

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH PÉRÈS

LUCIEN MALAVARD

**Application du calcul expérimental rhéoelectrique à la solution
de quelques problèmes d'élasticité**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 20 (1941), p. 363-426.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20_363_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Application du calcul expérimental rhéoélectrique
à la solution de quelques problèmes d'élasticité;*

PAR JOSEPH PÉRÈS ET LUCIEN MALAVARD.

Avant-propos.

Nous rendons compte, dans le présent travail, de diverses réalisations concernant la solution, par analogies électriques, de problèmes d'Élasticité. Les études correspondantes furent poursuivies, malgré d'autres occupations, pendant l'hiver et le printemps 1939-1940 : l'essai dont il est rendu compte au paragraphe VIII (B) a été terminé le dimanche 9 juin 1940.

D'autres réalisations étaient en préparation et nous pensions attendre leur achèvement pour une publication d'ensemble. Mais le travail expérimental s'est trouvé interrompu pendant quelques mois, de sorte que nous ne présentons aujourd'hui qu'un premier Mémoire, quittes à revenir sur le sujet pour envisager divers prolongements de l'étude et de nouvelles applications.

Introduction.

En installant, à l'Institut de Mécanique de la Faculté des Sciences de Paris, un Laboratoire d'Analogies électriques, nous avons eu d'abord en vue l'application du Calcul expérimental analogique à des questions d'Hydro- et d'Aérodynamique. Deux fascicules précédents des *Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air* ⁽¹⁾ (nos 57 et 153) concernent l'étude, par la méthode électrique, des

⁽¹⁾ L. MALAVARD, *Application des analogies électriques à la solution de quelques problèmes de l'Hydrodynamique* (fasc. 57, 1934) et *Étude de quelques problèmes techniques relevant de la théorie de l'aile; application à leur solution de l'analogie rhéoélectrique* (fasc. 153, 1939).

problèmes de l'aile portante. On trouvera, dans la Bibliographie qui termine le second de ces volumes (pages 173-174), l'indication de divers travaux sur les applications de l'expérimentation analogique en Mécanique des Fluides.

D'autres applications, dans des domaines très différents de la Physique mathématique, sont possibles, et ont été effectivement envisagées. Nous avons brièvement rendu compte, dans un travail de 1938 ⁽¹⁾, de quelques réalisations obtenues dans notre Laboratoire et relatives à des questions d'Élasticité et d'Électrotechnique.

Des recherches sont actuellement en cours pour l'étude systématique des applications du Calcul expérimental analogique aux problèmes de l'équilibre élastique. Il n'est pas question d'en donner ici une vue d'ensemble : *nous nous limitons à quelques questions, dont la solution se ramène toujours à la détermination d'un potentiel harmonique dont on peut faire dépendre le calcul des tensions et celui des déformations.*

Divers modes d'expérimentation analogique sont alors possibles et ont été utilisés. Il n'est pas inutile, pour donner au Lecteur une idée de l'état actuel de la question, de résumer ici tout d'abord les travaux antérieurs ⁽²⁾.

Les principaux concernent l'expérimentation par la méthode de la membrane élastique ou ses variantes. En 1903, L. Prandtl ⁽³⁾ signale que la *fonction de tension* φ qui intervient dans l'étude de la torsion d'un barreau cylindrique, fonction qui satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \text{const.},$$

⁽¹⁾ *La méthode d'analogies rhéographiques* (Bulletin de la Société Française des Électriciens, n° 92, août 1938). Cf. aussi L. MALAVARD, *Les analogies électriques comme méthode auxiliaire de la photoélasticité* (C. R. Acad. Sc., 4 janvier 1938).

⁽²⁾ Ce sera l'occasion de préciser et compléter les indications données dans une Conférence au 5^e Congrès de Mécanique appliquée : cf. J. PÉRÈS, *Les méthodes d'analogie en Mécanique appliquée* (pages 9-19 des *Proceeding of the 5 th Congress of applied Mechanics*), Cambridge, Mass., septembre 1938).

⁽³⁾ L. PRANDTL, *Zur torsion von prismatischen Stäben* (Physikal. Zeitschrift, t. 4, 1903, p. 758).

peut être identifiée avec la fonction qui définit les flèches d'une membrane élastique tendue uniformément sur un cadre représentant la section droite du barreau et soumise à une pression uniforme; la réalisation est aisée et des mesures sur la membrane donnent une connaissance complète de la fonction de tension et des efforts.

L'idée de Prandtl fut mise en œuvre, pour la première fois, par Hugo Anthes ⁽¹⁾ et se retrouve à la base des travaux très importants de Griffith et Taylor ⁽²⁾ qui, dans leurs réalisations, remplacent la membrane par un film d'eau de savon. Quand membrane ou film subissent la même pression sur leurs deux faces, les flèches, dans le cas de flexions petites, définissent une fonction *harmonique* et il suffit d'imposer les flèches au pourtour, en tendant la membrane sur un cadre convenable, pour résoudre expérimentalement un problème de Dirichlet. La méthode de la membrane ou du film s'appliquera donc, non seulement aux problèmes de torsion, mais aux autres questions d'élasticité (flexion, somme des contraintes principales dans un état élastique plan) qui se réduisent, en dernière analyse, à des problèmes de Dirichlet. Griffith et Taylor ont envisagé en détail les questions de flexion et de torsion, en reliant d'ailleurs à leur méthode d'intéressants développements théoriques. On pourra aussi se reporter, à ces sujets, aux travaux ultérieurs de Cushman ⁽³⁾, de Quest ⁽⁴⁾, de

⁽¹⁾ H. ANTHES, *Versuchmethoden zur Ermittlung der Spannungsverteilung, etc.* (*Dinglers Polytechnischen Journal*, 1906).

⁽²⁾ A. A. GRIFFITH et G. I. TAYLOR, *The use of soap films in solving torsions problems* (*Tech. Rep. Aer. Research Committee*, 1917-1918, vol. 3, p. 920; R. et M. n° 334); *The application of soap films to the determination of the torsion and flexion of holloy shafts* (*Id.*, p. 938; R. et M. n° 392); *The problem of flexure and its solution by the soap film method* (*Id.*, p. 950; R. et M. n° 399). A. A. GRIFFITH, *The determination of the torsional stiffness and strength of cylindrical bars of any shape* (*Id.*, p. 910; R. et M. n° 334); *The use of soap film in solving stress problems* (1^{er} Congrès de Mécanique appliquée, Delft 1924, p. 39).

⁽³⁾ CUSHMAN, *Shearing stresses in torsion and bending by membrane analogy* (*Trans. amer. Soc. mech. Engineers*, t. 54, 1932).

⁽⁴⁾ H. QUEST, *Eine experimentelle Lösung des Torsions-problems* (*Ingenieur Archiv*, t. 4, 1933, p. 520).

Reichenbacher ⁽¹⁾; nous signalerons aussi le Mémoire de Piccard et Baes ⁽²⁾, qui substituent à la membrane la surface de séparation de deux liquides non miscibles et les essais pour la représentation, dans les analogies en question, des effets de plasticité ⁽³⁾; enfin la détermination de la somme des contraintes dans un état élastique plan a été envisagée par Weibel ⁽⁴⁾, Mac Givern et Supper ⁽⁵⁾, etc.

L'analogie électrique amène également à la solution de problèmes de Dirichlet, la fonction harmonique cherchée étant identifiée au potentiel électrique dans un conducteur : il suffit de régler l'alimentation de façon à avoir à la frontière du conducteur (lequel est le plus souvent représenté par un *bassin électrique*) des valeurs assignées du potentiel; des modèles électriques permettront donc de traiter les problèmes d'équilibre élastique envisagés plus haut : ce sont des réalisations de cet ordre que présentent les travaux de Stone ⁽⁶⁾, Biezeno et Koch ⁽⁷⁾, Cranz ⁽⁸⁾, Meyer et Tank ⁽⁹⁾, ainsi que nos

⁽¹⁾ H. REICHENBÄCHER, *Selbsttätige Ausmessung von Seifenhautmodellen* (*Ingenieur Archiv*, t. 7, 1936, p. 257).

⁽²⁾ A. PICCARD et L. BAES, *Mode expérimental nouveau relatif ... à la solution du problème de la torsion* (*C. R. du 2^e Congrès de Mécanique appliquée*, Zurich 1936, p. 195).

⁽³⁾ Cf. à ce sujet A. NADAI, *Zeits. ang. Math. Mech.*, t. 3, 1923, p. 442, et E. TREFFTZ, *Zeits. ang. Math. Mech.*, t. 5, 1925, p. 64.

⁽⁴⁾ E. WEIBEL, *Studies in Photoelastic Stress Determination* (*Trans. americ. Soc. Mech. Eng.*, t. 56, 1934, p. 637).

⁽⁵⁾ J. G. MAC GIVERN et H. L. SUPPER, *A membrane analogy suppleting photo-elasticity* (*Journ. Franklin Inst.*, t. 217, 1934, p. 491); H. L. SUPPER, *Photoélasticimétrie et apsidométrie* (fasc. 106 des *Publications Sc. et Techn. du Ministère de l'Air*).

⁽⁶⁾ STONE, *The general torsion problem. Solution by electric analogy* (*3^e Congrès de Mécanique appliquée*, t. 2, 1930, p. 167).

⁽⁷⁾ BIEZENO et KOCH, *Über einige Beispiele zur elek. Spannungsbestimmung* (*Ingenieur Archiv*, t. 4, 1933, p. 384).

⁽⁸⁾ H. CRANZ, *Experimentelle Lösung von Torsionsaufgaben* (*Ingenieur Archiv*, t. 4, 1933, p. 506).

⁽⁹⁾ H. MEYER et F. TANK, *Über ein verbessertes elek. Verfahren zur Auswertung des Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und seine Anwendung bei photoelast. Untersuchungen* (*Helvetica Physica Acta*, t. 8, 1935).

publications citées plus haut ⁽¹⁾. Ces divers travaux ont été indépendants les uns des autres et il y a des différences assez notables dans les techniques suivies.

Nous nous bornerons à quelques remarques très générales. Dans la résolution, par analogies électriques, de problèmes de Dirichlet, on ne peut remplir en général de façon complète les conditions imposées à la frontière : le réglage ne peut en effet porter que sur les potentiels des électrodes d'alimentation, lesquelles sont en nombre fini, alors que les valeurs assignées du potentiel à la frontière représentent une fonction d'une variable. Cette difficulté n'existe pas dans le cas de réalisations par membrane ou film de savon, la donnée des potentiels à la frontière déterminant parfaitement la forme du cadre qui soutiendra film ou membrane.

Dans leurs expériences, Biezeno et Koch, aussi bien que Cranz, utilisent un champ analogue (plaque conductrice ou bassin) dont l'étendue dépasse le domaine dans lequel il s'agit de définir le potentiel harmonique : les électrodes d'alimentation peuvent ainsi être placées un peu en dehors de la zone utile du champ. Meyer et Tank limitent leur bassin électrique par une frontière isolante enduite d'un vernis un peu conducteur, ce qui permet de répartir le courant d'alimentation, amené en divers points de la frontière par des électrodes ponctuelles. Nous avons préféré nous en tenir au montage qui avait été satisfaisant pour le « Calculateur d'ailes » ⁽²⁾, et nous limitons toujours le champ étudié dans le bassin électrique par des électrodes relativement larges séparées par des intervalles isolants assez étroits : la loi donnée des potentiels au contour est ainsi remplacée par une loi approchée de variation par paliers, dont chacun correspond à une électrode. Les réalisations ainsi obtenues nous paraissent les plus aisées; elles sont

⁽¹⁾ Cf. p. 363 et 364, note ⁽¹⁾.

⁽²⁾ Les montages du Calculateur d'ailes, dont les premières réalisations sont de 1932 : L. MALAVARD, *Sur un problème concernant l'aile d'envergure finie* (C. R. Acad. Sc., 2 nov. 1932) réalisent des données à la frontière du champ qui comprennent celles de Dirichlet comme cas très particulier. Cf. aussi les remarques de L. Malavard dans l'article : *Réalisation expérimentale de l'analogie de M. J. Larras concernant le problème analytique du clapotis* (Ann. Ponts et Chaussées, fasc. 14, 1936).

très satisfaisantes pourvu que l'on choisisse convenablement les dimensions des électrodes et que l'on prenne des électrodes assez nombreuses, ce qui est possible sans aboutir à des réglages pénibles quand les circuits d'alimentation sont convenablement étudiés (on utilise, sans modifications, les circuits du calculateur d'ailes). Enfin on verra dans la suite que les réalisations en question permettent, par la mesure des intensités de courant arrivant au bassin par les diverses électrodes, d'atteindre directement, et avec une précision pratiquement très suffisante, la dérivée normale du potentiel obtenu, c'est-à-dire, dans les questions d'élasticité, les efforts à la frontière.

Ces diverses questions, dont l'intérêt pratique est notable, sont envisagées en détail dans la suite. Mais, de plus, nous abordons la résolution pratique des problèmes de l'élasticité en nous plaçant à un point de vue nouveau et qui nous a semblé mériter quelques développements. Les réalisations dont il a été question jusqu'ici, aussi bien par l'analogie électrique que par l'analogie de la membrane, concernent toujours des potentiels dont les *dérivées* détermineront les tensions élastiques. Or il est toujours délicat de passer d'une fonction qui n'est point analytiquement explicitée, mais qui est seulement définie par des mesures, à ses dérivées : le procédé graphique, par mesure de l'espacement des lignes de niveau, donne une précision très modérée; on peut, il est vrai, chercher à employer des procédés plus directs ⁽¹⁾, mais sans éviter l'objection de principe que les erreurs faites dans la réalisation d'une fonction entraînent une plus grande incertitude dans la détermination de ses dérivées. Cette objection est assez grave car ce sont les efforts élastiques, donc les dérivées, qui sont les éléments en général les plus intéressants au point de vue technique et les difficultés dans leur détermination précise se manifestent dans les zones les plus intéressantes du champ, celles (conçues par exemple) où les efforts sont les plus grands. Nous avons donc cherché à obtenir directement, par expérimentation analogique, les dérivées en question, le potentiel électrique dans le

(¹) On en verra des exemples dans la suite, et il convient de rappeler, du même point de vue, les élégants procédés optiques utilisés pour la mesure des pentes de la membrane ou du film, dans les analogies correspondantes.

bassin s'identifiant donc, non plus avec une fonction de tension φ , mais avec l'une de ses dérivées, φ'_x par exemple.

Les dérivées en question n'ont plus des valeurs connues à la frontière du champ, de sorte que leur réalisation analogique ne peut plus se faire par les montages permettant la solution pratique de problèmes de Dirichlet, mais pose des problèmes notablement plus compliqués. Il faut, pour aboutir, toute la souplesse de la méthode d'analogie rhéoélectrique, laquelle prend dans ces questions un avantage très net sur les autres méthodes analogiques. Les réalisations obtenues permettent d'ailleurs d'envisager des extensions assez notables du champ d'application du calcul expérimental électrique, extensions auxquelles il a été fait allusion plus haut et que nous espérons avoir l'occasion d'exposer ultérieurement. Quelques-uns des résultats qui suivent ont été résumés dans trois notes des *Comptes rendus* (26 août, 9 septembre, 7 octobre 1940).

L'analogie électrique peut également être utilisée dans des problèmes concernant des équations plus générales que celles de Laplace (¹). Nous laissons de côté ces extensions dans le présent Mémoire.

I. — Principes généraux de la méthode.

Il s'agit d'obtenir, comme potentiel d'une répartition de courants dans le bassin électrique, une fonction harmonique $\varphi(x, y)$, définie dans une aire ($\mathcal{A}$) par des données à la frontière de ($\mathcal{A}$). Les principes suivis dans nos réalisations sont en général les suivants.

L'aire ($\mathcal{A}$) sera représentée par une région du bassin limitée par :

- des parois conductrices (électrodes d'alimentation) dans les portions de la frontière pour lesquelles le potentiel φ est constant;
- des parois isolantes dans les portions pour lesquelles la dérivée normale $\frac{d\varphi}{dn}$ est nulle;
- enfin des parois portant des électrodes distinctes e séparées par

(¹) C'est ainsi que la torsion des arbres de révolution peut être étudiée dans un bassin électrique de profondeur variable (Cf. THUM et BAUTZ (*Z. V. D. I.*, 1934-1935), SALET (*Assoc. tech. Mar. Aer.*, 1936-1938).

d'étroits intervalles isolants, lorsque l'on a à remplir des conditions plus complexes, telles que, par exemple :

1° Loi donnée des valeurs de φ sur une portion de la frontière (données de Dirichlet);

2° Loi donnée des valeurs de $\frac{d\varphi}{dn}$ (données de Neumann);

3° Loi donnée des valeurs d'une combinaison $\varphi - k \frac{d\varphi}{dn}$, k pouvant être fonction du point considéré sur la paroi (c'est le cas du « Calculateur d'ailes », cas sur lequel nous n'aurons pas à revenir ici).

