JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FLORIN VASILESCO

Recherches théoriques sur les écoulements aérodynamiques à trois dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 21 (1942), p. 155-198.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1942_9_21__155_0>

Recherches théoriques sur les écoulements aérodynamiques à trois dimensions;

PAR FLORIN **VASILESCO.**

CHAPITRE I.

1. Considérons, dans l'espace à trois dimensions, un fluide en mouvement, satisfaisant aux conditions générales suivantes :

1° *Il existe une droite indéfinie $z'z$ telle que le mouvement soit plan dans tout demi-plan $z\mathrm{O}r$ passant par elle* — ce qui veut dire que la vitesse en tout point de l'espace situé dans le demi-plan passant par ce point, y soit contenue —, *et soit identiquement le même.*

2° *La vitesse à l'infini a la direction $z'z$ et est constante.* — Soit V'_0 sa valeur à l'infini. [On pourrait ajouter : du côté de z', et V''_0 celle du côté de z, si ces régions du fluide ne communiquent pas entre elles dans le domaine de l'infini. Mais, nous nous bornons, pour l'instant, à une seule vitesse à l'infini.]

Comme exemple d'un tel mouvement, on peut envisager le mouvement relatif, par rapport à un corps solide, d'un fluide indéfini, dans lequel se meut ce corps avec une vitesse constante $-V'_0$ dans une direction invariable, le corps étant de révolution autour d'un axe ayant la même direction.

Le fluide ne sera pas nécessairement indéfini dans tous les sens. Le mouvement pourra, par exemple, avoir lieu dans un tunnel cylindrique indéfini, le cylindre étant circulaire.

Un jet fluide à travers un orifice circulaire pratiqué dans une paroi plane orthogonale à la direction de la vitesse à l'infini, est un mouvement satisfaisant aux conditions ci-dessus. Ici les vitesses à l'infini, d'un côté et de l'autre de la paroi peuvent être différentes.

3° *Le mouvement est permanent, irrotationnel, soustrait à l'action de toute force, et le fluide incompressible.* — En conséquence, la vitesse et la pression sont liées par la loi de Bernoulli

$$p' = p'_0 + \frac{1}{2}(V_0'^2 - V'^2) \tag{1}$$

On ne restreint pas la généralité en prenant la densité égale à l'unité.

Le fluide pourra glisser le long de parois solides qui le limitent, ou d'obstacles qu'il rencontre; ainsi, dans le mouvement relatif ci-dessus envisagé, le corps solide fait figure d'obstacle.

Cependant le fluide pourra glisser également le long de surfaces fluides s'étendant à l'infini, de façon à éviter les paradoxes bien connus de d'Alembert et de M. Brillouin.

En ce cas, le fluide est au repos d'un côté de la surface fluide; la pression y est donc la même qu'à l'infini, soit p'_0, et comme dans un fluide la pression doit varier d'une façon continue, elle sera égale à p'_0 sur cette surface elle-même, que l'on appellera *surface de jet*, ou de *glissement*. En vertu de la loi de Bernoulli, la vitesse sera aussi constante sur une telle surface et égale à V'_0.

Par exemple, dans le mouvement relatif précédent, il se formera derrière l'obstacle une zone morte dans laquelle le fluide est au repos et qui s'étendra à l'infini. C'est ce que l'on appelle un *sillage*. Le mouvement est alors un *mouvement avec sillage*. Les surfaces de jet commencent, en ce cas, sur l'obstacle, à l'endroit ou le fluide en mouvement s'en détache et vont à l'infini.

Dans le cas d'un jet fluide à travers un orifice circulaire, au contraire, le fluide pénètre dans une masse fluide au repos et s'y creuse un chemin. Il y a donc un courant fluide en aval de l'orifice glissant sur la surface de jet qui l'entoure, au delà de laquelle le fluide est au repos.

On exprime cela en disant que :

4° *Le mouvement est discontinu.* — On peut compléter ces considérations en admettant l'existence éventuelle de *plages* dans le fluide. On appellera ainsi, comme dans les mouvements à deux dimensions, des portions bornées de fluide au repos, sur lesquelles le fluide en mouvement glisse encore le long de surfaces fluides. Celles-ci seront simplement des surfaces de glissement, et non plus de jet. La pression sera encore constante dans le fluide au repos, et sur une telle surface la vitesse sera encore *constante*. Cette vitesse n'aura plus rien à voir avec V'_0, la pression dans la plage n'étant plus p'_0. De telles plages peuvent être supposées aux endroits où les parois solides, ou les obstacles, présentent des coudes brusques.

En vertu de la condition 2°, il est manifeste que : *Les surfaces fluides sont des surfaces de révolution, autour de $z'z$, ainsi d'ailleurs que les parois solides et les obstacles.*

2. En rapportant l'espace à un système d'axes Ox, Oy, Oz, l'origine ne se trouvant sur $z'z$, il est bien connu qu'il y aura un potentiel des vitesses $\varphi(x, y, z)$, le mouvement étant irrotationnel. De même, le fait que le fluide est incompressible donne à l'*équation de continuité* la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = 0 \tag{2}$$

qui exprime que ce potentiel est *harmonique*.

Mais à cause de la condition 2°, il est bien évident que la fonction $\varphi(x, y, z)$ ne dépend, en réalité, que de z et de la distance du point x, y, z, à l'axe z, soit r. Nous sommes donc conduits à envisager le mouvement du fluide dans un demi-plan passant par $z'Oz$, *soit* zOr.

Connaître le mouvement dans l'espace ou dans ce demi-plan, c'est exactement la même chose.

Voyons donc à quelle équation satisfait le potentiel en tant que fonction des variables z et r, potentiel que nous allons appeler $\varphi(z, r)$.

Désignons, à cet effet, par α l'angle que fait le plan zOr avec le plan xOz. La projection de la vitesse sur l'axe Or est, comme on le sait, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$. On aura donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\alpha, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\alpha.$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\cos\alpha}{\partial x}$$

et comme $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{\partial\cos\alpha}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

et de même

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\sin^2\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right).$$

Le Laplacien de $\varphi(z, r)$ peut donc s'écrire

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{2}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right)$$

ou encore

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0. \tag{3}$$

Telle est l'équation à laquelle satisfait le potentiel des vitesses $\varphi(z, r)$. On remarquera que, puisque les projections de la vitesse située dans le plan zOr

(condition 1°) sont $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, sur les axes Oz et Or, $\varphi(z, r)$ est encore le potentiel des vitesses dans ce plan, *mais celui-ci n'est plus une fonction harmonique.*

3. Écrivons maintenant les conditions mathématiques qui caractérisent le mouvement considéré. Celles-ci vont s'obtenir des conditions 1°, 2°, 3°, 4°, auquel il satisfait.

Mais d'abord, faisons une *remarque.*

Il est bien évident que la constante V'_0, la valeur de la vitesse à l'infini, va intervenir dans les formules que l'on obtiendra par la suite. On pourra s'en débarrasser dès à présent en la réduisant à l'unité. C'est donc simplement là une raison de commodité qui n'a rien d'essentiel. A cet effet, il suffira de se rappeler que la vitesse s'obtient en faisant le rapport d'une longueur et d'un temps. Il suffira donc de changer l'unité de mesure des longueurs ou celle du temps, ou les deux, pour changer la grandeur numérique de la vitesse. *Changeons l'unité de mesure du temps de manière que la vitesse à l'infini soit égale à l'unité.* Il faut, pour cela, prendre une nouvelle unité, V'_0 fois plus petite. La grandeur de la vitesse V', en un point quelconque du mouvement devient

$$V = \frac{V'}{V'_0}.$$

Inutile de dire que sa direction ne change pas. Mais si l'on désigne par p la nouvelle grandeur de la pression, l'équation de Bernoulli devient

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2). \tag{4}$$

En divisant l'équation (1) par V'^2_0, on obtient

$$\frac{p'}{V'^2_0} = \frac{p'_0}{V'^2_0} + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Il en résulte que

$$p = \frac{p'}{V'^2_0}. \tag{5}$$

La valeur numérique de la pression s'obtient donc en divisant l'ancienne valeur par V'^2_0.

Revenons maintenant à *l'expression mathématique* du mouvement, en tenant compte des modifications que nous venons d'introduire.

a'. Vitesses à l'infini parallèles à $z'z$ et égales à l'unité.

b'. Vitesses sur $z'z$ dirigées de z' à z.

Pour des raisons de symétrie. Si l'axe rencontre un obstacle, la vitesse est nulle au point de rencontre, car le filet fluide se partage et glisse radialement sur l'obstacle en restant dans un plan méridien zOr. Si l'axe ne rencontre pas un des obstacles, celui-ci a la forme d'un anneau de révolution et il existe alors, sur sa surface, un parallèle où le fluide vient heurter pour se séparer ensuite radialement de chaque côté. Aux points de ce parallèle, la vitesse est nulle, et les deux lignes de courant (il peut y en avoir davantage s'il existe des plages) sur l'obstacle sont situées dans le même plan zOr. On peut donc dire :

c'. *Vitesses tangentes à chaque obstacle et dirigées radialement.*

d'. *Vitesses tangentes et constantes sur toute surface fluide,* cette constante étant l'unité si la surface est de jet, double condition qui va jouer un rôle décisif par la suite.

e'. *Vitesses tangentes à toute paroi solide,* baignée par le fluide en mouvement. S'il s'y trouvent des plages, on est ramené à la condition précédente.

f'. *Vitesse dérivant d'un potentiel* $\varphi(x, y, z)$ *lequel satisfait à l'équation*

$$\Delta\varphi = 0.$$

g'. *Vitesses inférieures à l'unité dans tout le fluide, soit*

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \leqq 1.$$

Nous avons fait remarquer plus haut qu'il revient au même de connaître le mouvement dans un demi-plan zOr. Transcrivons donc ces conditions pour un tel demi-plan. On en tirera sans retard un avantage supplémentaire.

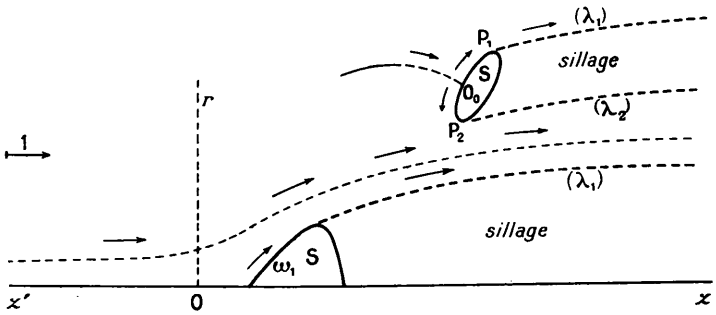

Fig. 1. — Configuration avec obstacles.

a. *Vitesses à l'infini parallèles à* $z'z$ *et égales à l'unité.*

b. *Vitesses sur* $z'z$ *dirigées de* z' *à* z.

c. *Vitesses tangentes à chaque obstacle* S (section méridienne de l'obstacle de révolution).

Je désignerai par O_0 le point de partage du filet fluide sur un obstacle, par ω affecté d'un indice, la portion de l'obstacle en contact avec le fluide en mouvement, par P affecté d'un indice, le point où la ligne de courant quitte l'obstacle, par (λ) affecté d'un indice, la ligne de jet, profile de la surface de jet (Λ), et enfin par (λ') la ligne de courant délimitant une plage, s'il y en a.

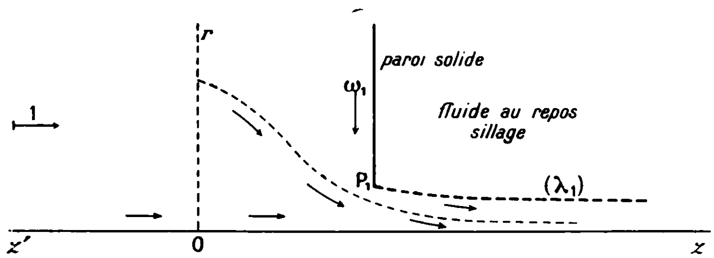

Fig. 2. — Configuration d'un jet à travers un orifice circulaire.

d. Vitesses tangentes à et égales à l'unité sur toute ligne de jet (λ), *constante simplement sur toute ligne* (λ') (condition double).

e. Vitesses tangentes à toute paroi solide (méridienne de la paroi de l'espace).

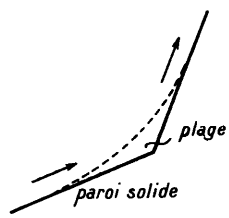

Fig. 3. — Exemple de plage.

f. Vitesses dérivant d'un potentiel $\varphi(z, r)$, *lequel satisfait à l'équation*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

dans tout le fluide en mouvement. On a donc sur (λ)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 = 1. \tag{6}$$

g. Vitesses inférieures à l'unité partout, soit

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 \leqq 1. \tag{7}$$

Telles sont les *conditions mathématiques du mouvement dans le plan* zOr.

