2\sqrt{p'}} = \frac{w_2}{u + v} - \frac{w_3 + v w_2}{(u + v)^2} = \frac{u w_2 - w_3}{(u + v)^2} = - \frac{\sqrt{q'}}{u + v}.$$

D'où l'équation E cherchée, (en laissant tomber les accents)

$$(C_{IV}) \quad s + \frac{2\sqrt{pq}}{x + y} = 0.$$

C'est, au changement près du signe devant le radical indifférent, le type (I) de Goursat,

$$(I) \quad s = \frac{2\sqrt{pq}}{x + y}.$$

Le résultat auquel nous sommes arrivés ne dépend pas de $m(u)$ et $n(v)$. En conséquence, nous supposons pour calcul (invariants et intégration)

$$(54) \quad m = 0, \quad n = 0,$$

c'est-à-dire

$$(55) \quad X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0(L_2 + uL_3), \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0(M_1 + vM_3).$$

D'après (53), on aura, pour $r' = X_1 p'$,

$$\frac{r'}{2\sqrt{p'}} = -\frac{\sqrt{p'}}{u+v} + u_0,$$

d'où les invariants de $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ (respectivement), et de E,

$$(56) \quad u_0 = \frac{r}{2\sqrt{p}} + \frac{\sqrt{p}}{x+y}, \quad v_0 = \frac{t}{2\sqrt{q}} + \frac{\sqrt{q}}{x+y}.$$

65. Passant à l'intégration de C_{IV} , nous allons réduire $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique. Le dérivé second $\mathcal{F}_1''$ est

$$(57) \quad \Omega = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \Omega_1 = L_2 + uL_3, \quad L_3; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0},$$

et Ω en est transformation distinguée. Nous prendrons, en conséquence, pour variables conjuguées deux invariants de $\left\{ \frac{\partial f}{\partial u}, L_3 \right\}$,

$$(58) \quad \alpha = w_2, \quad \alpha_0 = w_2 w_3 - w_4.$$

On aura

$$\begin{aligned} X_1 \alpha &= u_0, & X_1 \alpha_0 &= u_0 w_3, & \alpha_1 &= \frac{X_1 \alpha_0}{X_1 \alpha} = w_3, \\ X_1 \alpha_1 &= u_0 u, & \alpha_2 &= \frac{X_1 \alpha_1}{X_1 \alpha} = u; \end{aligned}$$

et l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ est ainsi

$$(59) \quad w_1 = \alpha \varphi' - \varphi, \quad w_2 = \alpha, \quad w_3 = \varphi, \quad u = \varphi'',$$

φ étant une fonction arbitraire de α . D'après ce qu'on a vu pour le passage de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$, on en déduit l'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ en y changeant u en $-v$, α en β , et $\varphi(\alpha)$ en $-\psi(\beta)$, les nouveaux w_i dérivant des fonctions (59) par l'inversion (49), ce qui donne

$$(60) \quad w_1 = -\psi, \quad w_2 = -\beta, \quad w_3 = \psi', \quad v = \psi''.$$

D'après la théorie générale, il ne reste plus, pour avoir l'intégrale générale de $\mathcal{F}$, qu'à prendre pour les w_i les seconds membres des formules (41), où les a_i seront les seconds membres des trois premières

équations (59) et les b_i ceux des trois premières équations (60), ce qui donne

$$(61) \quad \begin{cases} w_1 = -\varphi - \psi + (\alpha - \beta) \varphi', & w_2 = \alpha - \beta, & w_3 = \varphi' + \psi', \\ u = \varphi'', & v = \psi''. \end{cases}$$

D'après (51), (52) et (54), on en déduit l'intégrale générale de C_{IV} , qui est, après quelques réductions,

$$(62) \quad \begin{cases} x = \varphi'', & y = \psi'', \\ z = \frac{(\alpha - \beta)^2 \varphi'' \psi'' + 2(\alpha - \beta)(\psi' \varphi'' - \varphi' \psi'') - (\varphi' + \psi')^2}{\varphi'' + \psi''} + 2(\varphi + \psi). \end{cases}$$