Chaque électrode e est alimentée par un potentiomètre p qui permet de régler le courant qu'elle débite ou son potentiel. Il est en général commode d'intercaler une résistance R entre l'électrode et la prise mobile de son potentiomètre d'alimentation; soit alors, pour des conditions données de réglage,

φ le potentiel de l'électrode e ,

$\bar{\varphi}$ le potentiel de l'extrémité de R qui est à la prise du potentiomètre,

soit enfin

$$\Delta\varphi = \bar{\varphi} - \varphi;$$

l'intensité de courant débitée par l'électrode (*prise positive quand le courant entre dans le bassin*) est

$$(1) \quad i = \frac{\Delta\varphi}{R}.$$

Mais, en désignant par σ la résistivité du liquide qui remplit le bassin et par h la hauteur de ce liquide, on a, d'après les formules générales de l'analogie, l'expression

$$(2) \quad i = \frac{h}{\sigma} \frac{d\varphi}{dn} \varepsilon$$

pour l'intensité de courant débitée à travers un élément ε de frontière (*la normale n étant, d'après la convention précédente sur le signe de i , prise extérieure*).

La comparaison des relations (1) et (2) permet d'écrire, pour chaque électrode e ,

$$(3) \quad \frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{h\varepsilon}{\sigma} \left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\text{moy}},$$

ε étant la largeur de cette électrode, y compris la moitié de chacun des intervalles isolants qui la bordent, $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{\text{moy.}}$ étant une valeur moyenne de la dérivée normale $\frac{d\varphi}{dn}$ pour l'intervalle considéré.

Nous utiliserons dans la suite la relation (3) pour atteindre la dérivée normale $\frac{d\varphi}{dn}$ à la frontière du champ, la valeur $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{\text{moy.}}$ qui y intervient étant attribuée au point milieu de l'électrode.

Dans les applications numériques que nous ferons de cette formule (3), les résistances R seront toujours mesurées en ohms, la résistivité en ohms-centimètres, la profondeur h en centimètres. Il convient de remarquer que, pour l'évaluation des autres termes de la formule : $\varepsilon, \frac{d\varphi}{dn}$, rien n'empêche de prendre une unité de longueur différente, s'il est plus commode. L'échelle des potentiels est d'ailleurs arbitraire, une modification de cette échelle revenant à modifier φ par un facteur constant, dont il est toujours aisé de retrouver la valeur.

Après ces explications, il est facile de comprendre comment s'effectuera pratiquement, sur la frontière ou sur une partie de celle-ci, l'établissement de données de Dirichlet 1° ou de Neumann 2°.

La loi donnée pour les valeurs au contour du potentiel ou de sa dérivée normale permet de fixer la valeur de φ ou celle de $\frac{d\varphi}{dn}$ qui correspond au point milieu de chaque électrode : c'est cette valeur que l'on attribuera à l'électrode, soit comme potentiel, soit comme $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{\text{moy.}}$. Distinguons les deux cas.

Dans le cas 1° le réglage se fera en agissant sur les potentiomètres p de façon à amener les potentiels φ des électrodes aux valeurs ainsi fixées.

Dans le cas 2°, le $\frac{d\varphi}{dn}$ calculé au milieu de l'électrode est pris, comme on l'a vu, comme $\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_{\text{moy.}}$. Pour une résistance R choisie, la relation (3) fait alors connaître le $\Delta\varphi$ que l'on ajustera à sa valeur au moyen du potentiomètre de réglage.

Les résistances R sont *a priori* superflues dans le cas 1°. Mais il faut

cependant les prévoir dans le montage si l'on veut déterminer les valeurs au contour de $\frac{d\varphi}{dn}$ au moyen des relations (3).

Nous n'insisterons pas sur les détails pratiques de réalisation pour lesquels nous renverrons le lecteur aux travaux de L. Malavard, cités au début.

Rappelons seulement que la mesure des potentiels se fait par méthode de zéro sur l'échelle d'un pont potentiométrique p' . Dans le cas des données de Dirichlet, le réglage porte sur des valeurs du potentiel et le pont p' est branché directement aux bornes du circuit d'ensemble. Dans le cas des données de Neumann le réglage porte sur des différences de potentiel : il est alors commode de prévoir pour le pont p' une alimentation indépendante et les mesures des différences de potentiel se feront par opposition [cf. page 155 du second Mémoire cité note (1)]. La figure suivante 5 donne l'exemple de ces deux types de montage.

Indiquons aussi que, pour un montage donné, il y a intérêt à choisir convenablement les valeurs des résistances des potentiomètres d'alimentation, de façon à diminuer autant que possible l'interdépendance des réglages et à réduire au minimum les tâtonnements qu'ils impliquent.

II. — Discussion de quelques exemples très simples.

Avant d'aborder les applications à l'Élasticité, nous envisagerons ici divers modèles analogiques de champs très simples (champ uniforme et champ hyperbolique). Les essais correspondants sont bien antérieurs aux autres; ils avaient un caractère préliminaire et ne concernaient que des réalisations assez sommaires. Ils ne rendent donc pas compte de la précision actuelle de l'expérimentation rhéoelectrique. Nous pensons qu'il est cependant intéressant d'en faire état dans le présent travail, d'une part pour mettre en évidence, dans des cas élémentaires, divers aspects de la méthode, d'autre part, et surtout, pour fixer en gros les idées, en ce qui concerne l'effet des électrodes de contour.

D'après les considérations du paragraphe précédent, il est clair

que la réalisation analogique d'un champ harmonique $\varphi(x, y)$, par électrodes de contour e , est en général approximative :

— dans le cas de données aux limites de Dirichlet, le circuit d'alimentation de chaque électrode est réglé de façon à amener cette électrode au potentiel que devrait avoir son milieu; on remplace ainsi la loi donnée (et en général continue) des potentiels à la frontière par une loi approchée représentée par une courbe en escalier;

— dans le cas de données aux limites de Neumann, l'intensité de courant arrivant au bassin par chaque électrode est ajustée à une valeur moyenne correspondant au $\frac{d\varphi}{dn}$ du milieu.

Tenant compte des nombreuses confrontations faites entre le calcul et l'expérimentation analogique, nous donnerons, dans un autre travail, une discussion détaillée des petites perturbations apportées dans le champ par les électrodes de contour et nous préciserons quelques conditions d'un choix optimum de ces électrodes. Les exemples qui suivent suffisent à en justifier pratiquement l'emploi.

A. *Cas d'un champ uniforme.* — On obtient immédiatement un tel champ dans un bassin électrique rectangulaire ABCD dont deux bords opposés AB et CD sont conducteurs et constituent les électrodes d'alimentation, portées à des potentiels que nous prendrons par convention 0 et 100, tandis que les bords BC et DA sont isolants.

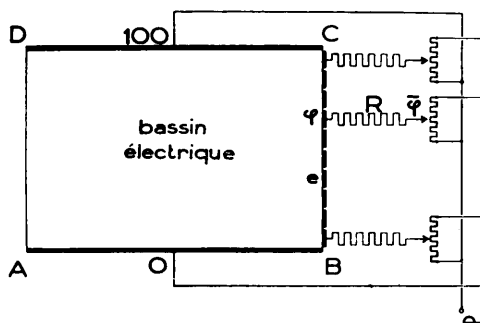
La réalisation est *rigoureuse*, elle est la plus simple possible et il semble que l'examen du cas en question soit ainsi épuisé.

Il est pourtant tout indiqué d'expérimenter d'autres réalisations du même champ, réalisations naturellement plus complexes et qui sont par suite sans intérêt pratique, mais sur lesquelles apparaît très clairement l'effet d'électrodes séparées constituant une frontière.

On peut, par exemple, remplacer la barrière isolante du bord BC par un ensemble d'électrodes (exemple *fig. 2* et 3). Pour conserver le champ uniforme dans le bassin électrique ainsi modifié, on aura à faire un réglage concernant les électrodes du segment BC, réglage qui peut porter soit sur les potentiels de ces électrodes, soit sur les intensités de courant qu'elles débitent. D'une part, en effet, la loi linéaire des potentiels φ sur BC est connue et l'on peut donc fixer

immédiatement la valeur du potentiel qui convient à une électrode : c'est le réglage *par données de Dirichlet sur BC*, lequel s'effectue, conformément aux principes du paragraphe I, par le montage que schématise la figure 1. D'autre part, la dérivée normale $\frac{d\varphi}{dn}$ est nulle

Fig. 1.



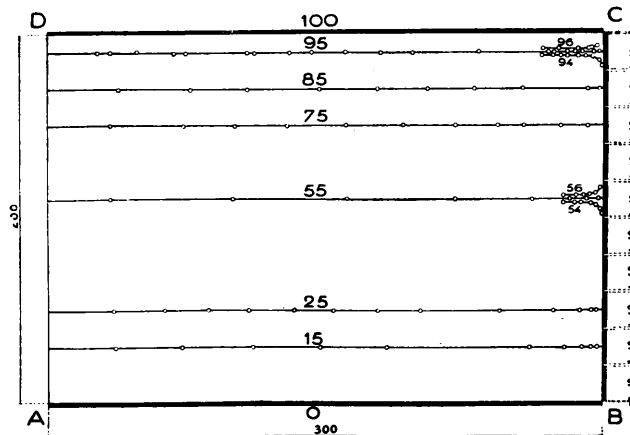
sur BC, de sorte que l'intensité de courant à travers chaque électrode doit être nulle : c'est le réglage *par données de Neumann*, particulièrement simple dans le cas en question, puisqu'il s'obtient en laissant les diverses électrodes de BC sans liaison avec le circuit extérieur.

Des considérations analogues s'appliqueront à des champs plus compliqués et l'on constate que, quel que soit le mode de réglage adopté, et sans qu'il soit besoin d'utiliser des modèles très soignés, on retrouve dans le bassin, à l'échelle de la réalisation, la forme des lignes de niveau $\varphi = \text{const.}$ ainsi que la graduation correcte de ces lignes. L'effet des électrodes ne se manifeste qu'au voisinage immédiat de la paroi correspondante, dans une région assez peu étendue pour qu'il soit possible, en général, d'y rétablir exactement le graphique des courbes $\varphi = \text{const.}$

On s'en rendra compte sur les figures 2 et 3, qui sont relatives au champ uniforme, pour deux modèles différents par la disposition des électrodes. Les points obtenus par l'expérimentation analogique pour les valeurs de φ considérées définissent parfaitement les droites équipotentiels théoriques correspondantes, sauf au voisinage immédiat de BC : dans cette région les équipotentiels expérimentales

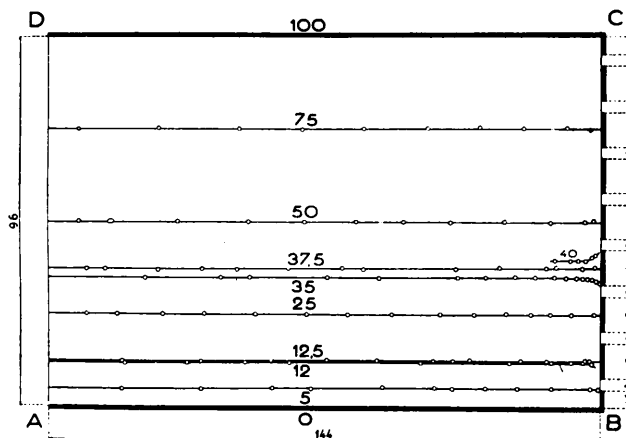
(celles du moins dont le potentiel n'est pas égal à celui d'une électrode) s'incurvent pour venir se terminer sur un intervalle isolant.

Fig. 2.



Chaque essai comportait d'ailleurs d'autres vérifications. On a vu plus haut que, d'après la nature du champ à obtenir dans le bassin,

Fig. 3.



on était amené, pour chaque électrode de BC, à deux conditions distinctes, la première concernant la valeur du potentiel de cette électrode, la seconde l'intensité de courant débitée (qui doit être

nulle). Or une seule des conditions posées suffit à déterminer le réglage : les vérifications que nous avons en vue concernent l'autre condition.

Elles ont été satisfaisantes, compte tenu de ce que, comme il a déjà été dit, les modèles expérimentés étaient très rapidement établis.

Après le réglage par potentiels (données de Dirichlet sur BC; montage de la figure 1), on devrait constater que, pour chaque résistance R , la différence de potentiel $\Delta\varphi = \bar{\varphi} - \varphi$ est nulle. Ces différences ont été trouvées effectivement petites et correspondaient en moyenne à des gradients du potentiel φ de l'ordre de 1 à 2 pour 100 du gradient du champ uniforme.

Lorsque, au contraire (second mode de réglage), les électrodes de BC sont sans liaison avec le circuit extérieur, elles prennent des potentiels qui sont bien très sensiblement ceux de la loi linéaire : dans le cas des électrodes dont la disposition est indiquée figure 3, on a trouvé ainsi les valeurs

12,8 25,1 37,2 49,7 62,65 74,6 87,7

au lieu de

12,5 25 37,5 50 62,5 75 87,5

avec de petits écarts provenant d'imperfections du modèle.

B. Cas du champ hyperbolique. — Nous avons examiné de même la réalisation du champ $\varphi = (x^2 - y^2)$ dans un bassin rectangulaire ABCD. Les longueurs AB et AD étaient entre elles comme 3 et 2. On convenait de prendre les axes Ox et Oy suivant AB et AD respectivement.

Dans ces conditions $\frac{d\varphi}{dn}$ est nul sur AB et AD et ces bords du bassin étaient pris *isolants*. L'essai a été fait en achevant la détermination du potentiel à obtenir, comme plus haut :

- a. Soit par des données de Dirichlet sur CB et CD;
- b. Soit par des données de Neumann sur CB et CD.

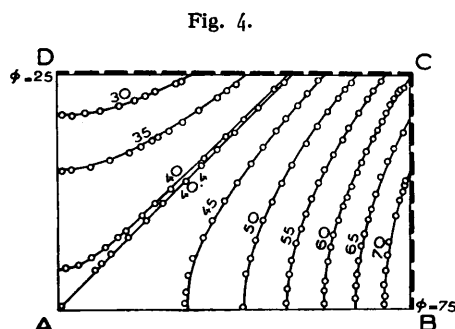
Dans l'un et l'autre cas les vérifications concernaient les lignes potentielles et leur graduation ainsi que les conditions non utilisées

sur CB et CD (valeurs de $\frac{d\varphi}{dn}$ dans le cas *a*, valeurs de φ dans le cas *b*).

La disposition des électrodes est indiquée sur la figure 4 : 7 électrodes entières et 2 demi-électrodes sur CB, 11 électrodes entières et 2 demi-électrodes sur CD.

a. Données de Dirichlet. — En prenant 2 et 3 comme longueurs des côtés du rectangle, la fonction cherchée φ prend les valeurs : 0 en A, 9 en B, 5 en C, — 4 en D. L'intervalle (— 4, 9) a été ramené à l'intervalle (25, 75) du pont de mesure, dont la graduation va comme à l'ordinaire de 0 à 100, afin de réserver une marge suffisante pour la mesure des potentiels $\bar{\varphi}$. Les potentiels à établir aux diverses électrodes sont alors immédiats : 25 pour la demi-électrode qui se termine en D, 59,6 pour les deux demi-électrodes qui se réunissent en C, 75 pour la demi-électrode en B, etc.; le potentiel de la courbe de niveau rectiligne du champ ($y = x$) est dans ces conditions de 40,4.

La figure 4 donne le tracé de quelques lignes équipotentiellles, ainsi



que les hyperboles théoriques; elle montre la précision de réalisation du champ.

Voici, d'autre part, les vérifications portant sur les valeurs de $\frac{d\varphi}{dn}$ aux côtés CB et CD.