Ces conditions nous sont cependant familières. En effet, si l'on remplace l'équation (3) par la suivante

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0, \tag{3'}$$

elles sont celles *qui expriment le mouvement à deux dimensions* présentant comme obstacles les cylindres indéfinis de sections planes rectangulaires S, comme parois solides les murs indéfinis de sections s, avec, en plus, un autre mur de section $z'z$. Ces murs sont, comme les cylindres, perpendiculaires au plan zOr. On peut d'ailleurs supprimer ce dernier mur et considérer les obstacles S et les parois s symétriques par rapport à l'axe $z'z$. Cela revient à considérer les obstacles et les parois situés dans un plan méridien tout entier, et non plus dans un demi-plan. Nous retrouvons ainsi *un mouvement à deux dimensions symétrique* par rapport à l'axe $z'z$, parallèle à la vitesse à l'infini.

Les considérations que nous allons développer vont *s'appliquer indifféremment aux mouvements à trois dimensions considérés, et aux mouvements à deux dimensions symétriques.*

Dans la suite, on entendra par le mot *mouvement*, chacun de ces deux mouvements dans le plan zOr, à moins de mention expresse.

4. Trouver le mouvement c'est trouver le potentiel φ. Cette fonction satisfait dans le domaine D occupé par le fluide en mouvement à une équation donnée, (3) ou (3′), mais *les conditions aux limites sont assez inusitées.* En effet, d'une part les lignes (λ) et (λ') qui achèvent de délimiter le domaine D, nous sont inconnues; d'autre part, les conditions données sur la frontière de D tout entière expriment que les dérivées premières de φ sont liées par la relation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \operatorname{tang} \theta,$$

θ étant l'angle que fait le contour avec Oz. La deuxième condition de d, exprimée par la relation (6), pour les lignes (λ), ou par une relation analogue dans laquelle l'unité est remplacée par d'autres constantes pour les lignes (λ'), devra suppléer à la connaissance de ces lignes.

M. Villat a bien voulu attirer mon attention sur l'importance de la condition (7) au point de vue de la validité du mouvement. On se rappelle, en effet, que dans bien des solutions données du problème à deux dimensions, la vitesse devient infinie en certains points, ce qui est inacceptable physiquement.

J'ai pensé alors qu'il serait opportun d'entamer par là l'étude du problème. La forme circulaire du premier membre de la condition (7) conduit à poser

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= V \cos \theta, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= V \sin \theta, \end{aligned} \right.$$

où V se trouve être la grandeur de la vitesse dans le fluide, et θ l'angle qu'elle fait avec Oz. Évidemment V et θ sont des fonctions de z et r. A cause de l'équation (3) ou (3′) on est conduit à différentier, ce qui donne

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \dfrac{\partial V}{\partial z}\cos\theta - V\sin\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \dfrac{\partial V}{\partial r}\sin\theta + V\cos\theta\,\dfrac{\partial\theta}{\partial r}. \end{cases}$$

En portant ces expressions dans (3) on trouve

$$(10)\qquad \frac{\partial V}{\partial z}\cos\theta - V\sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta + V\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial r} = -\frac{1}{r}V\sin\theta.$$

Pour l'équation (3′) le terme en $\frac{1}{r}$ ne figure pas.

Cependant, on doit avoir aussi la condition de compatibilité

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial r} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z}.$$

Par une différentiation nouvelle des équations (8), la première par rapport à r et la seconde par rapport à z, cette condition devient

$$(11)\qquad \frac{\partial V}{\partial r}\cos\theta - V\sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial z}\sin\theta - V\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

Les équations (10) et (11) sont équivalentes à deux autres plus simples.

Multiplions, en effet, la première par $\sin\theta$, la seconde par $\cos\theta$ et ajoutons; puis ajoutons encore, après multiplication de la première par $\cos\theta$ et de la seconde par $-\sin\theta$. En divisant par V, on obtient le système

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\sin^2\theta,$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\sin 2\theta}{2},$$

que l'on peut écrire encore

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \log V}{\partial r} = \dfrac{\partial\theta}{\partial z} - \dfrac{1}{r}\sin^2\theta, \\[2mm] \dfrac{\partial \log V}{\partial z} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\sin 2\theta}{2}. \end{cases}$$

Pour l'équation (3′), le système est

$$(12')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \log V}{\partial r} = \dfrac{\partial\theta}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial \log V}{\partial z} = -\dfrac{\partial\theta}{\partial r}, \end{cases}$$

puisque les termes en $\frac{1}{r}$ manquent.

La forme même de ces systèmes suggère l'élimination de V ; celle-ci se fait en dérivant la première équation par rapport à z, la seconde par rapport à r et en soustrayant ensuite, ce qui donne

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial \theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

ou encore

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\sin 2\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\cos 2\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\sin 2\theta}{2}=0,$$

équation du type elliptique à laquelle satisfait θ.

Dans le cas (3′), on a évidemment

$$(13')\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)$$

et

$$(14')\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}=0.$$

θ *est alors une fonction harmonique.*

Mais θ est connu sur le contour du domaine D : *c'est l'angle fait par celui-ci avec* Oz, la vitesse étant tangente au contour.

Nous avons donc le résultat suivant :

Si l'on connaissait les lignes (λ) *et* (λ'), θ *serait obtenu comme solution du problème de Dirichlet pour l'équation* (14) *ou* (14′).

Il est vrai qu'il faudrait connaître encore les points O_0. Quoique ceux-ci peuvent être connus dans certains cas, par exemple lorsqu'il n'y a qu'un seul obstacle rencontrant l'axe $z'z$, ou dans le cas de la figure 2, etc., il n'est pas nécessaire de nous arrêter plus longtemps sur leur détermination, celle-ci se faisant pour ainsi dire d'elle-même plus tard.

Voyons plutôt comment on peut obtenir V, θ étant supposé connu.

Il est bien évident que la formule (12) donne immédiatement

$$(15)\qquad \log\frac{V(M)}{V(M_0)}=\int_{M_0}^{M}-\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\right)dz+\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)dr$$

puisque, par (13), l'intégrale ne dépend pas du chemin d'intégration. En faisant tendre le point M_0 vers l'infini, ou vers une ligne (λ), V(M_0) devrait tendre vers l'unité, et la formule précédente devrait donner, en vertu de (7),

$$(16)\qquad \begin{aligned}&\int_{\infty}^{M}-\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\right)dz+\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)dr\\ &=\int_{M_\lambda}^{M}-\left(\frac{\partial \theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\right)dz+\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}-\frac{1}{r}\sin^2\theta\right)dr<0\end{aligned}$$

ainsi que

$$\int_{M_\lambda}^{\infty} -\left(\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\sin^2\theta}{2}\right)dz + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\sin^2\theta\right)dr = 0. \tag{17}$$

Les formules analogues pour le cas harmonique s'obtiennent en supprimant les termes en $\frac{1}{r}$.

V étant ainsi obtenu, on connaîtrait finalement $\varphi(z, r)$ par les formules (8). Nous pouvons donc dire que :

L'étude du mouvement considéré se ramène à la recherche des lignes (λ) *et* (λ').

C'est de cette recherche que nous allons nous occuper maintenant.

5. A cet effet, nous allons utiliser la double condition d.

Si $r = r(z)$ est l'équation d'une ligne (λ) ou (λ'), la première partie de cette condition donne

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{dr}{dz} = r'. \tag{18}$$

Pour nous servir de la seconde partie de la condition, qui a trait à la grandeur de la vitesse sur une telle ligne, considérons la formule (15). Celle-ci permet de trouver les courbes de vitesse constante, ou isobares, car la pression y est constante aussi. Leur équation s'obtient, évidemment, en égalant à zéro l'élément différentiel de l'intégrale qui figure dans cette formule ; elle s'écrit donc

$$\frac{dz}{\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\sin^2\theta} = \frac{dr}{\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\sin 2\theta}{2}}. \tag{19}$$

Par suppression des termes en $\frac{1}{r}$ on trouve le résultat correspondant à l'équation (3').

Cette équation est vérifiée, en particulier, sur toute ligne (λ) ou (λ'), en même temps que la relation (18).

Si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$r'' = \frac{d^2 r}{dz^2},$$

on a

$$\frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{r'}{1 + r'^2},$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - r'^2}{1 + r'^2},$$

$$\sin^2\theta = \frac{r'^2}{1 + r'^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (19), on trouve

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} - r'\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{r'}{r}. \tag{21}$$

D'autre part, la relation (18) donne

$$\theta = \text{arc tang}\, r',$$

d'où, après différentiation sur (λ) ou (λ'),

$$r'\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{r''}{1+r'^2}. \tag{22}$$

On en tire donc finalement, pour le cas des trois dimensions,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{1}{1+r'^2}\left[\frac{r'^2}{r} + \frac{r''}{1+r'^2}\right], \\ \frac{\partial\theta}{\partial r} &= \frac{1}{1+r'^2}\left[-\frac{r'}{r} + \frac{r'r''}{1+r'^2}\right], \end{aligned}\right. \tag{23}$$

et pour celui à deux dimensions

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{1}{1+r'^2}\,\frac{r''}{1+r'^2}, \\ \frac{\partial\theta}{\partial r} &= \frac{1}{1+r'^2}\,\frac{r'r''}{1+r'^2}, \end{aligned}\right. \tag{23'}$$

relations qui ont lieu sur toute ligne (λ) *ou* (λ').

Les formules précédentes donnent les dérivées du premier ordre de θ suivant Oz et Or; on peut en déduire la dérivée suivant tout autre direction. Si l'on désigne par t et n les directions tangentielle et normale à la ligne considérée, on a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial z} &= \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\theta - \frac{d\theta}{dn}\sin\theta, \\ \frac{\partial\theta}{\partial r} &= \frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\theta + \frac{d\theta}{dn}\cos\theta, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t} &= \frac{\partial\theta}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial\theta}{\partial r}\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{dn} &= -\frac{\partial\theta}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial\theta}{\partial r}\cos\theta, \end{aligned}$$

et en y portant les valeurs de $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ et $\frac{\partial\theta}{\partial r}$ ainsi que celles de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ tirées de (18), *on trouve pour le cas des trois dimensions*

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial t} &= \frac{r''}{1+r'^2}\cos\theta, \\ \frac{d\theta}{dn} &= -\frac{r'}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+r'^2}}, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

et pour celui des deux dimensions

$$(25') \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial l} = \dfrac{r''}{1+r'^2}\cos\theta, \\ \dfrac{d\theta}{dn} = 0. \end{cases}$$

La première équation de ces systèmes n'est autre que l'équation (18) : elle exprime que la vitesse est tangente à la ligne considérée. C'est donc la seconde équation, celle qui donne la dérivée normale, qui traduit le fait que la vitesse est constante sur la ligne.

Remarquons que les systèmes (23) ou (23′) et (25) ou (25′) sont équivalents, car on passe de l'un à l'autre par l'intermédiaire des formules (24). On peut donc se servir indifféremment de l'un ou l'autre de ces systèmes pour la recherche des lignes (λ) et (λ').

Remarquons aussi que nous ne nous sommes pas servis du fait que la vitesse V est inférieure à l'unité (cond. g), encore que ce fût dans cette intention que nous y avons pris le point de départ. Servons-nous-en maintenant.

Soit M un point d'une ligne (λ). On a, en ce point,

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{r'r''}{(1+r'^2)^2}.$$

Si M_0 est un point de D situé sur une même parallèle à Oz que M, on a par (15)

$$\log\frac{V(M)}{V(M_0)} = -\int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\sin 2\theta}{2}\right)dz$$

et comme, par hypothèse,

$$V(M) = 1, \qquad V(M_0) < 1,$$

le logarithme est positif, donc

$$\int_{M_0}^{M}\left(\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\sin 2\theta}{2}\right)dz < 0$$

quel que soit M_0.

Si, par conséquent, $r'r'' \neq 0$, la quantité qui figure sous le signe intégrale n'est pas nulle et garde dans le voisinage de M un signe constant. En prenant, par suite, M_0 suffisamment voisin de M, l'intégrale a le même signe, et l'on doit avoir

$$r'r'' < 0,$$

inégalité qui exprime que *toute ligne* (λ) *est convexe vers le courant.*

Ce résultat est dû à M. Brillouin pour le cas des deux dimensions.

Nous obtenons, en définitive, le théorème suivant :

Les lignes (λ) *et* (λ') *sont telles que l'on a sur elles les relations* (23) *ou, indifféremment* (25), *ces relations accentuées étant celles pour le cas des deux dimensions.*

Toute ligne (λ) *est convexe vers le courant, et horizontale à l'infini.*
D'ailleurs θ *vérifie les relations* (16) *et* (17).

Nous allons maintenant établir le théorème réciproque.

Étant données des lignes (λ), *convexe vers le courant et horizontale à l'infini, et* (λ'), *telles que :*

1° *Il existe une solution* $\theta(z, r)$ *de l'équation* (14) *ou* (14') *égale sur le contour de* D *à l'angle que celui-ci fait avec* Oz (ce qui implique l'existence des points O_0 sur chaque obstacle);

2° *pour les lignes* (λ) *et* (λ'), *la dérivée normale de* θ *soit donnée par la relation* (25) *ou* (25') [ou indifféremment les dérivées du premier ordre par (23) ou (23')];

3° *dans* D *les dérivées du premier ordre satisfassent aux relations* (16) *et* (17), *ou* (16') *et* (17').

Ces lignes correspondent à un mouvement défini par les conditions a, b, c, d, e, f, g.

En effet, d'après 1°, on a sur (λ) et (λ') la première relation (25) ou (25') qui, on l'a vu, n'est autre que (18) ou (18'). Du système (25) [(25')] on remonte par conséquent, par l'intermédiaire de (23) [(23')], à l'équation (19) [(19')].

