

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

JULIEN KRAVTCHENKO

**Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz  
; théorie des sillages et des proues**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 20 (1941), p. 35-106.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1941\\_9\\_20\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20_35_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz;  
théorie des sillages et des proues;*

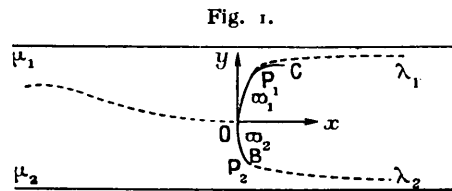
PAR JULIEN KRAVTCHENKO.

CHAPITRE I.

I. — Généralités. Historique. Énoncé des problèmes.

1. SCHEMA DE HELMHOLTZ-KIRCHHOFF. — Considérons un mouvement permanent, plan, irrotationnel d'un fluide parfait, incompressible, enfermé dans un canal (1) à parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , rectilignes, indéfinies et parallèles. Venant de l'infini en amont, le courant heurte un obstacle  $\widehat{BC}$ , fixe par rapport aux bords du canal.

Pour échapper au paradoxe de d'Alembert, on est conduit à envisager le schéma suivant du mouvement. En un point O du profil de



l'obstacle, la vitesse du fluide est nulle; le courant s'y divise en deux

(1) Le cas du fluide limité par une seule paroi plane, ainsi que le cas du fluide illimité, peuvent être envisagés comme cas limites du canal.

parties. Le fluide glisse ensuite le long des arcs  $OP_1$  et  $OP_2$  (arcs que nous désignerons par  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ ) de la courbe obstacle, s'en détache aux points  $P_1$  et  $P_2$  (confondus ou non avec ses extrémités), formant ainsi à l'arrière du corps solide immergé un sillage étendu jusqu'à l'infini et limité, outre  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$ , par deux lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , de formes *a priori* inconnues. La masse du fluide formant sillage est immobile par rapport au corps.

L'obstacle est supposé tranchant. Nous admettrons donc dans ce qui suit que la condition suivante est satisfaite : l'intersection de toute droite parallèle aux parois avec la courbe obstacle se réduit à un seul point; exceptionnellement cette intersection pourra comprendre un segment rectiligne. Les arcs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  possèdent en chacun de leurs points une tangente qui varie continûment le long de ces arcs. Dans certains énoncés, le point O pourra, toutefois, être supposé anguleux.

Relativement au schéma de Helmholtz <sup>(2)</sup>-Kirchhoff <sup>(3)</sup> qu'on vient de décrire, on peut se poser plusieurs problèmes.

**2. PROBLÈME INDÉTERMINÉ DE MM. LEVI-CIVITA ET VILLAT.** — On se donne *a priori* une fonction d'une variable caractérisant l'obstacle et les valeurs de trois paramètres; le problème consiste à construire, à partir de ces données arbitraires (assujetties, toutefois, à vérifier quelques conditions qualitatives simples), un mouvement à la Helmholtz et en déterminer les éléments géométriques et cinématiques.

Ce problème, formulé par M. H. Villat <sup>(4)</sup> à la suite des travaux de M. T. Levi-Civita <sup>(5)</sup>, a été résolu par M. Villat lui-même,

<sup>(2)</sup> *Berliner Berichte*, 1868, p. 215; *Wissenschaftl.-Abhandlungen*, t. 1, p. 146.

<sup>(3)</sup> *Vorlesungen über math. Physik*, 22<sup>e</sup> leçon.

<sup>(4)</sup> *Sur la résistance des fluides* (Thèse), *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1911, p. 203. Voir aussi le Mémoire de H. Villat, id., t. 29, 1912, p. 127 et son livre : *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (*Collection Scientia*, Gauthier-Villars, 1920).

<sup>(5)</sup> *Scie le leggi di résistenze* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 23, 1907).

étudié et généralisé ensuite par M. U. Cisotti <sup>(6)</sup> et ses élèves, puis par MM. D. Riabouchinsky et B. Demtchenko <sup>(7)</sup>.

Les formules de résolution de M. Villat permettent d'écrire les équations des lignes de jet; on constate que ces courbes sont à tangente continue et se raccordent en leurs points de détachement avec l'obstacle, formant ainsi avec lui un contour à tangente continue.

**3. VALIDITÉ PHYSIQUE DES SOLUTIONS.** — Pour être physiquement acceptables, les solutions construites par M. Villat doivent satisfaire à deux conditions énoncées par M. M. Brillouin <sup>(8)</sup>.

En premier lieu, la vitesse du courant doit être partout inférieure à la vitesse du courant à l'infini en aval. Cette inégalité fondamentale complète les équations du problème en exprimant que la pression ne peut devenir négative en aucun point du fluide en mouvement; elle assure la convexité des lignes de jet vers le courant, allure qui, du point de vue physique, est particulièrement satisfaisante pour elles.

En second lieu, les lignes de jet ne doivent ni se recouper, ni recouper l'obstacle. En étudiant à ce point de vue l'allure de la ligne libre au point de détachement, MM. Brillouin et Villat ont constaté que sa courbure est, en général, infinie en ce point; la courbe s'incurve donc dans le voisinage de ce dernier. Cela est sans inconvénient dans le cas de l'obstacle tranchant si le point  $P_1$  est confondu avec l'extrémité de l'obstacle. Cette circonstance est, au contraire, incompatible avec l'hypothèse d'un corps solide se prolongeant dans le sillage au delà du point  $P_1$ . Il faut donc assujettir la ligne libre à

---

<sup>(6)</sup> *Idromeccanica piana*, Milan, 1922 (chez Tamburini). Cet ouvrage contient une bibliographie très étendue des travaux de l'école italienne (MM. Colonetti, Caldonazzo, Palatini, Boverio, etc.); on y trouvera aussi des indications sur les travaux antérieurs à ceux de M. Villat et dus, outre M. Cisotti lui-même, à lord Rayleigh, Michell, A. Love, Bobyleff, Réthy, Greenhill, etc.; ces auteurs ont réussi à résoudre ce que nous appelons le problème indéterminé dans des cas particuliers.

<sup>(7)</sup> Cf. l'ouvrage de M. DEMTCHENKO, *Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits*, 1934 (Gauthier-Villars), qui comporte une bibliographie complète de la question; cet auteur a réussi à traiter le problème dans des cas beaucoup plus étendus.

<sup>(8)</sup> *Annales de Physique et de Chimie*, 23, 1911, p. 154.

avoir au point  $P$ , une courbure finie; celle-ci est alors nécessairement égale, comme l'a montré M. Villat, à celle de l'obstacle en ce point.

Dans ce cas, le détachement est dit en proue.

**4. PROBLÈMES DU SILLAGE ET DE LA PROUE.** — Les remarques qui précèdent incitent à préciser comme suit le schéma du mouvement de Helmholtz et à formuler pour les obstacles tranchants deux problèmes.

*Problème du sillage.* — On place arbitrairement les points de détachement des lignes libres aux extrémités de l'obstacle, caractérisé par les données arbitraires de M. Villat et l'on construit à l'aide de ses formules la solution correspondante. Il y aura lieu ensuite de vérifier si les conditions de validité de M. Brillouin sont satisfaites.

*Problème de la proue.* — On cherche à construire un mouvement à la Helmholtz (correspondant à un obstacle caractérisé par les données arbitraires de M. Villat) ayant les propriétés suivantes : si l'extrémité de l'obstacle ne coïncide pas avec le point de détachement, la ligne libre doit présenter en ce point un détachement en proue. On examinera ensuite la solution du point de vue de la validité.

**5. ÉTUDE DE LA VALIDITÉ DES SOLUTIONS DE M. VILLAT.** — On se trouve ainsi conduit au problème de la validité physique des solutions de la théorie du sillage et de la proue; il s'agit de déterminer des classes aussi étendues que possible des fonctions arbitraires caractérisant l'obstacle qui conduisent à un régime physiquement acceptable. Dans cet ordre d'idées, les premiers résultats fondamentaux sont dus à M. Villat <sup>(9)</sup> qui, en se bornant au cas de l'obstacle symétrique (soit en fluide indéfini, soit placé symétriquement dans un canal), a indiqué de vastes catégories de profils auxquels la théorie des sillages s'adapte parfaitement.

M. C. Jacob <sup>(10)</sup> a, depuis, sensiblement généralisé plusieurs théorèmes de M. Villat tout en simplifiant les démonstrations.

<sup>(9)</sup> *Journal de Mathématiques*, 6<sup>e</sup> série, 10, 1914, p. 231.

<sup>(10)</sup> *Sur la détermination des fonctions harmoniques par certaines conditions aux limites* (Thèse) (*Mathematica*, t. XI, 1935, p. 150). Cet auteur étudie

En dehors des cas de la lame rectiligne placée dans le canal et des obstacles concaves vers le courant en fluide illimité (théorème de M. Boggio), on ne connaissait, jusqu'à ces dernières années, aucun exemple de profil dissymétrique conduisant aux solutions acceptables. M. J. Leray <sup>(11)</sup> a obtenu des théorèmes de validité en s'affranchissant de l'hypothèse de la symétrie mais en supposant le fluide indéfini. Dans le Chapitre II, nous montrons que ses conclusions subsistent encore lorsqu'on suppose le fluide enfermé dans un canal à bords rectilignes; nous étendons également aux obstacles de forme dissymétrique plusieurs propositions de MM. Villat et Jacob.

**6. PROBLÈMES D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ.** — On se donne un obstacle tranchant  $\widehat{BC}$  par ses équations intrinsèques, ainsi que sa position par rapport aux parois du canal.

*Problème du sillage.* — Déterminer un mouvement à la Helmholtz qui correspond à la configuration ainsi définie, les points de détachement étant placés, *par hypothèse*, aux extrémités B, C de l'obstacle.

*Problème de la proue.* — Déterminer le sillage correspondant à un obstacle  $\widehat{P_1 P_2}$ , caractérisé comme suit :  $\widehat{P_1 P_2}$  coïncide avec  $\widehat{BC}$  ou est une portion de cet arc. Si  $P_1$  (ou  $P_2$ ) est intérieur à  $\widehat{BC}$ , la ligne libre issue de ce point doit y présenter un détachement en proue. Si  $P_1$  (ou  $P_2$ ) coïncide avec C (ou B), la ligne libre issue de ce point y présente un détachement en proue ou non <sup>(12)</sup>. [Autrement dit, les points de détachement sont actuellement inconnus *a priori*;

un schéma voisin de celui de Helmholtz proprement dit et qui a été proposé par M. V. Valcovici dans son *Inaugural Dissertation*, Göttingen, 1913.

<sup>(11)</sup> *Commentarii Mathematici Helvetici*, 8, 1936, p. 250. Du même auteur : *Sur la validité des solutions du problème de la proue* (Jubilé de M. M. Brillouin, 1935, p. 246).

<sup>(12)</sup> Ces problèmes ont été posés sous cette forme par M. Leray. L'énoncé de M. Leray est même plus précis; si le point de détachement  $P_1$ , par exemple, coïncide avec C, la ligne libre  $\lambda_1$ , lorsqu'elle n'y présente pas un détachement en proue, sera assujettie à y présenter un détachement vers l'aval, c'est-à-dire à présenter sa convexité vers le courant dans le voisinage de C.

mais on impose à la ligne libre une condition supplémentaire de détachement (\*).]

Les problèmes de cette nature seront dits *symétriques* lorsqu'ils seront posés sur des obstacles symétriques par rapport à l'axe du canal; on impose *a priori* au sillage la condition de présenter la même symétrie.

Helmholtz a montré que ces problèmes reviennent à déterminer la représentation conforme du domaine du fluide en mouvement sur un domaine de forme convenable. Ce problème, d'un type essentiellement différent de celui de Riemann, présente la difficulté suivante : une portion de la frontière des deux domaines n'est pas connue *a priori* (c'est le cas des lignes libres pour le domaine du fluide en mouvement). Par contre la fonction analytique, qui réalise la représentation conforme en cause, est assujettie à vérifier le long des portions inconnues de frontière des conditions limites que nous préciserons.

La résolution explicite du problème ainsi posé est, en général, impossible.

On se borne à établir l'existence de solutions, à discuter leur nombre (en particulier à rechercher les catégories d'obstacles pour lesquelles la solution est unique) et à en étudier les propriétés (du point de vue de leur validité et de leur dépendance des éléments géométriques de la configuration).

Avant les travaux de M. Leray, les problèmes de cette nature étaient traités d'abord par la méthode de continuité; la question d'existence des solutions était abordée en même temps que celle de leur unicité.

Les premiers résultats sont dus à M. Weinstein <sup>(13)</sup> qui a étudié

(\*) Signalons encore un schéma différent que M. Stefan Bergmann a fait connaître dans son Mémoire publié dans : *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 12, Heft 2, 1932. Les résultats, curieux, de cet auteur se rattachent aux recherches de M. Villat et de M. Thiry (voir la Thèse de M. Thiry : *Annales de l'École Normale Supérieure*, III, série 38, 1921) sur la multiplicité des solutions de certains problèmes de l'Hydrodynamique; c'est là un point de vue étranger au présent travail.

<sup>(13)</sup> *Sur les jets liquides à parois données* (*Rend. d. R. Acc. Lincei*, 1926, p. 119); *Sur le théorème d'existence pour les jets liquides* (*id.*, 1927, p. 157);

le problème du jet liquide symétrique, équivalent à celui du sillage symétrique dans un canal. Cet auteur opère d'abord la réduction du problème à une question d'unicité locale. Ce dernier problème a été successivement résolu, sous des hypothèses de plus en plus étendues, par MM. G. Hamel <sup>(14)</sup>, H. Weyl <sup>(15)</sup> et K. Friedrichs <sup>(16)</sup>. Les résultats les plus complets obtenus par cette méthode sont de MM. Leray et Weinstein <sup>(17)</sup>.

Dans le cas particulier d'un arc de cercle symétrique placé dans un courant indéfini, le problème d'existence a été ramené par M. A. Quarleri <sup>(18)</sup> à la résolution d'une équation intégrale non linéaire, à laquelle cet auteur tenta d'appliquer les théorèmes d'existence de M. Hammerstein. La question a été reprise par M. Weinstein <sup>(19)</sup> qui a signalé des erreurs dans les raisonnements de M. Quarleri et qui a présenté ensuite une démonstration rigoureuse du théorème d'existence (\*).

*Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen* (*Math. Zeitschrift*, t. 31, 1929, p. 424).

<sup>(14)</sup> *Über einen hydrodynamischen Unitätssatz* (*C. R. du 2<sup>e</sup> Congrès Intern. de Mécanique appliquée*, Zürich, 1926).

<sup>(15)</sup> *Strahlbildung nach der Kontinuitätsmethode behandelt*; *Gött. Nachrichten*, 1927, p. 227.

<sup>(16)</sup> *Über ein Minimum problem für Potentialströmungen* (*Math. Annalen*, t. 109, 1933, p. 60).

<sup>(17)</sup> *Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 198, 1934, p. 430).

<sup>(18)</sup> *Sulla teoria della scia nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo* (*Rend. d. R. Acc. de Lincei*, 1931, p. 332).

<sup>(19)</sup> *Sur les sillages provoqués par des arcs circulaires* (*Rend. d. R. Acc. dei Lincei*, 1933, p. 83). *Sur les points de détachement des lignes de glissement* (*C. R. Acad. Sci.*, t. 196, 1933, p. 324). On trouvera un exposé de l'ensemble des travaux qui précède dans un article de M. Weinstein publié dans *l'Enseignement Mathématique*, t. 35, 1936, p. 107.

(\*) Signalons encore une courte Note de M. M. Lavrentieff parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S.*, vol. XVIII, 1938, fasc. 4 et 5, p. 225 (cette Note a été développée dans un Mémoire très étendu publié en 1939 dans le *Recueil Mathématique de la Société Mathématique de Moscou*, qu'à mon grand regret, et en raison des circonstances actuelles, je n'ai pas pu consulter), où l'auteur énonce des théorèmes très généraux d'existence et d'unicité de la solution du problème du sillage. M. Lavrentieff aborde seule-



Dans ce domaine, M. Leray <sup>(20)</sup> a été le premier à établir des théorèmes d'existence et d'unicité pour des obstacles dissymétriques, plongés dans un fluide indéfini et assujettis seulement à avoir une courbure suffisamment régulière. Cet auteur part des équations intégral-différentielles du problème du sillage [obtenues par M. Villat <sup>(21)</sup>] qui rentrent dans la classe des équations fonctionnelles étudiées par lui en collaboration avec M. J. Schauder <sup>(22)</sup>. Cette théorie permet d'aborder le problème d'existence indépendamment de la question d'unicité. Des théorèmes d'existence ainsi obtenus valent pour des catégories d'obstacles beaucoup plus larges que les énoncés d'unicité; ceux-ci ne s'appliquent qu'aux obstacles réguliers de forme particulièrement simple (profils symétriques, profils convexes, etc.); pour certains profils les conclusions sont particulièrement décisives : arcs de cercle, profils symétriques dits en « accolade ». Les problèmes du sillage ou de la proue posés pour un tel obstacle n'admettent qu'une seule solution qui est nécessairement acceptable; le schéma de Helmholtz semble donc s'adapter particulièrement bien aux profils qui offrent au courant une grande résistance <sup>(23)</sup>.

ment le cas du fluide indéfini. Les hypothèses qu'il fait sur la nature de l'obstacle sont les suivantes :

- 1° l'obstacle possède une courbure suffisamment régulière;
- 2° l'obstacle est symétrique par rapport à une droite parallèle à la direction du courant à l'infini (nos énoncés sont affranchis de cette hypothèse);
- 3° l'intersection de l'obstacle avec une droite parallèle à l'axe de symétrie peut contenir plus d'un point (au contraire, nous supposons qu'une telle intersection ne peut contenir qu'un point unique). Par contre, l'intersection de l'obstacle avec une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie devrait se réduire à un point unique; cette hypothèse n'intervient pas dans nos énoncés.