Avec l'échelle de potentiels adoptée, on a

$$\varphi = \frac{50}{13}(x^2 - y^2) + \text{const.},$$

x et y étant évalués avec l'unité de longueur spécifiée plus haut et

telle que $CB = 2$ et $CD = 3$; on a donc pour $\frac{d\varphi}{dn}$ les valeurs théoriques

$$\frac{300}{13} \quad \text{et} \quad -\frac{200}{13}$$

sur CB et CD. D'après les formules générales de l'analogie, les densités de courant correspondantes sont constantes et ont les valeurs respectives $\frac{300}{13} \cdot \frac{h}{\sigma}$ et $-\frac{200}{13} \cdot \frac{h}{\sigma}$, σ étant la résistivité du liquide du bassin, h sa hauteur. L'intensité de courant totale sur BC ou sur CD est dès lors $\pm \frac{600}{13} \cdot \frac{h}{\sigma}$ et, pour chaque électrode du côté CB, occupant $1/8^e$ de ce côté, l'intensité i est $\frac{600}{8 \times 13} \cdot \frac{h}{\sigma}$, pour chaque électrode de CD on a de même $\frac{600}{12 \times 13} \cdot \frac{h}{\sigma}$. On a donc finalement, pour chaque électrode de CB, $\Delta\varphi = \frac{Rh}{\sigma} \cdot \frac{600}{8 \times 13}$ et, pour chaque électrode de CD, $\Delta\varphi = \frac{Rh}{\sigma} \times \frac{600}{12 \times 13}$.

h était évalué d'après le volume d'eau introduit dans le bassin, σ mesuré à l'aide d'une cellule Philipps à électrodes de platine, préalablement étalonnée, que l'on plongeait dans le bassin au moment de la mesure. Les précautions étaient prises pour tenir compte des variations de température au cours de l'expérience, lorsqu'il était impossible de les éviter complètement.

Pour $\sigma = 2490$ ohms.cms, $h = 3,33$ cms et $R = 1000$ ohms, les valeurs théoriques de $\Delta\varphi$ déduites des relations précédentes étaient :

$$\Delta\varphi = 7,71 \quad \text{pour chaque électrode de CB,}$$

$$\Delta\varphi = 5,14 \quad \text{pour chaque électrode de CD.}$$

Les valeurs mesurées ont été :

Sur DC

5,60 5,14 5,11 5,26 5,15 5,21 5,16 5,31 5,02 4,95 5,20 5,30

Sur BC

7,80 7,75 7,60 7,50 7,65 7,70 7,45 7,70

les électrodes étant prises, sur chacun des côtés, dans l'ordre où on les rencontre en allant vers l'angle C.

Les différences entre valeurs mesurées et valeurs calculées proviennent en grande partie des imperfections dans la réalisation du modèle qui, comme nous l'avons dit, était assez sommaire.

b. Données de Neumann. — On vient de voir que $\frac{d\varphi}{dn}$ doit prendre, sur CB et sur CD, des valeurs constantes, lesquelles, abstraction faite du signe, sont entre elles comme 3 et 2. Compte tenu des dimensions des électrodes, il en suit que l'on doit retrouver le même rapport entre les intensités de courant débitées par les diverses électrodes CB et celles de CD. Chaque électrode étant enfin alimentée, comme il a été dit, par un potentiomètre p et une résistance R , aux bornes de laquelle on aura une chute de potentiel $\Delta\varphi$, le réglage analogique s'effectuera sur les $\Delta\varphi$, lesquels (si les diverses résistances R sont ajustées à la même valeur) doivent prendre, pour les diverses électrodes de CB et de CD, des valeurs qui sont entre elles encore dans le rapport de 3 à 2.

Quand on a choisi l'échelle des potentiels (par exemple, comme plus haut, telle que le potentiel à réaliser soit $\varphi = \frac{50}{13} \cdot (x^2 - y^2) + \text{const.}$, la valeur de $\Delta\varphi$ pour les électrodes de CB ainsi que la valeur pour les électrodes de CD sont parfaitement déterminées. Mais on peut, aussi choisir *a priori* les valeurs de $\Delta\varphi$ pour CB et pour CD (dans le rapport de 3 à 2 dans l'exemple cité) et en conclure *a posteriori* l'échelle.

Cette seconde façon de procéder a été utilisée dans un essai dont nous dirons quelques mots.

Le montage (*fig. 5*) comportait l'alimentation indépendante d'un pont p'' de réglage et de mesure des différences de potentiel. Les potentiomètres p d'alimentation des diverses électrodes étaient montés en parallèles, ainsi que le pont p' de mesure des potentiels, sur le secondaire d'un transformateur; un autre transformateur alimentait indépendamment le pont p'' .

Le réglage a été fait en amenant les $\Delta\varphi$ aux valeurs

$$\Delta\varphi = 9,45 \quad \text{pour les électrodes de BC,}$$

$$\Delta\varphi = 6,30 \quad \text{pour les électrodes de CD,}$$

valeurs adoptées pour des raisons de commodité qui sont sans intérêt

ici. On a constaté alors que, dans l'échelle adoptée, les potentiels des diverses électrodes étaient les suivants :

Sur DC

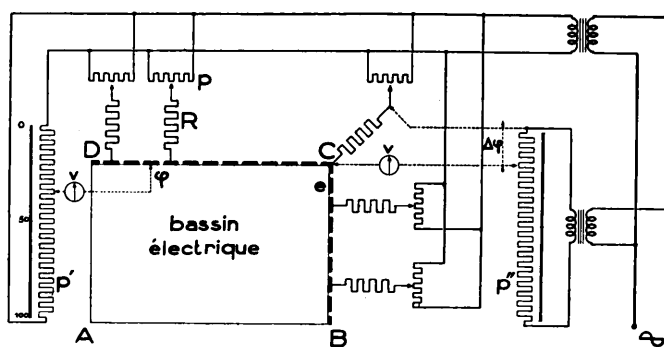
76,20 76,20 76,35 76,60 77,00 77,55 78,20 78,90 79,70 80,80 81,90 83,10

Sur BC

88,35 88,35 88,15 87,90 87,50 86,90 86,30 85,50

enfin, pour les deux demi-électrodes qui se réunissent en C 84,45.

Fig. 5.



L'intervalle maximum (76,20-88,35) correspond à l'intervalle (25-75) de l'échelle de potentiels dans l'essai précédent par données de Dirichlet. Une réduction immédiate donnait donc, à partir des valeurs calculées pour ce dernier cas, les valeurs théoriques suivantes des potentiels des électrodes :

Sur DC

76,20 76,26 76,43 76,72 77,13 77,66 78,30 79,06 79,94 80,93 82,04 83,27

Sur BD

88,35 88,30 88,11 87,83 87,42 86,90 86,35 85,50 et 84,60 en C,

valeurs en accord avec les valeurs observées données plus haut.

La vérification a été enfin complétée en ce qui concerne le rapport de réduction d'une échelle à l'autre. Pour une électrode du grand côté, par exemple, on a [formule (3)]

$$\frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{d\varphi}{dn} \frac{h}{\sigma} \cdot \frac{3}{12},$$

d'où en prenant

$$\varphi = k(x^2 - y^2) + \text{const.}, \quad \frac{d\varphi}{dn} = -2ky = -4k,$$

on tire, au signe près,

$$k = \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta\varphi}{R}.$$

Dans le cas traité on avait

$$\Delta\varphi = 6,30, \quad R = 5000 \text{ ohms}, \quad \sigma = 2464 \text{ ohms/cms},$$

d'où

$$k = \frac{2464}{3,33} \cdot \frac{6,30}{5000} = 0,932.$$

L'écart de potentiel $50 = 75 - 25$ du modèle précédent correspondait à une valeur de k de $\frac{50}{13}$ et devait donc, dans l'essai en question, être réduit à $0,932 \times 13 = 12,12$, au lieu de $12,15$ mesuré.

III. — La torsion d'un barreau cylindrique (généralités).

La plupart des essais dont il sera rendu compte dans la suite concernent la solution rhéoélectrique de problèmes de pure torsion. Il y a, sur ce sujet, de nombreuses études théoriques qui permettent des comparaisons entre le calcul direct et la méthode de calcul analogue, en appréciant la précision de cette dernière sous les formes très diverses qu'elle peut revêtir.

Nous rappellerons d'abord, dans le présent paragraphe, les formules fondamentales, dues à Saint-Venant, de la torsion d'un corps cylindrique. Nous supposons la longueur du corps suivant l'axe Oz , les axes Ox et Oy étant donc dans un plan de section droite.

Les composantes de tension sont nulles, sauf τ_{xz} et τ_{yz} qui s'expriment au moyen d'une fonction de tension $\varphi(x, y)$,

$$(4) \quad \tau_{xz} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

et la condition que les efforts extérieurs sur la surface latérale du barreau sont nuls entraîne immédiatement que φ garde une valeur constante sur la frontière de la section droite. Quand cette frontière

est formée par plusieurs courbes distinctes, φ prend des valeurs constantes, en général différentes, sur ces diverses courbes.

Abstraction faite d'un mouvement rigide d'ensemble, on trouve pour les composantes du déplacement élastique suivant Ox et Oy les valeurs

$$(5) \quad u = -\theta yz, \quad v = \theta xz$$

(θ étant une constante qui représente évidemment l'angle de torsion du barreau pour l'unité de longueur). La composante suivant Oz , soit w , est définie par les relations

$$(6) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \theta y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \theta x,$$

G étant le module de rigidité à la torsion.

La condition d'intégrabilité des équations (6) donne

$$(7) \quad \Delta_2 \varphi = -2G\theta,$$

équation aux dérivées partielles pour la fonction de tension φ . Nous écrirons aussi cette équation

$$(7') \quad \Delta_2 \varphi = F,$$

en posant

$$(8) \quad F = -2G\theta.$$

En résumé la fonction de tension φ , qui n'est évidemment définie qu'à une constante additive près, doit vérifier (7') dans l'aire de la section droite et doit prendre des valeurs constantes sur les divers contours qui limitent cette section droite.

Pour étudier sa *détermination*, il convient d'ailleurs de distinguer suivant que l'aire de section droite est limitée par un seul contour (connexion simple) ou par plusieurs contours (connexion multiple).

Dans le premier cas, en prenant, comme il est usuel, et comme nous le ferons en général dans la suite,

$$(9) \quad \varphi = 0$$

sur le contour frontière unique, il est clair que la fonction φ est bien déterminée.

Dans le second cas, on pourra de même convenir de prendre $\varphi = 0$ sur l'un des contours frontières, mais les valeurs constantes de φ sur les autres contours n'ont aucune raison d'être nulles et il semblerait même à première vue qu'elles puissent être prises arbitrairement. On sait qu'il n'en est rien : comme il est bien connu théoriquement, et comme il apparaîtra intuitivement d'après l'analogie électrique, ces valeurs sont déterminées, donc aussi la fonction φ , par la condition que le déplacement w , défini par l'intégration des (6), soit monodrome.

Pour terminer ces généralités, remarquons enfin que les efforts unitaires dans une section droite du barreau sont

$$(10) \quad X = \varphi'_y, \quad Y = -\varphi'_x, \quad Z = 0.$$

Il est immédiat qu'ils équivalent à un couple dont le moment par rapport à Oz est

$$(11) \quad \mathfrak{M} = - \iint (x\varphi'_x + y\varphi'_y) dx dy.$$

Le second membre contient évidemment en facteur $F = -2G\theta$ et $\mathfrak{M}$ est donc proportionnel à l'angle de torsion θ .

Nous aurons l'occasion, dans la suite, d'indiquer diverses transformations de la formule (11). Contentons-nous, pour le moment, de rappeler qu'en prenant

$$f = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

le second membre s'écrit

$$- \iint (f'_x \varphi'_x + f'_y \varphi'_y) dx dy = - \int \frac{df}{dn} \varphi ds + \iint \Delta f \cdot \varphi dx dy,$$

d'où, dans le cas d'une aire simplement connexe et en prenant φ nulle au contour

$$(12) \quad \mathfrak{M} = 2 \iint \varphi(x, y) dx dy.$$

IV. — Détermination, par analogie électrique, de la fonction de tension.

Pour l'application de l'analogie électrique au problème de la torsion, il est tout indiqué de remplacer la recherche de la fonc-

tion $\varphi(x, y)$ par celle d'une fonction harmonique $\Phi(x, y)$ qui s'en déduit en retranchant une solution particulière de $(7')$, $\frac{F}{4}(x^2 + y^2)$ ou $\frac{F}{2}x^2$ par exemple.

Limitons-nous d'abord au cas où l'aire de section droite du barreau considéré est *simplement connexe* et prenons, pour fixer les idées,

$$(13) \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \frac{F}{4}(x^2 + y^2),$$

Φ pourra être identifié au potentiel électrique défini, dans un bassin qui reproduit la forme de section droite, par des données de Dirichlet,

$$(14) \quad \Phi = \text{const.} - \frac{F}{4}(x^2 + y^2)$$

au contour. On est donc amené à des réalisations de type déjà envisagé : le bord du bassin est muni d'électrodes dont les potentiels doivent être réglés aux valeurs convenables.

Pour le calcul de ces valeurs, on utilisera (14), où l'on peut prendre arbitrairement la valeur de F et celle de la constante au second membre. Il revient au même, et il est en général plus commode, de fixer *a priori* les valeurs Φ_1 et Φ_2 du potentiel attribuées aux points du contour pour lesquels le rayon vecteur $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ prend sa valeur minimum r_1 et sa valeur maximum r_2 . La constante F a alors l'expression

$$(15) \quad F = -4 \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{(r_2^2 - r_1^2)}.$$

Le passage à une autre valeur de F peut toujours s'effectuer en modifiant proportionnellement les valeurs de Φ ou de φ et n'amène donc aucune difficulté.

Les potentiels des électrodes de contour étant calculés et le réglage correspondant des circuits d'alimentation étant effectué, on pourra tracer les lignes équipotentielles $\Phi = \text{const.}$, d'où, par intersection avec les cercles $r^2 = \text{const.}$, on déduira (construction de Maxwell) les lignes de niveau φ constant, lignes de niveau de la surface dite surface de Prandtl.

Pratiquement, la question essentielle est celle de la détermination

du cisaillement τ de composantes

$$(16) \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{Fy}{2}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{Fx}{2};$$

on introduit souvent, au lieu de τ , un coefficient sans dimensions

$$(17) \quad k = \frac{\tau}{Fl},$$

l étant une longueur de référence choisie dans le champ. Il est clair que la détermination de τ et de k dépend de celle du gradient de φ (ou de Φ) que l'on aura graphiquement, comme il est bien connu, d'après le tracé des courbes φ (ou Φ).

Mais ce sont les valeurs de τ et de k au contour qui sont en général les plus intéressantes. Les quelques essais discutés au paragraphe II nous permettent de conclure que, dans le mode expérimental adopté, les valeurs en question seront obtenues *directement* par mesure des intensités de courant débité par les électrodes de contour : même pour un modèle rapidement établi, la précision atteinte vaut largement celle du graphique et elle peut aisément être supérieure.

Au contour, où φ est nul, le cisaillement (τ_{xz} , τ_{yz}) est en effet *tangentiel* et sa grandeur est donc

$$\tau = \frac{d\Phi}{dn} + \frac{F}{2} r \frac{dr}{dn}.$$

On remplacera [*cf.* paragraphe I, formule (2)] $\frac{d\Phi}{dn}$ par $\frac{i}{\varepsilon} \frac{\sigma}{h}$, i étant l'intensité de courant débité par une électrode e ; remplaçant enfin i par $\frac{\Delta\Phi}{R}$, R étant la résistance liée à l'électrode et $\Delta\Phi$ la chute de potentiel correspondante, on aura la formule définitive

$$(18) \quad k = \frac{\tau}{Fl} = \frac{1}{2} \frac{r}{l} \frac{dr}{dn} - \frac{\Delta\Phi}{\Phi_2 - \Phi_1} \frac{\sigma}{hR} \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\varepsilon l},$$

valeur à attribuer au point milieu de l'électrode. Dans le dernier membre de (18), l'évaluation du premier terme ne dépend que de la définition géométrique du champ, c'est seulement dans le second terme qu'interviennent les résultats des mesures faites sur le modèle électrique.

Reste à indiquer la détermination du couple $\mathfrak{N}$. La formule (11) du paragraphe III s'écrit

$$\mathfrak{N} = -\frac{1}{2} F I_0 - \iint (x \Phi'_x + y \Phi'_y) dx dy$$

avec

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) dx dy,$$

d'où, par une transformation analogue à celle qui a donné (12),

$$(19) \quad \mathfrak{N} = -\frac{1}{2} F I_0 - \frac{1}{2} \int r^2 \frac{d\Phi}{dn} ds.$$

Remplaçant enfin l'intégrale par une somme Σ , étendue aux diverses électrodes du contour et substituant à $\frac{d\Phi}{dn}$ sa valeur [*cf.* plus haut (18)], on a la formule

$$(20) \quad \frac{\mathfrak{N}}{F} = -\frac{I_0}{2} + \frac{\sigma}{h} \frac{r_2^2 - r_1^2}{8(\Phi_2 - \Phi_1)} \sum r^2 \frac{\Delta\Phi}{R},$$

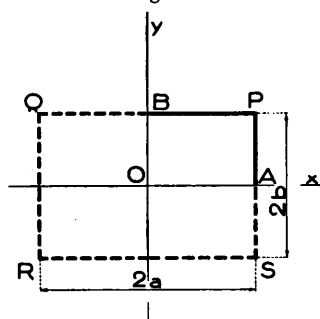
pour la détermination de $\frac{\mathfrak{N}}{F}$. On pourra introduire une grandeur sans dimension caractéristique du couple en divisant les deux membres de (20) par la quatrième puissance d'une longueur prise dans le champ. Remarquons aussi que l'on pourra simplifier le calcul de la somme Σ du second membre en choisissant les résistances R proportionnelles aux quantités r^2 .