Remarquons que les lignes (λ) et (λ') appartiennent d'après 1° et 2° aux systèmes des courbes intégrales de l'équation différentielle (19) [(19')]. On peut se demander si la condition 3° n'est pas une conséquence des deux autres; on voit, en effet, que dans le voisinage de (λ) la deuxième inégalité (16) a lieu.

Définissons, ensuite, une fonction $V(M)$ par la relation (15) [(15')], ce qui est possible d'après 1°. Le rapport $\frac{V(M)}{V(M_0)}$ est positif, car c'est une exponentielle. En vertu de (19) [(19')] ce rapport est constant sur toute ligne (λ) ou (λ'). Soit M' un point quelconque d'une ligne (λ); puisqu'elle est convexe vers le courant, on a, en ce point,

$$r' r'' < 0,$$

désignons par M un point voisin où l'on ait

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\sin 2\theta}{2} < 0.$$

On a alors sur cette ligne

$$\log\frac{V(M)}{V(M_0)} = \log\frac{V(M')}{V(M_0)} = -\int_{M_0}^{M'}\left(\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\sin 2\theta}{2}\right)dz = k > 0,$$

ou

$$\frac{V(M)}{V(M_0)} = e^{k} > 1,$$

ce qui est une conséquence, je le rappelle, de la convexité de la ligne (λ).

Prenons

$$V(M_0) = e^{-k},$$

on aura alors sur la ligne (λ) choisie

$$V(M) = V(M') = 1.$$

Il s'agira maintenant de montrer que $V(M)$, qui est définie d'une façon unique dans tout D, est aussi égale à l'unité sur les autres lignes (λ) et à l'infini, d'une part, et est inférieure à l'unité, de l'autre. A cet effet, il faut faire intervenir la condition 3°. D'après (17) [(17')], lorsque M s'éloigne vers l'infini, on a

$$\log \frac{V(M)}{V(M_0)} + \log \frac{V(M_0)}{V(M')} = \log \frac{V(M)}{V(M')} = \int_{M'}^{M_0} + \int_{M_0}^{K} = \int_{M'}^{M},$$

ce qui montre que $\log \frac{V(M)}{V(M_0)}$ tend vers zéro, donc que $V(M)$ tend vers $V(M') = 1$. Soit maintenant M'' un point sur une autre ligne (λ), et considérons un chemin allant de M en M', de là à un point M très éloigné et puis à M''. L'intégrale (15) [(15')] prise sur ce chemin donne $\log \frac{V(M'')}{V(M_0)}$. Mais lorsque M tend vers l'infini, les intégrales sur $M'M$ et MM'' tendent vers zéro; il ne reste donc plus que celles sur le chemin MM' d'ou $V(M'')$ est égale à $V(M')$, donc à l'unité.

Enfin, l'inégalité (16)[(16')] montre immédiatement que $V(M)$ est inférieure à l'unité dans D.

On déduit alors les relations (12) [(12')] et l'on remonte par (8) [(8')] à $\varphi(z, r)$ qui doit évidemment satisfaire à (3) [(3')].

La réciproque est démontrée.

Faisons observer qu'il y a un cas où la condition (17) [(17')] n'est pas nécessaire : c'est celui d'un seul obstacle rencontrant l'axe $z'z$, le domaine D occupant tout le demi-plan (sauf le sillage). En ce cas, il suffit d'atteindre les points dans le domaine de l'infini par le chemin suivant : $M_0M'(\lambda)M_1$ [situé sur (λ)] et de là à M par un arc de cercle de centre l'origine et de rayon R. L'intégrale sur cet arc est très petite, car on peut présumer que la fonction θ tend vers zéro comme $\frac{1}{R}$ et ses dérivées du premier ordre comme $\frac{1}{R^2}$, de la même manière que pour une fonction harmonique. On peut ensuite descendre vers l'axe $z'z$, dans le domaine de l'infini, sur une parallèle à Or de manière que l'intégrale se réduise à

$$\int \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \sin^2 \theta \right) dr,$$

qui est encore de l'ordre de $\frac{1}{R}$ et tend vers zéro.

6. *En résumé*, nous sommes parvenus à caractériser les lignes (λ), qui nous intéressent particulièrement. *Le problème se pose de les trouver effectivement.*

A cet effet, la *méthode directe* qui se présente à l'esprit est la suivante :

Chercher l'expression analytique de la dérivée normale dans le problème de Dirichlet pour l'équation (14) [(14')], dans le cas où les valeurs données sur le contour sont égales à l'angle que fait celui-ci avec Oz, mais où une portion du contour [les lignes (λ) et (λ')] est inconnue.

Cette expression doit contenir précisément les éléments des lignes inconnues (λ) et (λ'). En l'égalant à la valeur obtenue pour la dérivée normale (25) [(25')], on doit obtenir des équations dont ces lignes sont les inconnues.

Malheureusement, il ne semble guère possible, à l'heure actuelle, d'employer cette méthode, la recherche de la dérivée normale dans le problème de Dirichlet, surtout dans le cas d'un contour incomplètement connu, étant extrêmement difficile.

Il y a une autre *méthode indirecte* que l'on peut employer.

Elle consiste à utiliser non plus l'expression analytique de la dérivée normale, qui nous échappe, mais une *relation connue* qui fasse intervenir cette dérivée, et dans laquelle on remplace celle-ci par sa valeur (25) ou (25'). On obtient ainsi une équation à laquelle satisfait (λ), mais il n'est plus certain *a priori*, que toutes les solutions d'une telle équation soient des lignes (λ). N'importe, c'est déjà quelque chose.

On trouvera plus loin les résultats obtenus par l'emploi de cette méthode (Chapitre III).

Enfin, il y a une *autre méthode*, que nous allons exposer dans le chapitre qui suit.

CHAPITRE II.

Nous allons nous occuper ici plus spécialement du mouvement à *trois dimensions* considéré précédemment.

Envisageons, dans le plan zOr, un mouvement à *deux dimensions* ayant la même configuration que ce mouvement, c'est-à-dire, *satisfaisant aux conditions a jusqu'à f, sauf que l'on remplace dans d :* vitesses égales à l'unité par : *vitesses égales à $f(z, r, r', \ldots)$, r, r', ... se rapportant à (λ) ou (λ'), — et qu'à l'infini les vitesses ne sont plus nécessairement égales à l'unité.*

Autrement dit, on considère un mouvement à deux dimensions *plus général* que le mouvement classique, en ce que *la vitesse*, au lieu d'être *constante* sur les lignes (λ) et (λ'), *y est une fonction de cette ligne*, ou même, si l'on veut, une fonctionnelle de tout le contour de D

$$V_1 = f(z, r, r', \ldots). \tag{26}$$

Le mouvement étant à deux dimensions, le potentiel des vitesses $\varphi(z, r)$ satisfait à l'équation (3'), et *l'on doit remplacer dans f l'équation* (3) *par* (3').

Il est à peine utile de faire remarquer que l'on doit laisser tomber la condition g.

Il est plus important de dire tout de suite qu'il importe peu que ce mouvement ait une existence physique, ou non : *c'est son expression mathématique seule qui nous intéresse.* Il ne nous servira, en effet, que comme instrument de recherches pour le problème à trois dimensions.

Il est bien évident que l'étude faite au chapitre précédent, où l'on considère les formules accentuées, s'applique, sans aucun changement, aussi à ce mouvement, jusqu'aux formules (12′) et (15′), que nous allons reproduire ici,

$$(12'') \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial \theta}{\partial r}, \qquad \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial z};$$

$$(15'') \qquad \log\frac{V(M)}{V(M_0)} = \int_{M_0}^{M} -\frac{\partial \theta}{\partial r}dz + \frac{\partial \theta}{\partial z}dr.$$

On a encore la relation (18), mais à la place de l'équation (19′) ou (21′), on doit mettre

$$(21'') \qquad \frac{d}{dz}\log V_1 = \frac{V_1'}{V_1} = -\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}r'.$$

Comme la relation (22′) subsiste, *on a sur les lignes* (λ) *et* (λ′)

$$(23'') \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{1+r'^2}\left[r'\frac{V_1'}{V_1} + \frac{r''}{1+r'^2}\right], \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \frac{1}{1+r'^2}\left[-\frac{V_1'}{V_1} + \frac{r'r''}{1+r'^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Rappelons que la fonction θ est harmonique, que le domaine D est déterminé ainsi que les points O_0, et qu'elle est égale sur le contour de D à l'angle que celui-ci fait avec Oz.

Admettons qu'il existe une solution de l'équation (14) égale à θ sur ce contour; *appelons-là* θ_1, et désignons par $\varphi(z, r, r', \ldots)$ et $\Psi(z, r, r', \ldots)$ les différences

$$(27) \qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(z, r, r', \ldots) &= \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \Psi(z, r, r', \ldots) &= \frac{\partial \theta_1}{\partial r} - \frac{\partial \theta}{\partial r}, \end{aligned}\right.$$

sur les lignes (λ) ou (λ′).

En remplaçant dans ces formules $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial r}$ par leurs expressions précédentes, on trouve

$$(28) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} &= \varphi + \frac{1}{1+r'^2}\left[r'\frac{V_1'}{V_1} + \frac{r''}{1+r'^2}\right], \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial r} &= \Psi + \frac{1}{1+r'^2}\left[-\frac{V_1'}{V_1} + \frac{r'r''}{1+r'^2}\right], \end{aligned}\right.$$

et puisque θ et θ_1 satisfont aussi à la relation (18), on obtient en dérivant celle-ci

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}+r'\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{r''}{1+r'^2},$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial z}+r'\frac{\partial\theta_1}{\partial r}=\frac{r''}{1+r'^2}.$$

En soustrayant ces deux dernières relations et en tenant compte de (27), il vient

$$\varphi+r'\psi=0. \tag{29}$$

Choisissons maintenant la fonction $V_1=f(z, r, r', \ldots)$ de manière que l'on ait

$$\varphi+\frac{1}{1+r'^2}r'\frac{V_1'}{V_1}=\frac{1}{1+r'^2}\frac{r'^2}{r},$$

$$\Psi+\frac{1}{1+r'^2}\left(-\frac{V_1'}{V_1}\right)=\frac{1}{1+r'^2}\left(-\frac{r'}{r}\right),$$

ce qui est possible, car, en vertu de la relation ci-dessus, ces deux équations se réduisent à une seule. On en tire

$$\frac{V_1'}{V_1}=\frac{r'}{r}+(1+r'^2)\Psi$$

qui donne immédiatement

$$V_1=f(z, r, r', \ldots)=r\,e^{\int(1+r'^2)\Psi(z,r,r',\ldots)dz}. \tag{30}$$

Nous obtenons donc ainsi le résultat suivant :

Le mouvement à deux dimensions envisagé, dans lequel la vitesse sur les lignes (λ) *et* (λ') *est donnée par une relation de la forme précédente, la constante arbitraire pouvant varier d'une ligne à l'autre, est tel que sur les lignes* (λ) *et* (λ') *on a*

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial z}=\frac{1}{1+r'^2}\left[\frac{r'^2}{r}+\frac{r''}{1+r'^2}\right],$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial r}=\frac{1}{1+r'^2}\left[-\frac{r'}{r}+\frac{r'r''}{1+r'^2}\right],$$

qui ne sont autres que les relations (23).

En vertu du théorème réciproque du chapitre précédent, nous concluons donc que :

Les lignes (λ) *et* (λ') *du mouvement à deux dimensions envisagé sont aussi celles du mouvement à trois dimensions considéré, moyennant vérification des relations* (16) *et* (17).

Remarquons que pour la fonction θ du mouvement à deux dimensions envisagé ici, on ne peut plus écrire des relations analogues à (16) et (17), ne sachant plus comment se comporte la vitesse à l'infini. Si, par exemple, elle y était infinie, il n'y aurait plus d'inégalité g à vérifier pour elle dans le pan. La première inégalité (16) serait satisfaite, alors que la seconde ainsi que la relation (17) n'aurait manifestement plus lieu. D'ailleurs, en posant un problème à deux dimensions comme celui que nous avons envisagé ici, avec une vitesse qui n'est plus constante sur les lignes (λ) et (λ'), *nous ne sommes plus libres d'imposer à celle-ci son comportement à l'infini*, si nous voulons qu'il ait une solution. Ce comportement résultera, évidemment, de l'étude analytique du problème, *étude qui pourra être susceptible de méthodes analogues* à celles que l'on emploie pour les mouvements à deux dimensions avec sillage (*voir* H. Villat, *Mécanique des fluides*).

Cela posé, voici comment nous allons utiliser les résultats précédents.

Le mouvement à trois dimensions étant considéré, on a sur ses lignes (λ) et (λ') les relations (23). Une fonction harmonique sera alors définie dans D, problème de Dirichlet toujours possible; les relations (27) donneront ensuite φ et Ψ, d'où par (30), on doit obtenir V_1 sur ces lignes, à des facteurs constants près. Un mouvement à deux dimensions est ainsi défini, à ces constantes près.

Mais si le mouvement à trois dimensions a une solution, alors *le mouvement à deux dimensions en a nécessairement une*, ce qui signifie que l'étude de ce dernier permet de trouver les lignes (λ) et (λ').