Plusieurs lemmes, énoncés dans la Note citée, semblent pouvoir conduire à quelques théorèmes de validité.

Ajoutons que M. Lavrentieff ne se pose pas le problème de la proue pour les obstacles qu'il étudie; sa méthode ne semble avoir aucun point commun avec la nôtre.

<sup>(20)</sup> Voir *loc. cit.* <sup>(11)</sup>.

<sup>(21)</sup> Cf. par exemple *Journal de Mathématiques*, 6<sup>e</sup> série, t. 7, 1911, p. 353.

<sup>(22)</sup> J. LERAY et J. SCHAUDER, *Annales de l'École Normale Supérieure*, t. 51, 1934, p. 45.

<sup>(23)</sup> Avant de terminer ce rapide aperçu historique, je dois mentionner un

On peut résumer comme suit nos recherches sur ce sujet : les théorèmes d'existence et d'unicité établis par M. Leray pour des catégories de profils déterminés (variables d'ailleurs d'un énoncé à l'autre), plongés dans un fluide illimité, valent pour les mêmes catégories

certain nombre de travaux qui traitent de l'existence et de l'unicité des solutions du problème du sillage sans atteindre toute la rigueur désirable. Il s'agit des publications de M. Schmieden et de ses élèves (le travail de base de M. Schmieden a été publié dans le Band III, 4 Heft de *l'Ingénieur Archiv*, 1932, p. 368), et de celles des élèves de M. Nekrassoff.

A mon grand regret, je n'ai pu consulter le Mémoire de M. Schmieden. Toutefois, il résulte de plusieurs remarques de MM. Leray (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 8, p. 153) et Weinstein (*Zentralblatt*) que ses démonstrations manqueraient de rigueur.

Je n'ai pas pu, non plus, prendre connaissance du travail de M. Nekrassoff, paru en 1922 dans les Publications de l'Institut Polytechnique d'Ivanovo Vozniesensk sous le titre : *Sur le mouvement discontinu à deux dimensions du fluide autour d'un obstacle en forme d'arc de cercle*, ni des travaux de ses élèves : MM. N. Arjannikoff [*Sur le mouvement d'un courant fluide discontinu et plan autour d'un arc de parabole (Recueil Mathématique de Moscou*, t. XXXV, 1928)], P. Miasnikoff et S. Kalinine (*Dissertations inaugurales soutenues devant l'Institut de Mécanique de l'Université de Moscou au mois de juin 1935*), N. Slioskine, etc. La courte analyse de la méthode employée par ces auteurs que nous allons présenter est faite d'après un article de M. J. Sekerj-Zenkowitch, intitulé : *Aperçus sur la théorie du courant fluide autour d'un arc curviligne avec détachement des lignes de jet* et publié sous forme de brochure par les soins de l'Institut Central aérohydrodynamique de Moscou.

Dans cet article, l'auteur expose la méthode de M. Nekrassoff et l'applique au cas des obstacles suffisamment réguliers situés dans un courant plan de largeur infinie. Sa démonstration me paraît présenter deux lacunes :

1° Après avoir énuméré les hypothèses de régularité faites sur la nature de l'obstacle, M. Sekerj-Zenkowitch affirme, sans le démontrer, que la fonction inconnue doit posséder une dérivée continue. Notons que ce résultat est exact, comme le montrent les paragraphes 22 et 26 de ce travail.

2° Ceci posé, M. Sekerj-Zenkowitch aborde la solution du problème par la méthode des approximations successives. Après avoir défini son processus d'approximations successives, il en démontre la convergence avec beaucoup d'ingéniosité. Il semble, malheureusement, que l'auteur a interverti l'ordre de certaines opérations, en sorte que le problème qu'il a résolu n'est pas identique à celui du sillage, tel qu'il a été formulé dans le texte. Une critique détaillée du procédé de M. Sekerj-Zenkowitch est faite au cours du paragraphe 23.

d'obstacles enfermés dans un canal; les équations intégral-différentielles de M. Villat que nous discutons font intervenir des fonctions elliptiques (contrairement à ce qui a lieu dans le cas du fluide illimité) construites à l'aide du paramètre  $q$ ; ce paramètre se présente sous forme de fonctionnelle très compliquée des données géométriques de la configuration; c'est la limitation *a priori* de cette fonctionnelle qui constitue une difficulté spécifique des problèmes du sillage et de la proue en présence des parois planes.

Signalons, à ce propos, que nous avons réussi à simplifier certains raisonnements de M. Leray en améliorant quelques lemmes de représentation conforme qu'on lui doit et en généralisant un énoncé de MM. Fatou <sup>(24)</sup> et Priwaloff <sup>(25)</sup>; nous avons pu construire *a priori* des modules de continuité pour les fonctions qui réalisent l'application conforme d'une classe très générale des domaines sur le demi-plan, nos résultats restant valables le long des frontières des domaines. Cet aspect de nos recherches, qui présente un intérêt propre, permet de rattacher nos travaux à ceux de MM. Carathéodory, Wolf, Ostrowski, Lavrentieff, Seidel, Warschawski, dont on trouvera la bibliographie au troisième Chapitre.

Il convient aussi de rappeler le rôle que joue, dans nos démonstrations du quatrième Chapitre, certains résultats de MM. Friedrichs et A. Weinstein <sup>(26)</sup>. Enfin nous étudions les propriétés de la solution dont nous avons reconnu l'existence <sup>(27)</sup>.

Nous déterminons d'abord le sens des variations que fait subir, au débit du liquide et au paramètre  $q$ , une translation connue des parois planes. Ensuite nous précisons le comportement des solutions lorsque l'une des parois,  $\mu_1$ , pour fixer les idées, se rapproche indéfiniment

<sup>(24)</sup> *Acta Math.*, t. 30, 1906.

<sup>(25)</sup> *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 44, 1916, p. 100-103.

<sup>(26)</sup> *Loc. cit.* <sup>(15)</sup> et <sup>(16)</sup>.

<sup>(27)</sup> Dans sa thèse et dans une Note élégante aux *Rend. d. Real. Acc. d. Lincei*, 24, 1936, p. 439, M. Jacob s'occupe des problèmes analogues mais dans le cas symétrique. Il applique, notamment, les théories de MM. Schauder-Leray à la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de la proue, l'obstacle étant un arc circulaire, et fait ensuite connaître des propriétés remarquables de la solution.

de l'obstacle de manière à venir à la limite au contact avec l'extrémité C de celui-ci. Nous montrons que la configuration limite du sillage est celle qui correspond à l'obstacle fixé à  $\mu$ , au point C; le point de bifurcation se confond à la limite avec C. Nous faisons ensuite connaître l'allure limite de la ligne libre  $\lambda_1$ , étranglée entre le profil et la paroi. Exception faite du voisinage de  $\lambda_1$ , le passage du régime considéré au régime limite se fait d'une manière continue. Il faut entendre par là que la vitesse d'un point du fluide en mouvement (n'appartenant pas à la veine étranglée) converge uniformément vers sa limite; en particulier, il en est ainsi le long de l'obstacle, le point C excepté.

Une partie des résultats ci-dessus est en défaut lorsque la demi-tangente du profil au point C, orientée dans le sens de la vitesse du fluide, fait un angle nul avec la vitesse à l'infini en aval.

L'étude que nous venons de résumer nous paraît être la partie la plus originale de ce travail. A notre connaissance, de tels passages à la limite n'ont encore jamais été examinés par les hydrodynamiciens, en raison des difficultés que présentait leur discussion (une partie des formules de M. Villat devient alors illusoire) et que l'utilisation de quelques théorèmes de M. Leray a permis de vaincre.

Les résultats obtenus sont tous conformes à ceux que l'intuition et l'observation laissent prévoir; c'est, peut-être, une preuve de plus que le schéma de Helmholtz traduit assez fidèlement la réalité physique<sup>(28)</sup>.

Mes recherches ont été entreprises sous l'impulsion et sous le contrôle de M. Henri Villat. Ceux qui ont eu le privilège de travailler sous sa direction savent la part qui lui revient dans les progrès réalisés par ses élèves; ils comprendront les sentiments de profonde gratitude qui m'animent envers mon maître au terme de ce travail.

Je suis heureux que M. Villat a bien voulu accepter cet ouvrage comme un témoignage de ma reconnaissance pour les encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer et pour les directives qu'il m'a données.

---

(28) Nos recherches ont été résumées dans des Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* : 200, 1935, p. 208; 200, 1935, p. 1832; 201, 1936, p. 250; 203, 1936, p. 426; 205, 1937, p. 1205.

Plusieurs des résultats exposés dans mon Mémoire ont été inspirés par M. Jean Leray; plusieurs autres ont été obtenus en appliquant des méthodes qu'il a eu souvent l'obligeance de me faire connaître de vive voix. Je le remercie très vivement de l'aide si essentielle et, parfois, si décisive qu'il m'a ainsi apportée.

Au cours de mes recherches, j'ai eu de fréquentes occasions d'échanger des idées sur les mouvements à la Helmholtz avec MM. A. Weinstein, C. Jacob et A. Oudart. Leurs critiques et leurs conseils m'ont été précieux pour la mise au point de plusieurs paragraphes de cet ouvrage. De plus, M. A. Oudart a eu l'amabilité de lire attentivement mon manuscrit; ses suggestions m'ont permis d'améliorer sur plus d'un point ma rédaction primitive. En leur rendant témoignage du service qu'ils m'ont ainsi rendu, je leur en adresse ici l'expression de toute ma reconnaissance.

## II. — Rappel des résultats connus.

### Problème de MM. Levi-Civita-Villat. Solution indéterminée de M. Villat.

7. NOTATIONS; PREMIERS RÉSULTATS. PREMIÈRES CONDITIONS DE VALIDITÉ DE M. BRILLOUIN. — Nous rapporterons la configuration envisagée au paragraphe 1 au système d'axes rectangulaires  $Oxy$  ayant pour origine le point de bifurcation  $O$ ; l'axe des  $x$  sera choisi parallèle à la vitesse du fluide à l'infini en aval et orienté dans le sens de celle-ci. On introduit la variable complexe  $z = x + iy$ .

Rappelons <sup>(29)</sup> que le fluide est incompressible; son mouvement est irrotationnel et permanent. Ces hypothèses entraînent l'existence du potentiel des vitesses  $\varphi(x, y)$  et de la fonction de courant  $\psi(x, y)$  indépendantes du temps; le potentiel complexe  $f(z)$  est alors défini par

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

les constantes additives arbitraires étant choisies de manière que  $f(o)$

---

<sup>(29)</sup> Pour tout ce qui concerne ce paragraphe, voir le livre de M. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*.

soit nul. Dans ces conditions, les composantes  $u$ ,  $v$  suivant les axes du vecteur vitesse  $\vec{V}$  d'une particule fluide seront données par la formule

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

D'après cela, le module  $V(x, y)$  de  $\vec{V}$  est égal à  $\left| \frac{df}{dz} \right|$ . La fonction  $V(x, y)$  est donc essentiellement positive; elle ne doit devenir nulle qu'au point de bifurcation. Nous appellerons  $\Theta(x, y)$  l'angle algébrique que fait la vitesse  $\vec{V}$  avec  $Ox$ ; on a donc

$$\arg. \frac{df}{dz} = -\Theta(x, y).$$

La fonction  $f(z)$  est analytique dans le domaine fluide en mouvement; elle est régulière à distance finie à l'intérieur et sur les frontières; elle est uniforme partout, les points à l'infini compris. Il en sera de même de la fonction  $\frac{df}{dz}$ ; les fonctions  $\varphi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  d'une part,  $\log V(x, y)$  et  $\Theta(x, y)$  d'autre part sont donc harmoniques, régulières dans leur domaine de définition où elles sont deux à deux conjuguées. Les conditions que nous venons d'énoncer sont la traduction mathématique de quelques caractéristiques qualitatives du mouvement à la Helmholtz.

Les hypothèses faites sur la nature du mouvement entraînent aussi l'égalité de Bernoulli; pour en simplifier l'écriture, nous supposerons les unités choisies de manière que la densité du fluide (constante, le fluide étant incompressible) soit égale à l'unité, ainsi que la vitesse du mouvement à l'infini en aval. On a alors, en appelant  $p_0$  la pression du fluide à l'infini en aval, et  $p$  la pression en un point quelconque

$$(1.1) \quad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

Le liquide situé dans le sillage est au repos; la pression  $y$  est donc constante, frontière comprise. D'après (1.1) la vitesse sera constante le long des lignes libres qui limitent le sillage, égale donc à la valeur qu'elle a à l'infini, c'est-à-dire à l'unité.

L'équation (1.1) montre, de plus, que la pression  $p$  en un point du fluide peut devenir négative si la vitesse en ce point est supérieure à 1,  $p_0$  n'étant pas assez grand. Or,  $p_0$  est une constante additive arbitraire; la solution ne sera donc entièrement satisfaisante, du point de vue physique, que si la fonction  $V(x, y)$  vérifie dans le domaine du fluide en mouvement la condition de M. Brillouin

$$(1.2) \quad V \leq 1$$

qui complète les équations du problème.

La fonction  $V(x, y)$  étant harmonique, il n'y a besoin de vérifier l'inégalité précédente que le long des frontières du domaine où elle est définie. Lorsque la condition (1.2) est satisfaite, la fonction  $V$  atteint son maximum sur les lignes libres, le long desquelles elle vérifie donc l'inégalité

$$\frac{\partial V}{\partial n} < 0,$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale à la ligne libre orientée vers l'intérieur de la masse fluide mobile. Or, en désignant par  $dl$  l'élément d'arc de la ligne  $\lambda_1$ , par exemple, compté positivement à partir de son point de détachement, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial \Theta}{\partial l},$$

les fonctions  $V$  et  $\Theta$  étant harmoniques conjuguées. Il s'ensuit

$$\frac{\partial \Theta}{\partial l} < 0.$$

Cette inégalité exprime le fait que la ligne de jet  $\lambda_1$  tourne sa convexité vers le courant toutes les fois que la condition (1.2) est satisfaite; du point de vue physique cette forme de la frontière libre est très satisfaisante. Nous admettons, pour l'instant, l'existence des dérivées ci-dessus qui sera établie plus tard en toute rigueur.

Le raisonnement prouve, en outre, que les vitesses sont supérieures à l'unité dans le voisinage des portions de lignes libres concaves vers le courant; la convexité de ces lignes est donc une condition nécessaire, sinon suffisante, de la validité physique.

8. REPRÉSENTATION CONFORME DU DOMAINE DU FLUIDE EN MOUVEMENT SUR DES DOMAINES AUXILIAIRES. CONDITIONS AUX FRONTIÈRES. — L'arc  $\varpi_1$  de l'obstacle et la ligne libre  $\lambda_1$  correspondante constituent visiblement une ligne de courant d'équation  $\psi = 0$ , puisque la vitesse est, par hypothèse, tangente à la ligne  $\varpi_1$ ; il en est de même de l'ensemble formé de l'arc  $\varpi_2$  et de  $\lambda_2$ . La fonction  $f$  croît de 0 à  $+\infty$  lorsqu'on décrit depuis l'origine jusqu'à l'infini chacune des lignes  $\varpi_1 + \lambda_1$  et  $\varpi_2 + \lambda_2$ .

En effet,  $\varphi(0, 0)$  est nul. D'autre part, on peut écrire le long de  $\varpi_1 + \lambda_1$  et  $\varpi_2 + \lambda_2$

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| = V.$$

Or,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . On a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f| = +\infty.$$

Enfin  $\varphi$  ne cesse de croître le long de  $\varpi_1 + \lambda_1$  (ou de  $\varpi_2 + \lambda_2$ ), ainsi que le montre l'égalité

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = V$$

qui, le long de chacune de ces lignes, se réduit à  $\frac{d\varphi}{dl} = V$ , en appelant  $l$  l'abscisse curviligne. Or,  $V$  est essentiellement positif.

Le long de chacune des parois  $\psi$  demeure constant, les parois constituant des lignes de courant; nous poserons

$$\psi(x, y) = \psi_1, \quad \text{sur } \mu_1 \quad \psi(x, y) = -\psi_2, \quad \text{sur } \mu_2,$$

les constantes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  étant évidemment positives.

Le potentiel des vitesses  $\varphi$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$  quand on décrit de l'amont à l'aval chacune des parois. En effet, le débit du fluide à travers une section du canal étant constant le long de ce canal, la vitesse à l'infini en amont n'est pas nulle; le raisonnement utilisé ci-dessus montre que les points  $x = -\infty$  et  $\varphi = -\infty$  se correspondent; dès lors, la démonstration s'achève comme plus haut.

De l'ensemble de ces résultats, il suit que la fonction analytique et uniforme  $f = f(z)$  réalise la représentation conforme du domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement sur le domaine correspondant  $F$  du plan du

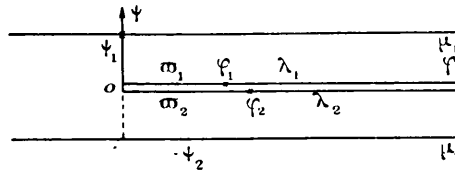


potentiel complexe  $f$ . La frontière de  $F$  se compose de deux droites d'équations :

$$\psi = \psi_1, \quad \psi = -\psi_2$$

(images des parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  du canal) et des deux bords de la coupure pratiquée le long du demi-axe réel positif du plan  $f$  (fig. 2).

Fig. 2.



Le bord supérieur de la coupure correspond à la ligne  $\mu_1 + \lambda_1$ ; le bord inférieur à la ligne  $\mu_2 + \lambda_2$ . Nous désignerons par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les affixes réels des images dans le plan  $f$  des points  $P_1$  et  $P_2$ .