66. Pour le type V de structure, le dernier à examiner, nous prenons comme représentant le groupe des translations,

$$(63) \quad x' = x + c_1, \quad y' = y + c_2, \quad z' = z + c_3,$$

dont les formules de structure sont

$$(64) \quad c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2, \quad c_3 = a_3 + b_3,$$

et qui est identique, par conséquent, à ses deux groupes paramétriques. On a ainsi

$$(65) \quad L_i = M_i = \frac{\partial f}{\partial w_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$(66) \quad (L_i, L_j) = 0, \quad (M_i, M_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

de sorte que le faisceau $\mathcal{F}$ à considérer est

$$(67) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial f}{\partial u} + u_0 \varphi_\alpha(u) \frac{\partial f}{\partial w_2}, & X_2 = \frac{\partial f}{\partial v} + v_0 \psi_\alpha(v) \frac{\partial f}{\partial w_2} \\ X_3 = \frac{\partial f}{\partial u_0}, & X_4 = \frac{\partial f}{\partial v_0} \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

On ne peut pas ici faire disparaître les fonctions arbitraires. On pourrait faire $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = u$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = v$, φ_3 et ψ_3 demeurant des fonctions arbitraires, mais il est préférable de garder, sans aucune particularisation, les φ_i et les ψ_i pour la symétrie des calculs. Nous supposons seulement, afin de pouvoir simplifier ceux-ci, que les wronskiens des φ_i et des ψ_i sont égaux à l'unité, c'est-à-dire

$$(68) \quad \text{Dét.}_{(i=1,2,3)} |\varphi_i \ \varphi'_i \ \varphi''_i| = 1, \quad \text{Dét.}_{(i=1,2,3)} |\psi_i \ \psi'_i \ \psi''_i| = 1;$$

ce que l'on peut toujours obtenir en remplaçant u_0 par $u'_0 = \lambda(u)u_0$, et v_0 par $v'_0 = \mu(v)v_0$, et choisissant convenablement les fonctions $\lambda(u)$ et $\mu(v)$.

Le dérivé $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \quad \psi_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_0} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Pour obtenir une équation E associée à $\mathcal{F}$, nous pouvons prendre pour intégrale complète les fonctions u et v et un invariant du sous-faisceau complet $\left\{ \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \psi_\alpha \frac{\partial f}{\partial v_\alpha} \right\}$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Nous poserons donc

$$(69) \quad x = u, \quad y = v, \quad z = w_\alpha \theta_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

avec

$$(70) \quad \theta_1 = \varphi_2 \psi_3 - \varphi_3 \psi_2, \quad \theta_2 = \varphi_3 \psi_1 - \varphi_1 \psi_3, \quad \theta_3 = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1.$$

On a alors, pour $p = X_1 z$, $q = X_2 z$, $s = X_3 p = X_1 q$,

$$(71) \quad p = w_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial u}, \quad q = w_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial v}, \quad s = w_\alpha \frac{\partial^2 \theta_\alpha}{\partial u \partial v} \quad (\alpha = 1, 2, 3);$$

d'où, par élimination des w_i , une équation linéaire de la forme de Laplace, que j'écris, avec les notations de Darboux (¹),

$$(72) \quad s + ap + bq + cz = 0,$$

et dont je vais expliciter les coefficients. Comme on a

$$(73) \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial u} = \varphi'_i \psi_j - \varphi_j \psi'_i, \quad \frac{\partial \theta_h}{\partial v} = \varphi_i \psi'_j - \varphi_j \psi_i, \quad \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial u \partial v} = \varphi'_i \psi'_j - \varphi'_j \psi'_i,$$

(h, i, j) provenant de (1, 2, 3) par permutation circulaire, elle se présente d'abord sous la forme

$$(74) \quad Ds - Ap + Bp - Cz = 0,$$

D, A, B, C étant les déterminants obtenus en rayant successivement la première, la deuxième, la troisième et la quatrième colonne de la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 \theta_h}{\partial u \partial v} & \frac{\partial \theta_h}{\partial u} & \frac{\partial \theta_h}{\partial v} & \theta_h \end{array} \right\| \quad (h = 1, 2, 3),$$