Inversement, si le mouvement à deux dimensions *a une solution, celle-ci est solution du problème à trois dimensions*, pourvu que les lignes (λ) et (λ') ainsi obtenues, permettent d'affirmer l'existence d'une fonction θ_1 vérifiant les inégalités (16) et (17).

Il est essentiel de remarquer que *si le problème à deux dimensions admet une solution unique*, c'est-à-dire des lignes (λ) et (λ') uniquement déterminées, *le problème à trois dimensions ou bien admet une solution unique*, la même, *ou bien n'admet pas de solution*, si la fonction θ_1 n'existe pas, *ou bien admet une solution ne satisfaisant pas entièrement aux inégalités* (16) *et* (17), auquel cas les conditions mathématiques du problème (p. 158) serait trop restrictives.

Dans ce qui précède il est impliqué que l'on ne prendrait en considération que *des lignes* (λ), solutions du problème à deux dimensions, *convexes* vers le courant et horizontales à l'infini.

Le mouvement à deux dimensions considéré sera appelé *mouvement plan équivalent du mouvement à trois dimensions*.

Cependant, *pour utiliser ce mouvement plan en vue de résoudre le problème à trois dimensions*, il nous faut connaître sa vitesse V_1 sur les lignes (λ) et (λ'). Celle-ci dépend de la fonction Ψ. Or, le problème à résoudre comporte seulement la connaissance des obstacles et parois solides. En conséquence, il faudra procéder de la manière suivante :

On considérera un domaine D′ ayant globalement l'aspect de celui que l'on cherche, et qui se déduit des données ci-dessus en prenant au hasard des points O_0 et des lignes (λ) et (λ'), les premières étant, si l'on veut, convexes et horizontales à l'infini. Dans ce domaine D′ on supposera l'existence d'une fonction θ_1 vérifiant l'équation (14), égale sur le contour à l'angle fait par celui-ci avec Oz et satisfaisant sur (λ) et (λ') à (23) ou (25). On considérera ensuite la fonction harmonique égale aux mêmes valeurs sur le contour. Il s'agira de déterminer la fonction Ψ sur (λ) et (λ'), en vertu de l'égalité (27), par son expression analytique; de là, on déduira par (30), la vitesse V_1.

Cette vitesse déterminée, il faudra résoudre le mouvement plan équivalent pour lequel nous avons, cette fois, à notre disposition, l'outil des fonctions de variable complexe.

Enfin, les lignes (λ) et (λ') trouvées, il faudra s'assurer de l'existence de la fonction θ_1 et de la vérification des inégalités (16) et (17).

Les lignes du mouvement à trois dimensions seront alors trouvées.

CHAPITRE III.

Nous nous proposons maintenant de considérer la *méthode indirecte* mentionnée à la fin du Chapitre I, et de voir ce que l'on peut en attendre relativement à la recherche des lignes (λ). Afin d'en éprouver l'efficacité, il est tout indiqué de l'appliquer au cas des mouvements plans, d'abord. C'est ce que nous allons essayer de faire ici.

La fonction θ est alors harmonique. Il est naturel d'utiliser la formule de Green pour la *relation connue* que devra vérifier la dérivée normale du problème. Cette formule s'écrit

$$\iint_d (\varphi\,\Delta\Psi - \Psi\,\Delta\varphi)\,dz\,dr + \int_c \left(\varphi\frac{d\Psi}{dn} - \Psi\frac{d\varphi}{dn}\right) ds = 0$$

et est valable pour un domaine d, la normale étant intérieure. Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas d'un *seul obstacle rencontrant l'axe*. Nous ne connaissons de θ que ses valeurs sur une partie du contour, valeurs qui peuvent présenter en origine, par exemple, des discontinuités de première espèce. On peut enlever de telles discontinuités, en soustrayant de θ un arc tangent convenablement choisi. Ne nous arrêtons pas à cette difficulté facile à lever, et supposons que l'on puisse appliquer la formule précédente à un domaine d obtenu de D en traçant un arc de cercle de rayon R et de centre origine, celui-ci étant limité au point de rencontre de $z'z$ avec l'obstacle. Puisque θ nous est inconnu dans D, il nous faudra faire disparaître l'intégrale double précédente. *Nous prendrons donc pour* φ *la fonction* θ *et pour* Ψ *une fonction harmonique*. Pour que l'intégrale curviligne sur l'arc de cercle (R) disparaisse, lorsque R augmente indéfiniment, il faudra supposer que Ψ s'annule à l'infini comme $\frac{1}{R}$. De même, pour que $\frac{d\theta}{dn}$ ne figure pas sur $z'O$ et OP_1, où il nous est inconnu, il faut prendre Ψ *nul* sur ces parties du contour. Mais nous ne savons pas quelle sera la ligne (λ); nous pouvons supposer seulement qu'elle est convexe vers le fluide et va à l'infini, afin d'avoir un sillage illimité. En conséquence, la zone indéfinie située derrière l'obstacle et comprenant les points d'ordonnées inférieures à celle de P_1, fera partie du sillage et laissera (λ) à l'extérieur. Ces considérations sont d'importance pour le choix de Ψ qui doit être harmonique dans D. Comme P_1 peut ne pas être connu (on peut affirmer seulement que si le profil L de l'obstacle finit par descendre à partir d'un point P_0 jusqu'à Oz d'une façon monotone, P_1 sera situé sur OP_0) on pourra prendre, en toute sécurité, pour Ψ, des fonctions harmoniques partout à l'extérieur de L. Ce faisant, on restreint la classe des fonctions utilisables comme fonctions Ψ, mais c'est là une raison de nécessité, comme on le verra plus tard. En résumé, encore que Ψ puisse être admise à avoir des singularités dans la zone définie ci-dessus, on prendra pour Ψ une fonction harmonique :

1° nulle sur $z'O$,

2° nulle sur un arc OP_0 *à l'intérieur* duquel on est *sûr* à priori que P_1 doit se trouver,

3° nulle à l'infini et harmonique à l'extérieur de l'obstacle.

Ceci posé, en appliquant la formule de Green au domaine D limité comme il a été dit, et en faisant tendre ensuite R vers l'infini, *on obtient la relation suivante, valable pour toutes les fonctions satisfaisant aux conditions ci-dessus*,

$$\int_{OP_1} \theta \frac{d\Psi}{dn} ds + \int_{(\lambda)} \left(\theta \frac{d\Psi}{dn} - \Psi \frac{d\theta}{dn} \right) ds = 0.$$

Remarquons que la conception même de la méthode indirecte déduite de la formule de Green nous a conduit d'une façon obligatoire à cette relation, aucun sacrifice de la généralité n'ayant été consenti, à moins qu'il ne s'imposât. Ce fait a son importance si l'on veut obtenir dans les conditions les plus générales possibles l'équation recherchée, vérifiée par la ligne (λ).

On conclut donc, en utilisant le résultat du Chapitre I (25), que :

1. *La ligne* (λ) *devra être telle que, quelle que soit la fonction* Ψ, *assujettie aux conditions ci-dessus, on ait*

$$\int_{OP_1} \theta \frac{d\Psi}{dn} ds + \int_{(\lambda)} \theta \frac{d\Psi}{dn} ds = 0. \tag{1}$$

Réciproquement, si (λ) est telle que pour toute fonction Ψ l'on ait la relation précédente, alors on aura aussi

$$\int_{(\lambda)} \Psi \frac{d\theta}{dn} ds = 0$$

et il faudra que l'on en puisse conclure

$$\frac{d\theta}{dn} = 0$$

si l'on veut que (λ) soit une solution possible du problème.

Occupons-nous d'abord du résultat 1. L'équation (1) ne permet pas de considérer la première intégrale comme connue, car P_1 est en général inconnu. Ensuite, il faudrait évidemment utiliser un nombre de plus en plus grand de fonctions Ψ, afin de restreindre les chances qu'aurait une ligne (λ), qui n'en serait pas une, de vérifier l'équation. Mais comment former de telles fonctions Ψ, de plus en plus nombreuses, et assez maniables pour pouvoir calculer leur dérivée normale sur L ? Cette difficulté, qui semble insoluble au premier abord, peut cependant être tournée.

A cet effet, nous allons utiliser *d'emblée* la famille de toutes les fonctions Ψ définies plus haut; c'est même pour cela que nous laisserons de côté les fonctions Ψ qui pourraient avoir des singularités dans la zone indiquée. Le résultat obtenu sera *indépendant* des fonctions de la famille, comme on le verra dans la suite; on aura ainsi de fortes chances pour que l'équation obtenue n'ait comme solutions que celles du problème considéré.

Ajoutons que cette façon de procéder nous a été suggérée par des résultats que nous avons obtenus au sujet des dérivées normales dans le problème de Dirichlet harmonique [1], résultats qui permettent d'exprimer de telles dérivées en fonction des valeurs données *elles-mêmes* sur le contour, et non des dérivées de celles-ci, ce qui est essentiel pour la suite.

Voici comment nous allons procéder. Puisque dans la formule (1) il entre la dérivée $\frac{d\Psi}{dn}$ sur L, et que nous savons exprimer une telle dérivée dans le cas du cercle, il est tout indiqué de chercher à ramener à ce cas celui du problème. A cet effet, considérons la transformation conforme

$$\zeta = f(Z) \tag{2}$$

permettant de ramener sur un demi-plan (ζ) extérieur à un demi-cercle de rayon unité et de centre le point $(1,0)$, le demi-plan (Z) extérieur au profil L de l'obstacle donné, de telle façon que les axes réels en amont et en aval se correspondent, L correspondant au demi-cercle.

Une telle transformation existe, car c'est celle qui transforme le plan extérieur à L et à son symétrique, par rapport à l'axe réel, en le domaine extérieur au cercle tout entier, et qui fixe la correspondance entre les deux couples de

---

[1] *Voir* Florin Vasilesco, *C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 1549 ou *Sur le calcul du potentiel des vitesses en hydrodynamique* (fasc. 29 des *Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air*, Gauthier-Villars, éditeur).

points suivants : les points à l'infini (points intérieurs), les points O et o (points frontière). Alors, par raison de symétrie, les axes réels se correspondent à eux-mêmes.

Dans cette transformation, les points P_0 et P_1 auront pour homologues les points p_0 et p_1, ce dernier étant situé sur la portion op_0 du cercle, de même que P_1 se trouve sur OP_0.

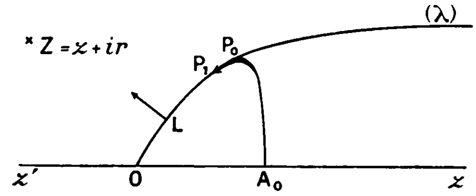

Fig. 4.

Si la ligne L était, par exemple, une lame rectiligne OP_1, ou, en général, sans domaine intérieur, il faut, évidemment, la considérer comme allant de O en P_1 et de P_1 en O. C'est, en effet, la face de l'obstacle en contact avec le fluide que l'on désigne par L.

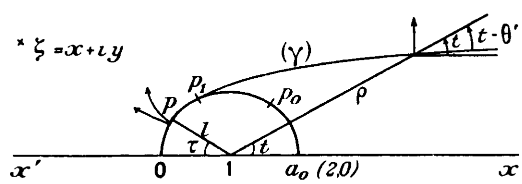

Fig. 5.

Supposons maintenant que sur OP_1 les normales à L se transforment en courbes orthogonales à l. Il en sera ainsi, par exemple, si L est analytique. Toute fonction Ψ harmonique se transforme en une autre fonction Φ dans le plan (ζ) du cercle, et y vérifie les mêmes conditions. On aura, en outre,

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{d\Psi}{|dZ|} = \frac{d\Psi}{|d\zeta|}|f'(Z)| = \frac{d\Phi}{dn}|f'(Z)|$$

puisque

$$d\zeta = f'(Z)\,dZ. \tag{3}$$

De même

$$\text{arc } ds \text{ sur}(Z) = |dZ| = \frac{|d\zeta|}{|f'(Z)|} = \frac{1}{|f'(Z)|} \text{arc } ds \text{ sur}(\zeta).$$

Appelons (γ) la ligne transformée de (λ) par la transformation *connue* (2). Si y' est son coefficient angulaire et que l'on pose

$$f'(Z) = A + iB = R\,e^{i\alpha},$$

la différentielle (3) prise sur (λ) donne, en égalant les arguments,

$$\theta' = \operatorname{arc\,tang} y' = \alpha + \theta,$$

d'où l'on tire

$$\theta = \operatorname{arc\,tang} y' - \alpha, \tag{4}$$

relation que l'on peut écrire encore, si l'on veut,

$$\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{Ay' - B}{A + By'}. \tag{5}$$

Désignons encore par θ_l la valeur de θ sur L aux points correspondants de l. La relation (1) devient alors dans le plan (ζ)

$$\int_{0p_1} \theta_l \frac{d\Phi}{dn} |f'(Z)| \frac{ds}{|f'(Z)|} + \int_{(\gamma)} (\operatorname{arc\,tang} y' - \alpha) \frac{d\Phi}{dn} |f'(Z)| \frac{ds}{|f'(Z)|} = 0$$

ou, après simplification,

$$\int_{0p_1} \theta_l \frac{d\Phi}{dn} ds + \int_{(\gamma)} (\operatorname{arc\,tang} y' - \alpha) \frac{d\Phi}{dn} ds = 0, \tag{6}$$

la parenthèse pouvant être remplacée par ses valeurs (4) ou (5) suivant la variable d'intégration choisie.