Nous avons vu que le long des lignes libres la vitesse du fluide est égale à 1; cette condition se traduit par l'équation

$$(1.3) \quad \left| \frac{df}{dz} \right| = 1.$$

Elle exprime que la correspondance conforme entre les domaines  $\mathcal{A}$  et  $F$  doit conserver les longueurs le long des lignes de jet. Enfin, le long des lignes de courant  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , la composante  $v$  de la vitesse doit être nulle; d'après la définition même de  $\frac{df}{dz}$  cette fonction sera donc réelle sur  $\mu_1$  et  $\mu_2$ .

En définitive, la fonction analytique  $f = f(z)$ , qui réalise l'application conforme de  $\mathcal{A}$  sur  $F$  vérifie l'ensemble suivant des conditions que nous désignerons désormais par (H) :

1° les systèmes de trois points à l'infini (un en amont, deux en aval) des plans  $f$  et  $z$  se correspondent;

2° les directions sont conservées le long des parois (ou de leurs images); cela se traduit par la condition frontière

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \frac{df}{dz} \quad \text{sur } \mu_1 \text{ et } \mu_2;$$

3° les longueurs sont conservées le long de lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (ou de leurs images); cela se traduit par la condition frontière

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = 1 \quad \text{sur } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2.$$

La vitesse complexe étant, par hypothèse, une fonction uniforme de  $z$ , les conditions (1.2) et (1.3) entraînent encore la suivante :  $\frac{df}{dz} = 1$  aux points à l'infini en aval.

Inversement,  $z$  peut être envisagée comme une fonction  $z(f)$  de la variable  $f$  définie dans le domaine  $F$  : elle vérifie, évidemment, les trois conditions précédentes.

Helmholtz et Kirchhoff ont fait voir que la relation qui lie les deux variables  $z$  et  $f$  caractérise complètement le mouvement; il suffit de remarquer que le champ des vitesses est donné par la formule

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

Le régime hydrodynamique défini par la relation  $z = z(f)$  ne pourra être physiquement acceptable que si la quantité

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

satisfait à l'inégalité de M. Brillouin

$$\left| \frac{df}{dz} \right| \leq 1.$$

**9. SOLUTIONS INDÉTERMINÉES. SOLUTION INDÉTERMINÉE DE M. LEVI-CIVITA. DEUXIÈME CONDITION DE M. BRILLOUIN.** — La recherche d'un mouvement à la Helmholtz correspondant à une configuration donnée dans le plan  $z$  revient donc à déterminer une fonction  $f(z)$  satisfaisant aux conditions (H). La résolution de ce problème, dont l'énoncé complet sera donné au Chapitre III, présente des difficultés qui ont d'abord paru insurmontables; pour l'instant, notons que ni le domaine de définition  $\mathcal{A}$  de  $f(z)$  ni son image  $F$  dans le plan  $f$  ne sont entièrement déterminés, puisque les lignes libres, d'une part, et les quatre cons-

tantes  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$  et  $\psi_2$ , d'autre part, sont *a priori* inconnues. Mais le domaine  $F$  est évidemment mieux déterminé *a priori* que son image  $\mathcal{A}$ . On a été ainsi amené à traiter le problème inverse : étant donné quatre constantes positives  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ , définir dans le domaine  $F$  qui leur correspond des fonctions  $z = z(f)$  vérifiant les trois conditions (H). C'est ce qu'on appelle le problème indéterminé dont la solution explicite permettrait de construire un exemple effectif d'un mouvement à la Helmholtz. On prouverait ainsi que notre schéma est compatible avec les équations de l'hydrodynamique et l'on pourrait alors en étudier les propriétés d'une manière approfondie.

Suivant les idées de M. Levi-Civita, M. Villat aborde la question comme suit : il représente conformément le domaine  $F$  sur une demicouronne circulaire du plan auxiliaire  $Z = X + iY$ ; les éléments de frontières homologues des deux plans seront précisés plus loin. Pour cela il effectue d'abord la transformation

$$(1.4) \quad f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(t-a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + D + i\psi_1,$$

dans laquelle  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels et où l'on a posé

$$\begin{aligned} \log(t-a) &= \log|t-a| && \text{pour } t > a, \\ \log(t-b) &= \log|t-b| && \text{pour } t > b. \end{aligned}$$

La valeur du paramètre  $D$  sera précisée tout à l'heure.

Au domaine  $F$  on fait ainsi correspondre le demi-plan supérieur  $\mathfrak{E}$  du plan  $t$ ; les points  $t = \infty$  et le point à l'infini en amont du plan  $f$  sont images l'un de l'autre, alors que les images  $t = a$  et  $t = b$  des points à l'infini en aval des parois  $\mu_2$  et  $\mu_1$  restent pour l'instant arbitraires. Nous pouvons donc choisir à notre gré les affixes des images de deux points frontières quelconques de  $F$ ; la relation entre  $f$  et  $t$ , qui fait intervenir en apparence trois constantes,  $a, b$  et  $D$ , ne doit dépendre effectivement que de deux paramètres. En effet, dans l'intervalle  $(a, b)$  la fonction  $f(t)$  est assujettie à avoir un minimum égal à zéro. Or,  $\frac{df}{dt}$  s'annule pour

$$(1.4') \quad t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}.$$

On peut donc écrire

$$-\frac{\psi_2}{\pi} \log(t_0 - a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(b - t_0) + D = 0,$$

relation qui permet d'exprimer  $D$  en fonction de  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $a$  et de  $b$ . Nous déterminerons alors les paramètres  $a$  et  $b$  en faisant correspondre aux points de détachement  $f = \varphi_1$  et  $f = \varphi_2$  les points  $t = 1$  et  $t = -1$ ; cela donne

$$\varphi_1 = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(1 - a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(1 - b) + D + i\psi_1,$$

$$\varphi_2 = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(-1 - a) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(-1 - b) + D + i\psi_1.$$

Les constantes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant réelles et positives, les équations ci-dessus n'admettent de solutions réelles que si  $a < -1$  et  $b > +1$ . M. Villat a montré que le système précédent possède alors un système et un seul de solutions en  $a$  et  $b$ , pourvu que, comme on le constate d'ailleurs sans peine, le nombre  $t_0$ , précédemment défini, soit compris entre  $-1$  et  $+1$ . La réciproque est vraie si  $|t_0| < 1$ .

Ainsi, nous avons substitué à l'ensemble de quatre paramètres  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , qui caractérisent le domaine  $F$ , le groupe entièrement équivalent de quatre paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  qui définissent la correspondance conforme entre  $F$  et  $\mathfrak{E}$ .

Il est très important de se rappeler que les paramètres  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  étant positifs et les points  $f = \varphi_1$  et  $f = \varphi_2$  ayant les points  $t = +1$  et  $t = -1$  pour images, les paramètres  $a$  et  $b$  correspondants doivent vérifier [cf. (1.4)] l'ensemble des conditions

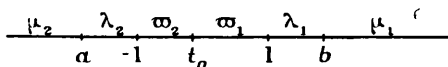
$$(1.4'') \quad \left\{ \begin{array}{l} a < -1, \\ b > 1, \\ -1 < t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} < 1, \end{array} \right.$$

qu'à l'avenir nous supposerons toujours remplies. De ces inégalités il résulte notamment que si  $\psi_1$  augmente indéfiniment,  $\psi_2$  restant fini, le paramètre  $b$  correspondant doit augmenter indéfiniment de manière que le quotient  $\frac{\psi_1}{b}$  ait une valeur finie. Cette conclusion nous sera utile au cours des paragraphes 14 et 27.

Il est utile de noter que le domaine  $\mathfrak{C}$  est caractérisé par trois paramètres  $a, b, t_0$  seulement; il en sera de même maintenant de tous les domaines auxiliaires que nous aurons à considérer.

Les éléments correspondants des domaines  $F$  et  $\mathfrak{C}$  sont mis en évidence sur la figure 3.

Fig. 3.



Cela posé, M. Villat introduit une variable complexe nouvelle

$$u = u_1 + iu_2,$$

qu'il définit par

$$(1.5) \quad du = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t^2-1)}}.$$

On en tire, en effectuant l'inversion de l'intégrale elliptique du second membre,

$$(1.5') \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p'[u, \omega_1, \omega_3] - p'[\gamma, \omega_1, \omega_3]}{p[u, \omega_1, \omega_3] - p[\gamma, \omega_1, \omega_3]}.$$

La constante d'intégration de l'équation différentielle (1.5) a été choisie de manière à faire correspondre le point  $u=0$  au point à l'infini du plan  $t$ . Dans cette relation  $p(u, \omega_1, \omega_3)$  désigne la fonction doublement périodique de Weierstrass dont les demi-périodes  $\omega_1$  et  $\omega_3$  sont données par les formules

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \int_{-\infty}^a \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}} + \int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}}, \\ \frac{\omega_3}{i} = \int_a^{-1} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}} = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}}, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$R(t) = (t-a)(t-b)(t^2-1),$$

et où les radicaux ont leur sens arithmétique.

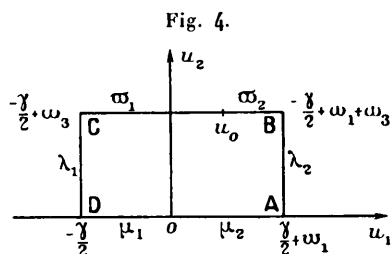
Le paramètre  $\gamma$  qui figure dans (1.5') est un nombre réel positif défini par la formule

$$(1.6') \quad \gamma = 2 \int_b^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{|R(t)|}},$$

qui se déduit de la lecture de la figure 4;  $\gamma$  vérifie l'équation

$$p[\gamma | \omega_1, \omega_3] = \frac{3(a^2 + b^2) - 2ab + 8}{48}.$$

Il convient de remarquer que les quantités  $\omega_1$ ,  $\omega_3$  et  $\gamma$  ainsi définies ne dépendent que de  $a$  et de  $b$ ; ce fait aura une grande importance dans la suite.



La formule de transformation (1.5) [ou (1.5')] fait correspondre, au demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$ , l'aire intérieure à un rectangle R du plan  $u$ . Les points  $t = a$ ,  $t = -1$ ,  $t = +1$ ,  $t = b$  ont respectivement pour images les sommets A, B, C, D de R dont les affixes sont, dans l'ordre

$$-\frac{\gamma}{2} + \omega_1, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega_1 + \omega_3, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega_3, \quad -\frac{\gamma}{2}.$$

Notons enfin que l'affixe  $u_0$  de l'image du point  $t = t_0$  est défini sans ambiguïté par la relation

$$(1.6'') \quad t_0 = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p'u_0 - p'\gamma}{p u_0 - p\gamma},$$

$u_0 = u_{01} + \omega_3$  sera donc une fonction compliquée des deux paramètres  $a$  et  $b$ . Réciproquement, à un choix de valeurs de  $u_0$ ,  $a$ ,  $b$  correspond une valeur et une seule du quotient  $\frac{\psi_2}{\psi_1}$  [cf. l'équation (1.4')]. Les éléments homologues des domaines  $\mathfrak{C}$  et R ont été mis en évidence sur la figure 4.

Finalement M. Villat pose encore

$$(1.7) \quad u = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z,$$

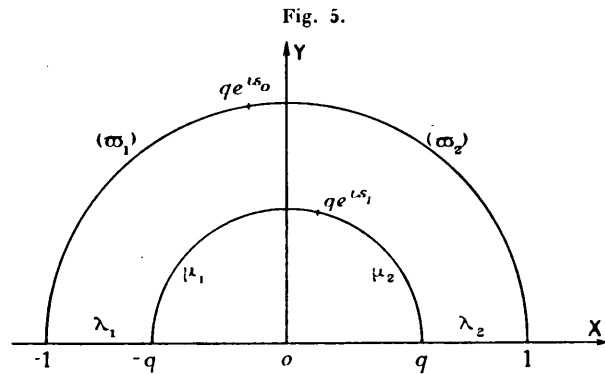
en faisant ainsi correspondre à l'intérieur du rectangle R l'aire intérieure  $d$  de la demi-couronne circulaire supérieure située dans le plan de la variable  $X = X + iY$  et centrée sur l'origine.

Les rayons des cercles de la couronne sont respectivement égaux à 1 et à  $q$ ,  $q$  étant le paramètre bien connu dans la théorie des fonctions elliptiques, défini par la relation

$$(1.8) \quad q = e^{-\frac{\pi\omega_2}{i\omega_1}}.$$

Il en résulte, rappelons-le, que  $q$  est un nombre positif, inférieur à l'unité.

La demi-circonférence  $|Z|=1$  est l'image du côté BC du rectangle R; la demi-circonférence  $|Z|=q$  est l'image du côté DA de R. Enfin les segments  $(-1, -q)$ ,  $(q, +1)$  de l'axe réel du plan Z correspondent respectivement aux côtés CD et AB de R.



Aux points  $u=0$  et  $u=u_0$  la formule de transformation fait correspondre respectivement les points

$$Z_1 = q e^{i s_1}, \quad Z_0 = e^{i s_0},$$

dont les arguments  $s_1$  et  $s_0$  sont définis par les relations

$$(1.8') \quad s_1 = \frac{\pi}{\omega_1} \left( \omega_1 - \frac{\gamma}{2} \right), \quad s_0 = -\frac{\pi}{\omega_1} \left[ u_{01} - \omega_1 + \frac{\gamma}{2} \right].$$

La figure 5 met en évidence les éléments homologues des domaines R et  $d$ .

Moyennant les transformations successives que nous venons de définir, le potentiel complexe  $f$  s'exprimera en fonction de la variable  $Z$  par l'intermédiaire de la formule (1.4), dans laquelle il faut poser

$$(1.9) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left[ \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right] - p'(\gamma)}{p \left[ \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right] - p(\gamma)}.$$

Nous aurons bientôt besoin de l'expression de la différentielle de la fonction  $f$ ; celle-ci sera définie par l'ensemble de deux formules

$$(1.10) \quad df = - \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} dt$$

avec

$$(1.10') \quad dt = - \frac{\omega_1}{i\pi} \frac{p' \left( \frac{\gamma}{2} \right) p' \left[ \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right]}{\left[ p \left( \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \left( \frac{\gamma}{2} \right) \right]^2} \frac{dZ}{Z}.$$

En résumé, le domaine demi-circulaire  $d$  est défini par trois paramètres  $q$ ,  $s_0$  et  $s_1$ ;  $q$  et  $s_1$  s'expriment au moyen de  $a$  et de  $b$  seulement, alors que  $s_0$  est fonction des quatre nombres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  qui caractérisent complètement la correspondance conforme entre  $d$  et  $F$ . Les deux groupes de paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , d'une part,  $q$ ,  $s_1$ ,  $s_0$ , auxquels on adjoint l'une des constantes  $\psi_1$  ou  $\psi_2$ , d'autre part, sont équivalents.

Cela étant, M. Villat se propose de construire dans le domaine  $d$  une fonction  $\frac{df}{dz}$  satisfaisant aux conditions (H); pour cela il introduit la fonction analytique uniforme  $\Omega(Z)$  de M. Levi-Civita en posant

$$(1.11) \quad \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega(z)} = e^{\tau - i\Theta}.$$

Il en résulte

$$(1.12) \quad v = \left| \frac{df}{dz} \right| = e^\tau.$$

Ainsi l'inégalité  $v > 0$  sera satisfaite d'elle-même. Par ailleurs, on voit, compte tenu de l'égalité  $\frac{df}{dz} = u - iv$ , que  $\Theta$  est égal à l'argument du vecteur vitesse dans le plan  $z$ .



Énumérons les conditions qu'on doit imposer à priori à la fonction  $\Omega(Z)$ , définie dans  $d$ , pour que la formule (1. 1) puisse convenir à un schéma de Helmholtz.

La vitesse complexe  $\frac{df}{dz}$ , définie dans le domaine  $F$ , doit être, nous l'avons vu, une fonction analytique uniforme et régulière à l'intérieur de  $F$  et sur ses frontières; elle ne s'annule dans  $F$  que pour  $f = 0$ . La formule (1. 11) montre alors que la fonction analytique  $\Omega(Z)$  doit être uniforme et régulière dans  $d$  et sur ses frontières à l'exception de l'image  $Z_0 = e^{i\theta_0}$  du point  $f = 0$  [ou d'après (1. 12)  $T$  doit être infinie négative]. Les fonctions  $\Theta(X, Y)$  et  $T(X, Y)$  devront donc être harmoniques et régulières dans leur domaine de définition  $d$ , frontières comprises, le point  $Z_0 = e^{i\theta_0}$  excepté.

D'après la deuxième condition (H),  $\frac{df}{dz}$  doit être réel sur la demi-circonférence  $|Z| = q$ ; il en résulte que l'argument  $\Theta$  de cette fonction doit être nul sur cette portion de frontière de  $d$ .

D'après la troisième condition (H), le module de la vitesse complexe doit être égal à 1 le long des segments  $(-1, -q)$ ,  $(q, 1)$  de l'axe réel du plan  $Z$ ; d'après (1. 12) cela exige que l'on ait

$$T = 0 \quad \text{sur} \quad \begin{cases} \lambda_1, \\ \lambda_2. \end{cases}$$

Cette condition entraîne la conséquence fondamentale suivante. La fonction  $\Omega(Z)$ , étant réelle sur l'axe réel et régulière dans le voisinage de cet axe, est prolongeable à travers cet axe au moyen du principe de symétrie de Schwarz. Il en résulte que cette fonction est définie dans toute la couronne circulaire  $C$  limitée par les cercles  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$  où elle prend des valeurs imaginaires conjuguées aux points  $Z$  imaginaires conjugués <sup>(30)</sup>.