EXEMPLE. — *Torsion d'un barreau rectangulaire.* — Pour illustrer les considérations précédentes rendons compte d'un essai concernant le cas d'un barreau rectangulaire, cas pour lequel Φ est connu théoriquement, ce qui permettra des comparaisons.

Les axes du rectangle PQRS, de côtés $2a$, $2b$, étant pris pour axes de coordonnées Ox et Oy , il est clair que la fonction Φ harmonique et égale à $-\frac{F}{4}(x^2 + y^2)$ au contour sera paire aussi bien par rapport à x que par rapport à y ; $\frac{d\Phi}{dn}$ est nul sur les axes et l'on peut réduire la réalisation au quart du champ en utilisant un bassin rectangulaire OAPB, dont les bords OA et OB sont isolants, les bords AP

et BP étant munis d'électrodes que l'on amènera, par le procédé usuel, aux potentiels assignés.

Fig. 6.



L'expérience a été faite dans le bassin de dimensions ($144 \times 96^{\text{mm}}$), soit pour un rapport des côtés du rectangle $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$. La loi des potentiels des électrodes était définie en prenant 25 et 75 comme potentiels des points B et P, d'où [relation (15)],

$$F = -\frac{200}{9},$$

en choisissant l'unité de longueur dans le champ telle que $a = 3$ et $b = 2$.

La figure 7 donne les courbes Φ constant avec la graduation

Fig. 7.

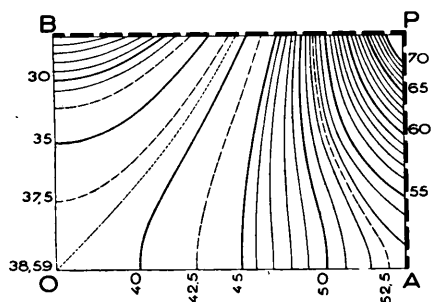
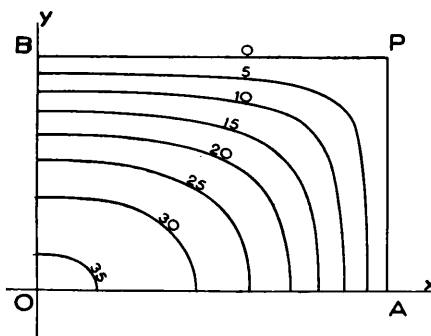


Fig. 8.



adoptée pour les potentiels; on a corrigé les courbes expérimentales dans la région très voisine des électrodes et pour laquelle l'effet de ces

électrodes était sensible. Les lignes de niveau de la surface de Prandtl ($\varphi = \text{const.}$) obtenues à partir des précédentes sont reproduites figure 8.

Passons à la détermination des efforts de cisaillement au contour du rectangle. En un point de ce contour l'effort de cisaillement est

$$\tau = \frac{d\Phi}{dn} + \frac{Fb}{2} \quad \text{pour le côté PB,}$$

$$\tau = \frac{d\Phi}{dn} + \frac{Fa}{2} \quad \text{pour le côté PA,}$$

d'où, en introduisant le coefficient sans dimension,

$$k = \frac{\tau}{Fb} \quad (2b, \text{ petit côté du rectangle})$$

on a respectivement ($a = 3, b = 2$),

$$k = \frac{1}{2F} \frac{d\Phi}{dn} + \frac{1}{2} \quad \text{pour PB,}$$

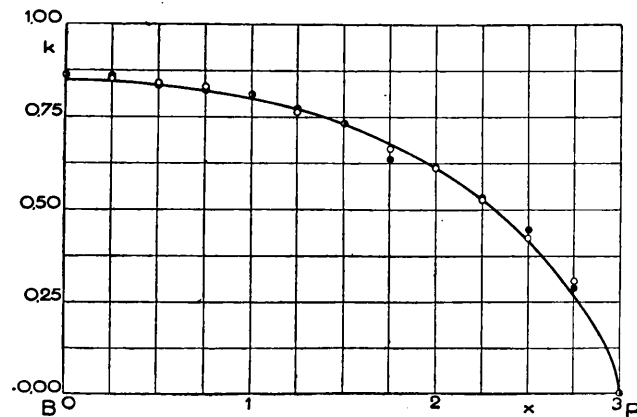
$$k = \frac{1}{2F} \frac{d\Phi}{dn} + \frac{3}{4} \quad \text{pour PA}$$

et, compte tenu des valeurs de ε et de F , il vient enfin

$$k = \frac{1}{2} - \frac{9}{100} \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta\Phi}{R} \quad \text{pour PB,}$$

$$k = \frac{3}{4} - \frac{9}{100} \frac{\sigma}{h} \frac{\Delta\Phi}{R} \quad \text{pour PA.}$$

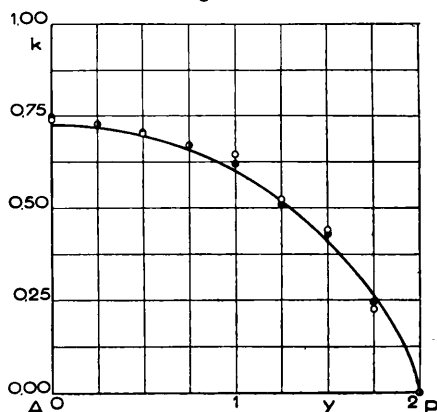
Fig. 9.



Les figures 9 et 10 donnent, respectivement pour les bords PB

et PA, les courbes théoriques des valeurs de k ainsi que les points obtenus par expérimentation analogique; on a distingué (points noirs

Fig. 10.



et petits cercles) les résultats de deux essais effectués dans des conditions assez différentes. On voit que l'accord est plus que suffisant pour les besoins pratiques.

V. — Remarques sur le cas d'une section à plusieurs contours.

Nous avons déjà indiqué que la détermination de la fonction de tension φ ne peut être achevée, dans le cas d'une aire de section droite multiplement connexe, sans faire intervenir la monodromie nécessaire du déplacement w . Il est commode, pour examiner la question, d'introduire encore, à la place de φ , la fonction harmonique Φ donnée par

$$(13) \quad \Phi = \varphi - \frac{F}{4} (x^2 + y^2).$$

Le déplacement w s'exprime alors par les formules, qui se déduisent des (6),

$$(6') \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = - \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

et, en désignant par $\Psi(x, y)$ la fonction conjuguée de Φ , on a

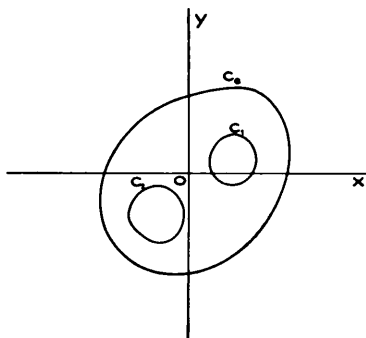
$$(21) \quad w = - \frac{1}{G} \Psi,$$

de sorte que la monodromie de w revient à celle de Ψ qui est, à un facteur près, la *fonction de courant* dans le bassin électrique.

La détermination de Φ , potentiel dans le bassin électrique, apparaît dès lors très clairement.

Prenons, pour fixer les idées, le cas d'une section droite comprise entre une courbe extérieure (C_e) et deux courbes intérieures (C_1), (C_2) (cf. *fig. 11*). Soit obtenu un potentiel $\Phi(x, y)$ vérifiant sur chacun

Fig. 11.



des contours (C_e), (C_1), (C_2) la condition aux limites posée

$$(14) \quad \Phi = \text{const.} - \frac{F}{4} (x^2 + y^2),$$

avec des valeurs de la constante *arbitraires* (et pouvant naturellement différer d'un contour à l'autre); on obtiendra d'autres potentiels analogues en lui ajoutant $\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2$, où Φ_1 est le potentiel nul sur (C_e) et (C_2), mais égal à 1 sur (C_1), Φ_2 prenant de même les valeurs respectives 0, 0, 1 sur (C_e), (C_1), (C_2): la constante de la relation (14) est alors modifiée de λ_1 sur (C_1) et de λ_2 sur (C_2).

Or la réalisation analogique de Φ_1 ou de Φ_2 est immédiate: Φ_1 par exemple correspond à une répartition de courant arrivant au bassin par le contour de (C_1), au potentiel unité, et en sortant par les frontières (C_2) et (C_e), au potentiel zéro. Il est clair dès lors que les diverses fonctions $\Phi(x, y)$ vérifiant (14), et qui dépendent des arbitraires λ_1 et λ_2 , peuvent être distinguées par les valeurs des intensités de courant amenées au bassin par l'ensemble des électrodes du

contour (C_1) et par l'ensemble des électrodes du contour (C_2) . Mais la monodromie de Ψ , fonction de courant dans le bassin, implique que ces intensités de courant à travers C_1 et C_2 soient *nulles* (donc aussi l'intensité analogue à travers C_e) : la fonction $\Phi(x, y)$ du problème de torsion est donc parfaitement déterminée.

Le montage électrique ne présente pas de difficulté, en suivant la méthode donnée par L. Malavard dans la seconde des publications citées note (1) :

— Alimentation par des transformateurs indépendants, et convenablement choisis en ce qui concerne leurs caractéristiques, des électrodes respectives de (C_e) , de (C_1) , de (C_2) , de façon à remplir automatiquement la condition des intensités nulles;

— Le réglage ne peut [à cause de la constante qui figure dans (14) et dont la valeur, pour un contour, ne peut être fixée *a priori*] porter que sur les différences de potentiels entre les diverses électrodes de (C_e) , celles de (C_1) , celles de (C_2) ; on utilisera le montage de mesure par opposition indiqué au paragraphe I.

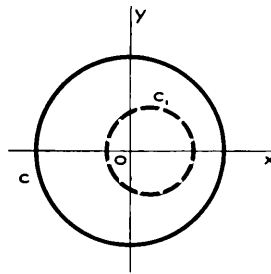
Des simplifications pourront se produire dans des cas particuliers, notamment en choisissant convenablement la position de l'origine O des axes. Un changement d'origine modifie la fonction Φ sans intervenir essentiellement dans les résultats définitifs concernant la déformation envisagée. Il est naturel de choisir O de façon à simplifier le plus possible les conditions à la frontière : quand, par exemple, un arc de frontière est circulaire, on pourra prendre O au centre de l'arc correspondant, qui sera constitué alors par une seule électrode dans la réalisation de la fonction.

Cette remarque s'applique, que l'aire de section droite du barreau soit simplement ou multiplement connexe. Voici un exemple, concernant la seconde hypothèse : celui d'un barreau dont la section est limitée par deux circonférences excentriques (C) et (C_1) (*fig. 12*).

Nous prendrons l'origine des axes au centre de (C) . Ce cercle doit alors prendre un potentiel constant et l'intensité de courant correspondante doit être nulle : il constituera donc une frontière conductrice du bassin sans liaison électrique avec le circuit extérieur. L'artifice de l'alimentation indépendante est donc inutile : on aura

un seul circuit pour alimenter les électrodes du pourtour de (C_1) dont on réglera les potentiels aux valeurs convenables, la frontière isolée (C) ayant un effet de présence.

Fig. 12.



Une dernière remarque générale avant de passer à un autre sujet. Les réalisations proposées dans ce paragraphe et dans le précédent sont relatives à la fonction Φ . On pourra envisager de même, sans plus de difficulté, des montages concernant la fonction conjuguée Ψ . Nous n'y insisterons pas car nous aurons l'occasion de revenir ultérieurement sur la comparaison de modèles donnant deux fonctions conjuguées.

VI. — Détermination directe des efforts

par expérimentation analogique : cas du barreau rectangulaire.

Il est tout naturel, comme nous l'avons indiqué dans l'Introduction, de chercher à obtenir, dans le bassin électrique, les champs représentatifs des *dérivées* de la fonction de tension φ , afin d'avoir directement les efforts. La question est particulièrement simple dans le cas particulier, que nous envisagerons d'abord, du barreau de section rectangulaire; nous passerons ensuite (§ VII), à un cas plus général.

Désignons par u la dérivée φ'_x , qui est harmonique

$$u = \Phi'_x + \frac{F}{2}x = \varphi'_x,$$

on peut envisager, en même temps que u , la fonction conjuguée v

$$v = -\Phi'_y + \frac{F}{2}y = -\varphi'_y + Fy,$$

dont les valeurs détermineront immédiatement celles de ϕ'_y . Soit encore PQRS le rectangle de section. Il est immédiat que, sur les côtés horizontaux de ce rectangle, u est nul, tandis que, sur les côtés verticaux, on a $v = Fy$. D'autre part, des considérations évidentes de symétrie permettent de réduire la réalisation à 1/4 du champ, soit au rectangle OAPB de la figure 6.

Comme il est bien connu, deux modes de représentation analogique sont alors possibles.

Le premier concernera une répartition de courant donnant pour potentiel électrique la fonction v et qui sera déterminée par les données aux limites suivantes :

v est nul sur le bord OA du bassin, lequel est donc formé par une électrode;

v est égal à Fy sur le bord AP, donc muni d'électrodes dont on réglera les potentiels;

$\frac{dv}{dn}$ est nul aux deux autres bords, lesquels seront isolants (1).

Le second est obtenu en prenant u pour le potentiel électrique à obtenir dans le bassin, par les conditions suivantes :

$\frac{du}{dn}$ est nul sur le bord OA, lequel est donc isolant;

u est nul sur OB et sur BP, qui porteront donc des électrodes au potentiel zéro;

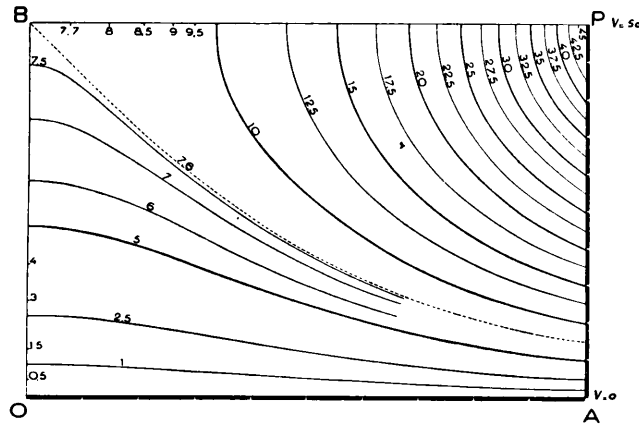
Enfin v , dont l'accroissement entre deux points du bassin donne une mesure de l'intensité de courant entre ces deux points, doit être, sur PA, proportionnel à y : on remplira cette condition en munissant PA de petites électrodes identiques, dont on réglera l'alimentation de façon que chacune débite *la même intensité de courant*.

Les essais que nous présenterons concernent uniquement le premier mode d'analogie; il n'y a pas lieu d'insister sur les détails de l'expérimentation et nous nous contenterons d'exposer les résultats.

(1) Cela assure que u prend sur les bords en question une valeur constante, qu'il est toujours loisible de supposer nulle.

La figure 13 donne, pour l'un des cas traités ($\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$), les courbes v constant relevées dans le bassin : de la valeur de v en un point du

Fig. 13.



champ on déduit immédiatement la dérivée φ'_y , donc la contrainte τ_{xz} .
On aura

$$(22) \quad \tau_{xz} = \varphi'_y = Fy - v,$$

d'où

$$(23) \quad k = \frac{|\tau_{xz}|}{Fb} = \left| \frac{y}{b} - \frac{v}{Fb} \right|,$$

qui, Fb ayant la valeur 50 dans l'essai en question (50 est la variation du potentiel sur le côté AP) s'écrit

$$(23') \quad k = \left| \frac{y}{b} - \frac{v}{50} \right|.$$

La formule (23') a été utilisée pour le calcul du coefficient de contrainte k sur le côté PB et sur l'axe OB. Les figures 14A et B reproduisent les courbes de variation de k obtenus par notre modèle analogique; les points marqués donnent les résultats du calcul à partir de la solution théorique. On voit que la concordance est tout à fait remarquable.