Nous sommes ainsi ramenés au cas du cercle, et l'équation obtenue est à peine plus compliquée que celle (1) dont nous sommes partis.

Il est facile maintenant de développer les calculs. On sait que toute fonction harmonique bornée à l'extérieur du cercle, régulière à l'infini, est donnée par une intégrale de Poisson [1]

$$\Phi(\rho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \frac{1 - \frac{1}{\rho^2}}{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos(\omega - t)} d\omega$$

[où $\varphi(\omega)$ est une fonction sommable bornée] qui peut encore s'écrire

$$\Phi(\rho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\, d\omega + \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \cos n(\omega - t)\, d\omega$$

en utilisant le développement bien connu

$$\frac{1 - \frac{1}{\rho^2}}{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \cos(\omega - t)} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \cos n(\omega - t).$$

---

(1) *Voir* Fatou, *Acta Math.*, t. 30, 1906, p. 349.

On en conclut que : pour que $\Phi(\rho, t)$ s'annule à l'infini, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_0^{\pi 2} \varphi(\omega)\, d\omega = 0. \tag{7}$$

Si maintenant on veut que la fonction s'annule sur un rayon vecteur, il suffit, pour trouver les conditions auxquelles doit satisfaire $\varphi(\omega)$, de considérer le rayon $t=0$, c'est-à-dire l'axe positif, à cause de la symétrie du cercle. On peut écrire alors la formule de Poisson sous la forme

$$\begin{aligned}\Phi(\rho, t) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [\varphi(\omega) + \varphi(-\omega)]\, d\omega \\ & + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{\rho^n}\int_0^{\pi}[\varphi(\omega) + \varphi(-\omega)]\cos n\omega\, d\omega\end{aligned}$$

et l'on voit qu'il suffit que l'on ait

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega).$$

Autrement dit : si les valeurs de φ aux points du cercle symétriques par rapport au rayon vecteur t constant, sont égales et de signes contraires, la fonction harmonique est nulle sur ce rayon vecteur. Elle est nulle sur le rayon vecteur opposé aussi, évidemment.

Réciproquement, si une fonction harmonique bornée, régulière à l'infini, est nulle sur deux rayons vecteurs opposés, ses valeurs limites sur le cercle le long des rayons vecteurs limites qui existent presque partout, sont presque partout égales et de signes contraires, aux points du cercle symétriques par rapport à ces rayons vecteurs. En effet, il suffit de raisonner sur la fonction harmonique dans le cercle, qui s'en déduit par inversion. Cette fonction est nulle sur tout un diamètre. Soient $\varphi(\omega)$ ses valeurs limites le long des rayons, sur une C_1 des deux demi-circonférences déterminées par ce diamètre. Considérons alors la fonction harmonique définie par la formule de Poisson et par les valeurs $-\varphi(\omega)$ sur C_1, et les valeurs égales et de signes contraires aux points symétriques. Cette fonction s'annule sur le diamètre. La somme de ces deux fonctions harmoniques dans le cercle s'annule sur le diamètre et a sur C_1 des valeurs limites presque partout nulles. Elle doit donc être nulle dans le demi-cercle compris entre le diamètre et C_1, car, en faisant la transformation conforme de ce demi-cercle sur un cercle, on aurait une fonction harmonique bornée, dont les valeurs limites sur le cercle seraient presque partout nulles. D'après les résultats de Fatou [1], elle devrait être identiquement nulle. Notre fonction, nulle dans le demi-cercle, l'est aussi dans le cercle et la réciproque est démontrée.

---

(1) Fatou, *loc. cit.*

Revenons au problème. Pour avoir une fonction Φ harmonique bornée *quelconque* à l'extérieur du demi-cercle, s'annulant sur op_1, ainsi que sur $x'O$, nulle à l'infini, il *faut* et il *suffit* que nous prenions une fonction sommable bornée quelconque $\sigma(s)$, définie sur l'arc $p_0 a_0$, que nous définissions ensuite une fonction $\varphi(\omega)$ égale à $\sigma(s)$ sur $a_0 p_0$, à zéro sur op_0, ayant des valeurs égales et de signes contraires sur la demi-circonférence inférieure qui complète le cercle, et qu'avec cette fonction nous formions l'intégrale de Poisson.

Cette intégrale nous met en possession de toute une famille de fonctions (F) harmoniques, pour chacune desquelles la ligne cherchée doit vérifier l'équation (6).

Calculons d'abord $\frac{d\Phi}{dn}$ en un point de l'arc op_0. A cet effet, utilisons une formule générale que nous avons donnée ailleurs [1]

$$\frac{dF_c[U]}{dn} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [U(\varphi) - U(\theta) - U'(\theta)\sin(\varphi - \theta)] \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi - \theta}{2}},$$

$U(\varphi)$ étant la fonction donnée sur le cercle, θ l'argument du point où l'on prend la dérivée normale, et φ celui du point variable. Dans le cas actuel, cette formule devient manifestement

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \frac{d\omega}{\sin^2 \frac{\omega - (\pi - \tau)}{2}},$$

en désignant par τ l'arc op mesuré de o dans le sens inverse, qui aboutit au point p où l'on écrit la dérivée normale.

Si l'on tient compte de la définition de $\varphi(\omega)$, on écrit successivement, en appelant s_0 l'arc $a_0 p_0$ dans le sens direct,

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dn} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \frac{d\omega}{\cos^2 \frac{\omega + \tau}{2}} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0} \sigma(s) \frac{ds}{\cos^2 \frac{s + \tau}{2}} + \frac{1}{4\pi}\int_{2\pi - s_0}^{2\pi} -\sigma(2\pi - s) \frac{d\omega}{\cos^2 \frac{\omega + \tau}{2}}.\end{aligned}$$

La deuxième intégrale peut se mettre sous la forme

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0} \sigma(s) \frac{ds}{\cos^2 \frac{\tau - s}{2}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{s_0} \sigma(s) \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\tau + s}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\tau - s}{2}} \right] ds,$$

---

[1] *Loc. cit.*

En nous reportant à la formule (6), on aura

$$\int_{op_1} \theta_l \frac{d\Phi}{dn} ds = \frac{1}{4\pi} \int_{op_1} \theta_l(\tau)\, d\tau \int_0^{s_0} \sigma(s) \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\tau+s}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\tau-s}{2}} \right] ds$$

où l'on a remplacé le ds sur op_1 par $d\tau$; θ_l est d'ailleurs une fonction *connue* de τ, qui s'exprime à l'aide de la transformation (2). Un changement élémentaire dans l'ordre des intégrations donne

$$\int_{op_1} \theta_l \frac{d\Phi}{dn} ds = \frac{1}{4\pi} \int_0 \sigma(s)\, ds \int_0^{\tau_1} \theta_l(\tau) \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\tau+s}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\tau-s}{2}} \right] d\tau.$$

Calculons maintenant la dérivée normale de Φ sur la ligne (γ). On a

$$\Phi(\rho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\omega) \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\omega - t)} d\omega,$$

et par une transformation analogue à celle faite plus haut, on trouve

$$\Phi(\rho, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \sigma(s) \left[\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(s - t)} - \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(s + t)} \right] ds.$$

Faisons observer ici que si pour $t = s$, ρ pouvait être égal à l'unité, le premier terme du crochet deviendrait infini. Or cela ne peut pas arriver car p_1, le point de départ de la ligne (γ), est strictement *intérieur* à l'arc op_0, comme on l'a vu plus haut.

En appelant θ' l'angle de la tangente à (γ) avec ox, on voit que

$$\left.\frac{d\Phi}{dn}\right|_\gamma = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \sin(t - \theta') + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \cos(t - \theta').$$

Comme d'ailleurs sur (γ)

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta'},$$

on obtient

$$\left.\frac{d\Phi}{dn}\right|_\gamma ds = \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \sin t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \cos t \right) - y' \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \cos t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \sin t \right) \right] dx.$$

Posons, pour abréger,

$$A(\rho, t, s) = \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(s - t)} - \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(s + t)},$$

on trouve pour la dérivée normale l'expression

$$\left.\frac{d\Phi}{dn}\right|_\gamma ds = \frac{dx}{2\pi} \int_0^{s_0} \sigma(s) \left[\left(\frac{\partial A}{\partial\rho} \sin t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \cos t \right) - y' \left(\frac{\partial A}{\partial\rho} \cos t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \sin t \right) \right] ds.$$

La seconde intégrale de l'équation (6) devient ainsi

$$\int_{(\gamma)} (\text{arc tang} y' - \alpha) \frac{d\Phi}{dn} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{(\gamma)} (\text{arc tang} y' - \alpha) dx \int_0^{s_0} \sigma(s)$$
$$\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \sin t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \cos t\right) - y'\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \cos t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \sin t\right)\right] ds,$$

et en faisant l'inversion de l'ordre des deux intégrations, on obtient

$$\int_{(\gamma)} (\text{arc tang} y' - \alpha) \frac{d\Phi}{dn} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \sigma(s)\, ds \int_{(\gamma)} (\text{arc tang} y' - \alpha)$$
$$\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \sin t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \cos t\right) - y'\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \cos t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \sin t\right)\right] dx.$$

L'équation (6) *prend donc la forme*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{s_0} \sigma(s)\, G(s)\, ds = 0$$

et doit avoir lieu, je le rappelle, *quelle que soit la fonction* $\sigma(s)$, *sommable.*

C'est plus qu'il n'en faut pour que l'on puisse affirmer, en vertu du *lemme fondamental du calcul des variations*, que $G(s)$ *doit être identiquement nul*, *quel que soit* s *dans l'intervalle* (O, s).

La condition (6) *est donc équivalente à la suivante*

$$(8) \quad G(s) \equiv \int_{(\gamma)} (\text{arc tang} y' - \alpha)\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \sin t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial \rho} \cos t\right)\right.$$
$$\left. - y'\left(\frac{\partial A}{\partial \rho} \cos t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A}{\partial t} \sin t\right)\right] dx + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \theta_i(\tau) \left[\frac{1}{\cos^2 \frac{\tau + s}{2}} - \frac{1}{\cos^2 \frac{\tau - s}{2}}\right] d\tau \equiv 0,$$

quel que soit $0 \leqq s \leqq s_0$.

Dans cette formule figurent ρ et t, tous deux fonctions de x et y. A cause de cela il semble indiqué de passer aux coordonnées polaires afin que l'intégrale fasse apparaître plus simplement la fonction inconnue du problème. Écrivons donc

$$x - 1 = \rho \cos t, \qquad y = \rho \sin t,$$

d'où

$$dx = d\rho \cos t - \rho \sin t\, dt,$$
$$dy = d\rho \sin t + \rho \cos t\, dt.$$

Comme nous ne connaissons pas le point p_1, et que ce point intervient dans les limites de la première intégrale, de même qu'il figure dans la seconde par τ_1, il est indiqué de prendre ρ pour variable. On évite ainsi cette difficulté, car la limite inférieure de l'intégrale sur (γ) sera 1. On écrira donc

$$dx = (\cos t - \rho \sin t\, t')\, d\rho,$$
$$dy = (\sin t + \rho \cos t\, t')\, d\rho,$$

et

$$y' = \frac{\sin t + \rho \cos t\, t'}{\cos t - \rho \sin t\, t'} = \frac{\text{tang}\, t + \rho t'}{1 - \text{tang}\, t \rho t'},$$

d'où

$$\operatorname{arc\,tang} y' = t + \operatorname{arc\,tang} \rho t',$$

$$(9) \qquad 0 = \operatorname{arc\,tang} y' - \alpha = t + \operatorname{arc\,tang} \rho t' - \alpha.$$

On a donc comme coefficients de $\frac{\partial A}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial A}{\partial t}$ respectivement

$$\sin t\, dx - \cos t\, dy = -\rho t'\, d\rho,$$

$$\frac{1}{\rho} \cos t\, dx + \frac{1}{\rho} \sin t\, dy = \frac{1}{\rho}\, d\rho.$$

L'équation (8) *peut donc s'écrire encore*

$$(10) \qquad \int_1^\infty (t + \operatorname{arc\,tang} \rho t' - \alpha)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial t} - \rho t' \frac{\partial A}{\partial \rho}\right) d\rho + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \theta_l(\tau)\left[\frac{1}{\cos^2\frac{\tau+s}{2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{\tau-s}{2}}\right] d\tau = 0$$

Ne connaissant pas la ligne (γ), nous ne savons pas, du moins au point où nous en sommes, si ρ varie, dans la première intégrale de cette équation, toujours dans le même sens. Cela dépend, manifestement, de la transformation conforme (2), donc de l'obstacle L. C'est pourquoi il faut, d'une manière générale, considérer l'intégrale en question comme une intégrale curviligne prise sur la ligne inconnue (γ).

Avant d'aller plus loin, faisons quelques remarques.

Si l'on se donnait au hasard la transformation conforme (2), assujettie, bien entendu, aux conditions que l'on sait (transformer les portions négative et positive de l'axe réel extérieur au cercle en elles-mêmes, conserver le point à l'infini), on trouverait un obstacle quelconque L. On aperçoit ainsi une certaine analogie entre la méthode suivie ici avec celle, aujourd'hui classique, de MM. Levi Cività et Villat. Dans son Mémoire *Sur la validité des solutions de certains problèmes d'hydrodynamique* (*Journal de Mathématiques*, t. X, 1914), M. Villat utilise une formule qui donne la vitesse en fonction d'une fonction dépendant d'une certaine transformation conforme, pour déduire des conditions de validité des solutions par le fait que les vitesses doivent être inférieures à l'unité. En particularisant cette fonction, il trouve des obstacles comportant des solutions acceptables ou non acceptables, à volonté.