(¹) G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. 2, Chap. I.

que l'on peut écrire, avec une notation que les formules (70) et (73) rendent évidente,

$$(75) \quad \|(\varphi'\psi')_h \quad (\varphi'\psi)_h \quad (\varphi\psi')_h \quad (\varphi\psi)_h\| \quad (h=1, 2, 3).$$

66 bis. L'expression de ces déterminants se transforme ensuite comme il suit. Prenant, par exemple, le déterminant D, je le multiplie par le déterminant

$$(76) \quad (\varphi\varphi'\psi) = \text{Dét.} \begin{vmatrix} \varphi_h & \varphi'_h & \psi_h \end{vmatrix} \quad (h=1, 2, 3),$$

ce qui donne

$$D(\varphi\varphi'\psi) = -(\varphi\varphi'\psi)(\varphi\psi'\psi)(\varphi'\varphi\psi),$$

d'où

$$(77) \quad D = -\varphi_\alpha \Psi_\alpha \psi_\beta \Phi_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

avec

$$(78) \quad \begin{cases} \Phi_1(u) = \varphi_2\varphi'_3 - \varphi_3\varphi'_2, & \Phi_2(u) = \varphi_3\varphi'_1 - \varphi_1\varphi'_3, \\ & \Phi_3(u) = \varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1; \end{cases}$$

$$(79) \quad \begin{cases} \Psi_1(v) = \psi_2\psi'_3 - \psi_3\psi'_2, & \Psi_2(v) = \psi_3\psi'_1 - \psi_1\psi'_3, \\ & \Psi_3(v) = \psi_1\psi'_2 - \psi_2\psi'_1. \end{cases}$$

On trouve de même

$$(80) \quad \begin{cases} A = -\varphi_\alpha \Psi_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta, & B = \varphi'_\alpha \Psi_\alpha \psi_\beta \Phi_\beta, & C = \varphi'_\alpha \Psi_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta \\ & (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Si donc on pose

$$(81) \quad E = \varphi_\alpha \Psi_\alpha, \quad G = \psi_\alpha \Phi_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

on aura

$$(82) \quad a = -\frac{\partial \log G}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial \log E}{\partial x}, \quad c = ab.$$

L'équation (72) se présente donc sous ce que Darboux a appelé une forme réduite ⁽¹⁾, qui sera la forme type cherchée

$$(C_V) \quad s + ap + bq + cz = 0,$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 26.

avec les notations (82), (81), (78), (79), et pour laquelle les hypothèses (68) n'ont pas eu à intervenir.

Les invariants h et k , de Darboux, sont ⁽¹⁾

$$(83) \quad h = -\frac{\partial^2 \log G}{\partial x \partial y}, \quad k = -\frac{\partial^2 \log E}{\partial x \partial y}.$$

Calculons les invariants suivants

$$(84) \quad h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \partial y}, \quad k_1 = 2k - h - \frac{\partial^2 \log k}{\partial x \partial y}.$$

On a d'abord

$$(85) \quad h G^2 = \psi_\alpha \Phi'_\alpha \psi'_\beta \Phi_\beta - \psi'_\alpha \Phi'_\alpha \psi_\beta \Phi_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3).$$

Le second membre de cette formule est le produit des deux matrices

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \psi'_1 & \psi'_2 & \psi'_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Phi'_1 & \Phi'_2 & \Phi'_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{vmatrix}.$$

Les déterminants de la première sont Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 . Pour calculer ceux de la seconde, il suffit de considérer le wronskien

$$(86) \quad \text{Dét. } |\varphi_i \quad \varphi'_i \quad \varphi''_i| \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les Φ_i sont les mineurs des φ''_i , les Φ'_i sont les mineurs des φ'_i , pris en signes contraires; les déterminants cherchés sont donc égaux aux φ_i , d'après la théorie classique des déterminants adjoints, puisque le wronskien (86) est supposé égal à 1. On a donc, par (85),

$$h G^2 = \varphi_\alpha \Psi_\alpha = E,$$

c'est-à-dire

$$(87) \quad h = \frac{E}{G^2}, \quad k = \frac{G}{E^2}.$$

Par suite, d'après (84),

$$h_1 = 2 \frac{E}{G^2} - \frac{G}{E^2} - \frac{\partial^2 \log E}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 \log G}{\partial x \partial y},$$

et ce résultat est nul d'après (83) et (87).