---

<sup>(30)</sup> Il résulte donc de ce qui précède que  $\Omega(Z)$  est une fonction régulière partout, sauf aux points d'affixes  $Z = e^{\pm i\theta_0}$ ; mais il ne faudrait pas en conclure, sans nouvel examen, que  $\Omega(Z)$ , uniforme dans  $d$ , le sera encore dans  $C$ . Nous verrons que la condition (1. 13) exprime précisément la condition d'uniformité de  $\Omega(Z)$  dans son nouveau domaine de définition  $C$  (et non seulement dans le domaine  $d$ ).

Enfin la condition d'uniformité de la fonction  $\frac{df}{dz}$  à l'infini en aval

$$\frac{df}{dz} = 1 \text{ aux points à l'infini en aval}$$

se transforme, compte tenu de (1.11), en la suivante

$$(1.13) \quad \Omega(\pm q) = 0,$$

dont on apercevra bientôt toute l'importance.

L'extension du domaine de définition de  $\Omega(X, Y)$  permet de faire un progrès important dans l'étude du schéma de Helmholtz. En effet, les images des lignes libres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont maintenant intérieures (extrémités exclues) au domaine  $C$ ; il s'ensuit que  $\Omega(Z)$ , et par conséquent  $\frac{df}{dz}$ , sont des fonctions analytiques le long de chacune d'elles, sauf peut-être pour  $Z = \pm 1$ ,  $Z = \pm q$ . Cela montre [la correspondance  $f = f(Z)$ , définie par les formules (1.4) et (1.9), étant analytique] qu'il en est de même de la correspondance  $z = z(Z)$ , excepté, peut-être, les points précédemment exclus. Or, les parois et leurs images dans le plan  $f$  étant des courbes analytiques, la fonction  $\frac{df}{dz}$  et, par conséquent,  $\Omega(Z)$  est analytique le long de  $|Z| = q$  et, en particulier, aux points  $Z = \pm q$  <sup>(31)</sup>.

Ainsi, les lignes libres sont des courbes analytiques, sauf, peut-être, en leurs points de détachement respectifs.

En résumé, à la fonction  $\frac{df}{dz}$ , définie dans le domaine  $F$ , nous avons fait correspondre une fonction  $\Omega(Z)$  définie dans le domaine  $C$  plus simple, où elle vérifie des conditions frontières également plus simples.

Réciproquement, donnons-nous quatre constantes  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  ( $a < 1$ ,  $b > 1$ ). Nous savons construire, comme cela a été expliqué plus haut, les domaines  $d$  et  $F$  caractérisés par ces paramètres et la fonction  $f = f(Z)$  qui réalise la représentation conforme

---

(31) L'analyticité de  $\Omega(Z)$  le long du cercle  $|Z| = q$  résulte aussi du fait que la fonction  $i\Omega(Z)$ , étant réelle le long de ce cercle, est prolongeable analytiquement à travers lui.

de l'un de ces domaines sur l'autre. Si l'on sait alors définir dans le domaine  $d$  une fonction  $\Omega(Z)$  vérifiant les conditions ci-dessus énoncées, on sait construire un domaine  $\mathcal{A}$  au moyen de la relation

$$(1.14) \quad z = \int_{t^{10}}^z e^{t\Omega(Z)} df$$

[où la différentielle  $df$  doit être remplacée par son expression (1.10) après y avoir substitué à  $t$  et à  $dt$  leurs valeurs (1.9) et (1.10')] qui établit une correspondance conforme entre  $F$  et  $\mathcal{A}$  satisfaisant aux conditions de régularité et aux trois conditions (H). Remarquons enfin que les points  $z = 0$  et  $f = 0$  sont images l'un de l'autre.

Ainsi, étant donné quatre paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , le problème indéterminé revient à définir dans le domaine  $d$ , qui leur correspond, des classes aussi vastes que possible des fonctions  $\Omega(Z)$  de M. Levi-Civita; M. Villat a été le premier à se servir directement de cette méthode pour construire des solutions indéterminées<sup>(32)</sup>. Une fois une telle solution obtenue, il y a lieu de vérifier si l'inégalité (1.2) de M. Brillouin est satisfaite; or celle-ci s'écrit, d'après (1.12),

$$T \leq 0,$$

inégalité qu'il suffit de vérifier le long des frontières circulaires de  $d$ , la fonction  $T$  étant nulle le long de l'axe réel.

De plus, M. Brillouin a fait voir sur des exemples simples que le domaine obtenu à partir de la formule (1.14) peut se recouvrir; les lignes de jet que cette relation définit peuvent se recouper ou recouper l'obstacle, circonstances évidemment incompatibles avec la nature physique du problème. Il y a donc toujours lieu d'étudier les solutions au point de vue de cette condition de non-recouperment qu'on appelle la *deuxième condition de validité* de M. Brillouin.

Il reste à noter un grave inconvénient de la solution indéterminée de M. Levi-Civita; on n'aperçoit pas de liaison nette entre la fonction arbitraire  $\Omega(Z)$  et l'obstacle qui lui correspond dans le plan  $z$ . Nous allons voir comment M. Villat a réussi à surmonter cette difficulté.

---

(32) Antérieurement à M. Villat, M. Cisotti a traité le problème symétrique par rapport à l'axe du canal.

**10. SOLUTION INDÉTERMINÉE DE M. VILLAT.** — M. Villat part du fait que la partie réelle  $\Theta(X, Y)$  de la fonction arbitraire  $\Omega(Z)$  est l'argument du vecteur vitesse dans le plan  $z$ . Supposons que l'on ait pu construire, dans un domaine  $d$ , une fonction  $\Omega(Z)$  continue tout le long de la demi-circonférence supérieure  $Z = e^{is}$  ( $0 \leq s \leq \pi$ ), excepté au point  $Z = e^{is_0}$ . Alors  $\Theta(X, Y)$  est une fonction continue  $\Phi(s)$  de l'argument  $s$  de  $Z = e^{is}$  dans l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ , excepté pour  $s = s_0$ , où nous la supposons discontinue mais bornée. La fonction  $\Theta(X, Y)$  vérifie donc, dans le domaine  $C$ , les conditions frontières suivantes :

$$\Theta(X, Y) = \begin{cases} \Phi(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq \pi, \\ \Phi(2\pi - s) & \text{pour } \pi \leq s \leq 2\pi, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sur le cercle } |Z| = 1. \\ \text{»} \end{array}$$

$$\Theta(X, Y) = 0, \quad \text{sur le cercle } |Z| = q.$$

Par ailleurs  $T(X, Y)$  est nul sur l'axe réel. M. Villat a montré que, dans ces conditions, la fonction  $\Omega(Z)$  s'exprime, au moyen de  $\Phi(s)$ , par la formule

$$(1.15) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s') \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds',$$

valable à l'intérieur, mais non sur la frontière  $|Z| = 1$  de son domaine de définition  $C$ . Rappelons que  $\zeta(u)$  est la fonction bien connue de la théorie des fonctions elliptiques, construite à l'aide des nombres  $\omega_1$  et  $\omega_3$  définis par les formules (1.6).

Les conditions (1.13) se réduisent ici à la relation unique

$$(1.16) \quad \int_0^\pi \Phi(s) ds = 0,$$

qu'on obtient en faisant  $Z = \pm q$  dans la formule (1.15) et en tenant compte du fait que  $\zeta u$  est impaire et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$\zeta(u + 2\omega_i) = \zeta u + 2\eta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Cette condition de M. Villat, appelée à jouer dans la suite un rôle fondamental, exprime le fait que la fonction  $\Omega(Z)$  définie par le second membre de (1.15) est uniforme dans le domaine  $C$ . Si, en effet,  $Z$  décrit dans le sens direct un cercle concentrique à l'origine, les

arguments des fonctions  $\zeta$ , qui figurent dans cette formule, augmentent de  $2\omega_1$ . La quantité entre crochets s'accroît donc de  $4\eta_1$ ; or, d'après (1.16), la contribution à  $\Omega(Z)$  de ce terme constant additif est nulle.

En définitive, nous avons substitué la fonction  $\Phi(s)$  de M. Villat à la fonction arbitraire  $\Omega(Z)$  de M. Levi-Civita dans le cas où celle-ci est continue pour  $Z = e^{is}$ , sauf pour  $s = s_0$ . Nous allons préciser quelques hypothèses supplémentaires moyennant lesquelles la formule (1.14) fera correspondre au domaine  $d$  et à la fonction  $\Omega(Z)$ , définie par la formule (1.15), un domaine  $\mathcal{A}$  où l'image de la demi-circonférence  $|Z| = 1$  sera une courbe obstacle à tangente continue partout, à l'exception du point de bifurcation  $O$ , image du point  $Z = e^{is_0}$ ;  $\Phi(s)$  sera alors l'angle que fait avec  $Ox$  la vitesse tangentielle à l'obstacle, au point image  $Z = e^{is}$ . La fonction  $\Phi(s)$  caractérisera donc l'allure de l'obstacle d'une manière très précise.

Il y aura plus;  $\Phi(s)$  étant continue, par hypothèse, dans le voisinage de  $s = 0$  et  $s = \pi$ , il en sera de même de  $\Theta(X, Y)$  dans le voisinage des points  $Z = \pm 1$ . Ceci montre que la ligne libre se raccordera à l'obstacle; exception faite, éventuellement, du point de bifurcation, l'obstacle et les lignes libres formeront une courbe à tangente continue<sup>(33)</sup>.

Cherchons à préciser la nature de la discontinuité à imposer à  $\Phi(s)$  pour  $s = s_0$  de manière à obtenir dans le plan  $z$  un obstacle ayant en son point de bifurcation une allure conforme à la réalité physique.

Nous poserons

$$(1.17) \quad \Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0) = 2\pi\alpha,$$

$\alpha$  étant un nombre réel compris entre 0 et 1<sup>(34)</sup>; si  $\alpha = \frac{1}{2}$ , l'obstacle sera à tangente continue en 0; si  $\alpha$  est nul ou égal à 1, l'obstacle

<sup>(33)</sup> Mais, bien entendu, il n'en résulte pas que la ligne libre ait une courbure régulière en son point de détachement. Cf. à ce sujet le paragraphe 13 où nous précisons l'allure de la fonction  $\Theta[X(l), 0]$  (qui exprime l'angle de la tangente à la ligne libre en fonction de l'abscisse curviligne  $l$  de celle-ci), dans le voisinage des points de détachement.

<sup>(34)</sup> Pour des raisons qui seront explicitées au paragraphe 12,  $\alpha$  devra être supposé différent de l'unité.

possédera en  $o$  un point de rebroussement; le point  $o$  est anguleux dans tous les autres cas.

Enfin, l'intersection de l'obstacle avec une droite parallèle à  $Ox$  se réduira à un seul point si l'on assujettit  $\Phi(s)$  à vérifier l'inégalité

$$(1.18) \quad |\Phi(s)| \leq \pi.$$

Nous ferons désormais cette hypothèse qui jouera dans la suite un rôle capital; cela entraîne que  $\Phi(s)$  est positif sur  $\omega_1$  et négatif sur  $\omega_2$ .

Rappelons quelques autres propriétés de la solution indéterminée de M. Villat, définie par l'ensemble des formules (1.9), (1.10), (1.14), (1.15), (1.16). La formule (1.15) n'est pas valable telle quelle pour  $Z = e^{is}$ , puisque l'expression sous le signe d'intégration devient infinie comme  $\frac{1}{s-s'}$  pour  $s = s'$ . Aussi la transforme-t-on par l'artifice classique suivant, dont nous aurons fréquemment à nous servir dans la suite. Supposons d'abord  $|Z| \neq 1$  et ajoutons, au second membre de la formule (1.15), la quantité

$$\begin{aligned} & \Phi(s) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(s) \log Z \\ & - \frac{i\omega_1}{\pi^2} \Phi(s) \int_0^\pi \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds' \end{aligned}$$

visiblement nulle; (1.15) devient alors

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \Omega(Z) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(s') - \Phi(s)] \\ & \times \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s'\right) \right] ds' \\ & + \Phi(s) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(s) \log Z. \end{aligned}$$

Si la fonction arbitraire  $\Phi(s)$  possède un module de continuité tel que l'intégrale

$$\int \frac{\Phi(s) - \Phi(s')}{s - s'} ds'$$

ait un sens pour  $s = s'$  (bien entendu  $s \neq s_0$ ), et c'est l'hypothèse que nous ferons désormais<sup>(35)</sup>, le second nombre de (1.19) a un sens le long

---

(35) Ce point sera précisé dans le paragraphe suivant.

du cercle  $|Z| = 1$  sauf pour  $s = s_0$ . Dès lors, la partie imaginaire  $T(e^{is})$  de  $\Omega(Z)$  le long de ce cercle est définie par la formule

$$(1.20) \quad T(e^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(s') - \Phi(s)] \\ \times \left[ \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s - s') + \zeta \frac{\omega_1}{\pi} (s + s') \right] ds' + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s \Phi(s),$$

qui garde un sens, d'après ce qui précède, tant que  $Z$  est distinct de  $e^{\pm is_0}$ , alors que la partie réelle de  $\Omega(Z)$  se réduit pour  $Z = e^{is}$ ,  $s \neq \pm s_0$  à  $\Phi(s)$ . C. Q. F. D.

Rappelons la nature de la singularité que la fonction  $\Omega(Z)$ , ainsi définie, présente aux points  $Z_0 = e^{is_0}$  et  $\bar{Z}_0 = e^{-is_0}$ . Considérons pour cela, avec M. Villat, la fonction auxiliaire  $U(Z)$

$$U(Z) = \Omega(Z) + \frac{2\alpha}{i} \log \left( \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0} \right),$$

$\alpha$  étant le nombre défini par (1.17);  $U(Z)$  est réelle sur l'axe réel et uniforme dans son domaine de définition  $C$ , si l'on précise la détermination du logarithme en un point quelconque de  $C$ . On constate immédiatement que la partie réelle de  $U(Z)$  est continue aux points  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$ ; elle est donc continue tout le long de  $|Z| = 1$  et  $|Z| = q$ . La fonction  $U(Z)$  est, par suite, régulière dans le domaine  $C$ , frontière comprise, et notamment au point  $Z = Z_0$ . Il en résulte d'abord que,  $Z$  tendant vers  $Z_0$  le long d'un chemin intérieur à  $C$  et non tangent à  $|Z| = 1$  au point  $Z = Z_0$ , la fonction  $T(Z)$  se comporte comme  $2\alpha \log|Z - Z_0| +$  fonction de  $(Z - Z_0)$  continue pour  $Z = Z_0$ .  $\alpha$  étant positif, cette expression tend vers  $-\infty$  comme  $2\alpha \log|Z - Z_0|$ .

En second lieu, appelons  $\lambda$  l'angle formé par le vecteur  $Z - Z_0$  avec la demi-tangente menée au cercle  $|Z| = 1$  par le point  $Z_0$  dans le sens des  $s$  décroissants et  $\Theta_\lambda$  la valeur que prend la partie réelle de  $\Omega(Z)$  lorsque  $Z$  tend vers  $Z_0$  le long d'un chemin faisant l'angle  $\lambda$  avec la demi-tangente précédente; dans ces conditions, on a

$$\Theta_\lambda = \Phi(s_0 - 0) + 2\alpha\lambda.$$

Cette formule montre que  $\Theta_\lambda$  croît de  $\Phi(s_0 - 0)$  à  $\Phi(s_0 + 0)$  lorsque  $\lambda$  augmente de 0 à  $\pi$ .

Ce qui précède justifie les hypothèses faites sur la fonction  $\Phi(s)$ ; elles sont naturelles lorsqu'on se limite à l'étude des obstacles lisses partout, le point  $z = 0$  excepté.

Nous allons résumer ces hypothèses dans un tableau :

1°  $\Phi(s)$  est continue dans chacun des intervalles  $0 \leq s < s_0$  et  $s_0 < s \leq \pi$ ;

2° Dans chacun des intervalles  $0 \leq s < s_0$ ;  $s_0 < s \leq \pi$ , l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\Phi(s) - \Phi(s')}{s - s'} ds'$$

a un sens;

3°  $\Phi(s)$  est assujettie à vérifier l'inégalité

$$|\Phi(s)| \leq \pi;$$

$\Phi(s)$  n'est pas égale identiquement à 0 ou à  $\pi$ ;

4°  $\Phi(s)$  vérifie la condition de M. Villat

$$\int_0^\pi \Phi(s) ds = 0;$$

5° Pour  $s = s_0$ ,  $\Phi(s)$  possède une discontinuité qui, d'après la condition 4°, est de première espèce. Nous poserons

$$\Phi(s_0 + 0) - \Phi(s_0 - 0) = 2\pi\alpha.$$

D'après la condition 4°  $\alpha$  est nécessairement compris entre 0 et  $\omega_1$ ; la valeur 1 est exclue (cf. § 12).

Pour abrégé, nous appellerons *conditions* (V) l'ensemble des cinq conditions précédentes auxquelles nous venons d'assujettir le choix de la fonction arbitraire  $\Phi(s)$  de M. Villat.

**11. CONSTRUCTION DU MODULE DE CONTINUITÉ POUR LES FONCTIONS DÉFINIES AU MOYEN D'UN OPÉRATEUR INTÉGRAL.** — Dans le paragraphe précédent nous avons vu le rôle important que jouent, dans la théorie, les fonctions qu'on déduit d'une fonction donnée  $\Psi(\varepsilon)$  [supposée continue dans l'intervalle d'intégration  $(a, b)$  quelconque que nous supposons



réduit à  $(-1, +1)$ ] au moyen de l'opérateur

$$(1.21) \quad U(\varepsilon) = \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\varepsilon - s} ds.$$

Il est essentiel, pour l'étude de la correspondance entre les plans  $z$  et  $Z$ , de savoir construire un module de continuité pour la fonction  $U(\varepsilon)$  (quand il existe), connaissant celui de  $\Psi(\varepsilon)$ . Il existe sur ce sujet un théorème de Fatou et de M. Priwaloff.