Dans la méthode suivie ici, il faudrait montrer, comme nous l'avons déjà dit, que de

$$\int \psi \frac{d\theta}{dn}\, ds = 0,$$

on tire

$$\frac{d\theta}{dn} = 0,$$

ensuite, que de cette relation on déduit

$$\text{Vitesse} < 1.$$

Il est intéressant de faire observer aussi qu'alors que dans la méthode classique de MM. Levi-Cività et Villat l'utilisation des fonctions de variable complexe constitue la méthode elle-même, dans ce travail nous nous sommes servi de la transformation conforme (2) pour suppléer à notre ignorance relativement à la construction de certaines fonctions harmoniques maniables (1). Nous avons donc utilisé une telle fonction d'une façon tout accessoire et en dehors de la méthode elle-même.

Remarquons enfin que pour qu'une solution soit valide, il faut aussi que les lignes de jets ne se recoupent pas, ce qui peut parfaitement arriver, comme l'ont montré MM. Brillouin et Villat. La méthode actuelle réduit la recherche du mouvement à celle de la ligne de jet. On ne retiendra donc comme solutions possibles que (la ou) les lignes (γ) qui ne se recoupent pas, parmi les solutions de l'équation intégrale ci-dessus. Autrement dit, si l'on ne peut pas résoudre d'une façon générale cette équation, on pourra essayer de la vérifier au moyen d'une ligne que l'on prendra, *a priori*, sans point double. De cette façon, l'étude de ce second point relatif à la validité des solutions et concernant la ligne de jet elle-même, pourrait bien être rendue inutile. Je dis pourrait, car d'ores et déjà l'équation à laquelle on arrive (10) semble ne vouloir se laisser étudier que difficilement.

Nous allons essayer de la transformer un peu, afin de lui donner une forme plus abordable.

Elle contient encore τ_1 comme limite d'intégrale. Il y a un grand nombre de cas où τ_1 est connu cependant : les obstacles en *gouttière*, par exemple, et ce ne sont pas les seuls. Comme la fonction $\theta_l(\tau)$ est alors connue sur un demi-cercle, la seconde intégrale est une fonction *connue* de s. Mais que τ_1 soit connue ou non, l'équation exprime, si l'on se rappelle la forme de $A(\rho, t, s)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions suivantes aient leurs dérivées d'ordres impaires *égales*, pour $s = 0$, puisque cette équation doit avoir lieu quel que soit s dans l'intervalle $(0, s_0)$

$$\int_1^\infty (t + \operatorname{arc\,tang} \rho t' - \alpha)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(t+s)} - \rho t' \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(t+s)}\right) d\rho$$

et

$$\frac{1}{2}\int_0^{\tau_1} \theta_l(\tau)\frac{d\tau}{\cos^2\dfrac{\tau+s}{2}}.$$

Il est manifeste que les dérivées par rapport à s, pour $s = 0$, s'obtiennent en dérivant les termes qui contiennent s par rapport à t et τ respectivement, après y avoir fait $s = 0$. *On obtient ainsi le système suivant d'une infinité d'équations,*

---

(1) Si l'obstacle était un cercle, l'emploi de cette transformation serait inutile.

équivalant à l'équation unique (10), *dépendante de s*

$$(11)\qquad \int_1^{\infty} (t + \operatorname{arc\,tang} \rho t' - \alpha) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^{2p+2}}{\partial t^{2p+2}} \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t} - \rho t' \frac{\partial^{2p+2}}{\partial\rho\,\partial t^{2p+1}} \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t} \right) d\rho$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \theta_l(\tau) \frac{d^{2p+1}}{d\tau^{2p+1}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\tau}{2}}\, d\tau,$$

pour $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

On peut transformer les deux membres de ces équations. Observons, en effet, que l'on a

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^{2p+2}}{\partial t^{2p+2}} \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t} - \rho t' \frac{\partial^{2p+2}}{\partial\rho\,\partial t^{2p+1}} \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t}$$
$$= \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\partial^{2p+1}}{\partial a\,\partial t^{2p}} \frac{\rho^2 - a^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos t} \right]_{a=1} = -2 \frac{d}{d\rho} \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \frac{2 - \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos t}{\left(\rho + \frac{1}{\rho} - 2\cos t\right)^2}.$$

En effet, en partant du développement

$$B = \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t} = \frac{1 - \frac{1}{\rho^2}}{1 + \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho}\cos nt} = 1 + 2\sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \cos nt,$$

valable pour $\rho > 1$, on obtient successivement

$$\frac{\partial^{2p+1}}{\partial t^{2p+1}} B = (-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} \frac{n^{2p+1}}{\rho^n} \sin nt,$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^{2p+2}}{\partial t^{2p+2}} B = (-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} \frac{n^{2p+1}}{\rho^{n+1}} \cos nt - \rho t' \frac{\partial^{2p+2} B}{\partial\rho\,\partial t^{2p+2}} = (-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} \frac{n^{2p+2}}{\rho^n} t' \sin nt,$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^{2p+2} B}{\partial t^{2p+2}} - \rho t' \frac{\partial^{2p+1} B}{\partial\rho\,\partial t^{2p+2}} = (-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} n^{2p+1} \left(\frac{n}{\rho^{n+1}} \cos nt + \frac{n}{\rho^n} \sin nt\, t' \right)$$
$$= (-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} n^{2p+1} \frac{d}{d\rho} \left(-\frac{\cos nt}{\rho^n} \right) = -\frac{d}{d\rho} \left[(-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} \frac{n^{2p+1}}{\rho^n} \cos nt \right]$$
$$= -\frac{d}{d\rho} \left[(-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} n a^{n-1} \frac{n^{2p}}{\rho^n} \cos nt \right]_{a=1}$$
$$= -\frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left[(-1)^{p+1}\, 2 \sum_1^{\infty} n^{2p} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n \cos nt \right] \right\}_{a=1}$$
$$= \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}} \frac{\rho^2 - a^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos t} \right]_{a=1} = \frac{d}{d\rho} \left[\frac{\partial^{2p+1}}{\partial a\,\partial t^{2p}} \frac{\rho^2 - a^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos t} \right]_{a=1}.$$

En tenant compte de (9), *on pourra donc écrire les équations* (11) *sous la forme*

$$(12)\qquad \int_1^\infty \theta\, d\,\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos t}{\left(\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos t\right)^2} = -\frac{1}{4}\int_0^{\tau_1}\theta_l\, d\,\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}},$$

ou encore, si l'on veut, en intégrant par parties,

$$\left[\theta\,\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos t}{\left(\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos t\right)^2}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\left[\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos t}{\left(\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos t\right)^2}\right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\tau_1}\theta_l(\tau)\, d\,\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\theta_l(\tau)\,\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}}\right]_0^{\tau_1} + \frac{1}{4}\int_0^{\tau_1}\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}}\, d\theta_l.$$

Le dernier membre suppose $\theta_l(\tau)$ continue entre o et τ_1; si $\theta_l(\tau)$ avait des discontinuités de première espèce, il faudrait ajouter les termes concernant ces discontinuités, comme on le sait.

Remarquons maintenant que dans le premier membre le terme tout intégré s'annule pour $\rho=\infty$; il reste seulement, en remarquant que l'on a (ρ^2-1) en facteur

$$-\theta_l(\tau_1)\left[\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{1}{1+\rho^2-2\rho\cos t}\right]_{\rho=1}.$$

A la vérité, il faut écrire au lieu de $\theta_l(\tau_1)$ la limite, sur (λ), de θ au point P_1. Mais cette limite doit être $\theta_l(\tau)$ car (λ) doit partir de P_1 tangentiellement à l'obstacle. De même, la dérivée par rapport à t s'obtient en faisant d'abord directement $\rho=1$ et en remarquant que l'on a alors $t=\pi-\tau_1$. On obtient ainsi

$$-\theta_l(\tau_1)\,\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{1}{2-2\cos t} = -\frac{1}{4}\,\theta_l(\tau_1)\,\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\,\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4}\,\theta_l(\tau_1)\,\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}}_{\tau=\tau_1}.$$

quantité qui est la même que celle qui figure au second membre. Calculons maintenant

$$\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}}_{\tau=0},$$

expression qui a la même valeur que la suivante

$$-4\,\frac{d^{2p+2}}{d\tau^{2p+2}}\log\cos\frac{\tau}{2}_{\tau=0}.$$

On peut écrire

$$\cos\frac{\tau}{2}=\prod_{0}^{\infty}\left[1-\frac{\tau^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right],$$

$$\log\cos\frac{\tau}{2}=\sum_{0}^{\infty}\log\left[1-\frac{\tau^2}{\pi^2(2n+1)^2}\right]=\sum_{0}^{\infty}\left[-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\tau^{2q}}{q\,\pi^{2q}(2n+1)^{2q}}\right]=-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\tau^{2q}}{q\,\pi^{2q}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2q}}$$

$$-4\frac{d^{2p+2}}{d\tau^{2p+2}}\log\cos\frac{\tau}{2}\Big|_{\tau=0}=\frac{4}{p+1}\,\frac{(2p+2)!}{\pi^{2p+2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2p+2}},$$

on sait que

$$B_{p+1}=\frac{(2p+2)!}{2^{2p+1}\pi^{2p+2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p+2}},$$

et comme

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p+2}}=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2p+2}}+\frac{1}{2^{2p+2}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p+2}}$$

on a

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p+2}}=\frac{2^{2p+2}}{2^{2p+2}-1}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2p+2}}$$

d'où

$$-4\frac{d^{2p+2}}{d\tau^{2p+2}}\log\cos\frac{\tau}{2}\Big|_{\tau=0}=2\,\frac{2^{2p+2}-1}{p+1}\,B_{p+1},$$

les B_i étant les nombres de Bernoulli.

On peut donc écrire finalement les systèmes sous la forme

$$(13)\quad \int_{1}^{\infty}\frac{\partial^{2p}}{\partial t^{2p}}\left[\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos t}{\left(\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos t\right)^2}\right]d\theta=-\frac{2^{2p+2}-1}{2p+2}\,B_{p+1}\,\theta_l(0)-\frac{1}{4}\int_{0}^{\tau_1}\frac{d^{2p}}{d\tau^{2p}}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\tau}{2}}\,d\theta_l$$

quel que soit $p=0,1,2,\ldots$.

Si l'on veut revenir à une équation unique contenant s, on doit se rappeler que les nombres de Bernoulli sont donnés par la série

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+\ldots,$$

ou encore par celle qui s'en déduit en remplaçant x par is

$$\frac{s}{2}\cot\!g\,\frac{s}{2}=1-B_1\frac{s^2}{2!}-B_2\frac{s^4}{4!}-\ldots.$$

et ajoutons pour $p = 0, 1, 2, \ldots$, on trouve

$$\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\left\{\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos(t+s)}{\left[\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos(t+s)\right]^2}+\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos(t-s)}{\left[\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos(t-s)\right]^2}\right\}d\theta$$

$$=-\theta_t(0)\sum_{p=0}\frac{1}{2p+2}\left(B_{p+1}\frac{2^{2p+2}s^{2p}}{2p\,!}-B_{p+1}\frac{s^{2p}}{2p\,!}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\int_{0}^{\tau_1}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{\tau+s}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{\tau-s}{2}}\right)d\theta_t.$$

Mais la série du second membre s'écrit

$$\sum_{p=0}\left[B_{p+1}\frac{(2p+1)2^{2p+2}s^{2p}}{(2p+2)!}-B_{p+1}\frac{(2p+1)s^{2p}}{(2p+2)!}\right]=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{s}{2}-\operatorname{cotg}s\right)=\frac{1}{4\cos^2\frac{s}{2}}$$

et l'on peut formuler le résultat suivant, en se rappelant que α est une fonction dépendant *uniquement* de l'obstacle donné, qu'elle représente l'argument de la dérivée $f'(z)$ de la fonction $f(Z)$, et en remarquant que la fonction

$$g(\rho, t)=\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos t}{\left(\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos t\right)^2}$$

est définie à l'extérieur du cercle et sur le cercle, sauf pour $\rho = 1$, $t = 0$, point qui reste en dehors de la ligne cherchée (γ) :

Déterminer une ligne (γ), sans points multiples, partant d'un point du cercle p_1, qui n'est pas fixé à l'avance, et allant à l'infini, de telle manière que l'angle

$$\theta = \operatorname{arc\,tang} y' - \alpha$$

aille en décroissant jusqu'à zéro, et que l'on ait

$$(14)\quad \int_{op_1\gamma}\left\{\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos(t+s)}{\left[\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos(t+s)\right]^2}+\frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos(t-s)}{\left[\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos(t-s)\right]^2}\right\}d\theta=-\theta_t(0)\frac{1}{2\cos^2\frac{s}{2}}$$

pour tout s, $0 \leqq s \leqq s_0$.