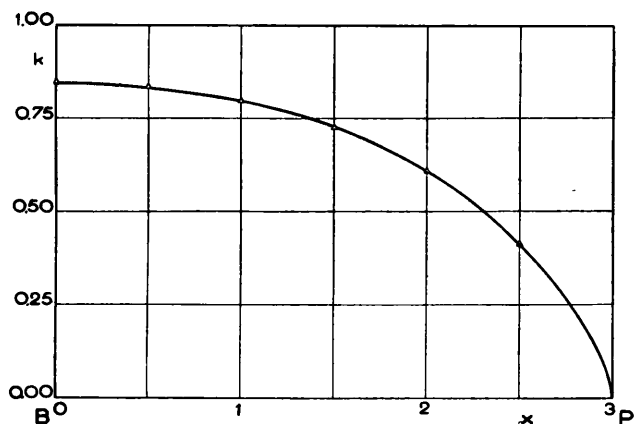
Sur OA et sur AP la contrainte τ_{xz} est nulle et c'est à partir de τ_{yz}

qu'il faut définir k

$$k = \frac{|\tau_{yz}|}{Fb} = \frac{|u|}{Fb}.$$

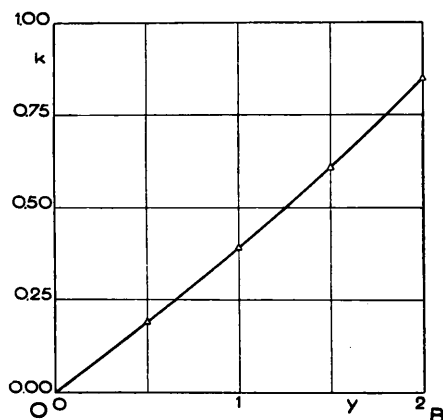
Il est intéressant de noter que la réalisation envisagée, bien qu'elle concerne v , permet également d'atteindre ce coefficient.

Fig. 14 A.



Chaque électrode e du bord AP du bassin débite un courant $i = \frac{\Delta v}{R}$,

Fig. 14 B.



en appelant Δv la chute du potentiel suivant la résistance R qui

aboutit à l'électrode. La relation précédente (3) s'écrit ici

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\sigma}{h\varepsilon} \frac{\Delta v}{R},$$

elle détermine numériquement pour chaque électrode

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\varphi''_{x,y} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où u par une intégration le long de AP.

Un procédé analogue pourra être utilisé sur le bord OA du bassin, pourvu que l'on découpe l'électrode (au potentiel 0) qui occupe ce bord en petites électrodes distinctes e dont chacune est alimentée par l'intermédiaire d'une résistance R . On a alors comme plus haut

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\sigma}{h\varepsilon} \frac{\Delta v}{R},$$

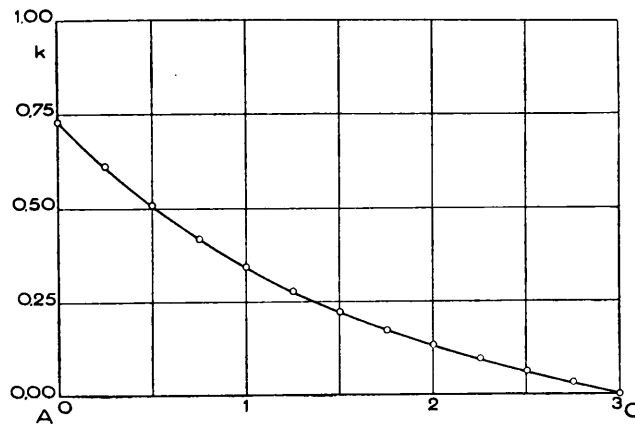
mais

$$\frac{dv}{dn} = \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi''_{x,y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

d'où encore $\varphi'_x = u$ par une intégration le long de OA.

Les figures 15 et 16 donnent, respectivement pour OA et pour AP,

Fig. 15.

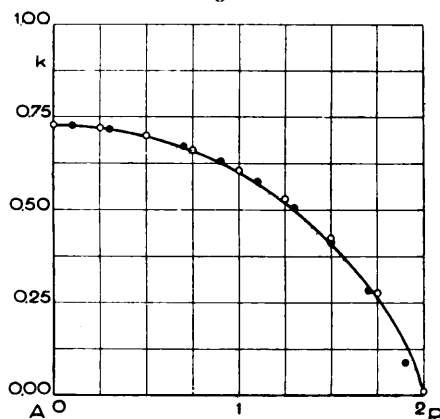


les courbes calculées de variation de k , les points marqués correspondant aux valeurs obtenues par l'essai au bassin.

Sur OA l'accord est excellent. Il est un peu moins bon sur AP.

L'explication en est simple. Nous utilisons toujours des électrodes e ayant la même largeur. Or il se trouve que, lorsqu'on approche de l'angle P, le courant débité augmente très rapidement, et que, de ce fait, la représentation au bassin du phénomène théorique devient moins satisfaisante. On aurait pu améliorer la précision en prévoyant des électrodes plus nombreuses et plus étroites au voisinage du point P. Nous n'avons pas jugé utile de le faire : la figure 15 définit de façon très précise la contrainte k en A et en effectuant sur AP l'intégration de φ''_{xy} à partir du point A, on ne voit apparaître les écarts qu'au voisinage immédiat du point P, région peu intéressante parce que les contraintes y sont faibles. C'est ainsi qu'a été préparée la figure 16.

Fig. 16.



Remarque. — Les points marqués en noir ou blanc sur la figure 16 correspondent à deux essais pour des dispositions différentes des électrodes.

Indiquons enfin que le calcul du couple de torsion peut s'effectuer, dans de très bonnes conditions de précision, en utilisant seulement les valeurs de v sur le côté PB.

Repartons en effet de l'expression de ce couple que nous écrirons

$$\mathfrak{M} = \iint \varphi \Delta f dx dy,$$

en prenant

$$f = x^2 - a^2$$

fonction qui donne bien $\Delta f = 2$. En transformant par la formule de Green, il vient

$$\mathfrak{N} = \iint f \Delta \varphi \, dx \, dy + \int \left(\varphi \frac{df}{dn} - f \frac{d\varphi}{dn} \right) ds,$$

l'intégrale double étant étendue à la totalité de la surface du rectangle PQRS et l'intégrale curviligne à son contour. Compte tenu de ce que φ est nul sur tout le contour et que f est nul sur les côtés QR et SP, compte tenu enfin des symétries, il vient

$$\mathfrak{N} = -4 \int_0^a (a^2 - x^2) \{ v \}_{y=b} \, dx.$$

Le calcul appliqué à un exemple traité a donné

$$\frac{|\mathfrak{N}|}{\frac{1}{2} F a b^2} = 3,12 \quad \text{au lieu du théorique } 3,132.$$

Réalisation directe des dérivées secondes φ''_{x^2} et φ''_{y^2} . — Il est assez indiqué de rapprocher des précédentes les réalisations qui portent sur φ''_{x^2} et sur φ''_{y^2} , lesquelles sont particulièrement simples.

On a vu plus haut que φ'_x était nul sur les côtés horizontaux du rectangle φ'_y nul sur les côtés verticaux; φ''_{x^2} et φ''_{y^2} sont donc respectivement nuls sur les mêmes côtés. Or leur somme vaut F dans tout le champ.

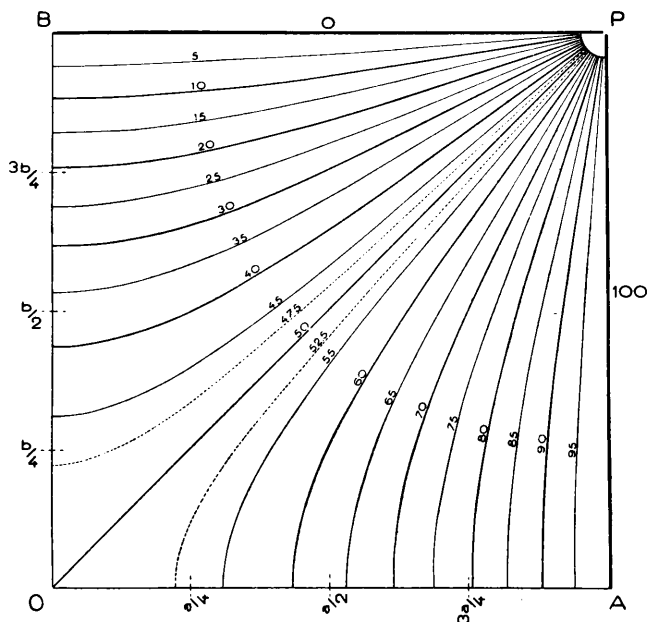
On obtiendra donc dans le bassin φ''_{x^2} assimilé au potentiel électrique, en alimentant ce bassin par des électrodes placées suivant les bords dont deux, suivant PQ et RS, sont au potentiel zéro, les deux autres, suivant QR et SP, au potentiel F. La même réalisation donnera φ''_{y^2} par simple changement de l'échelle des potentiels. Notons que les sommets du rectangle sont des tourbillons dont on aura une réalisation correcte en arrêtant les électrodes à une faible distance des extrémités et intercalant entre elles de petits quarts de cylindre isolants. On pourra d'ailleurs, comme dans les cas précédents, réduire le modèle à 1/4 du champ : rectangle OAPB, OA et OB étant isolants, AP et PB portant deux électrodes.

Les cas traités ont été les suivants :

$$\frac{a}{b} = 1, \quad \frac{a}{b} = 1,5, \quad \frac{a}{b} = 2$$

et l'on a pris, dans chaque cas, une échelle de potentiels de 0 à 100 ($F=100$). La figure 17 donne, à titre d'exemple, les lignes

Fig. 17.



équipotentiellés relevées dans le premier de ces cas; les chiffres inscrits donnent les valeurs de φ''_{x^2} , mais il suffit de les retrancher de 100 pour avoir les valeurs correspondantes de φ''_{y^2} .

Le passage aux dérivées premières φ'_x et φ'_y , donc aux valeurs des efforts, s'effectue par intégration : soit, par exemple, à calculer φ'_x sur la droite $y = y_0$ du bassin, on a

$$\varphi'_x = \int_0^x \varphi''_{x^2}(x, y_0) dx,$$

d'où, pour le coefficient correspondant k ,

$$k = \frac{\tau_{yz}}{Fb} = \frac{1}{100b} \int_0^x \varphi''_{x^2}(x, y_0) dx.$$

La précision obtenue est sensiblement du même ordre que celle donnée plus haut par la réalisation directe de v . On l'appréciera par

le tableau suivant, dans lequel nous donnons, en divers points du contour OAPB et pour $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, les valeurs de k ainsi obtenues et les valeurs calculées à partir de la théorie, en un certain nombre de points des axes et des côtés.

Côté BP ($y = 2$).

$x \dots$	0.	1.	1,5.	2.	2,5.
$k \left\{ \begin{array}{l} \text{théor.} \dots \\ \text{exp.} \dots \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,848 \\ 0,846 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,797 \\ 0,798 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,727 \\ 0,728 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,609 \\ 0,610 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,415 \\ 0,416 \end{array}$

Côté AP ($x = 3$).

$y \dots$	0.	0,5.	1.	1,5.
$k \left\{ \begin{array}{l} \text{théor.} \dots \\ \text{exp.} \dots \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,728 \\ 0,727 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,697 \\ 0,696 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,600 \\ 0,600 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,414 \\ 0,408 \end{array}$

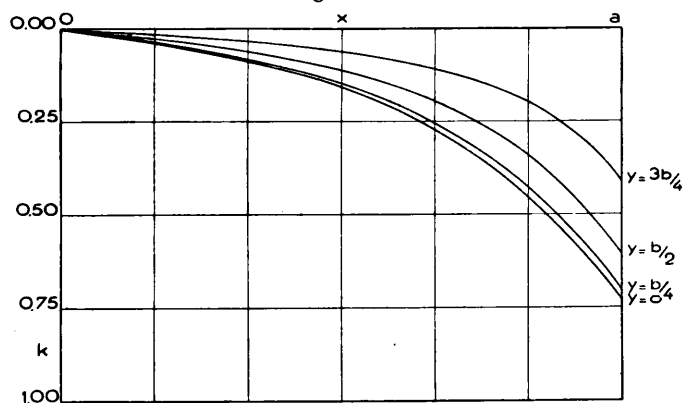
Axe BO ($x = 0$).

$y \dots$	2.	1,5.	1.	0,5.
$k \left\{ \begin{array}{l} \text{théor.} \dots \\ \text{exp.} \dots \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,848 \\ 0,846 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,608 \\ 0,608 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,392 \\ 0,392 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,192 \\ 0,191 \end{array}$

Axe AO ($y = 0$).

$x \dots$	3.	2,5.	2.	1.
$k \left\{ \begin{array}{l} \text{théor.} \dots \\ \text{exp.} \dots \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,728 \\ 0,727 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,508 \\ 0,505 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,342 \\ 0,341 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,131 \\ 0,131 \end{array}$

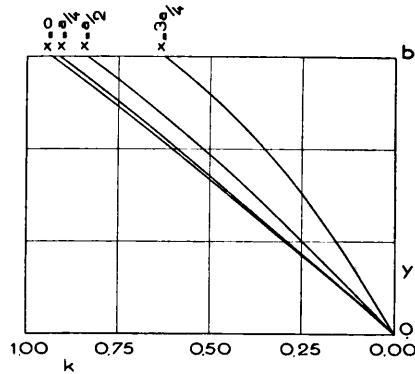
Fig. 18 A.



Enfin les figures 18A et 18B donnent, d'après les résultats du

APPLICATION DU CALCUL EXPÉRIMENTAL RHÉOÉLECTRIQUE. 401
 modèle électrique, la courbe de variation du coefficient k relatif à τ_{xz}

Fig. 18 B.



ou τ_{xz} dans le dernier cas traité ($\frac{a}{b} = 2$) et sur chacune des droites

$$y = 0, \quad \frac{b}{4}, \quad \frac{b}{2}, \quad \frac{3b}{4} \quad (\text{figure 18A})$$

et

$$x = 0, \quad \frac{a}{4}, \quad \frac{a}{2}, \quad \frac{3a}{4} \quad (\text{figure 18B}).$$

VII. — Détermination directe des efforts :
cas d'un barreau dont la section droite est un polygone
dont tous les angles sont droits.

On a pu juger, d'après ce qui précède, la précision des réalisations portant sur les dérivées premières ou secondes de la fonction φ dans le cas particulier d'une section rectangulaire.

Il apparaît immédiatement que l'on doit pouvoir envisager des réalisations du même type dans les cas où la section est limitée par un polygone dont tous les angles sont droits. C'est le cas, pratiquement très notable, de bien des formes de fers laminés, abstraction faite des congés aux angles. Mais l'extension que nous avons en vue présente cependant certaines difficultés, que nous éclaircirons avant de rendre compte des essais effectués.

Nous choisissons les axes Ox et Oy de façon que les côtés de la

section soient les uns parallèles à Ox , les autres parallèles à Oy . Il est utile de faire d'abord quelques remarques très simples sur les polygones envisagés.

Un polygone dont tous les angles sont droits (angles *saillants* valant $\frac{\pi}{2}$ ou angles *rentrants* valant $\frac{3\pi}{2}$) a évidemment le même nombre de côtés parallèles à Ox que de côtés parallèles à Oy . Soit n ce nombre.

Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant :

LEMME. — *Lorsque le polygone enferme une aire simplement connexe, le nombre des angles saillants est*

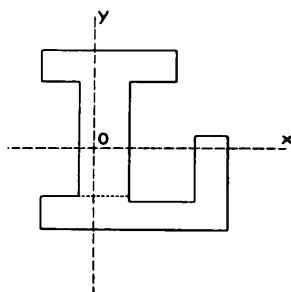
$$s = n + 2,$$

le nombre des angles rentrants est

$$r = n - 2.$$

La vérification est immédiate par récurrence. Prolongeons en effet dans l'intérieur du polygone et jusqu'à sa frontière l'un des côtés parallèles à Ox et aboutissant à un angle rentrant (ligne tracée en pointillé sur la figure 19). Le polygone se trouve décomposé en deux

Fig. 19.



polygones dont les côtés parallèles à Ox sont en nombre n' et n'' et, puisqu'un côté est commun, on a

$$1 + n = n' + n'',$$

n' et n'' sont d'ailleurs inférieurs à n .

Admettons alors que

$$\begin{aligned}s' &= n' + 2, & r' &= n' - 2, \\ s'' &= n'' + 2, & r'' &= n'' - 2.\end{aligned}$$

Il est évident d'autre part que

$$s' + s'' = s + 3, \quad r' + r'' = r - 1,$$

et les relations précédentes donnent alors

$$n' + n'' + 4 = s + 3 \quad \text{ou} \quad n + 5 = s + 3,$$

c'est-à-dire

$$n + 2 = s;$$

on a de même

$$n' + n'' - 4 = r - 1,$$

d'où

$$n - 3 = r - 1$$

et enfin

$$n - 2 = r.$$

La propriété étant évidente dans le cas du rectangle se trouve ainsi établie en général.