(1) $h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \quad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$

On a donc affaire aux équations de Laplace pour lesquelles les invariants h_i et k_i sont tous deux nuls.

67. Nous aurons une nouvelle concordance de la théorie de Darboux, pour les équations de Laplace, et de notre présente théorie, pour la forme de l'intégrale générale de C_V , que nous allons chercher maintenant, toujours en supposant les conditions (68) réalisées.

Réduisons d'abord $\mathcal{F}_1$ à sa forme canonique. Son dérivé second $\mathcal{F}_1''$ est

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \quad \Omega = \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \quad \varphi'_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}; \quad \frac{\partial f}{\partial u_0}.$$

Ω est transformation distinguée, et nous prendrons comme variables conjuguées deux invariants de $\left\{ \varphi_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha}, \varphi'_\alpha \frac{\partial f}{\partial w_\alpha} \right\}$, soit

$$(88) \quad \alpha = u, \quad \alpha_0 = w_\gamma \Phi_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Il viendra

$$X_1 \alpha = 1, \quad X_1 \alpha_0 = w_\gamma \Phi'_\gamma = \alpha_1, \quad X_1 \alpha_1 = w_\gamma \Phi''_\gamma = \alpha_2 \quad (\gamma = 1, 2, 3);$$

et l'intégrale générale de $\mathcal{F}_1$ sera définie par

$$(89) \quad w_\gamma \Phi_\gamma = \varphi(u), \quad w_\gamma \Phi'_\gamma = \varphi'(u), \quad w_\gamma \Phi''_\gamma = \varphi''(u) \quad (\gamma = 1, 2, 3),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction arbitraire.

L'intégrale générale de $\mathcal{F}_2$ sera définie d'une manière analogue, de sorte que, d'après (64), l'intégrale générale de $\mathcal{F}$ s'obtiendra par l'élimination des a_i et b_i entre les équations

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{llll} w_i = a_i + b_i, & a_\gamma \Phi_\gamma = \varphi, & a_\gamma \Phi'_\gamma = \varphi', & a_\gamma \Phi''_\gamma = \varphi'', \\ b_\gamma \Psi_\gamma = \psi, & b_\gamma \Psi'_\gamma = \psi', & b_\gamma \Psi''_\gamma = \psi'' \end{array} \right. \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

φ étant une fonction arbitraire de u et ψ une fonction arbitraire de v .

Pour en déduire l'intégrale générale de C_V , il suffira de calculer la combinaison

$$(91) \quad z = 0_\gamma w_\gamma = a_\gamma 0_\gamma + b_\gamma 0_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Or on a, par exemple,

$$(92) \quad a_\gamma \theta_\gamma = \text{Dét.} \begin{vmatrix} a_i & \varphi_i & \psi_i \end{vmatrix} \quad (i=1, 2, 3);$$

et en multipliant les deux membres par le wronskien des Φ_i , on obtient au second membre un déterminant qui se réduit à

$$(93) \quad \varphi_\gamma \Phi_\gamma'' (\varphi' \psi_\gamma \Phi_\gamma - \varphi \psi_\gamma \Phi_\gamma') \quad (\gamma=1, 2, 3).$$

Or on a

$$\Phi_h'' = (\varphi_i \varphi_j''' - \varphi_j \varphi_i''') + (\varphi_i' \varphi_j'' - \varphi_j' \varphi_i''),$$