On voit que cela signifie que la moyenne des valeurs de la fonction $g(\rho, t)$ aux deux points correspondants de chaque point de la ligne $op_1\gamma$ obtenus en faisant tourner cette ligne autour du centre du cercle, d'un angle égal à s, dans les deux sens, intégrée par rapport à θ, doit être égale à $-\theta(0)\frac{1}{4\cos^2\frac{s}{2}}$.

Faisons quelques remarques.

Le problème revient donc à résoudre une équation intégrale (14) ou un système de telles équations (13). Il y a lieu de distinguer tout de suite deux cas : 1° celui où le point p_1, P_1 est connu ; c'est le cas des obstacles en gouttière, par exemple. Comme nous l'avons déjà dit, la portion de l'intégrale relative au chemin op_1 est alors connue. Si, de plus, la portion de l'obstacle donné L sur laquelle se trouve OP_1, est polygonale, la portion précédente de l'intégrale est même nulle car θ_l est constant sur chaque côté du polygone. Les intégrales figurant dans les équations à résoudre seront donc, en ce cas, étendues à (γ) seulement ; 2° si le point p_1 n'est pas connu, il n'en sera plus ainsi, et les intégrales prises sur op_1 seront fonctions de la limite τ_1, qui fixe la position de p_1.

Correspondant à ces deux cas, on a les cas simples suivants :

1° L'obstacle L est une lame rectiligne. On sait que ce cas est complètement résolu par la théorie classique. Mais, chose curieuse, encore qu'explicable par la différence de la méthode classique et de celle exposée ici, si l'on essaye de vérifier l'équation (14) dans ce cas, au moyen de la ligne connue (γ), on arrive à des calculs qui paraissent inextricables. Si la lame est perpendiculaire à la vitesse à l'infini, la théorie classique donne pour les coordonnées de (λ)

$$z = a(\operatorname{sh}\gamma \operatorname{ch}\gamma - \gamma),$$
$$r - 2a\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 2a(\operatorname{ch}\gamma - 1)$$

où le paramètre γ varie de 0 à ∞ (*voir* le livre de M. Villat déjà cité). Cette représentation de (λ) s'obtient en satisfaisant à l'équation différentielle, f devant varier de a à l'∞ :

$$\frac{dZ}{df} = \frac{f^{\frac{1}{2}}}{-ia^{\frac{1}{2}} + (f-a)^{\frac{1}{2}}}$$

au moyen de $f = a\operatorname{ch}^2\gamma$.

Mais, afin de procéder à cette vérification, il serait commode d'avoir une représentation de (λ) au moyen de θ. A cet effet, remarquons que l'équation différentielle précédente pourra encore être satisfaite si l'on posait

$$f = \frac{a}{\sin^2\beta},$$

où β varie de $\frac{\pi}{2}$ à zéro. On aura alors

$$f - a = a\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}, \qquad df = \frac{-2a\cos\beta}{\sin^3\beta}d\beta, \qquad d\beta < 0,$$

$$dZ = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{\sin\beta}\,\frac{1}{-ia^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}}\,\frac{2a\cos\beta}{\sin^3\beta}d\beta = -2a\,e^{i\beta}\frac{\cos\beta}{\sin^3\beta}d\beta,$$

$$dZ = e^{i\beta}\,df.$$

Comme df est réel et positif, on conclut que

$$\beta = 0.$$

Supposons la lame de demi-longueur égale à l'unité, ce qui ne restreint nullement la généralité du problème. En écrivant

$$Z - i = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -2a\,e^{i\theta}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\,d\theta = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\,d\theta + ia\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2\theta}{\sin^3\theta}\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos\theta}{\sin^3\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$= -\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\cos\theta\right]_\theta^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = -2\left[\frac{1}{\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\frac{1}{\sin\theta} - 1\right],$$

on trouve pour la représentation de la ligne (λ), *en fonction de l'angle* θ,

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} Z &= a\left[\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right] \\ r - 1 &= 2a\left[\frac{1}{\sin\theta} - 1\right] \end{aligned}\right. \qquad \left[1 = 2a\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

où θ *varie de* $\frac{\pi}{2}$ *à zéro.*

D'autre part, il est facile de voir que la fonction (2) qui fait la transformation conforme dans le cas de la lame est

$$Z = \frac{1}{2}\left(\zeta - 1 - \frac{1}{\zeta - 1}\right).$$

Comme, d'ailleurs,

$$\zeta - 1 = \rho\,e^{it},$$

on a

$$2Z = 2(z + ir) = \rho e^{it} - \frac{1}{\rho}e^{-it} = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\cos t + i\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin t$$

et

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\cos t = 2z,$$
$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\sin t = 2r$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\rho - \frac{1}{\rho} = \sqrt{2(z^2 + r^2 - 1) + 2\sqrt{(z^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2}},$$
$$\rho + \frac{1}{\rho} = \sqrt{2(z^2 + r^2 + 1) + 2\sqrt{(z^2 + r^2 + 1)^2 - 4r^2}}.$$

Il faudrait donc substituer d'abord ces valeurs de $\rho + \frac{1}{\rho}$, $\cos t$ et $\sin t$ dans l'intégrale (14), si l'on veut faire la vérification en question, remplacer z et r par leurs valeurs (15) ensuite, et vérifier l'identité (14). Il est facile de voir que l'on arrive ainsi à des calculs inextricables.

Le cas simple correspondant à 2° *est celui du cercle.*

Ce cas, qui est à l'heure actuelle l'objet de recherches importantes par la méthode classique, et dont on ne connaît pas la solution, *est aussi le cas le plus simple que comporte la méthode exposée ici.* Il est donc pour cette méthode ce qu'est le cas de la lame pour la méthode classique. Ce fait permet d'espérer un aboutissement heureux à la recherche de sa solution par la méthode actuelle, recherche qui est en cours.

Voici ce que devient l'équation (14) dans le cas actuel. Remarquons que la transformation conforme (2) est inutile, donc $\alpha = 0$. D'ailleurs, sur le cercle, on a

$$g(1, t) = \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\tau_1} [g(1, t+s) + g(1, t-s)]\, d\theta = -\frac{1}{4}\int_0^{\tau_1}\left[\frac{1}{\cos^2\frac{\tau+t}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{\tau-s}{2}}\right] d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\left[\tang\frac{\tau_1+s}{2} + \tang\frac{\tau_1-s}{2}\right]$$

d'où, finalement, on peut écrire l'équation (14) sous la forme

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\tau_1}^{0} \left\{ \frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos(t+s)}{\left[\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos(t+s)\right]^2} + \frac{2-\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos(t-s)}{\left[\rho+\frac{1}{\rho}-2\cos(t-s)\right]^2} \right\} d\theta$$
$$= -\frac{\pi}{4\cos^2\frac{s}{2}} + \frac{1}{2}\left[\tang\frac{\tau_1+s}{2} + \tang\frac{\tau_1-s}{2}\right].$$

CHAPITRE IV.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la *méthode indirecte* à des écoulements à trois dimensions. Pour fixer les idées, ainsi que pour des raisons de commodité dont on verra la nécessité dans un instant, nous envisagerons le cas où *l'obstacle est une sphère.* Pour simplifier, et sans changer la généralité, on en supposera le rayon égal à l'unité.

Désignons, comme d'habitude, par zz' l'axe de l'écoulement, par OP_1 le profil de la sphère sur lequel glisse le fluide, et par (Λ) la surface de jet dont le profil soit (λ). Le potentiel des vitesses φ, harmonique dans l'espace, satisfait aux conditions aux limites suivantes :

1° Sur OP_1 et (λ), on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\operatorname{tang}\theta,$$

z et r étant toujours les coordonnées dans un plan méridien, et θ l'inclinaison de la vitesse, relation qui exprime que cette vitesse est tangente au contour;

2° Sur (λ) on a

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 = 1$$

du fait que la vitesse y est égale à l'unité.

Ces conditions, assez inusitées, sont en réalité beaucoup plus simples qu'elles ne le paraissent. Considérons, en effet, la formule qui donne la dérivée normale de φ sur le contour $OP_1\lambda$, en fonction de ses dérivées par rapport à z et r

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial\rho}{\partial r}\cos\theta.$$

En vertu de 1° elle donne

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\operatorname{tang}\theta\cos\theta = 0.$$

Sur (λ), à cause de 2°, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \sin\theta.$$

Comme, d'ailleurs, la dérivée de φ par rapport à l'arc s de (λ) est la même que celle suivant la tangente, et que celle-ci est donnée par

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\sin\theta,$$

on trouve que

$$\frac{d\varphi}{ds} = 1,$$

d'où

$$\varphi = s + \text{const.}$$

Les conditions 1° et 2° sont donc équivalentes aux suivantes :

a. Sur (λ) on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0, \qquad \varphi = s,$$

en laissant de côté la constante, φ n'étant lui-même défini qu'à une constante près.

b. Sur OP_1 on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Ces conditions aux limites plus maniables obtenues, nous allons pouvoir appliquer la méthode indirecte. Celle-ci consiste, on s'en souvient, à trouver une équation à laquelle satisfasse (λ), au moyen d'une relation aussi générale que possible, où figurent les éléments connus de φ, savoir, ceux des conditions *a* et *b*.

Désignons par $d(\mathrm{R})$ le domaine occupé par le fluide en mouvement, intérieur à une sphère de rayon R et de centre l'origine. Comme dans le chapitre précédent, la relation générale que nous pouvons utiliser est encore la formule de Green. Appliquée au domaine borné d, dont soit Σ la surface, elle donne

$$\iiint_d (\varphi\,\Delta\psi - \psi\,d\varphi)\,d\omega = -\iint_\Sigma \left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right) d\Sigma.$$

De même que précédemment, pour que le premier membre disparaisse, il faut prendre la fonction ψ harmonique. Mais, dans l'intégrale double, φ n'est pas connu sur la sphère. On devra donc prendre des fonctions ψ dont la dérivée normale s'annule sur OP_0, P_0 étant le point culminant de la sphère dans chaque plan zOr, car il est évident que le point P_1 se trouve sur OP_0.

En conséquence, la fonction ψ devra être prise comme *solution du problème de Neumann extérieur pour la sphère*, correspondant aux valeurs de la dérivée normale égales à *zéro* sur la moitié de la sphère de profil OP_0, et à *une fonction arbitraire* τ sur l'autre moitié S.

Il est à remarquer que cela n'est pas strictement nécessaire, toute fonction ψ utilisable pouvant avoir des singularités dans le sillage ou, plus précisément, celui-ci nous étant inconnu, dans le cylindre circonscrit à la sphère, d'axe zz', et situé dans le sillage.

Mais, restreignons, comme nous l'avons dit, le choix de la fonction ψ, car, en ce cas, nous connaissons l'expression analytique d'une telle fonction. Pour l'obtenir, on remarquera que (*voir* M. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 42) si V est une fonction harmonique à l'extérieur de la sphère, il en est de même de la fonction

$$V_1 = \delta\frac{\partial V}{\partial\delta},$$

δ étant le rayon vecteur. Mais cette dernière fonction prend, lorsque δ tend vers le rayon de la sphère, qui est ici l'unité, $\frac{dV}{dn}$ comme valeur, donc la valeur même de la dérivée normale. La fonction V_1 est donc donnée, en tant que solution du problème de Dirichlet extérieur, par la formule de Poisson, savoir

$$V_1 = \frac{1}{4\pi}\iint_{S'} \frac{dV}{dn}\,\frac{\rho^2 - 1}{r^3}\,dS'.$$

On en déduit V par une simple intégration

$$V = -\int_{\delta}^{\infty} \frac{V_1}{\rho}\, d\rho$$

et l'on obtient, dans le cas qui nous occupe,

$$\psi = V = -\frac{1}{4\pi}\int_{\delta}^{\infty} d\rho \frac{1}{\rho}\iint_S \tau \frac{\rho^2 - 1}{r^3}\, dS.$$

Mais ce n'est pas de l'expression de ψ écrite sous cette forme que nous allons nous servir, cela pour des raisons de commodité, mais de son expression obtenue au moyen de la fonction de Neumann pour le problème extérieur, fonction que l'on connaît et qui s'écrit (*voir* M. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 47)

$$\gamma_A^M = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho r'} + \log\left(\operatorname{tang}\frac{\psi'}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right).$$

On en déduit alors

$$\psi(A) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \gamma_A^M \tau\, dS.$$

Dans ces formules, A et M sont des points extérieurs à la sphère, ce dernier venant sur la sphère au moment de l'intégration, $r = AM$ et $r' = A'M$, A' l'image de A, $\rho = O_1A$, $\psi' = \widehat{O_1A'M}$, $\gamma = \widehat{AO_1M}$, O_1 le centre de la sphère.