Le raisonnement précédent suppose, il est vrai, que le côté prolongé n'aboutit pas à un angle du polygone. Mais on peut toujours modifier légèrement les longueurs des côtés sans changer s , r , n de façon qu'il en soit ainsi, ce qui évite d'avoir à discuter le cas particulier signalé.

Revenons alors au problème de la torsion. La fonction de tension φ vérifie

$$\Delta_2 \varphi = F$$

et est nulle au contour. Ses dérivées φ'_x et φ'_y sont harmoniques et, comme on l'a vu au paragraphe 6,

$$u = \varphi_x, \quad v = -\varphi_y + Fy$$

sont conjuguées. On a d'ailleurs, au contour,

$$\begin{aligned}\varphi'_x &= 0 & \text{sur les côtés parallèles à } Ox, \\ \varphi'_y &= 0 & \text{sur les côtés parallèles à } Oy,\end{aligned}$$

d'où, pour le couple des fonctions conjuguées u et v , les conditions

suivantes

$$(24) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{sur les côtés parallèles à } Ox, \\ v = Fy & \text{sur les côtés parallèles à } Oy. \end{cases}$$

La recherche de φ est exactement équivalente à celle du couple de fonctions harmoniques conjuguées u et v avec les données aux limites (24). u et v étant supposées connues, on passe en effet à φ par l'intégrale

$$(25) \quad \varphi = \int [u \, dx + (Fy - v) \, dy],$$

qui est bien, comme on le vérifie immédiatement, une intégrale de différentielle totale exacte donnant une solution de

$$\Delta_2 \varphi = F.$$

Si, de plus, on prend en un point du contour l'origine d'intégration, la fonction φ sera identiquement nulle en tout point du contour puisque, sur ce contour, l'élément de l'intégrale (25) est nul.

Dans l'application de l'expérimentation analogique, l'une quelconque des deux fonctions conjuguées u et v pourra être prise comme *potentiel électrique* à réaliser dans le bassin, l'autre s'identifiant, à un facteur près, à la *fonction de courant* correspondante. Admettons, pour fixer les idées, que ce soit v que l'on veuille obtenir comme potentiel électrique dans le bassin (¹).

La première des conditions (24) entraîne immédiatement que, sur un côté parallèle à Ox du polygone qui limite la section, on ait

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \frac{dv}{dn} = 0,$$

de sorte que ce côté devra être représenté dans le bassin par une paroi isolante. Il semblerait dès lors, à première vue, que le montage utilisé dans le cas du rectangle puisse encore être employé : on limiterait dans le bassin l'aire de section par des parois dont les unes, représentant les côtés parallèles à Ox du polygone de section, seraient isolantes, les autres, représentant les côtés parallèles à Oy , étant

(¹) Il n'y a pas de difficulté à envisager de même l'autre cas.

munies d'électrodes; on alimenterait ces électrodes de façon à satisfaire la loi des potentiels $v = Fy$ [seconde condition (24)].

Le modèle ainsi obtenu ne donne cependant pas, sauf dans le cas déjà traité du rectangle, la solution cherchée convenant au problème de la torsion. Il importe de bien comprendre pourquoi.

Il est clair tout d'abord que, dans le procédé indiqué, on ne remplit pas complètement les conditions aux limites (24). La seconde de ces conditions est bien satisfaite, mais la première, $u = 0$ sur les côtés parallèles à Ox , a été remplacée par $\frac{dv}{dn} = 0$, soit $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ce qui entraîne seulement $u = \text{const.}$ On peut bien prendre zéro pour valeur de la constante sur l'un des côtés en question; sur les autres, cette constante prendra des valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_{n-1}$$

(que l'on pourra mesurer sur le modèle électrique puisque u est proportionnel à la fonction de courant) qui n'ont, *a priori*, aucune raison d'être nulles.

Il est donc en principe douteux que la réalisation envisagée convienne au problème de la torsion. Et cette réalisation est effectivement en défaut *dès que le polygone de section présente au moins un angle rentrant*, c'est-à-dire dans tout autre cas que celui du rectangle, pour la raison fort simple qu'elle ne représente pas les singularités nécessaires de u et v en un angle rentrant.

Précisons ce dernier point. Il est facile d'étudier la singularité de la fonction de tensions $\varphi(x, y)$ au voisinage d'un angle de la frontière: on reviendra d'abord à la fonction harmonique $\Phi(x, y)$ telle que

$$\bullet \quad \varphi = \Phi + \frac{F}{4}(x^2 + y^2),$$

définie, comme on l'a vu, par des données aux limites de Dirichlet, et l'on fera disparaître l'angle par une représentation conforme convenable. Dans le cas d'un angle saillant, supposé placé à l'origine des coordonnées, on utilisera la représentation conforme

$$\bar{Z} = z^2,$$

faisant passer du plan complexe $z = x + iy$ au plan complexe

$Z = X + iY$. Dans le cas d'un angle rentrant, il faudra utiliser la représentation

$$Z = z^{\frac{2}{3}}.$$

Il est bien superflu de développer ici l'analyse, qui est très simple. Contentons-nous d'en indiquer les résultats.

La fonction φ reste toujours finie et continue au voisinage d'un angle, et il en est de même de ses dérivées premières, *s'il s'agit d'un angle rentrant*. Par contre, les dérivées premières ne restent pas bornées au voisinage d'un angle saillant : on vérifie sans peine que la fonction analytique $u + iv$ présente un terme infini de forme

$$imz^{-\frac{1}{3}},$$

où m est une constante réelle. Prenons des coordonnées polaires r et θ ($z = re^{i\theta}$) et supposons, pour fixer les idées, que θ varie de 0 à $\frac{3\pi}{2}$ dans l'angle rentrant, les termes infinis de u et v seront respectivement

$$\frac{m \sin \frac{\theta}{3}}{r^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{m \cos \frac{\theta}{3}}{r^{\frac{1}{3}}}.$$

Dans la réalisation électrique précédente il n'y a aucune trace de cette singularité : elle ne peut donc s'appliquer au problème de la torsion.

Avant d'aborder la solution correcte de ce problème, nous ferons quelques remarques sur le cas déjà traité de la section rectangulaire. La difficulté signalée plus haut ne se présente pas dans ce cas, la fonction u définie par le modèle électrique considéré, prise nulle sur un côté du rectangle, prenant également la valeur $u_1 = 0$ sur le côté opposé. Cela résulte immédiatement des considérations de symétrie qui nous ont permis, au paragraphe VI, de réduire la réalisation à un quart du rectangle. On retrouve d'ailleurs le même fait comme conséquence particulière d'une relation entre les constantes $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ dont nous aurons besoin pour la suite.

Cette relation résulte immédiatement du fait que l'intégrale

$$\int (u \, dx - v \, dy)$$

prise sur le contour du champ est *nulle*. Compte tenu des conditions remplies par u et v , il vient

$$(26) \quad \sum_{i=1}^{n-1} u_i l_i = 0,$$

l_i étant la longueur du côté sur lequel u est égal à u_i , prise avec un signe convenable suivant le sens de parcours. Dans le cas du rectangle, il reste seulement

$$u_1 l_1 = 0, \quad \text{d'où} \quad u_1 = 0.$$

Reprenons le cas d'une section présentant des angles rentrants. La détermination du couple (u, v) répondant au problème de la torsion pourra se faire par superposition des champs suivants :

1° Le couple obtenu par le modèle électrique envisagé plus haut, couple que nous désignerons maintenant par (u', v') . Rappelons que l'on a, au contour

$$\begin{aligned} \frac{dv'}{dn} &= 0 && \text{sur les côtés parallèles à } Ox, \\ v' &= Fy && \text{sur les côtés parallèles à } Oy. \end{aligned}$$

Sur les côtés parallèles à Ox , numérotés 0, 1, 2, ..., $n-1$, u' prend des valeurs constantes

$$u'_0 = 0, \quad u'_1, \quad u'_2, \quad \dots, \quad u'_{n-1}.$$

2° Pour chaque angle saillant (ils sont en nombre $n-2$ d'après le lemme préliminaire) un couple $(u^{(i)}, v^{(i)})$ donnant, au sommet de l'angle, la singularité spécifiée

$$\frac{\sin \frac{\theta}{3}}{r^{\frac{4}{3}}} \quad \text{pour } u^{(i)}, \quad \frac{\cos \frac{\theta}{3}}{r^{\frac{4}{3}}} \quad \text{pour } v^{(i)}$$

et avec les données au contour suivantes,

$$\begin{aligned} \frac{dv^{(i)}}{dn} &= 0 && \text{sur les côtés parallèles à } Ox, \\ v^{(i)} &= 0 && \text{sur les côtés parallèles à } Oy. \end{aligned}$$

$u^{(i)}$ prend des valeurs constantes, que nous désignerons par

$$u_0^{(i)} = 0, \quad u_1^{(i)}, \quad u_2^{(i)}, \quad \dots, \quad u_{n-1}^{(i)},$$

sur les côtés parallèles à Ox ⁽¹⁾.

Chacune de ces dernières solutions peut être multipliée par une constante $m^{(i)}$ et la solution du problème de torsion sera donnée par le couple

$$u = u' + \sum_1^{n-2} m^{(i)} u^{(i)}, \quad v = v' + \sum_1^{n-2} m^{(i)} v^{(i)},$$

pourvu que les constantes $m^{(i)}$ soient choisies de façon que

$$(27) \quad u_k = u'_k + \sum_1^{n-2} m^{(i)} u_k^{(i)} = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-1,$$

ce qui ne fait que $n-2$ équations distinctes parce que la relation (26) reste valable pour les fonctions envisagées.

On voit que l'on a autant d'équations distinctes que d'inconnues. Que ces équations aient une solution bien déterminée est évident, car dans le cas contraire le rang du système serait inférieur à $n-2$ et il existerait des nombres $m^{(i)}$ non tous nuls tels que

$$\bar{u} = \sum_1^{n-2} m^{(i)} u^{(i)}, \quad \bar{v} = \sum_1^{n-2} m^{(i)} v^{(i)}$$

donnent deux fonctions conjuguées, l'une $\bar{u}$ nulle sur les côtés parallèles à Ox , l'autre $\bar{v}$ nulle sur les côtés parallèles à Oy . L'intégrale

$$\bar{\varphi} = \int (\bar{u} dx - \bar{v} dy)$$

définirait alors une fonction harmonique constante à la frontière de la section, donc dans cette section, ce qui est incompatible avec les singularités de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ aux angles rentrants.

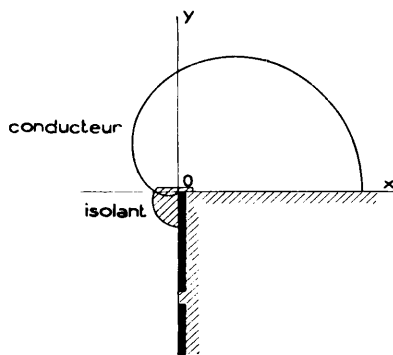
⁽¹⁾ Ces valeurs, de même que les précédentes $u'_1, u'_2, \dots, u'_{n-1}$, ne sont pas *a priori* fixées et résultent de la détermination analytique du couple de fonctions conjuguées ou de la réalisation analogique.

Nous terminerons par quelques remarques générales sur les modèles analogiques correspondant à l'analyse précédente. On peut d'abord envisager séparément la réalisation de φ' (déjà donnée) et celle de chacune des $\varphi^{(i)}$. Pour obtenir l'une d'elles, on matérialisera la singularité à l'angle rentrant correspondant par une électrode d'amenée de courant, de forme

$$r = \text{const.} \cos^{\frac{2}{3}} \theta \quad (\text{électrode d'angle})$$

et de dimensions assez petites. Les côtés du bassin parallèles à Ox sont toujours isolants, les côtés parallèles à Oy portent des électrodes au potentiel zéro. Pour éviter le contact direct entre l'électrode de paroi et l'électrode d'angle, on intercale entre elles un arc isolant reproduisant la forme d'une ligne de courant (cf. *fig. 20*) ⁽¹⁾.

Fig. 20.



Il est préférable d'obtenir directement au bassin le potentiel φ qui répond au problème de torsion posé. Le montage sera le suivant :

- Les côtés parallèles à Ox sont isolants;
- Les côtés parallèles à Oy sont munis d'électrodes sur lesquelles on aura à établir la loi de potentiels $\varphi = Fy$;
- Chaque angle saillant est muni d'une électrode d'angle (elles sont donc en nombre $n-2$) de la forme précédente.

On aura à régler les potentiels de ces électrodes de façon à assurer

⁽¹⁾ Les principes à suivre pour matérialiser ainsi les singularités ont été donnés par L. MALAVARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 206, 1938, p. 39.

que la fonction u , conjuguée du potentiel v dans le bassin, prenne la même valeur constante sur chacun des côtés parallèles à Ox : ce sont les conditions (27), dont $n - 2$ seulement sont distinctes. Ces conditions concernent en fait les intensités de courant entrant dans le bassin par les divers groupes d'électrodes.

Soit, pour préciser ce point, BC un côté parallèle à Oy et soient AB et CD les côtés adjacents parallèles à Ox . Plusieurs cas sont à distinguer suivant que les angles B et C sont saillants ou rentrants.

1° Les angles B et C sont tous deux saillants. L'égalité des valeurs de u sur AB et sur CD sera assurée si l'intensité totale de courant débité par les électrodes de BC est nulle; c'est une conséquence immédiate du fait que u définit la fonction de courant dans le bassin électrique;

2° Si l'un des angles B ou C , B pour fixer les idées, est rentrant, la question est un peu plus complexe. La fonction u augmente indéfiniment lorsque l'on tend vers le point B sur CB , l'intensité de courant débitée par BC est donc infinie (dans une réalisation parfaite). Mais l'égalité de u sur AB et CD entraîne que l'on doit avoir une intensité globale de courant nulle à travers un contour suivant CB jusqu'en B' très voisin de B , puis évitant la singularité B pour rejoindre le bord AB : c'est donc l'ensemble des électrodes de BC et de l'électrode d'angle B qui doit donner une intensité totale nulle;

3° Si enfin les deux angles B et C sont rentrants, on raisonnera de même pour aboutir à la conclusion que l'intensité de courant globale des électrodes de BC et des électrodes d'angle B et C doit être nulle.

Ces conditions d'intensités nulles sont remplies automatiquement en utilisant l'artifice des alimentations indépendantes, employé par L. Malavard dans d'autres questions et déjà signalé au début du paragraphe V.

Chaque groupe d'électrodes d'un côté tel que BC , y compris les électrodes d'angle quand il en existe, reçoit le courant d'un transformateur particulier, un dernier transformateur alimentant le pont de mesure des différences de potentiel.

Le réglage ne concerne plus dès lors que la loi des potentiels $v = Fy$. Il apparaît *a priori* assez complexe, le rôle des électrodes d'angle

n'apparaissant pas très clairement, de prime abord. D'après les essais réalisés il est commode d'effectuer ce réglage de la façon suivante : pour chacun des circuits indépendants, on règle les différences de potentiel des électrodes de façon que ces différences correspondent à la loi $v = Fy$. Il reste alors, entre les divers circuits, des différences d'origine des échelles que l'on réduit en agissant sur les potentiels (inconnus *a priori*) des électrodes d'angle. On atteint ainsi, par des tâtonnements qui ne sont pas faits au hasard, le réglage complet.

Les indications précédentes seront complétées et précisées, au paragraphe suivant, à propos des exemples particuliers envisagés.

VIII. — Applications diverses.

A. *Cas du fer cornière à ailes illimitées.* — Nous commencerons par l'étude de ce cas, bien qu'il ne rentre pas exactement dans l'analyse précédente. Mais, d'une part, la réalisation analogique correspondante est relativement simple parce qu'il n'est pas nécessaire, comme on le verra, d'utiliser plusieurs alimentations indépendantes et, d'autre part, le cas en question a été traité théoriquement, de façon détaillée, par Trefftz, de sorte qu'il nous fournira de nouvelles comparaisons entre le calcul et l'expérimentation rhéoélectrique. Nous n'aurons pas à revenir ici sur l'analyse de Trefftz, pour laquelle nous renverrons à son Mémoire ⁽¹⁾, la solution analogique en étant tout à fait indépendante.