Si la fonction  $\Psi(\varepsilon)$  vérifie une condition de Hölder d'exposant  $\nu$

$$|\Psi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon_1)| \leq \text{const.} |\varepsilon - \varepsilon_1|^\nu,$$

où  $\nu$  est un nombre compris entre 0 et 1 <sup>(36)</sup>, la fonction  $U(\varepsilon)$ , définie par l'équation (1.21), vérifie une condition de Hölder de même exposant. Nous dirons alors que les fonctions  $U(\varepsilon)$  et  $\Psi(\varepsilon)$  appartiennent à l'espace abstrait  $H_\nu$ .

En modifiant légèrement le raisonnement de M. Priwaloff, nous allons établir le théorème suivant qui nous sera très utile :

*Si la fonction  $\Psi(\varepsilon)$  vérifie une condition du type*

$$|\Psi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon_1)| \leq \text{const.} \frac{1}{\left| \log \frac{1}{|\varepsilon - \varepsilon_1|} \right|^n},$$

*où  $n$  désigne un nombre positif supérieur à 1, la fonction  $U(\varepsilon)$  vérifie une inégalité du type*

$$|U(\varepsilon) - U(\varepsilon_1)| \leq \text{const.} \frac{1}{\left| \log \frac{1}{|\varepsilon - \varepsilon_1|} \right|^{n-1}}.$$

Nous poserons

$$(1.22) \quad \gamma_n(\Delta\varepsilon) = \frac{\text{const.}}{\left| \log \frac{1}{|\Delta\varepsilon|} \right|^n},$$

<sup>(36)</sup> Cet énoncé suppose  $\nu \neq 1$ . Si  $\nu = 1$ , le second membre de l'inégalité du texte doit être écrit comme suit

$$\text{const.} |\varepsilon - \varepsilon_1|^{1-\eta},$$

où  $\eta$  désigne un nombre positif aussi petit qu'on le veut.

où  $\Delta\varepsilon$  désigne la différence  $\varepsilon_1 - \varepsilon$  :  $\gamma_n(\Delta\varepsilon)$  est donc, de par sa définition, une fonction positive, croissante de  $|\Delta\varepsilon|$ , nulle pour  $\Delta\varepsilon = 0$ . Nous dirons, pour abrégé, qu'une fonction  $\Psi(\varepsilon)$  vérifie la condition  $\mathcal{L}_n(\varepsilon)$  lorsqu'elle satisfait à l'inégalité du type

$$|\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon).$$

*Démonstration.* — La formule (1.21) permet d'écrire

$$U(\varepsilon_1) - U(\varepsilon) = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} \Delta\varepsilon + \frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)}{\varepsilon_1 - s} \right] ds.$$

Ceci posé, nous supposons d'abord que  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_1$  sont distincts de  $\pm 1$ , et nous décomposerons l'intervalle d'intégration  $(-1, +1)$  en trois intervalles partiels

$$(-1, \varepsilon - \eta), \quad (\varepsilon - \eta, \varepsilon + \eta), \quad (\varepsilon + \eta, 1),$$

que nous désignerons respectivement par  $E_1, E_2, E_3$ . Nous choisirons  $\eta$  de façon que l'on ait  $\eta = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)$ .

Le point  $\varepsilon_1$  est donc intérieur à l'intervalle de longueur  $2\eta$  dont le point  $\varepsilon$  est le centre et distant de  $|\Delta\varepsilon|$  au moins des extrémités de celui-ci.

Nous allons montrer que l'intégrale précédente se décompose en trois autres, étendues respectivement aux intervalles  $E_1, E_2, E_3$  et vérifiant chacune une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(\varepsilon)$ . Remarquons pour cela que la quantité  $(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)$  reste positive sur  $E_1$ ; on a donc

$$\left| \int_{E_1} \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} \Delta\varepsilon ds \right| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon) |\Delta\varepsilon| \int_{E_1} \frac{ds}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)}.$$

Or, la valeur absolue de l'intégrale du second membre vaut

$$\frac{1}{\Delta\varepsilon} \left| \log \frac{\eta + \Delta\varepsilon}{\eta} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1} \right|.$$

De par le choix même de  $\eta$ , la quantité  $\frac{\eta + \Delta\varepsilon}{\eta}$  prend l'une des valeurs  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{3}{2}$ , suivant le signe de  $\Delta\varepsilon$ ; par ailleurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon$  étant par hypothèse distincts de  $\pm 1$ , le quotient  $\frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_1}$  n'est ni infini, ni nul; le logarithme qui figure dans l'expression précédente est donc borné.

L'inégalité ci-dessus peut donc s'écrire

$$\left| \int_{E_1} \frac{\Psi(s) - \Psi(\varepsilon)}{(\varepsilon - s)(\varepsilon_1 - s)} \Delta\varepsilon ds \right| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon);$$

cela montre, comme  $\gamma_n < \gamma_{n-1}$ , que l'intégrale considérée vérifie *a fortiori* une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ .

Par ailleurs, on trouve immédiatement

$$\left| \int_{E_1} \frac{\Psi(\varepsilon_1) - \Psi(\varepsilon)}{\varepsilon_1 - s} ds \right| \leq \gamma_n(\Delta\varepsilon) \left| \int_{E_1} \frac{ds}{\varepsilon_1 - s} \right| = \gamma_n(\Delta\varepsilon) \left| \log \frac{\eta + \Delta\varepsilon}{1 + \varepsilon_1} \right| \leq \gamma_{n-1}(\Delta\varepsilon),$$

puisque, par hypothèse,  $1 + \varepsilon_1$  n'est pas nul, alors que  $\eta + \Delta\varepsilon$  vaut  $2\Delta\varepsilon$  ou  $\Delta\varepsilon$  suivant le signe de  $\Delta\varepsilon$ .

Ces considérations s'appliquent sans changement aux intégrales précédentes étendues à l'intervalle  $E_3$ .

Enfin, la contribution de l'intervalle  $E_2$  à la valeur de  $U(\varepsilon) - U(\varepsilon_1)$  se présente, d'après (1.21), sous forme de différence de deux intégrales du type

$$I = \int_{E_2} \frac{\Psi(\varepsilon) - \Psi(s)}{\varepsilon - s} ds.$$

On a

$$|I| \leq \int_{E_2} \frac{\text{const.}}{\left[ \log \frac{1}{|\varepsilon - s|} \right]^n} \frac{ds}{|\varepsilon - s|}.$$

On remarque que la dérivée de  $\log(s - \varepsilon)$  est  $\frac{1}{s - \varepsilon}$ ; on trouve tout de suite

$$|I| \leq \frac{\text{const.}}{\left| \log \frac{1}{|\Delta\varepsilon|} \right|^{n-1}} \leq \gamma_{n-1}(\Delta\varepsilon).$$

Ainsi, pour des valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon$  distinctes de  $\pm 1$ ,  $U(\varepsilon)$  se présente sous forme d'une somme de fonctions vérifiant chacune une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ ;  $U(\varepsilon)$  satisfait donc aussi à une condition de ce type.

L'extension de cette propriété aux extrémités  $\pm 1$  de l'intervalle d'intégration est immédiate : si  $\varepsilon = +1$ , par exemple, il suffit de supprimer dans le raisonnement l'ensemble  $E_3$  et de prendre pour  $E_2$  l'intervalle  $(1 - \eta, 1)$ .

**COROLLAIRE.** — Si la fonction  $\Phi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n$  excepté

pour  $s = s_0$ , la fonction  $T(e^{is})$ , définie par l'expression (1.20), vérifie une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ , sauf pour  $s = \pm s_0$ .

Observons que le raisonnement précédent s'étend, sans aucune difficulté, au cas où la fonction  $\Psi(\varepsilon)$  et la variable  $\varepsilon$  sont supposées complexes; il suffit de remplacer, dans les formules qui précèdent, toutes les différences par leurs modules respectifs. En particulier, cette remarque s'applique à la fonction  $\Omega(Z)$ , définie par la formule (1.19), qui vérifiera une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ , dans tout son domaine d'existence  $C$ , frontières comprises, les points  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$  exceptés, si la fonction  $\Phi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  partout, le point  $s = s_0$  excepté.

Relativement aux modules de continuité, rappelons encore un lemme très simple qui nous sera bientôt utile :

*Si deux fonctions  $f(\varepsilon)$  et  $\varphi(\varepsilon)$  possèdent respectivement les modules de continuité  $\eta(\Delta\varepsilon)$  et  $\eta_1(\Delta\varepsilon)$ , leur produit  $f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$  admet pour module de continuité le plus faible des modules précédents.*

Nous dirons que le module de continuité  $\eta_1(\Delta\varepsilon)$  est plus faible que  $\eta(\Delta\varepsilon)$  si

$$\eta_1(\Delta\varepsilon) \geq \eta(\Delta\varepsilon).$$

Dans la suite de la démonstration nous ferons cette hypothèse.

Cela étant considérons l'identité

$$f(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = [f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)]\varphi(\varepsilon_1) + |\varphi(\varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon)|f(\varepsilon).$$

On en tire, en désignant par const. un nombre positif supérieur aux maximums de  $\varphi(\varepsilon)$  et  $f(\varepsilon)$ ,

$$|f(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)| \leq \text{const.} [ |f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)| + |\varphi(\varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon)| ].$$

D'après la définition même du module de continuité, cela s'écrit encore

$$|f(\varepsilon_1)\varphi(\varepsilon_1) - f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)| \leq \text{const.} \eta_1(\Delta\varepsilon),$$

car  $\eta_1 > \eta$ ; cette inégalité démontre notre lemme.

**12. ÉTUDE DE L'OBSTACLE.** — Substituons encore à  $\Phi(s)$  la fonction

$\Psi(s)$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi(s) &= \Phi(s) - \pi & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ \Psi(s) &= \Phi(s) & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi; \end{aligned}$$

d'après cela,  $\Psi(s)$  désigne l'angle que fait avec  $Ox$  l'obstacle, orienté dans le sens des  $y$  croissants, au point  $z$  image de  $Z = e^{is}$ ; il s'ensuit que  $\Phi(s)$  et  $\Psi(s)$  ont même module de continuité, sauf pour  $s = s_0$ . Moyennant ce changement de fonction, les formules (1.15), (1.16), (1.17), (1.18) deviennent respectivement

$$(1.23) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Psi(s') \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) \right] ds' \\ - i \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)},$$

$$(1.24) \quad \pi s_0 = \int_0^\pi \Psi(s) ds,$$

$$(1.25) \quad \Psi(s_0 + 0) - \Psi(s_0 - 0) = (2\alpha - 1)\pi,$$

$$(1.26) \quad 0 \leq \Psi(s) \leq \pi.$$

Appelons  $\Omega_0(Z) = \Theta_0 + iT_0$  l'intégrale qui figure au second membre de la formule (1.23) : en utilisant un artifice que nous avons rappelé au paragraphe 10, on peut écrire

$$(1.27) \quad \Omega_0(Z) = \Psi(s) + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [|\Psi(s') - \Psi(s)| \\ \times \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s' \right) \right] ds' \\ + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \log Z \Psi(s).$$

Mise sous cette forme, l'expression de  $\Omega_0(Z)$ , holomorphe pour  $q \leq |Z| < 1$ , est valable jusqu'à la frontière  $|Z| = 1$  du domaine de définition de cette fonction. D'après les formules de M. Villat, qui résolvent le problème de Dirichlet généralisé dans une couronne circulaire, la partie réelle de  $\Omega_0(Z)$  prend sur le cercle  $|Z| = 1$  les valeurs  $\Theta_0(e^{\pm is}) = \Psi(s)$ ;  $\Omega_0(Z)$  est réelle pour  $Z$  réel et imaginaire

pure pour  $|Z| = q$ . Cet ensemble de conditions suffit à caractériser la fonction  $\Omega_0(Z)$ . Le long de  $|Z| = 1$ , la partie imaginaire  $T_0(e^{is})$  de  $\Omega_0(Z)$  est égale à

$$(1.28) \quad T_0(e^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Psi(s') - \Psi(s)] \left\{ \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - s') \right] + \zeta \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + s') \right] \right\} ds' \\ + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s \Psi(s).$$

D'après (1.20) et (1.23), on peut écrire

$$(1.29) \quad T(e^{is}) = T_0(e^{is}) - \log \left| \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \right|.$$

Ces différentes expressions étant continues tant que  $s \neq s_0$ , l'artifice utilisé au paragraphe 10 permet de préciser la nature de la singularité que la fonction  $\Omega_0(Z)$  présente aux points :  $Z_0$  et  $\bar{Z}_0$  il suffit de remarquer que la fonction

$$(1.30) \quad H(Z) = \Omega_0(Z) + \frac{2\alpha - 1}{i} \log \frac{Z - Z_0}{Z - \bar{Z}_0},$$

où  $\alpha$  désigne le nombre défini par (1.25), est continue pour  $Z = e^{\pm is_0}$ ; si, pour fixer les idées, l'on suppose que  $\Psi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$ , la fonction  $H(Z)$  correspondante appartiendra à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ , dans tout son domaine de définition. Il s'ensuit que, dans le voisinage de  $Z_0$ , la fonction  $T_0(e^{is_0})$  se comporte comme

$$(2\alpha - 1) \log |e^{is} - e^{is_0}|.$$

Ainsi, nous avons substitué à  $\Phi(s)$  une fonction nouvelle  $\Psi(s)$  qui offre l'avantage d'être continue tout le long de  $|Z| = 1$ , dans le cas particulier, très important, où l'on veut obtenir un obstacle à tangente continue au point de bifurcation; dans ce cas,  $\alpha = \frac{1}{2}$  et la fonction  $\Omega_0(Z)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$  pour  $q \leq Z \leq 1$  si  $\Psi(s)$  fait partie de l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$ .

Si  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , la fonction  $\Omega_0(Z)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$  dans tout son domaine de définition  $C$ , frontières comprises (sauf aux

points  $Z_0$  et  $\bar{Z}_0$ ), si  $\Psi(s)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$  dans tout son intervalle de définition (le point  $s = s_0$  excepté). Nous ferons désormais ces hypothèses sur la fonction  $\Psi(s)$ , en raison de leur commodité.

Il y a lieu de remarquer que  $s_0$  étant une fonction déterminée de  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  la formule (1.25) établit une relation entre ces paramètres arbitraires et la fonction  $\Psi(s)$ .

Ceci posé, la correspondance entre le cercle  $|Z| = 1$  et son image dans le plan  $z$  est définie par la relation

$$z = \int_{z_0}^z e^{i\Omega(Z)} df(Z),$$

l'intégrale précédente étant prise le long du cercle  $|Z| = 1$ ; cette égalité fournit donc les équations paramétriques de la courbe obstacle. Choisissons l'argument  $s$  de  $Z = e^{is}$  ( $s \neq s_0$ ) pour paramètre de cette courbe, orientée dans le sens des ordonnées croissantes; son abscisse curviligne sera donnée par la relation, due à M. Villat,

$$(1.31) \quad \frac{dl(s)}{ds} = j e^{-\pi i e^{is}} \frac{df}{ds} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j = -1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ j = +1 & \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \end{cases}$$

où  $\frac{df}{ds}$  est définie au moyen des formules (1.10) et (1.10'). Ainsi l'arc  $l(s)$  de l'obstacle est une fonction continue et dérivable de  $s$ , sauf peut-être pour  $s = s_0$ ; de plus  $\frac{df}{ds}$  étant analytique et régulière pour  $|Z| = 1$ ,  $\frac{dl}{ds}$  possède le même module de continuité que  $T(e^{is})$  (lorsque celui-ci existe) dans chacun des intervalles  $0 \leq s < s_0$  et  $s_0 < s \leq \pi$ .

Il reste à préciser le comportement de  $\frac{dl}{ds}$  pour  $s = s_0$ . D'après ce qui a été dit au paragraphe 10 et vérifié au début du précédent paragraphe, la fonction  $T(e^{is})$  se comporte dans le voisinage de  $s = s_0$  comme

$$2\alpha \log |e^{is} - e^{is_0}| + \text{fonction de } (s - s_0) \text{ continue pour } s = s_0,$$

alors que, d'après (1.9) et (1.10),  $\frac{df}{ds}$  possède, pour cette valeur de  $s$ , un zéro simple.

On peut donc écrire, en désignant par  $K(s)$  et  $K_1(s)$  des fonctions continues pour  $s = s_0$  et ne s'annulant pas pour cette valeur :

$$\frac{dl}{ds} = K(s)(s - s_0)^{1-2\alpha} + K_1(s).$$

Cela montre que  $\frac{dl}{ds}$  est nul, infini ou fini au point de bifurcation, suivant que  $\alpha$  est inférieur, supérieur ou égal à  $\frac{1}{2}$ ; autrement dit si l'obstacle présente à l'origine un angle saillant, rentrant vers le courant, ou y possède une tangente continue. Mais, comme par hypothèse  $\alpha < 1$ , l'intégrale (1.4) prise le long de  $|Z| = 1$  aura toujours un sens;  $l(s)$  est donc, dans tous les cas, une fonction continue, quel que soit  $s$ , et croissante. La longueur totale  $L$  de l'obstacle est donnée par la formule

$$(1.32) \quad L = \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} \frac{|df(e^{is})|}{ds} ds.$$

*Remarque.* — Lorsque  $\alpha = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire lorsque l'obstacle est à tangente continue, il y a intérêt à écrire l'équation de M. Villat avec la fonction  $T_0(e^{is})$  qui, dans ce cas, est continue pour  $s = s_0$ ; eu égard à (1.29), (1.31) se met, en effet, sous la forme

$$(1.31') \quad \frac{dl(s)}{ds} = e^{-T_0(e^{is})} \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \frac{df}{ds},$$

le facteur

$$\frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \frac{df}{ds}$$

étant fini pour  $s = s_0$  [cf. (1.10) et (1.10')] et positif dans tout l'intervalle  $(0, \pi)$ .