Lorsque M est sur la sphère, on a

$$\frac{\rho}{1} = \frac{1}{\rho'} = \frac{r}{r'}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho r'};$$

$$\rho^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\psi', \qquad r^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\gamma,$$

d'où l'on déduit

$$r(1 + \cos\psi') = 1 + r - \rho\cos\gamma.$$

Mais

$$\frac{\sin\psi'}{\rho} = \frac{\sin\gamma}{r},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\psi'}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\psi'}{2\cos^2\frac{\psi'}{2}} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\psi'}{1 + \cos\psi'} = \operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\rho\sin\gamma}{r(1 + \cos\psi')}$$

$$= \frac{\rho}{r}\,\frac{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{1 + \cos\psi'} = \frac{\rho}{r}\,\frac{1 - \cos\gamma}{1 + \cos\psi'} = \frac{\rho(1 - \cos\gamma)}{1 + r - \rho\cos\gamma}.$$

Il en résulte que

$$\gamma_A^M = \frac{2}{r} - \log\frac{1 + r - \rho\cos\gamma}{\rho(1 - \cos\gamma)}$$

et

$$\psi(A) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \tau\left[\frac{2}{r} - \log\frac{1 + r - \rho\cos\gamma}{\rho(1 - \cos\gamma)}\right] dS.$$

Désignons, dans le plan $z\,\mathrm{O}r$, par t et s les angles

$$t = \widehat{z\mathrm{O}_1\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad s = \widehat{z\mathrm{O}_1\mathrm{M}''},$$

M″ ayant le même z que M. De même, si α est la longitude du point M sur la sphère, de colatitude s, on a

$$r^2 = (\rho \cos t - \cos s)^2 + (\rho \sin t - \sin s \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha \sin^2 s$$

$$r = [1 + \rho^2 - 2\rho(\cos t \cos s + \sin t \sin s \cos\alpha)]^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\gamma = \cos t \cos s + \sin t \sin s \cos\alpha,$$

$$d\mathrm{S} = ds \sin s\, d\alpha.$$

Revenons maintenant à la formule de Green. L'intégrale triple étant nulle, l'intégrale double l'est aussi; mais elle est étendue à une surface de révolution sur laquelle les données ne dépendent que du profil, si l'on restreint, pour un instant, ainsi la définition de la fonction τ. Si s' est l'arc sur ce profil et α l'angle de rotation, on a

$$d\Sigma = ds'\, r\, d\alpha,$$

et l'intégrale double se réduit à une simple, comme il suit,

$$0 = \iint \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) ds'\, r\, d\alpha = 2\pi \int \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) r\, ds.$$

Cette dernière intégrale s'écrit encore, si l'on tient compte des conditions du problème et si l'on désigne par QM l'arc de cercle de la sphère (R) joignant le point Q situé sur $z'\mathrm{O}$ à M′ situé sur (λ), et par σ l'arc sur cette ligne

$$\int_{\mathrm{P}_1\mathrm{M}'} \varphi \frac{d\psi}{dn} r\, d\sigma + \int_{\mathrm{QM}'} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) r\, ds' = 0,$$

ou encore

$$\frac{1}{\mathrm{R}_2} \int_{\mathrm{P}_1\mathrm{M}'} \varphi \frac{d\psi}{dn} r\, d\tau + \int_{\mathrm{QM}'} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) \sin\gamma'\, d\gamma' = 0,$$

γ' étant un angle dont la signification est évidente.

Occupons-nous de la première intégrale de cette formule, et cherchons l'expression de la dérivée normale qui y intervient. En dérivant dans l'expression de ψ donnée ci-dessus, on obtient

$$\frac{d\psi}{dn} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(s) \sin s\, ds \int_0^{2\pi} \frac{d}{dn}\left[\frac{2}{r} - \log \frac{1 + r - \rho\cos\gamma}{\rho(1 - \cos\gamma)}\right] d\alpha.$$

On a donc

$$\int_{\mathrm{P}_1\mathrm{M}'} \varphi \frac{d\psi}{dn} r\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(s) \sin s\, ds \int_{\mathrm{P}_1\mathrm{M}'} \varphi r(z)\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d}{dn} [\quad]\, d\alpha.$$

Mais

$$\frac{d[\ ]}{dn} = \frac{\partial[\ ]}{\partial\rho}\sin(t-\theta') + \frac{1}{\rho}\frac{\partial[\ ]}{\partial t}\cos(t-\theta')$$

où

$$d\sigma = \frac{dz}{\cos\theta'} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\theta' = r'(z).$$

Il en résulte que

$$\frac{d[\ ]}{dn}d\sigma = \left[\frac{\partial[\ ]}{\partial\rho}\sin t + \frac{1}{\rho}\frac{\partial[\ ]}{\partial t}\cos t - r'\left(\frac{\partial[\ ]}{\partial\rho}\cos t - \frac{1}{\rho}\frac{\partial[\ ]}{\partial t}\sin t\right)\right]dz,$$

le crochet désignant l'expression

$$\frac{2}{r} - \log\frac{1+r-\rho\cos\gamma}{\rho-\rho\cos\gamma}.$$

Les dérivées par rapport à ρ et à t se calculent aisément et s'écrivent

$$\frac{\partial[\ ]}{\partial\rho} = \frac{-2(\rho-\cos\gamma)}{(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dfrac{\rho-\cos\gamma}{(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \cos\gamma}{1+(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}-\rho\cos\gamma} + \frac{1}{\rho},$$

$$\frac{\partial[\ ]}{\partial t} = \left[\frac{-2\rho\sin\gamma}{(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\dfrac{\rho\sin\gamma}{(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} + \rho\sin\gamma}{1+(1+\rho^2-2\rho\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}-\rho\cos\gamma} + \frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma}\right]\frac{d\gamma}{dt}.$$

Ces expressions, introduites dans celle de la dérivée normale, permettent de transformer encore la première intégrale. Cependant, avant de le faire, donnons à celle-ci une nouvelle forme très importante pour la suite. Écrivons-la

$$\int_{P_1M'} \varphi\frac{d\psi}{dn} r\,d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(s)\sin s\,ds \int_{P_1M'} \sigma\rho\sin t\,d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d[\ ]}{dn}d\alpha.$$

Considérons maintenant la seconde intégrale de la formule fondamentale

$$\int_{QM'}\left(\varphi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\varphi}{dn}\right)\sin\gamma'\,d'\gamma.$$

Elle tend vers zéro lorsque R augmente indéfiniment. En effet, tout d'abord, ψ s'annule à l'infini comme $\frac{1}{R}$, donc $\frac{d\psi}{dn}$ s'y annule comme $\frac{1}{R_2}$. Je dis que φ *est à l'infini de l'ordre de* R. Pour le voir, désignons par B un point sur le cercle (R), par D un point fixe extérieur à la sphère, et par C le point de rencontre de la verticale en D avec l'horizontale en B. On a

$$\int_D^C \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \int_C^B \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \varphi(c) - \varphi(D) + \varphi(B) - \varphi(C) = \varphi(B) - \varphi(D).$$

Mais

$$\varphi(B) - \varphi(D) = \varepsilon_1\overline{CD} - \varepsilon_2\overline{BC},$$

ε_1 et ε_2 étant, en vertu du fait que $\frac{d\varphi}{dr} < 1$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial z} < 1$ et du théorème de la moyenne, inférieurs à l'unité et positifs. Comme d'ailleurs

$$\overline{CD} + \overline{BC} < 2\,\overline{BD}$$

on peut écrire

$$\varphi(D) - \overline{BD} < - \overline{CB} + \varphi(D) < \varphi(B) < \varphi(D) + 2\,\overline{BD} = 2R + \mu,$$

et

$$- R + \nu < \varphi(B) < 2R + \mu,$$

μ et ν étant deux nombres de modules inférieurs à un nombre fixe.

D'ailleurs $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ est de l'ordre de $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, donc est aussi en module inférieur à un nombre fixe. L'intégrale considérée est donc bien de l'ordre de $\frac{1}{R}$ et tend vers zéro avec ce nombre.

Posons maintenant

$$G(s) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{R^2} \int_{P_1 M'} \sigma\rho \sin t \, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d[\;\;]}{dn} \, d\alpha.$$

On aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau(s) \sin s \, G(s) \, ds = 0.$$

Cette équation doit donc avoir lieu *quelle que soit la fonction* τ. Il en résulte, d'après le lemme fondamental du Calcul des variations, que l'*on doit avoir*

$$G(s) \equiv 0.$$

C'est l'équation du problème. Elle est indépendante de la fonction ψ.

Cette équation est d'un type tout à fait spécial, car elle est obtenue comme limite d'une certaine expression. Cette limite est une expression finie, car l'intégrale prise sur $P_1 M'$, et qui à la limite est prise sur la ligne cherchée (λ), est un infiniment grand de l'ordre de R^2. Il suffit, pour le voir, de remarquer qu'elle porte sur σ et ρ, quantités qui introduisent un même ordre de grandeur que R^2. Quant à la dérivée normale qui figure dans la seconde intégrale, elle n'introduit pas d'infiniment grand.

On peut donc dire que, *ici, comme dans le cas plan étudié au chapitre précédent, on est conduit, par l'application de la méthode indirecte, à une équation intégrale d'un type spécial,* qui peut être ramenée, d'ailleurs, à une équation *intégro-différentielle* lorsqu'on peut supposer que ρ ou t varie dans un sens constant, comme c'est le cas pour le cercle ou la sphère.

Ce type d'équation intégrale qui dépend d'un paramètre s consiste, en gros, à chercher une ligne inconnue indépendante de ce paramètre, de façon que le résultat de l'intégration sur elle d'une fonction connue soit donné à l'avance.

Afin de nous rendre compte du degré de généralité du résultat obtenu ci-dessus pour la sphère, rappelons-nous le point de départ. L'équation obtenue exprime que dans le domaine délimité par la ligne (λ), solution de cette équation, la formule de Green est satisfaite pour toute fonction harmonique ψ solution du problème de Neumann pour la sphère, relative aux valeurs de la dérivée normale nulles sur la moitié de la sphère située vers l'amont, et égales à une fonction τ arbitraire sur l'autre moitié S. On a vu que ceci restreint déjà la généralité, mais que *cela était nécessaire*. En cours de route, nous avons apporté cependant une nouvelle restriction qui, elle, n'était pas nécessaire, sinon pour des raisons de commodité et dans le but d'obtenir le résultat le plus simple possible, résultat dont on se contentera pour l'instant, vu la difficulté de la question. Cette restriction consiste en ce que la fonction arbitraire τ prise comme valeur pour la dérivée normale sur la demi-sphère, a été supposée avoir la même valeur sur chaque méridien de la sphère passant par l'axe de révolution. Cette rectriction est, dans le fond, naturelle, rien n'échappant dans cette étude, au caractère de révolution du mouvement. Son introduction a permis de se débarrasser d'une intégration autour de l'axe zz'.

Cependant, et c'est là une remarque très importante, *cette restriction n'est qu'apparente*. Rien ne le laissait prévoir *a priori*, c'est pourquoi, du reste, nous l'avons faite. Nous allons la lever maintenant et montrer que le résultat est le même, c'est-à-dire que l'on obtient la même équation du problème.

Pour le voir, nous n'avons qu'à reprendre les calculs précédents concernant la transformation de la formule de Green, à partir du moment où l'on restreint la définition de la fonction τ. En supposant donc cette fonction simplement continue (et encore, cela n'est pas nécessaire), on doit remplacer la formule qui est la deuxième de ces transformations, par la suivante

$$\int_{P_1M'} \varphi r\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{dn}\, d\alpha + \iint_{(R)} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) r\, ds'\, d\alpha = 0$$

[(R) étant la portion utile de la sphère de rayon R délimitant le domaine d(R)], la première restant la même, savoir

$$0 = \iint \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) ds'\, r\, d\alpha.$$

Les troisième, quatrième, cinquième et sixième formules deviennent alors, comme il est facile de le voir, les suivantes

$$\frac{1}{R^2}\int_{P_1M'} \varphi r\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{dn}\, d\alpha + \iint \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn}\right) \sin\gamma'\, d\gamma'\, d\alpha = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dn} = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \tau(S) \frac{d}{dn}[\quad]\, dS,$$

$$\int_{P_1M'} \varphi r\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{dn}\, d\alpha = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \tau(S)\, dS \int_{P_1M'} \varphi r\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d[\quad]}{dn}\, d\alpha$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\iint_S \tau(s)\, dS \int_{P_1M'} \sigma\rho \sin t\, d\sigma \int_0^{2\pi} \frac{d[\quad]}{dn}\, d\alpha.$$

Le raisonnement concernant la seconde intégrale de la formule fondamentale reste inchangé.

En désignant donc par $G(s)$ la même expression que précédemment, on écrira l'équation

$$\iint_S \tau(S)\, G(s)\, dS = 0$$

qui devra avoir lieu quelle que soit la fonction τ. C'est une intégrale double que l'on obtient cette fois, mais le lemme fondamental du calcul des variations s'applique aussi bien. Il en résulte que l'équation du problème est encore

$$G(s) \equiv 0.$$

Pour terminer, faisons remarquer que la méthode utilisée dans ce chapitre, encore qu'elle parte du même principe que celle utilisée au chapitre précédent, n'est pas exactement la même. Ici, on a considéré, en effet, directement le potentiel des vitesses φ, à qui l'on a appliqué la méthode, tandis que là, on avait appliqué celle-ci à la fonction θ, inclinaison de la vitesse du mouvement plan. On ne pouvait évidemment pas faire la même chose ici, cette inclinaison n'étant pas une fonction harmonique. Mais ce que l'on peut faire, c'est appliquer la méthode sous la même forme qu'ici au mouvement plan du chapitre précédent, le potentiel des vitesses étant, dans ce cas encore, une fonction harmonique. On obtiendrait ainsi une nouvelle équation du problème à laquelle satisferait la ligne de jet ([illegible]) et il serait intéressant de comparer cette équation avec celle déjà obtenue au chapitre précédent.