Le fer cornière à ailes illimitées a une section droite limitée par les deux angles droits xOy et $x_1O_1y_1$ (*fig. 21*) et qui s'étend à l'infini dans les directions x et y . Il est clair que, comme au paragraphe précédent, la recherche de la fonction de tension $\varphi(x, y)$ peut être remplacée par celle du couple de fonctions harmoniques conjuguées u et v , définies toujours par les relations

$$u = \varphi'_x, \quad v = -\varphi'_y + Fy,$$

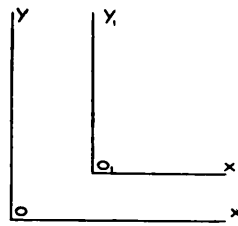
⁽¹⁾ *Ueber die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalen Querschnitt* (*Math. Ann.*, t. 82, 1921, p. 97-112).

avec les conditions (24)

$$(24) \quad \begin{cases} u = 0 & \text{sur } Ox \text{ et sur } O_1x_1, \\ v = Fy & \text{sur } Oy \text{ et sur } O_1y_1. \end{cases}$$

Mais, dans le cas de la section s'étendant à l'infini, ces conditions sont

Fig. 21.



seulement nécessaires et ne suffisent plus à assurer que la fonction φ définie à partir de u et v par la relation

$$(25) \quad \varphi = \int [u dx + (Fy - v) dy],$$

avec l'origine de l'intégration prise sur le contour, en O par exemple, soit nulle sur tout ce contour : φ sera bien nulle sur les côtés de l'angle xOy , mais on peut seulement affirmer qu'elle est constante sur les côtés de l'angle $x_1O_1y_1$. On sera certain que φ est également nulle sur $x_1O_1y_1$, si l'on ajoute aux (24) une condition supplémentaire telle que la suivante :

L'intégrale (25), prise entre deux points, l'un sur l'axe Ox et l'autre sur l'axe O_1x_1 , est nulle.

Les points choisis importent peu, il sera commode de prendre l'intégrale sur un segment parallèle à Oy ($x = x_0$). Il reste alors seulement

$$\int_0^b [Fy - (v)_{x=x_0}] dy = 0,$$

b étant la distance entre Ox et O_1x_1 .

Il est intuitif d'autre part, d'après la réalisation analogique qui sera donnée ultérieurement, que v tend vers une limite v_∞ lorsque x augmente indéfiniment. La condition précédente, où l'on fait

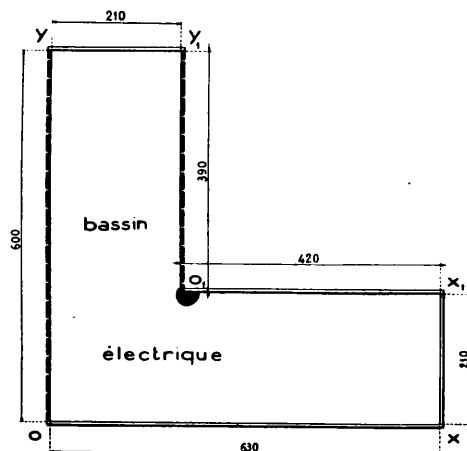
tendre x_0 vers l'infini, prend donc la forme, que nous utiliserons

$$(28) \quad v_x = \frac{1}{2} F b.$$

Décrivons, après ce préliminaire, la réalisation analogique en nous limitant encore au cas où c'est v que l'on veut obtenir comme potentiel électrique dans le bassin.

L'alimentation du bassin est assurée par des électrodes portées par les bords Oy et O_1y_1 et par une électrode d'angle en O_1 (cf. fig. 22). Chacune des électrodes est reliée à la prise mobile d'un potentiomètre de réglage (le schéma électrique, très immédiat, n'est pas reproduit

Fig. 22.



sur la figure). Les bords Ox et O_1x_1 sont isolants. Enfin on limite le bassin en xx_1 et yy_1 en donnant aux ailes Oxx_1O_1 et Oyy_1O_1 une longueur assez grande pour qu'elles puissent être considérées comme pratiquement infinies. Il est bon de vérifier que la nature, isolante ou conductrice, de ces dernières parois est sans effet sur les phénomènes dans la partie centrale du champ.

Le réglage à faire concerne :

- a. Les potentiels des électrodes des bords Oy et O_1y_1 , à amener aux valeurs définies par la loi $v = Fy$;
- b. Le potentiel de l'électrode d'angle qu'il faut choisir de façon à

remplir la condition (28)

$$v_{\infty} = \frac{1}{2} Fb.$$

Pratiquement on réglera à cette valeur le potentiel du point milieu de xx_1 .

Il convient d'insister sur la différence entre ce réglage et celui qui, conformément à l'analyse du paragraphe VII, sera utilisé plus loin pour traiter le problème de la torsion d'un fer cornière à ailes limitées.

Dans l'un et l'autre cas, les bords Ox et O_1x_1 du bassin sont isolants, ce qui assure seulement que u soit constant sur chacun d'eux. Il faut encore que la valeur de u soit la même sur Ox et sur O_1x_1 , ce qui, dans le cas de la cornière limitée, donne la condition à remplir d'intensité globale nulle débitée par les électrodes de la frontière xx_1 . Dans le modèle concernant le fer illimité, il n'y a pas de courant débité dans une section telle que xx_1 , de sorte qu'il est certain *a priori* que u a la même valeur sur Ox et sur O_1x_1 ; mais on a la condition supplémentaire (28), dont on a vu plus haut l'origine.

Pour un fer à ailes illimitées aussi bien que pour un fer à ailes limitées, on peut considérer que le champ (u, v) correspondant au problème de la torsion résulte, par combinaison linéaire

$$u = u' + mu^{(1)}, \quad v = v' + mv^{(1)},$$

de deux champs, l'un (u', v') sans singularité, l'autre $(u^{(1)}, v^{(1)})$ avec la singularité à l'angle rentrant, et caractérisés par les conditions aux limites indiquées au paragraphe VII ($\frac{du'}{dn}$ et $\frac{dv^{(1)}}{dn}$ nuls sur les côtés parallèles à Ox , $v' = Fy$ et $v^{(1)} = 0$ sur les côtés parallèles à Oy).

Mais la valeur convenable de la constante m sera déterminée, dans le cas du fer limité par la condition d'intensité nulle sur xx_1 , tandis que, dans le cas du fer illimité, elle est déterminée par la relation (28).

Le modèle expérimenté était conforme au croquis de la figure 22, sur laquelle les cotes inscrites désignent des millimètres.

Comme l'indique la figure 22, le côté Oy portait 21 électrodes, les 19 électrodes centrales identiques et d'équidistance 30^{mm}, les électrodes d'extrémité réduites à leur moitié. La première élec-

trode, en O, était portée au potentiel zéro et la dernière, en y , au potentiel 100 (bornes de l'échelle potentiométrique du pont de mesure), ce qui correspond à

$$F = \frac{100}{600} = \frac{1}{6},$$

les longueurs étant évaluées en millimètres. Les électrodes centrales devaient par suite être réglées aux potentiels

$$5, 10, 15, \dots, 90, 95.$$

Sur le côté O_1y_1 , s'encastrent 14 électrodes de disposition analogue aux précédentes; deux électrodes en vis-à-vis, sur Oy et sur O_1y_1 , correspondant donc au même potentiel, étaient reliées à un même potentiomètre d'alimentation et se réglaient simultanément.

Les réglages nécessaires (potentiels des électrodes de frontière aux valeurs indiquées plus haut, potentiel $\frac{Fb}{2} = \frac{210}{12} = 17,5$ au milieu de xx_1) s'effectuaient très rapidement en agissant sur les alimentations des électrodes de frontière et de l'électrode d'angle. Les lignes équipotentiellles obtenues dans le bassin sont représentées figure 23.

Par interpolation sur le graphique obtenu on lit, en un point quelconque du champ P, la valeur de φ , d'où la contrainte

$$\tau_{xz} = Fy - \varphi;$$

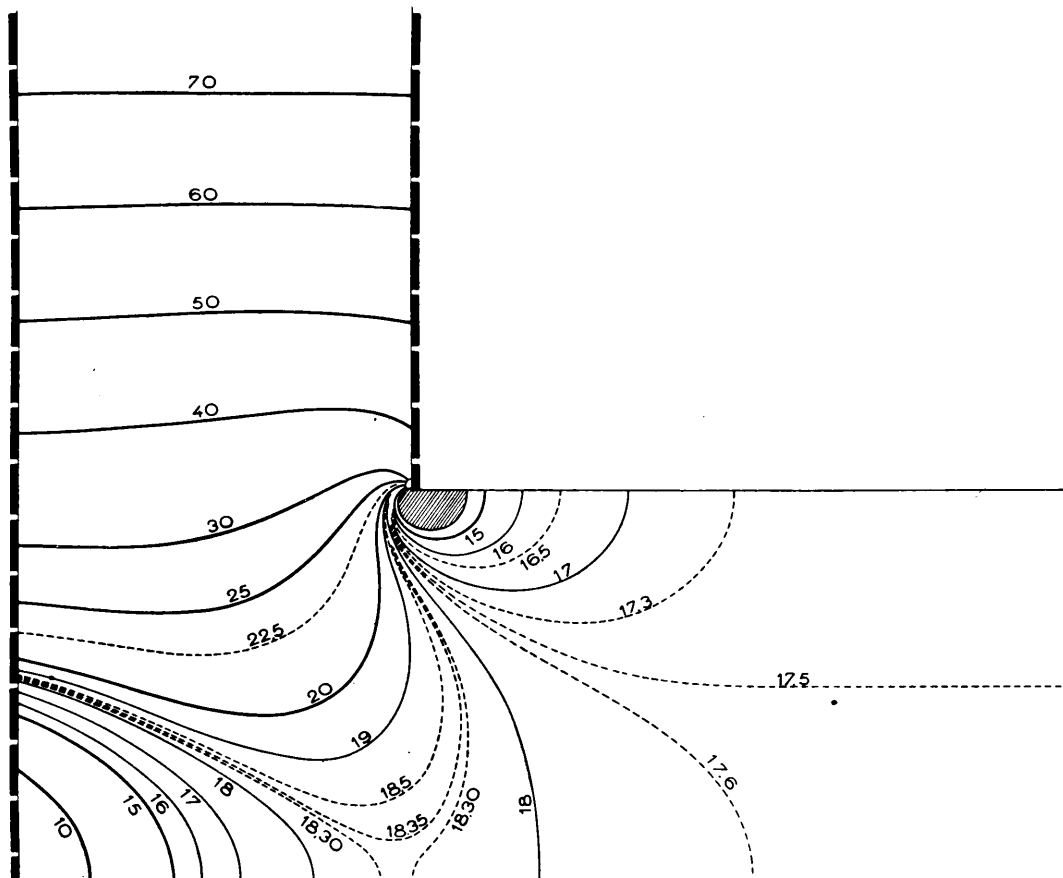
d'après la symétrie du champ, on obtiendra τ_{yz} par la même formule appliquée au point symétrique de P par rapport à la bissectrice de xOy , de sorte que la figure 23 définit entièrement les efforts de torsion dans le fer considéré. Dans le cas d'un fer dont les ailes n'auraient pas la même largeur, il faudrait un second essai au bassin électrique, effectué en changeant le rôle des côtés Ox , O_1x_1 et Oy , O_1y_1 , pour déterminer les τ_{yz} .

Les potentiels φ sur les côtés Ox et O_1x_1 ont été relevés et les courbes correspondantes de la contrainte (qui se réduit à τ_{xz}) sont données figures 24 et 25 (courbes I) : on a porté en ordonnée le

coefficient sans dimensions

$$k = \frac{2 |\tau_{xz}|}{\Gamma b},$$

Fig. 23.



d'où

$$k = \frac{2\nu}{35} \quad \text{sur } Ox$$

et

$$k = 2 \left(1 - \frac{\nu}{35} \right) \quad \text{sur } O_1 x_1.$$

Dans le cas, envisagé ici, d'un fer symétrique, les mêmes courbes

représentent la variation de

$$k' = \frac{2 |\tau_{yz}|}{Fb}$$

Fig. 24.

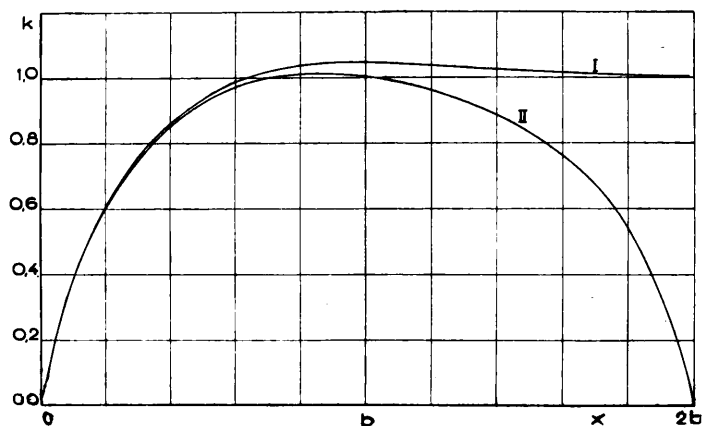
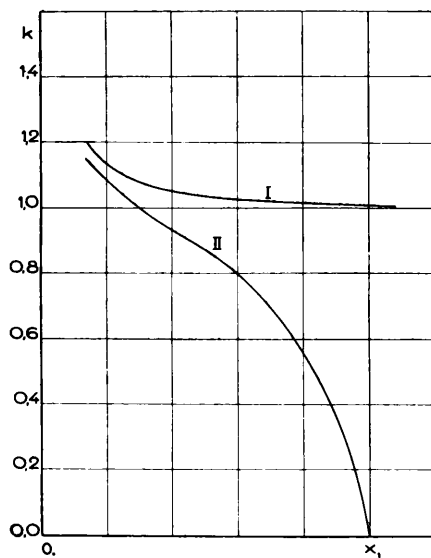


Fig. 25.



le long de Oy et de O_1y_1 . Dans le cas d'un fer dissymétrique, on notera, comme au paragraphe VI, que la mesure des intensités de

courant débité par les diverses électrodes donne pour chaque électrode, une valeur moyenne de φ''_{xy} , d'où φ'_x , et enfin k' , par intégration graphique. Mais la précision ainsi obtenue, bien que suffisante en général, est moindre que celle que donneraient les relevés de potentiels dans le second essai indiqué plus haut.

Chacune des figures 24 et 25 donne deux courbes numérotées I et II. Les courbes I représentent, comme il vient d'être dit, les résultats obtenus au bassin pour le fer à ailes illimitées; les courbes II sont relatives au cas du fer à ailes limitées qui sera envisagé plus loin.

Les courbes I obtenues ainsi sont en excellent accord avec les mêmes courbes calculées par les formules de Trefftz. Sur Ox la différence des valeurs de k obtenues par l'une ou l'autre méthode n'est sensible qu'au voisinage du maximum et atteint à peine quelques millièmes en valeur relative. Sur O_1x , l'écart devient du même ordre quand on se rapproche de la singularité O_1 . Dans l'un et l'autre cas, les valeurs expérimentales sont un peu au-dessous des valeurs théoriques.

La réalisation expérimentale avait été très soignée et, au cours des expériences, il avait été vérifié que les modifications suivantes étaient sans influence : a , la paroi isolante xx_1 , est remplacée par une électrode sans liaison avec le circuit général et dont le potentiel est amené, par réglage au potentiel v_∞ , soit ici 17,5; b , la paroi isolante yy_1 , est remplacée par une électrode au potentiel 100. On pouvait dès lors compter que les ailes du modèle électrique avaient une longueur suffisante pour une bonne représentation du fer à ailes illimitées.

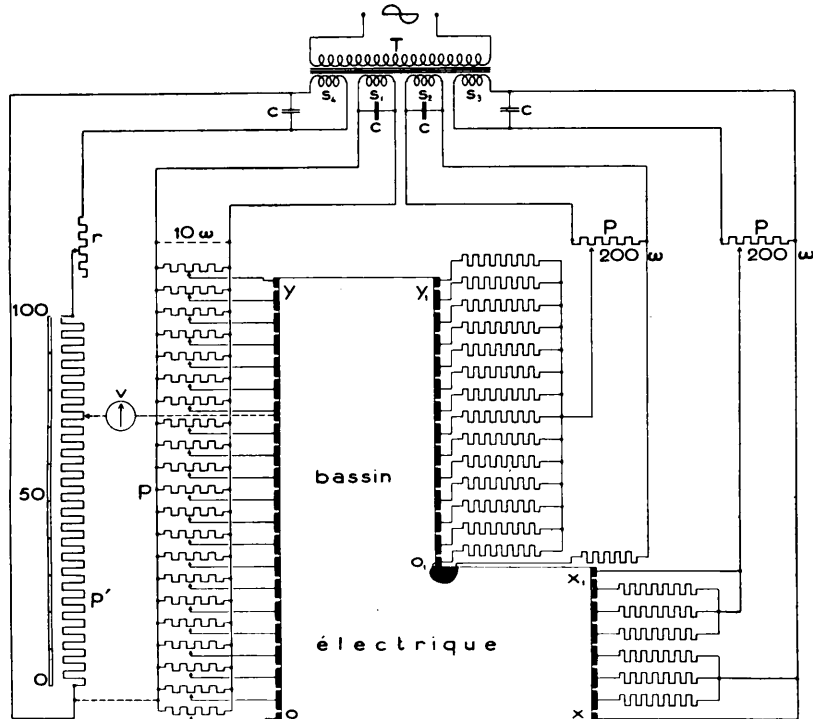
Les vérifications obtenues montrent que, même dans le cas de modèles compliqués, la méthode d'analogies électriques est susceptible d'une précision fort satisfaisante.