La position de l'obstacle ainsi défini par rapport aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  se détermine aisément. Nous appellerons  $d_1$  et  $d_2$  les distances respectives des points  $P_1$  et  $P_2$  aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  qui leur correspondent. En vertu des inégalités (1.26),  $d_1$  et  $d_2$  sont les plus courtes distances



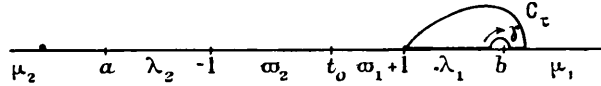
de l'obstacle à  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ; nous appellerons ces longueurs *distances de l'obstacle aux parois*.

En séparant le réel de l'imaginaire dans l'équation (1.14), on trouve

$$d_1 = \text{Imag.} \left[ \int_C e^{t\Omega} df \right],$$

$C$  désignant un chemin régulier quelconque, joignant le point  $P_1$  à un point arbitraire de  $\mu_1$ . Nous évaluerons l'intégrale ci-dessus en utilisant la variable  $t$  précédemment introduite; nous désignerons par  $C_\tau$  l'image de  $C$  dans  $(\mathcal{C})$  et par  $\gamma$  la demi-circonférence supérieure de rayon  $\eta$  centrée sur  $t = b$  (fig. 6). La fonction sous le signe

Fig. 6.



d'intégration est régulière et uniforme dans le domaine limité par  $C_\tau$ , deux segments de l'axe réel et  $\gamma$ . Comme  $\frac{df}{dt}$  est réel pour  $t$  réel, alors que  $\Omega(t)$  est réel pour  $t \leq b$  et imaginaire pure pour  $b \leq t$ , on a

$$d_1 = \int_1^{b-\eta} \sin \Theta(t) df(t) + \text{Imag.} \int_\gamma e^{t\Omega(t)} df(t),$$

l'intégrale le long de  $\gamma$  étant prise dans le sens indiqué sur la figure. Or  $\Omega(t)$  est analytique pour  $t = b$ , puisque  $\Omega(Z)$  l'est pour  $Z = -q$ ; de plus  $\Omega(b)$  est nul, d'après (1.13). Comme  $\frac{df}{dt}$  possède pour  $b = t$  [cf. (1.9)] un pôle simple de résidu  $-\frac{\psi_1}{\pi}$ , la fonction  $\frac{df}{dt} \sin \Theta$  est finie en ce point. Enfin les fonctions sous le signe d'intégration sont continues pour  $t = b$ ; dès lors on a, en faisant tendre  $\eta$  vers zéro,

$$(1.33) \quad d_1 = \int_1^b \sin \Theta df + \psi_1.$$

Cette formule montre que la ligne libre  $\lambda_1$  possède une asymptote horizontale d'équation

$$(1.33') \quad y = y_1 = \int_1^b \sin \Theta df.$$

Nous appellerons désormais  $\gamma_1$  l'intégrale définie du second membre.

La distance de cette asymptote à la paroi  $\mu_1$  est égale à  $\psi_1$  : c'est le débit du fluide entre l'obstacle et  $\mu_1$ . Il va de soi qu'on obtient pour  $d_2$  une expression analogue.

Nous avons ainsi exprimé en fonctions des éléments  $a, b, \psi_1, \psi_2$  et  $\Psi(s)$  liés entre eux par la relation (1.24) et vérifiant les inégalités (1.25), tous les paramètres géométriques qui caractérisent le domaine  $\mathcal{A}$  du plan  $Z$ ; les formules (1.5), (1.9), (1.10), (1.14), (1.23), (1.25), (1.28) et (1.29) de M. Villat constituent donc la solution la plus générale du problème du sillage. De plus, ces formules permettent de résoudre, d'une manière approximative, le problème direct tel que nous l'avons énoncé au paragraphe 6. Donnons-nous, en effet, un obstacle qui soit l'arc d'une courbe illimitée définie dans le plan  $z$  par son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l),$$

où  $\Psi(l)$  désigne l'angle de l'obstacle orienté avec  $Ox$ , exprimé en fonction de son abscisse curviligne  $l$ ,  $\alpha \leq l \leq \beta$ ;  $\Psi(l)$  est supposée continue, sauf pour  $l = l'$ , où cette fonction peut être discontinue mais bornée. Choisissons quatre paramètres  $a, b, \psi_1, \psi_2$ , et une fonction  $l(s)$  continue, croissant de  $\alpha$  à  $\beta$  dans l'intervalle  $(0, \pi)$ , de manière que  $\Psi[l(s)]$ , envisagée comme fonction de  $(s)$ , vérifie l'équation (1.24), les inégalités (1.26), et appartienne, pour fixer les idées, à l'espace  $\mathcal{L}_n$  : il faudra de plus que l'on ait  $l' = l(s_0)$ . Il est clair que  $\Psi'(s) = \Psi'[l(s)]$  est une fonctionnelle continue de  $l(s)$ , il en sera, par suite, de même des fonctionnelles de  $l(s)$  définies par les équations (1.23), (1.28) et (1.29).

*Remarque.* — Il est à noter que les modules de continuité de  $l(t)$  et par suite de  $l(s)$  ne peuvent être choisis arbitrairement. La fonction  $l(t)$ , en effet, réalise la correspondance entre les portions de frontière des domaines  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{C}$  représentés conformément l'une sur l'autre; les portions de frontière en cause possèdent des tangentes continues, sauf peut-être pour  $s = s_0$ . On montre que, dans ces conditions,  $l(t)$  est assujettie à vérifier une inégalité du type

$$|l(t) - l(t_1)| \leq \text{const} |t - t_1|^\mu \quad \text{pour } t \text{ et } t_1 \neq 1,$$

où  $\mu$  désigne un nombre positif aussi voisin de l'unité que l'on veut. On peut aller plus loin si l'on suppose de plus que  $0 < \Psi(l) < \pi$ ; dans ce cas  $\frac{dl}{dt}$  existe et est continue [cf. § 22]. Enfin, on verra que l'existence et la continuité de  $\Psi'(l)$  assurent celles de  $\frac{dl}{dt}$  dans le cas où  $0 \leq \Psi(l) \leq \pi$ , sauf, peut-être, pour  $t = t_0$  et  $t = \pm 1$ ; dans la suite nous nous placerons toujours dans ce cas. La correspondance entre  $t$  et  $Z$  étant analytique le long de  $|Z| = 1$ , le résultat précédent montre que la dérivée  $\frac{dl[t(s)]}{ds}$  est continue pour  $0 \leq s \leq \pi$ , sauf, peut-être, pour  $s = s_0$ ; ces assertions seront justifiées et approfondies au cours du troisième Chapitre.

Les sillages que les formules de M. Villat font correspondre aux données  $a, b, \psi_1, \psi_2, \Psi(l), l(s)$  possèdent la propriété suivante : l'angle de la demi-tangente positive à l'obstacle ainsi construit avec  $Ox$  prend le long de l'obstacle la même suite de valeurs que le long de l'arc considéré de la courbe donnée. Mais l'abscisse curviligne  $L(s)$  de l'obstacle construit, fournie par la formule [cf. (1.31) et (1.31')]

$$(1.33'') \quad \frac{dL(s)}{ds} = j e^{-\tau(e^{i\alpha})} \frac{df}{ds} = e^{-\tau_0(e^{i\alpha})} \frac{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)} \frac{df}{ds} \quad (j = \pm 1 \text{ pour } s \gtrless s_0),$$

est, en général, différente de  $l(s)$ ; les longueurs de deux arcs de courbes donné et construit ne sont pas égales. Enfin les distances  $d_1$  et  $d_2$ , calculées à l'aide de la formule (1.33), n'ont pas les valeurs fixées à priori. Nous n'avons donc, par ce procédé, qu'une solution approximative du problème; mais celle-ci sera pratiquement satisfaisante moyennant un choix judicieux des éléments  $a, b, \psi_1, \psi_2$ , et  $l(s)$  <sup>(37)</sup>.

Notons aussi que les raisonnements précédents établissent l'équivalence du groupe des paramètres  $a, b, \psi_1, \psi_2$  et  $\Phi(s)$  avec le groupe

---

(37) Dans le cas du fluide indéfini, de telles solutions approximatives ont été construites par M. Brodetsky, *Proc. Edin. Math. Soc.*, XLT, 1923; *Scrip. Univ. Hieros*, Jérusalem, 1923; *Deuxième Congrès International de Mécanique appliquée*, Zürich, 1926.

des paramètres  $a, b, \psi_1, \psi_2, \Psi(l)$  et  $l(s)$  à l'égard du problème indéterminé; ce point de vue sera approfondi plus tard.

**13. ÉTUDE DES POINTS DE DÉTACHEMENT. PROBLÈME DE LA PROUVE.** — Les études qui précèdent font bien connaître les propriétés de l'obstacle en fonction des données arbitraires de M. Villat; elles permettent par ailleurs de préciser le comportement de la fonction  $z(f)$  aux points à l'infini et de constater l'analyticité de cette fonction le long des images des parois et des lignes libres, exception faite, toutefois, des points de détachement. Nous allons succinctement examiner l'allure de  $z(f)$  en ces points; une telle étude repose sur une hypothèse supplémentaire de régularité que nous allons introduire.

Considérons un sillage correspondant aux données  $a, b, \psi_1, \psi_2$  et  $\Psi(s)$ ; nous supposons toujours que  $\Psi(s)$  vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  dans tout l'intervalle  $0 \leq s \leq \pi$ , sauf, peut-être, pour  $s = s_0$ . Nous savons évaluer l'abscisse curviligne  $l(s)$  de l'obstacle construit à partir de ces éléments, supposés liés par la relation (1.24); rappelons que  $l(s)$  possède une dérivée satisfaisant à une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ ; sauf pour  $s = s_0$ . Inversement  $s$  est une fonction continue et dérivable de  $l$ , la dérivée  $\frac{dl}{ds}$  étant nulle pour  $s = 0$  et  $s = \pi$  [cf. l'équation (1.31) de M. Villat];  $\frac{ds}{dl}$  vérifie encore une condition  $\mathcal{L}_{n-1}$ , sauf pour  $s = s_0$ ,  $s = 0$ ,  $s = \pi$ .

La fonction  $\Psi(s)$  peut être envisagée comme fonction de  $l$ ; nous supposerons maintenant que  $\frac{d\Psi(l)}{dl} = \Psi'(l)$  existe et que  $\Psi'(l)$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(l)$  partout, sauf pour  $l = l(s_0)$  où  $\Psi'(l)$  peut être discontinue mais bornée. Cela revient donc à se limiter à l'étude des obstacles admettant, en chacun de leurs points, une courbure vérifiant une condition  $\mathcal{L}_n$ , le point de bifurcation éventuellement excepté. Nous écrivons

$$\Psi(s) = \Psi[l(s)].$$

Cela montre que la dérivée  $\frac{d\Psi}{ds}$  existe partout, sauf pour  $s = s_0$ ; on a

$$\frac{d\Psi}{ds} = \frac{d\Psi}{dl} \frac{dl}{ds};$$

$\frac{d\Psi}{ds}$  appartient donc à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}$  tant que  $s \neq s_0$ . Il y a plus; l'existence et la continuité de  $\frac{d\Psi}{ds}$  prouvent que  $\Psi(s)$  vérifie une condition de Hölder (d'exposant aussi voisin de l'unité qu'on le veut) partout, sauf pour  $s = s_0$ . Il en sera donc de même de  $\frac{dl}{ds}$ , compte tenu de l'équation (1.31) de M. Villat et du théorème de Fatou. L'expression ci-dessus de  $\frac{d\Psi}{ds}$  montre alors que cette fonction vérifie une condition  $\mathcal{L}_n$ . La fonction  $Zi\Omega'_0(Z)$  existe donc pour  $Z = 1$ , puisque sa partie réelle, qui vaut  $\pm \frac{d\Psi}{ds}$  pour  $Z = e^{\pm is}$ , existe sur ce cercle. De plus, cette partie réelle vérifie pour  $|Z| = 1$  une condition  $\mathcal{L}_n$ , sauf pour  $Z = Z_0$  et  $Z = \bar{Z}_0$ , puisqu'elle continue pour  $Z = \pm 1$ ; en effet,  $\frac{d\Psi}{ds}$  vaut zéro pour  $s = 0$  et  $s = \pi$ , car  $\frac{df}{ds}$ , d'après (1.10'), et par suite  $\frac{dl}{ds}$ , s'y annullent.

Il suit de là que  $Zi\Omega'_0(Z)$  et par conséquent  $\Omega'(Z)$  vérifient dans le voisinage de  $Z = \pm 1$  une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ ; on peut écrire

$$(1.34) \quad |\Omega'(Z) - \Omega'(\pm 1)| \leq \gamma_{n-1}(Z \mp 1).$$

Cette inégalité nous permettra de préciser, en utilisant un raisonnement de M. Leray, le comportement de la fonction  $\frac{d\Omega}{df}$  dans le voisinage des points de détachement. Rappelons que  $\Omega(Z)$  et  $f(Z)$  sont réelles sur  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ; on peut donc prolonger  $\frac{d\Omega}{df}$ , définie dans  $d$ , à travers l'axe réel du plan  $Z$ , et définir cette fonction dans toute la couronne  $C.\Omega(Z)$ , pour  $Z$  réel, est égal à l'angle que fait la ligne libre  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) avec  $Ox$ ; la correspondance entre  $\mathcal{A}$  et  $F$  conservant les longueurs le long de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , l'abscisse curviligne de  $\lambda_1$  (ou  $\lambda_2$ ) est  $f$  (ou  $-f$ ). La quantité  $\frac{d\Omega}{df}$  (ou  $-\frac{d\Omega}{df}$ ) est donc égale à la courbure de la ligne  $\lambda_1$  (ou de  $\lambda_2$ ); on a

$$\frac{d\Omega}{dZ} = \frac{d\Omega}{df} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ}.$$

La dérivée  $\frac{df}{dt}$ , envisagée comme fonction de  $t$  ou de  $Z$ , est réelle,

régulière et non nulle aux points  $Z = \pm 1$ ;  $\frac{dt(Z)}{dZ}$  y possède un zéro simple; il vient d'ailleurs, en faisant  $Z = 1$ , pour fixer les idées, dans les formules (1.10) et (1.10'),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{1 - t_0}{(1 - a)(b - 1)}$$

et puis

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{dt}{dZ} \frac{1}{Z - 1} = \frac{-\omega_1^2}{\pi^2} \frac{p'(\frac{\gamma}{2})}{\left[ e_2 - p(\frac{\gamma}{2}) \right]^2} p''(\omega_2),$$

où les quantités  $p(\frac{\gamma}{2})$ ,  $p'(\frac{\gamma}{2})$  et  $p''(\omega_2)$  sont des fonctions analytiques de  $a, b$ , continues tant que  $a \neq 1$  et  $b \neq 1$ , et qu'il est inutile d'expliquer; nous poserons

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} \frac{1}{Z - 1} = N(a, b, \psi_1, \psi_2).$$

Le nombre  $N$  est visiblement réel et positif; la simple inspection des figures 2, 3 et 5 montre, en effet, que  $Z$  tendant vers 1 par valeurs réelles et croissantes, les fonctions  $f$  et  $-t$  sont réelles et décroissantes. L'inégalité (1.34) permet dès lors d'écrire

$$\left| \frac{d\Omega}{df} N(Z - 1) - \Omega'(1) \right| < \gamma_{n-1}(Z - 1) \quad \text{avec} \quad \Omega'(1) = \left( \frac{d\Omega}{dZ} \right)_{z=1}$$

ou encore

$$(1.34') \quad \left| \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(1)}{2N} \frac{Z + 1}{Z - 1} \right| \leq \frac{\gamma_{n-1}(Z - 1)}{|Z - 1|}.$$

Nous introduisons le facteur  $\frac{Z + 1}{2}$  qui se réduit à 1 pour  $Z = 1$  pour une raison qui apparaîtra tout à l'heure. Posons alors

$$(1.35) \quad \frac{d\Omega}{df} = U + iV.$$

Les fonctions  $U(X, Y)$  et  $V(X, Y)$ , harmoniques à l'intérieur de  $d$ , sont appelées à jouer un rôle capital. On a, en tenant compte de l'équation (1.14), et en supposant l'obstacle orienté comme il a été

dit,

$$df = j e^{\tau} dl \quad \left( j = \begin{cases} +1 & \text{pour } \pi \geq s \geq s_0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \end{cases} \right),$$

par suite

$$(1.35') \quad \begin{cases} U(e^{is}) = j \frac{d\Psi}{dl} e^{-\tau e^{is}}, \\ V(e^{is}) = j e^{-\tau} \frac{d\Gamma}{dl} \end{cases} \quad \left( j = \begin{cases} +1 & \text{pour } \pi \geq s \geq s_0 \\ -1 & \text{pour } 0 \leq s \leq s_0 \end{cases} \right).$$

La fonction  $\frac{d\Omega}{df}$  est prolongeable par symétrie à travers l'axe réel.