(h, i, j) dérivant de (1, 2, 3) par permutation circulaire, d'où il résulte que le wronskien des Φ_i se décompose en deux déterminants dont l'un est nul et l'autre est l'adjoint du wronskien des φ_i , changé de signe, et aussi que $\varphi_\gamma \Phi_\gamma''$ se réduit à ce dernier wronskien. Donc le wronskien des Φ_i est égal à -1 , et $\varphi_\gamma \Phi_\gamma''$ est égal à 1 ; et l'on a, par suite,

$$a_\gamma \theta_\gamma = \varphi_\gamma \psi_\gamma \Phi_\gamma' - \varphi' \psi_\gamma \Phi_\gamma.$$

En tenant compte des notations (81), on a, en définitive, pour l'intégrale générale de C_v cherchée,

$$(94) \quad z = \varphi \frac{\partial G}{\partial x} - \varphi' G + \psi \frac{\partial E}{\partial y} - \psi' E,$$

φ étant une fonction arbitraire de x , ψ une fonction arbitraire, et E et G étant les déterminants

$$(95) \quad E = \text{Dét.} \begin{vmatrix} \varphi_i & \psi_i & \psi_i' \end{vmatrix}, \quad G = \text{Dét.} \begin{vmatrix} \psi_i & \varphi_i & \varphi_i' \end{vmatrix} \quad (i=1, 2, 3)$$

(où les φ_i sont des fonctions de x et les ψ_i des fonctions de y), qui servent à définir les coefficients (82) de C_v .

68. Il nous reste, pour achever, à calculer les invariants du second ordre de $\mathcal{F}_1$ et de $\mathcal{F}_2$, qui sont aussi ceux des deux systèmes de caractéristiques de C_v . Reprenant les formules (69) et (71), avec les notations des formules (75) et (76), nous avons

$$(96) \quad z = (\alpha \varphi \psi), \quad p = (\alpha \varphi' \psi), \quad q = (\alpha \varphi \psi')$$

et nous aurons ensuite, pour $r = X_1 p$,

$$(97) \quad r = (w \varphi'' \psi) + u_0 (\varphi \varphi' \psi).$$

Le déterminant $(\varphi\varphi'\psi)$ est $\psi_\alpha\Phi_\alpha = G$. Pour calculer le déterminant $(\omega\varphi''\psi)$ en tirant les ω_i des formules (96), nous le multiplions par le déterminant

$$D = \text{Dét. } |(\varphi'\psi)_h \quad (\varphi\psi')_h \quad (\varphi\psi)_h| \quad (h = 1, 2, 3),$$

dont la valeur est, d'après (77) et (81),

$$(98) \quad D = -EG.$$

On a ainsi

$$(99) \quad G(\omega\varphi''\psi) = z(\varphi''\varphi'\psi) - p\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Reste à calculer le déterminant $(\varphi''\varphi'\psi) = \Delta$. Je lui substitue, à cet effet, son adjoint

$$\Delta^2 = \text{Dét. } |(\varphi'\psi)_h \quad (\psi\varphi'')_h \quad (\varphi''\varphi')_h|, \quad (h = 1, 2, 3);$$

et je multiplie celui-ci par le déterminant

$$(\varphi\psi\psi') = \varphi_\alpha\Psi_\alpha = E.$$

J'obtiens ainsi l'identité

$$(100) \quad \Delta = \frac{1}{E} \left(G \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} \right),$$

et j'ai, d'après (97) et (99),

$$(101) \quad u_0 = \frac{r}{G} - \frac{z}{G^2} \Delta + \frac{p}{G^2} \frac{\partial G}{\partial x}.$$

L'expression de v_0 en résultera, en échangeant E , G et x , y . On a ainsi, en définitive, pour les invariants cherchés,

$$(102) \quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{G^2} \frac{\partial(pG)}{\partial x} - \frac{z}{E} \frac{\partial\left(\frac{1}{G} \frac{\partial E}{\partial x}\right)}{\partial x}, \\ v_0 = \frac{1}{E^2} \frac{\partial(qE)}{\partial y} - \frac{z}{G} \frac{\partial\left(\frac{1}{E} \frac{\partial G}{\partial y}\right)}{\partial y}. \end{cases}$$