B. *Fer cornière à ailes limitées.* — La réalisation effectuée dans ce cas, à titre d'exemple, est exactement conforme à l'analyse du paragraphe VII sur laquelle nous n'avons pas à revenir. Le modèle électrique et le schéma d'ensemble du montage sont donnés figure 26.

Le fer avait pour section $Oxx_1O_1y_1y$ avec les cotes $Ox = 420$, $Oy = 600$, 210 de largeur de chaque aile (cotes en millimètres pour

le bassin électrique utilisé). Les électrodes, sur Oy , sur O_1y_1 et sur xx_1 , sont indiquées sur la figure.

Fig. 26.



L'alimentation indépendante des divers groupes d'électrodes était assurée par un transformateur T dont le primaire (impédance de 500Ω) s'adaptait directement à l'amplificateur du générateur basse-fréquence. T comportait plusieurs secondaires : s_1 , s_2 , s_3 alimentant respectivement les groupes d'électrodes de Oy , de O_1y_1 (avec l'électrode d'angle), enfin de xx_1 ; s_4 débitant sur le pont potentiométrique de mesures (1000Ω). Comme l'indique le schéma, le réglage des potentiels sur Oy s'effectuait au moyen de potentiomètres p distincts, un pour chaque électrode; par contre, pour les groupes d'électrodes de O_1y_1 et xx_1 , on utilisait seulement un potentiomètre p pour l'ensemble et des résistances permettaient d'achever le réglage. Signalons enfin les condensateurs c montés en parallèle à la sortie

des divers secondaires, et qui ont permis d'équilibrer les phases des divers circuits.

Le réglage se faisait par tâtonnements successifs, en mettant d'abord en court-circuit les électrodes de xx_1 , et faisant un premier ajustement des potentiels sur Oy et O_1y_1 , agissant d'autre part sur l'alimentation de l'électrode d'angle pour amener à 17,5 le potentiel des électrodes réunies sur xx_1 . Puis on parachevait le réglage pour tous les groupes d'électrodes et il ne restait plus qu'à réaliser la coïncidence des zéros des trois circuits s_1, s_2, s_3 en agissant sur la résistance qui commandait l'électrode d'angle.

L'échelle (0,100) du pont de mesure p' était ajustée par convention aux bornes du secondaire s_1 , la résistance r , en série avec le pont, étant prévue à cet effet.

Les résultats sont donnés figure 27 en ce qui concerne les lignes de niveau v , lesquelles définissent entièrement, comme il a été expliqué plus haut à propos du fer à ailes illimitées, le champ des contraintes élastiques τ_{xz} . Nous donnons de plus, courbes II des figures 24 et 25, la variation du coefficient de contrainte k sur Ox et sur O_1x_1 .

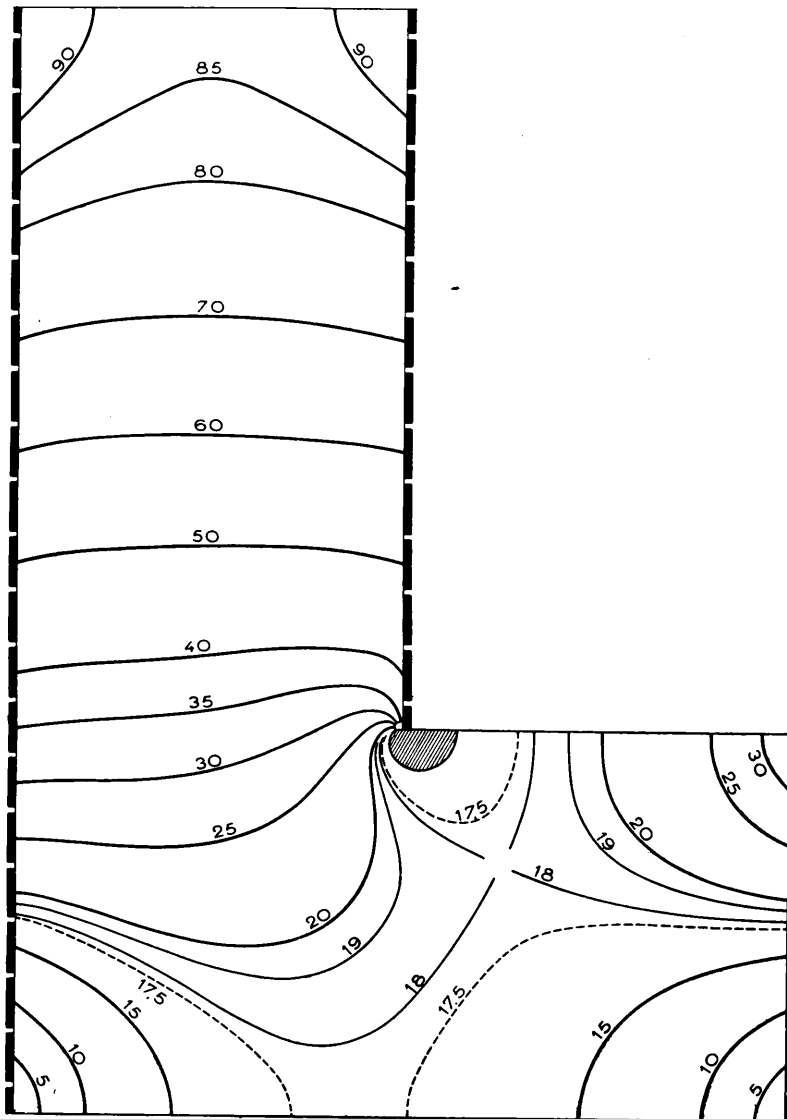
C. Remarques complémentaires. — Dans le cas d'une section, de forme d'ailleurs quelconque, présentant l'axe de symétrie Oy , la fonction de tension φ sera paire par rapport à x ; sa dérivée $u = \varphi'_x$ est donc impaire par rapport à x et la fonction $v = Fy - \varphi'_y$ est paire. Lorsque la section admet Ox comme axe de symétrie, c'est v qui est impaire en y et nulle sur Ox , tandis que u est paire.

Les symétries permettent donc de réduire la réalisation analogique à la moitié du champ, s'il existe un axe de symétrie, et à un quart du champ, s'il existe deux tels axes. C'est ce que l'on a déjà vu dans le cas du rectangle. Il est intéressant de remarquer également que, grâce aux symétries, un modèle analogique établi pour le fer cornière peut être utilisé, avec des modifications insignifiantes, pour l'étude de la torsion de barreaux ayant d'autre formes de section :

- a.* Section en **U** avec un axe de symétrie,
- b.* Section en **+** avec deux axes,
- c.* Section en **T** avec un axe,
- d.* Section en **±** avec deux axes.

C'est ce qui apparaît clairement sur les figures 28 qui donnent,

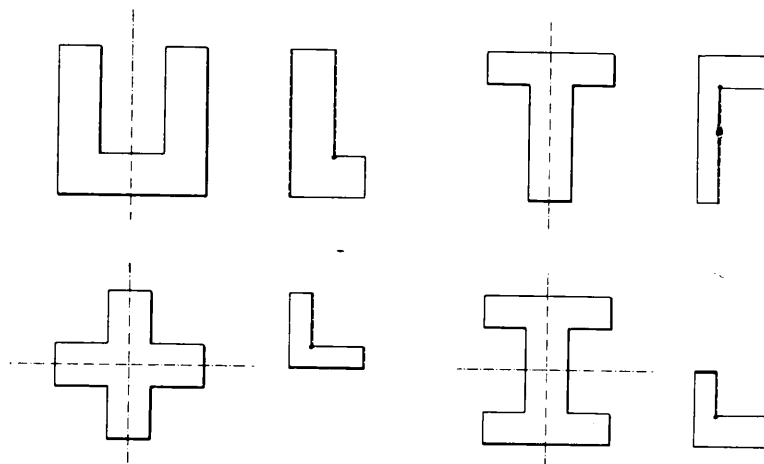
Fig. 27.



pour chacune des formes de section spécifiées, un schéma du modèle analogique : sans qu'il soit besoin d'insister, il suit, de ce qui précède,

qu'un segment frontière du bassin et appartenant à un axe de symétrie Oy (ou parallèle à Oy) devra être isolant, tandis qu'un

Fig. 28.



segment frontière appartenant à un axe parallèle à Ox ($y = y_0$) devra être représenté par une électrode portée au potentiel Fy_0 . Sur les autres frontières du bassin, les données aux limites résultent de l'étude générale du paragraphe précédent. Les essais correspondants ne présentent aucune difficulté dès que les principes en ont été posés.

Nous envisagerons ultérieurement l'étude de l'influence des congés aux angles rentrants, étude qui amène à d'autres types de modèles analogiques.

IX. — L'étude analogique de la flexion.

Les diverses réalisations analogiques qui viennent d'être envisagées à propos de la torsion ne sont pas, bien entendu, limités dans leur application à ce problème et on les retrouvera dans beaucoup d'autres questions. Nous terminerons le présent Mémoire en donnant quelques indications sur leur emploi dans l'étude de la *flexion d'un barreau cylindrique encastré à une de ses extrémités et soumis à l'autre extrémité à une charge P agissant suivant un axe principal de la section droite.*

Nous supposons, comme dans le cas de la torsion, que les axes Ox et Oy ont été pris dans un plan de section droite, Ox définissant l'axe principal suivant lequel, dans la section terminale, agit la charge P . On sait que les composantes de tension se réduisent à la tension τ_{zz} et aux cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} . τ_{zz} a la même expression que dans le cas de la flexion simple

$$(29) \quad \tau_{zz} = - \frac{Pzx}{I},$$

I étant le moment d'inertie de l'aire de section droite par rapport à Oy , z la distance à l'extrémité libre. Les cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} sont indépendants de z et s'expriment au moyen d'une fonction de tension $\varphi(x, y)$. On peut prendre (1)

$$(30) \quad \tau_{xz} = \varphi'_y - \frac{Px^2}{2I} + f(y), \quad \tau_{yz} = -\varphi'_x,$$

la fonction φ étant solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(31) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py}{I} - \frac{df}{dy}$$

et prenant des valeurs assignées, qui dépendent du choix de $f(y)$, sur le contour de section droite; ν est le coefficient de Poisson.

Il est clair qu'en retranchant de φ une autre solution φ_0 de l'équation (31) (par exemple l'une des solutions évidentes qui ne dépendent que de y) on passera à une fonction harmonique Φ définie par des données de Dirichlet et qui admet donc une détermination analogique du type considéré au paragraphe IV. On pourra aussi, comme au paragraphe VI et suivants, obtenir des réalisations concernant les dérivées premières ou secondes.

Bornons-nous, pour fixer les idées, au cas où la section droite est un rectangle de dimensions $2a$ parallèlement à Ox et $2b$ parallèlement à Oy (mêmes notations que plus haut). La fonction f peut être prise égale à $\frac{Pa^2}{2I}$, le dernier terme de (31) disparaît et φ est

(1) Cf. S. TIMOSHENKO, *Théorie de l'Élasticité*, p. 310.

nulle au contour. On pourra envisager des modèles dans lesquels le potentiel électrique s'identifie avec :

$$a. \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} y(y^2 - b^2).$$

Le bassin électrique représentant, dans ce cas comme dans tous les suivants, le quart du champ (rectangle OAPB), il faudra prendre OA et PB munis d'électrodes au potentiel zéro, OB isolant, AP avec des électrodes à régler suivant la loi de potentiels $-\frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} y(y^2 - b^2)$.

b. L'une des deux fonctions conjuguées

$$u = \Phi'_x = \varphi'_x, \quad v = -\Phi'_y = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{P}{6I} (3y^2 - b^2) - \varphi'_y,$$

u est nul sur PB et par raison de symétrie, sur BO et sur OA, v prend les valeurs $\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{P}{6I} (3y^2 - b^2)$ sur AP et $\frac{du}{dn} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y est donc égal à $\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{P \cdot y}{I}$. Si c'est u que l'on veut réaliser comme potentiel électrique dans le bassin, il faudra que PB, BO, OA soient conducteurs, au potentiel 0, et AP avec des électrodes qui devront débiter un courant $\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{P \cdot y}{I} \cdot \frac{h\varepsilon}{\sigma}$ [cf. formule (2)]. Pour réaliser v , PB, BO, OA seront isolants et les électrodes de AP amenées aux potentiels indiqués plus haut.

$$c. \quad \varphi''_{y^3}.$$

En raisonnant comme dans le cas de la torsion, on voit immédiatement que OB sera isolant, OA et PA conducteurs et au potentiel 0, enfin BP conducteur et au potentiel $\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{Pb}{I}$.

$$d. \quad \varphi''_{x^3}.$$

Ce cas se relie immédiatement au précédent, d'après (31); les seules modifications à faire au montage sont les suivantes : BP est au potentiel 0 et AP porte des électrodes à régler suivant la loi de potentiels $\frac{\nu}{1+\nu} \cdot \frac{P \cdot y}{I}$.

Il serait évidemment fastidieux de donner ici des exemples de tous les cas. Nous choisissons donc non pas le plus simple (qui est c), mais celui qui nous paraît le plus démonstratif, à savoir d . Pour $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ et des potentiels variant linéairement, sur AP, de 0 à 100, ce qui implique

$$\frac{\nu}{1+\nu} \frac{Pb}{I} = 100, \quad \text{d'où } P = \frac{2000}{3} a^3,$$

en prenant $\nu = 0,25$ et compte tenu de la valeur de I ($I = \frac{4a^3b}{3}$), on obtient dans le bassin les lignes potentielles reproduites figure 29. Sur une droite $y = y_0$, on aura φ'_x par quadrature du potentiel $v(x, y) = \varphi''_{x_0}$ obtenu dans le bassin :

$$(32) \quad \varphi'_x = \int_0^x v(x, y_0) dx;$$

sur une droite $x = x_0$, on aura de même

$$(33) \quad \varphi'_y = \frac{\nu}{1+\nu} \frac{Py^2}{2I} - \int_0^y v(x_0, y) dy + K(x_0),$$

la constante K , qui dépend de x_0 , étant définie par la condition que φ s'annule au contour, d'où

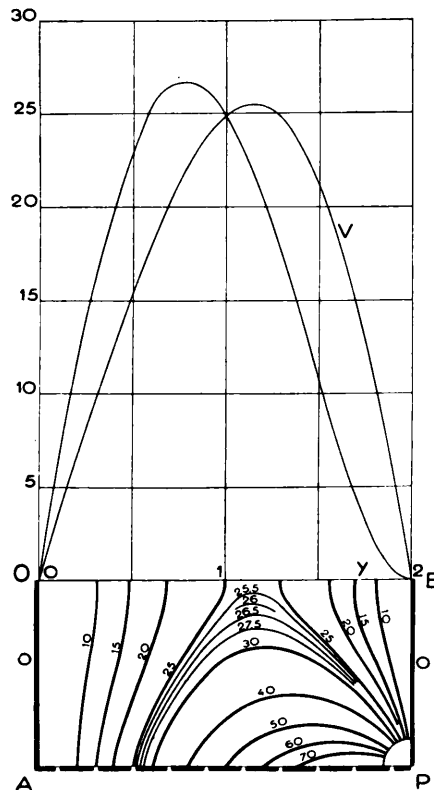
$$(34) \quad K(x_0) = -\frac{\nu}{1+\nu} \frac{Pb^2}{6I} + \frac{1}{b} \int_0^b (b-y) v(x_0, y) dy;$$

les contraintes de cisaillement en résultent immédiatement.

Elles sont particulièrement intéressantes sur l'axe OB. Pour les définir, on a tracé (fig. 29) les courbes de variation de v et de $v(2-y)$, on a pris dans les calculs $a = 1$ et $b = 2$. L'aire de cette dernière courbe, mesurée au planimètre, intervient dans la valeur de K . La constante K étant connue, la formule (33) donne φ'_y , d'où le cisaillement, qui se réduit ici à sa composante τ_{xz} . On a ainsi obtenu, comme rapport entre le cisaillement correct et celui que donne la formule élémentaire ($\frac{3P}{8ab}$), les valeurs 0,857 en O et 1,393 en B, valeurs exactes 0,856 et 1,396.

Un autre essai, concernant le cas de $\frac{a}{b} = 2$ a donné, pour le même

Fig. 29.



rapport 0,983 en O et 1,033 en B, valeurs qui s'accordent exactement avec celles que donne la théorie.