Cette relation montre que  $U$  est continue dans le voisinage de  $Z = 1$  et  $y$  appartient à l'espace  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$  puisque  $\Psi'[l(s)]$  et  $\Gamma(e^{is})$  appartiennent, par hypothèse, à cet espace. Introduisons dès lors la fonction  $W(Z)$  définie comme suit : elle est analytique pour  $q \leq Z < 1$ ; pour  $|Z| = 1$  elle vérifie une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(Z)$ ; elle est réelle pour  $Z$  réel; dans le voisinage de  $Z = 1$  sa partie réelle le long de  $|Z| = 1$  est égale à  $U$  et est quelconque, mais continue et suffisamment régulière sur le reste de la frontière de  $C$ . Dans ces conditions, la fonction  $P(Z)$

$$P(Z) = \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(1)}{2N} \frac{Z+1}{Z-1} - W(Z)$$

est imaginaire pure pour  $|Z| = 1$  dans le voisinage de  $Z = 1$ ; en effet, la différence  $\frac{d\Omega}{df} - W(Z)$  a, par définition, sa partie réelle nulle dans ce voisinage, alors que les quantités  $2N$ ,  $\Omega'(1)$  sont réelles,  $\frac{Z+1}{Z-1}$  étant imaginaire pure pour  $Z = e^{is}$  [ceci explique l'introduction du facteur  $(Z+1)$  dans la formule (1.34')]. Autour de  $Z = 1$ , on peut donc prolonger  $P(Z)$  par la méthode des images à travers le cercle  $|Z| = 1$  et la définir dans un petit cercle  $\gamma$  centré sur le point; cela prouve que  $P(Z)$  est analytique, uniforme et régulière dans  $\gamma$ , sauf, peut-être, pour  $Z = 1$  où  $P(Z)$  peut présenter une singularité polaire ou essentielle. Mais cette éventualité est à écarter, compte tenu de l'inégalité (1.34') :  $P(Z)$  est donc holomorphe pour  $Z = 1$ , et dans le voisinage de ce point nous pouvons écrire

$$(1.36) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} - \frac{\Omega'(1)}{2N} \frac{Z+1}{Z-1} + \left( \frac{d\Psi}{dl} \right)_{z=0} \right| \leq \gamma_{n-1}(Z-1),$$

puisque, par définition,  $W(1)$  vaut

$$\left(\frac{d\Psi}{dl}\right)_{s=0}.$$

Ainsi toutes les fois que  $\Omega'(1) \neq 0$ , la ligne libre  $\lambda_2$  présente, en son point de détachement  $P_2$ , une courbure infinie. Dans le voisinage de  $P_2$ , elle tourne sa convexité vers l'amont ou vers l'aval suivant que  $\Omega'(1)$  est négative ou positive. Du point de vue physique, la première éventualité est très satisfaisante; on regarde, en général, sa réalisation comme une condition nécessaire de validité (*cf.* les § 7 et § 16). Si, au contraire,  $\Omega'(1) = 0$ ,  $\lambda_2$  possède au point  $P_2$  une courbure finie, égale à celle de l'obstacle en ce point; le détachement de  $\lambda_2$  est alors dit en poue. On retrouve ainsi les résultats fondamentaux de M. Villat <sup>(38)</sup>.

Le développement (1.36) montre que la ligne  $\lambda_2$  s'incurve dans le voisinage du point  $P_2$  lorsque  $\Omega'(1)$  n'est pas nul; toutefois, l'obstacle étant supposé tranchant en  $P_2$ , tout danger de recouplement de  $\lambda_2$  et  $\varpi_2$  est écarté. Mais, dans ce cas, il est impossible de prolonger tangentiellement (et avec une courbure finie) l'arc  $\varpi_2$  dans le sillage au delà de  $P_2$ .

Au contraire, une telle opération est possible si l'on choisit les éléments arbitraires de M. Villat de manière à annuler la quantité  $\Omega'(1)$ . L'arc  $\varpi'_2$  de l'obstacle, qui prolonge tangentiellement l'arc  $\varpi_2$ , ne trouble pas le régime hydrodynamique pourvu qu'il soit tout entier situé à l'extérieur du domaine  $\mathcal{A}$  du fluide en mouvement, et pourvu que sa courbure se raccorde en  $P_2$  avec celle de  $\varpi_2$  <sup>(39)</sup>; la

<sup>(38)</sup> Observons que l'on a

$$\Omega'(1) = \left[ \frac{dT(e^{ts})}{ds} \right]_{s=0}.$$

C'est sous la forme écrite au second membre que la quantité  $\Omega'(1)$  intervient dans les travaux de M. Villat.

<sup>(39)</sup> De cette manière on pourra construire des sillages avec obstacle en forme de courbe fermée et réaliser ainsi des configurations particulièrement intéressantes du point de vue physique. Rappelons que ces sillages sont contruits à partir des éléments arbitraires de M. Villat (problème indéterminé) à l'aide des



deuxième condition de Brillouin est alors satisfaite. En particulier, il sera nécessaire, du point de vue de la validité, que  $\varpi'_2$  se dirige en  $P_2$  vers l'aval de  $\lambda_2$ . Dans le cas où l'obstacle possède une courbure  $c(s)$  dont la dérivée vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  [c'est-à-dire si  $\frac{d^2\Phi}{ds^2}$  existe et vérifie une condition  $\mathcal{L}_n(s)$  partout, sauf pour  $s = s_0$ ,  $n > 1$ ], on peut traduire cette dernière condition de validité locale par une inégalité, due à M. Leray, que nous allons rappeler et qui nous sera bientôt utile.

D'après (1.34)  $\frac{d\Gamma(e^{is})}{ds}$  existe pour  $s = 0$  et appartient dans le voisinage de cette valeur à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$ ,  $n$  pouvant être ici aussi grand qu'on le veut. Dans le cas actuel  $\frac{d\Gamma(e^{is})}{ds}$  vérifie même, dans le voisinage de  $s = 0$ , une condition de Hölder d'exposant aussi voisin de 1 qu'on le veut, puisque  $\frac{d\Phi}{ds}$  vérifie une condition de Lipschitz (en effet, rappelons que  $\frac{d^2\Phi}{ds^2}$  existe et est continue); l'équation de définition de  $U(e^{is})$  [cf. (1.35')]

$$U(e^{is}) = -c e^{-T(e^{is})}$$

montre alors que  $\frac{dU}{ds}$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(s)$  puisque les dérivées des facteurs du second membre appartiennent encore à cet espace.

formules qui fournissent les équations des arcs  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  de l'obstacle et non pas celles des arcs  $\varpi'_1$  et  $\varpi'_2$ ; ceux-ci, tracés dans le plan  $z$ , ne sauraient être définis à partir des données du plan  $Z$ . Mais il importe de préciser que tous les résultats de ce paragraphe comportent une réciproque au sens que voici; donnons-nous, dans le plan  $z$ , un obstacle au moyen de son équation intrinsèque  $\Psi = \Psi(l)$  et de position connue par rapport aux parois  $\mu_1$  et  $\mu_2$  du canal; cherchons à construire un sillage correspondant à cette configuration des éléments rigides; on montrera que si  $\frac{d\Psi(l)}{dl}$  existe et appartient à l'espace  $\mathcal{L}_n(l)$ , la fonction  $l(s)$  correspondante, à priori inconnue, doit posséder une dérivée assujettie à vérifier une condition  $\mathcal{L}_n(s)$ ,  $n$  étant un nombre arbitrairement grand. Il s'ensuit que les résultats de ce paragraphe valent encore pour le problème déterminé ainsi posé et permettent de discuter la validité de ses solutions éventuelles. On consultera à ce sujet le Chapitre III.

D'après (1.36)  $\frac{d\Omega}{df}$  n'a pas de pôle et est continue dans le voisinage de  $Z=1$ , si  $\Omega'(1)=0$ ; on sait que, dans ces conditions, l'existence et la continuité (\*) de  $\frac{dU(e^{is})}{ds}$  pour  $s=0$  entraînent celles de  $\frac{d}{d \log Z} \left( \frac{d\Omega}{df} \right)$  pour  $Z=1$ . D'après le lemme du paragraphe 11  $\frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right)$  vérifie alors, dans le voisinage de  $Z=1$ , une condition  $\mathcal{L}_{n-1}(s)$ .

Cela étant, appelons  $c_2 = \left( \frac{d\Phi}{dt} \right)_{t=0}$  la courbure de l'obstacle au point  $P_2$ , courbure égale, rappelons-le, en valeur absolue à celle de la ligne  $\lambda_2$  en ce point, et posons

$$c'_2 = \left[ \frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right) \right]_{Z=1}.$$

En remarquant qu'on a par définition

$$(1.37) \quad \lim_{Z \rightarrow 1} \frac{\left| \frac{d\Omega}{df} + c_2 \right|}{Z-1} = c'_2,$$

la condition ci-dessus s'explique comme suit

$$(1.38) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} + c_2 - c'_2(Z-1) \right| \leq |Z-1| \gamma_{n-1}(Z-1).$$

Nous transformerons (1.36) en substituant à  $Z$  les variables réelles  $\rho$  et  $\omega$  définies par la relation

$$f = \varphi_2 + \rho e^{i\omega};$$

une simple inspection de la figure 2 montre que le point  $f$  ne se trouve dans le domaine  $\mathcal{A}$  que si  $-\pi \leq \omega \leq 0$ .

D'après la définition même du nombre réel positif  $N$  (cf. le début de ce paragraphe), on peut écrire dans le voisinage de  $Z=1$

$$\frac{df}{dt} \frac{dt}{dZ} = N(Z-1) + \dots$$

Portons cette expression du premier membre dans le développement de Taylor de la fonction  $(f - \varphi_2)$ ; il vient

$$f - \varphi_2 = \rho e^{i\omega} = \frac{N}{2} (Z-1)^2 + \dots$$

(\*) Au sens  $\mathcal{L}_n(s)$ .

En observant qu'aux  $|Z|$  décroissants correspondent des  $\rho$  croissants, la formule précédente permet d'écrire le premier terme du développement de la fonction  $Z(f)$  dans le voisinage du point de détachement; il vient <sup>(40)</sup>

$$Z - 1 = - \left( \frac{N}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\omega}{2}} + \dots$$

Portons cette expression de  $(Z - 1)$  dans l'inégalité (1.38); on trouve

$$(1.39) \quad \left| \frac{d\Omega}{df} + c_2 + c'_2 \left( \frac{N}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\omega}{2}} \right| \leq \rho^{\frac{1}{2}} \gamma_{n-1} \left( \rho^{\frac{1}{2}} \right).$$

Avec les nouvelles variables  $\rho$  et  $\omega$ , l'équation de la ligne  $\lambda_2$  s'écrit  $\omega = 0$ ; l'abscisse curviligne d'un point de  $\lambda_1$  est  $\rho$  (les longueurs se conservant le long des lignes libres dans la correspondance entre  $\mathcal{A}$  et  $F$ ); l'inégalité (1.39) se réduit, en y faisant  $\omega = 0$ , à

$$(1.40) \quad c(\rho) = -c_2 - \left( \frac{N}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} c'_2 \rho^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

où  $c(\rho)$  désigne la courbure de  $\lambda_2$  supposée orientée dans le sens de la vitesse au point d'abscisse  $\rho$  (donc, en sens contraire de l'obstacle).

Cette formule met en évidence le résultat suivant :

1° La ligne libre  $\lambda_2$ , analytique pour  $\rho \neq 0$ , présentera, en son point de détachement  $\rho = 0$ , une singularité toutes les fois que  $c'_2 \neq 0$ ; en effet, le développement de sa courbure suivant les puissances de  $\rho$  ne sera alors pas taylorien; 2° dans le voisinage de  $P_2$ , les différentielles  $dl$ ,

<sup>(40)</sup> Notons en passant que ce résultat permet de préciser l'allure de la correspondance  $\Omega(f)$ , ou de  $\Omega(\rho)$ , le long de la ligne  $\lambda_2$  et dans le voisinage de son point de détachement  $P_2$  lorsque  $\Omega'(1) \neq 0$ . Portons, en effet, dans (1.36) le développement limité du texte, après y avoir fait  $\omega = 0$ ; en intégrant de 0 à  $\rho$ , on trouve l'équation intrinsèque de la ligne  $\lambda_2$

$$\Omega(\rho) = l[l(0)] + \sqrt{\frac{2}{N}} \Omega'(1) \sqrt{\rho} + \dots,$$

puisque  $\rho$  est égal à l'abscisse curviligne de  $\lambda_2$ ; cette relation confirme en le précisant ce résultat annoncé au paragraphe 10 : les lignes libres et l'obstacle forment une courbe à tangente continue.

$df$  et  $d\rho$  sont équivalentes; on peut donc y exprimer la courbure  $c(l)$  de  $\varpi_2$  au moyen du développement limité <sup>(41)</sup>

$$c(l) = c_2 + c'_2 \rho + \dots$$

(puisque, par hypothèse,  $\frac{dc}{dl}$  existe); dans le voisinage de  $P_2$  la courbure de  $\lambda_2$  varie, par suite, plus vite que celle de l'arc  $\varpi'_2$ ; si donc l'obstacle se prolonge dans le sillage au delà du point de détachement  $P_2$ , l'arc  $\varpi'_2$  sera, dans le voisinage de  $P_2$ , en aval ou en amont de  $\lambda_2$  suivant que  $c'_2$  est positif ou négatif. Cela montre que la deuxième condition de non-recoupement de M. Brillouin n'est satisfaite que moyennant la condition

$$\frac{d}{dZ} \left( \frac{d\Omega}{df} \right)_{z=1} > 0$$

due à M. Leray.

Il y a plus. Formons l'expression de la différentielle  $df$  prise le long d'un cercle situé dans le plan  $f$  et centré sur le point  $f = \varphi_2$ ; en utilisant les variables  $\rho$  et  $\omega$ , on trouve

$$df = i\rho e^{i\omega} d\omega,$$

où  $\rho$  doit être regardé comme constant.

Comme la fonction  $T$  est nulle le long de l'image de la ligne libre  $\lambda_2$ , on déduit de cette relation que la valeur de  $T$  en un point  $f = \varphi_2 + \rho e^{i\omega}$  de ce cercle est donnée par la partie réelle de l'intégrale

$$\int_0^\omega \frac{d\Omega}{df} \rho e^{i\omega} d\omega.$$

Remplaçons-y alors  $\frac{d\Omega}{df}$  par son développement limité fourni

<sup>(41)</sup> Les méthodes exposées dans ce paragraphe se prêtent à l'étude des cas où l'ordre du contact entre  $\varpi_2$  et  $\lambda_2$  serait supérieur au second [cf. M. LERAY, *loc. cit.* <sup>(41)</sup>]. On montre, en particulier, que  $\frac{d^2\Omega(Z)}{dZ^2}$  présente, en général, une discontinuité pour  $Z = \pm 1$ , à moins que la courbure de l'obstacle n'y soit nulle ou que l'on ait  $\Omega'(\pm 1) = 0$ .

par (1.39); il vient, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$(1.41) \quad \left| T + c_2 \rho \sin \omega + \frac{2\sqrt{2}}{3} N^{-\frac{1}{2}} c'_2 \rho^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3\omega}{2} \right| \leq \rho^{\frac{3}{2}} \gamma_{n-1} \left( \rho^{\frac{1}{2}} \right) |\omega|.$$

Or, la condition (1.2) de M. Brillouin équivaut à  $T \leq 0$  (cf. § 9). L'inégalité (1.41) montre que  $T$  ne peut être négatif dans le voisinage de  $f = \varphi_2$  que moyennant les deux conditions simultanées

$$(1.42) \quad c_2 \leq 0, \quad c'_2 \geq 0,$$

puisque, rappelons-le,

$$-\pi \leq \omega \leq 0.$$

D'après (1.41), la première de ces inégalités exprime que  $T(X, Y)$  n'est pas positif dans le voisinage de l'axe réel si  $|1 - X|$  est suffisamment petit; dans ce cas, l'obstacle (et par suite, la ligne libre  $\lambda_2$ ) n'est pas concave vers le courant au point de détachement. De même l'inégalité  $c'_2 \geq 0$  exprime que la fonction  $T(X, Y)$  n'est pas positive dans le voisinage du cercle  $Z = e^{i\theta}$  pourvu que l'argument  $\theta$  soit positif et suffisamment petit. L'inégalité  $c'_2 > 0$  constitue donc une condition nécessaire et suffisante de validité locale lorsque l'obstacle est convexe vers le courant au point  $P_2$  et lorsque la ligne libre  $\lambda_2$  y présente un détachement en poue.

Précisons que dans le cas étudié — cas du problème indéterminé — le développement du (1.41) se calcule à partir des formules de M. Villat le long de l'arc  $\varpi_2$  et sera donné intrinsèquement le long de son prolongement  $\varpi'_2$ , les premiers termes des deux développements devant être identiques pour assurer la continuité de la courbure sur  $\varpi_2 + \varpi'_2$ .

*Remarque.* — Les discussions exposées dans ce paragraphe mettent en lumière le rôle essentiel que jouent dans la théorie les quantités  $\Omega'(\pm 1)$  de M. Villat et dont nous avons établi l'existence dans le cas des obstacles à courbure continue; il y a donc intérêt à en calculer les expressions.

Nous partirons des formules (1.23) et (1.27); en introduisant la fonction

$$\Psi(s) = \Psi[l(s)]$$

et en tenant compte du fait que  $\sigma u$  est une fonction impaire, on obtient

$$\frac{\Omega(Z) - \Omega(1)}{Z - 1} = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(0)] \} \frac{\left\{ \begin{array}{l} \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s\right) \\ + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s\right) \end{array} \right\}}{Z - 1} ds$$

$$+ \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Psi[l(0)] \frac{\log Z}{Z - 1} - \frac{i}{Z - 1} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)},$$

où  $Z$  désigne l'affixe d'un point intérieur au domaine  $d$ . Cela étant, faisons tendre  $Z$  vers 1, il vient

$$(A) \quad \Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \{ \Psi[l(0)] - \Psi[l(s)] \} p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds$$

$$+ \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Psi[l(0)] - 2\frac{\omega_1}{\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right).$$

Un calcul identique nous conduit à la relation

$$(A') \quad \Omega'(-1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(\pi)] \} p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_1\right) ds$$

$$- \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \{ \Psi[l(\pi)] + \pi \} + \frac{2\omega_1}{\pi} \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_1\right).$$

Le passage à la limite que nous venons d'effectuer suppose essentiellement que les intégrales ci-dessus ont un sens : nous allons vérifier qu'il en est bien ainsi. En effet, les dérivées  $\frac{d\Psi}{ds}$  et  $\frac{dl}{ds}$  existent par hypothèse; on a donc

$$| \Psi[l(s)] - \Psi[l(s')] | \leq \text{const.} \cdot | l(s) - l(s') | \leq \text{const.} \cdot \left| \frac{dl(s)}{ds} \right| | s - s' |.$$

Or, l'équation (1.31) de M. Villat montre que  $\frac{dl}{ds}$  et  $\frac{df}{ds}$  s'annulent simultanément, alors que, d'après (1.10),  $\frac{df}{ds}$  possède un zéro d'ordre 1 pour  $s = 0$ . Il s'ensuit que la quantité

$$\{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(0)] \} p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right)$$

est finie pour  $s = 0$ , bien que  $p \frac{\omega_1}{\pi} s$  y présente un pôle de second ordre; cela justifie notre assertion.

Pour la suite, il est essentiel de noter que le résultat précédent subsiste sous la seule hypothèse que  $l[t(s)]$  appartienne à l'espace  $H_\nu(t)$

$$|l(t) - l(t')| \leq \text{const.} (t - t')^\nu \quad \left(\nu > \frac{1}{2}\right),$$

alors que  $\frac{d\Psi}{ds}$  est supposée existante; on a vu (*cf.* la remarque finale du paragraphe 12) combien la considération de ce cas était naturelle. On a maintenant

$$|\Psi[l(t)] - \Psi[l(0)]| \leq \text{const.} |l(t) - l(-1)| \leq \text{const.} (t+1)^\nu \leq \text{const.} |s|^{2\nu}.$$

la dernière inégalité étant obtenue en tenant compte de (1.10'); il s'ensuit

$$|\Psi[l(s)] - \Psi[l(0)]| p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right) \leq \text{const.} |s|^{2\nu-2},$$

inégalité qui assure un sens à l'intégrale de (A) toutes les fois que  $2\nu - 2 > -1$ .

Notons enfin qu'avec les notations de M. Villat on peut écrire

$$(B) \quad \Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi [\Phi(0) - \Phi(s)] p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s\right) ds + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(0)$$

et

$$(B') \quad \Omega'(-1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi [\Phi(s) - \Phi(\pi)] p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_1\right) ds - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} \Phi(\pi),$$

comme on s'en assure après un calcul facile. En suivant M. Leray, on peut, grâce à ces relations, préciser quelques cas où la nature du détachement est évidente *a priori* :

1° Si

$$\Psi[l(0)] \leq \Psi[l(s)],$$

on a (<sup>42</sup>), d'après les résultats du paragraphe 12,

$$\Phi(0) \leq \Phi(s), \quad \text{avec } \Phi(0) < 0.$$

(<sup>42</sup>) Tel sera, par exemple, le cas de l'obstacle concave vers le courant.

Cela montre que les deux termes du second membre de (B) sont négatifs dans tous les cas où  $\eta_1$  est positif, car on a

$$p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right) > 0 \quad \text{pour } 0 < s \leq \pi;$$

cela entraîne

$$\Omega'(1) < 0.$$

2° Pareillement, on vérifie que si  $\eta_1$  est positif <sup>(43)</sup>, on a

$$\Omega'(-1) < 0,$$

moyennant l'inégalité

$$\Psi[l(\pi)] \geq \Psi[l(s)],$$

ce qui entraîne la suivante

$$\Phi(\pi) > \Phi(s),$$

avec

$$\Phi(\pi) > 0.$$

3° Si, enfin, la quantité  $\Psi[l(0)]$  est nulle, on a

$$\Phi(0) = 0.$$

En tenant compte de (1.16), la formule (B) s'écrit alors

$$\Omega'(1) = \frac{2\omega_1^2}{\pi^3} \int_0^\pi \Phi(s) \left[ p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right) \right] ds.$$

L'élément différentiel de l'intégrale est positif ou nul pour  $0 \leq s \leq \pi$ , puisque ses deux facteurs changent de signe pour  $s = s_0$  seulement.

<sup>(43)</sup> D'après la formule (X<sub>4</sub>) du *Traité des fonctions elliptiques* de Tannery et Molk, on a

$$\eta_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[ \frac{1}{6} - 4 \sum_1^\infty \frac{1}{(q^n - q^{-n})^2} \right],$$

le paramètre  $q$  étant relié aux paramètres  $a$  et  $b$  par les formules (1.6) et (1.8).

Une discussion élémentaire montre alors que :  $\eta_1 > 0$  pourvu que :  $q < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

A la faveur d'un énoncé inexact qui s'était glissé dans le *Traité de Tannery et de Molk* — qui sera désormais désigné par l'abréviation T. et M. — j'ai cru d'abord que  $\eta_1$  était toujours positif — (cf. T. et M., tome I, page 201). Cette erreur a été rectifiée à la suite d'une obligeante communication de M. Oudart.



Nous avons donc, dans le cas actuel,

$$\Omega'(\pm 1) > 0.$$

Lorsque la fonction arbitraire  $\Psi(s)$  se réduit identiquement à zéro ou à  $\pi$ , l'obstacle correspondant devient une lame rectiligne parallèle aux parois; d'après (1.24) la constante  $s_0$  est alors égale à zéro ou à  $\pi$ . L'une des quantités  $p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)$  ou  $p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_1\right)$  devient dans ce cas infinie et les expressions de  $\Omega'(\pm 1)$  perdent toute signification. Au contraire, les quantités

$$\Omega'(+1) \sin \frac{s_0}{2} \quad \text{et} \quad \Omega'(-1) \cos \frac{s_0}{2},$$

qui ont même signe que  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  respectivement, conservent un sens lorsque

$$\Psi(s) \equiv 0 \quad \text{ou} \quad \Psi(s) \equiv \pi;$$

il y a donc avantage à les substituer aux fonctionnelles définies par les équations (A) et (A').

Observons encore, qu'en vertu des équations (1.24), (A) et (A'), les quantités  $\Omega'(1)$ ,  $\Omega'(-1)$  et  $s_0$  sont déterminées à partir des éléments  $\Psi(s)$ ,  $a$  et  $b$  ou encore, de  $\Psi(l)$ ,  $l(s)$ ,  $a$  et  $b$ ; elles ne dépendent pas des paramètres  $\psi_1$  et  $\psi_2$ ; nous poserons donc, en mettant en évidence les arguments des fonctionnelles du second membre,

$$(C) \quad P_1[l(s), \Psi(l), a, b] = \Omega'(-1) \cos \frac{s_0}{2},$$

$$(C') \quad P_2[l(s), \Psi(l), a, b] = \Omega'(1) \sin \frac{s_0}{2}.$$

Ces expressions nous seront très utiles aux paragraphes 23 et 28.

**14. CAS OÙ LES PARAMÈTRES  $a$  ET  $b$  AUGMENTENT INDÉFINIMENT.** — Nous nous proposons de montrer que les solutions indéterminées de M. Villat, relatives au cas d'un sillage en présence d'une seule paroi ou en fluide illimité, s'obtiennent en effectuant un passage à la limite sur les formules (1.4), (1.9), (1.14) et (1.15). La possibilité d'un tel passage à la limite est à peu près évidente *a priori*, mais il est utile de l'effectuer explicitement, pour bien préciser le comportement de chaque

paramètre. Nous nous bornerons d'ailleurs à de brèves indications : il serait fastidieux, en effet, de reproduire le détail de chaque calcul.

Regardons les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  <sup>(44)</sup> comme fonctions d'un paramètre arbitraire  $K$ , définies et continues pour  $0 \leq K \leq 1$ ; nous supposerons que lorsque  $K$  tend vers l'unité,  $\frac{1}{|a|}$  et  $\frac{1}{|\psi_2|}$  tendent uniformément vers zéro, de manière que le quotient  $\frac{\psi_2}{a}$  converge continûment vers une limite finie  $A\pi$  (négative), alors que  $b$ ,  $\psi_1$  et  $t_0$  convergent vers des limites finies que nous désignerons par les mêmes lettres et qui seront telles que

$$b > 1, \quad \psi_1 > 0, \quad -1 < t_0 < 1.$$

Notons, en passant, que ces hypothèses sont en accord avec les conclusions que nous avons tirées de (1.4''). De même, nous regarderons  $\Phi(s) = \Phi(s, K)$  comme dépendant continûment du paramètre  $K$ ; cela veut dire qu'étant donné un nombre positif  $\eta$  arbitrairement petit, on peut trouver (si  $s$  n'appartient pas au voisinage de  $s_0$ ) un nombre positif  $\eta_1(\eta)$  tel que

$$|\Phi(s, K) - \Phi(s, K_1)| < \eta,$$

pourvu que

$$|K - K_1| < \eta_1(\eta);$$

cela quel que soit  $K$ ,  $0 \leq K \leq 1$ ; pour toute valeur  $K$  de cet intervalle,  $\Phi(s, K)$  vérifie les conditions de régularité que nous lui avons imposées au paragraphe 10.

Ceci posé, cherchons ce que deviennent, pour la valeur  $K = 1$  du paramètre indépendant, les domaines  $\mathcal{A}$  et  $F$  soumis à cette transformation.

La portion de frontière  $\psi = -\psi_2$  de  $F$  s'éloigne à l'infini : il en est de même de son image  $\mu_2$  dans le plan  $z$ , puisque la distance  $d_2$  de l'obstacle à cette paroi est inférieure à  $\psi_2$ . Les deux domaines,

---

(44) Nous substituons donc le groupe  $\psi_1, \psi_2, a, b$  des paramètres au groupe équivalent  $\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ , que nous avons regardé jusqu'ici comme indépendant (cf. le paragraphe 9); on vérifiera aisément que moyennant les hypothèses faites au sujet du premier groupe les paramètres  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  convergeront continûment vers les limites finies  $\varphi'_1$  et  $\varphi'_2$  lorsque  $K$  tend vers 1.

limites de  $\mathcal{A}$  et  $F$  que nous désignerons respectivement par  $\mathcal{A}'$  et  $F'$  correspondent donc bien au cas du sillage provoqué par un obstacle en présence d'une seule paroi. Il reste à vérifier que les formules (1.4), (1.9) et (1.15) se réduisent pour  $K = 1$  à celles que M. Villat a construites pour de telles données.

La formule (1.4) peut s'écrire, compte tenu de la valeur de  $D$ ,

$$f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{a-t}{a-t_0} - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + i\psi_1 + \frac{\psi_1}{\pi} \log(b-t_0).$$

Pour toute valeur finie de  $t$  telle que  $|a| > t$ , on a

$$-\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{a-t}{a-t_0} = +\frac{\psi_2}{\pi} \frac{t-t_0}{a-t_0} \left[ 1 + \frac{t-t_0}{2(a-t_0)} + \dots \right],$$

la série entre crochets étant convergente dans les conditions énoncées. Si l'on fait tendre  $K$  vers 1, le second membre converge continûment pour toute valeur de  $t$  vers

$$A(t-t_0),$$

compte tenu de l'hypothèse sur le comportement de  $\frac{\psi_2}{a}$ . La formule (1.4) prend donc pour  $K = 1$  la forme

$$(1.43) \quad f = A(t-t_0) - \frac{\psi_1}{\pi} \log(t-b) + i\psi_1 + \frac{\psi_1}{\pi} \log(b-t_0),$$

qui permet, justement, de réaliser la représentation conforme du domaine  $F'$  sur le demi-plan supérieur  $\mathcal{E}'$ , obtenu en faisant tendre dans le domaine  $\mathcal{E}$ ,  $a$  vers  $-\infty$  (cf. le paragraphe 9) (45).

(45) Remarquons que, d'après l'expression (1.4') de  $t_0$  et les hypothèses faites au début du paragraphe concernant les paramètres  $\psi_1, \psi_2, a$  et  $b$ , on doit avoir

$$\lim_{K=1} t_0 = \frac{bA + \frac{\psi_1}{\pi}}{A}.$$

Il s'ensuit que les paramètres  $A, b$  et  $\Psi_1$  doivent être assujettis à vérifier la condition analogue à (1.4'')

$$-1 \leq \frac{bA + \frac{\psi_1}{\pi}}{A} \leq 1,$$

puisque, par hypothèse,  $\lim_{K=1} t_0$  la vérifie aussi.

Étudions le comportement de la correspondance entre les plans  $t$  et  $Z$ .

A cet effet, nous posons

$$(1.44) \left\{ \begin{array}{l} R'(t) = (t^2 - 1)(t - b) = (t_1 - e_1)(t_1 - e_2)(t_1 - e_3), \\ \text{avec} \\ e_1 = \frac{2b}{3}, \quad e_2 = 1 - \frac{b}{3}, \quad e_3 = -1 - \frac{b}{3}, \quad t_1 = t - \frac{b}{3}, \\ 2\omega'_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|} = \int_b^{\infty} \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|}, \\ \frac{2\omega'_3}{i} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|} = \int_1^b \frac{dt}{|\sqrt{R'(t)}|}. \end{array} \right.$$

La comparaison de ces expressions avec les formules (1.6) permet d'écrire les égalités

$$(1.45) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{|a|+1}} |2\omega'_1| \leq \omega_1 \leq \frac{1}{\sqrt{|a|-1}} |2\omega'_1|, \\ \frac{1}{\sqrt{|a|+b}} |2\omega'_3| \leq \omega_3 \leq \frac{1}{\sqrt{|a|+1}} |2\omega'_3|, \end{array} \right.$$

qui entraînent les conséquences suivantes :

1° Lorsque  $K$  tend vers 1, on a

$$(1.45') \left\{ \begin{array}{l} \lim_{K \rightarrow 1} \sqrt{|a|} \omega_1 = 2\omega'_1, \\ \lim_{K \rightarrow 1} \sqrt{|a|} \omega_3 = 2\omega'_3. \end{array} \right.$$

2° La quantité  $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$  (et, par suite,  $q = e^{\pi i \tau}$ ) est une fonction de  $K$  régulière pour  $K = 1$ . La demi-couronne  $d$ , image du domaine  $\mathcal{A}$ , tend donc uniformément vers la demi-couronne supérieure  $d'$  non dégénérée.

Ainsi, les fonctions  $pu$ ,  $\zeta u$  et  $\sigma u$  dégénèrent pour  $K = 1$ , puisque les périodes  $2\omega_1$  et  $2\omega_3$ , à partir desquelles elles sont construites, dégénèrent. Au contraire, la fonction  $\theta(v, q)$  de Jacobi se comporte régulièrement pour cette valeur du paramètre : il y a donc intérêt à exprimer les formules de transformation (1.9) à l'aide de  $\theta(v, q)$ .

On trouve ainsi

$$(1.46) \quad t = \left[ \frac{a+b}{4} - \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\nu_1)}{\theta(\nu_1)} \right] + \frac{1}{2\omega_1} \left[ \frac{\theta'(\nu + \nu_1)}{\theta(\nu + \nu_1)} - \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)} \right],$$

en utilisant les relations classiques

$$\frac{1}{2} \frac{p'u - p'\gamma}{pu - p\gamma} = \zeta(u + \gamma) - \zeta u - \zeta\gamma$$

et

$$\zeta u = \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)},$$

et en prenant

$$\nu = \frac{u}{2\omega_1} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{2\omega_1} - \frac{1}{2i\pi} \log Z, \quad \nu_1 = \frac{\gamma}{2\omega_1}.$$

Précisons d'abord le comportement du paramètre  $\nu_1$ . Étudions pour cela la quantité  $2\omega_1 - \gamma$ ; d'après (1.6) et (1.6') on a, en appelant  $\alpha$  la valeur absolue de  $a$ ,

$$2\omega_1 - \gamma = 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(t-b)(t^2-1)}}.$$

On en tire le développement limité suivant

$$\begin{aligned} 2\omega_1 - \gamma &= 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t(t-\alpha)} \sqrt{\left(1-\frac{b}{t}\right) \left(1-\frac{1}{t^2}\right)}} \\ &= 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t(t-\alpha)}} - b \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{t^2 \sqrt{t(t-\alpha)}} + \dots, \end{aligned}$$

où le signe ... désigne une quantité qui tend vers zéro comme  $\frac{1}{\alpha^2}$ .

Après avoir effectué les quadratures qui figurent au second membre, on trouve finalement

$$(1.47) \quad \begin{aligned} 2\omega_1 - \gamma &= \frac{4}{\alpha} - \frac{4}{3} \frac{b}{\alpha^2} + \dots \\ &= -\frac{4}{a} - \frac{4}{3} \frac{b}{a^2} + \dots \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en tenant compte de (1.45'),

$$\lim_{R=1} \nu_1 = 1,$$

et par conséquent

$$\lim_{\kappa=1} \nu = \nu',$$

en posant

$$\nu' = \frac{\tau'}{2} - \frac{1}{2i\pi} \log Z$$

et

$$\tau' = \frac{\omega'_3}{\omega'_1};$$

pour simplifier les écritures, posons encore

$$(1.48) \quad \begin{aligned} \varepsilon &= \nu_1 - 1 \\ &= \frac{\gamma - 2\omega_1}{2\omega_1}. \end{aligned}$$

La relation (1.47) nous fournit le développement limité

$$(1.49) \quad 2\omega_1 \varepsilon = \frac{4}{a} \left( 1 + \frac{b}{3a} \right) + \dots,$$

dont on tire, en tenant compte de (1.45'),

$$(1.49') \quad \lim_{\kappa=1} \frac{\varepsilon}{2\omega_1} = -\frac{1}{4\omega_1^2} \quad (46).$$

Ceci posé, nous allons chercher les limites de chaque crochet qui figure au second membre de la formule (1.46). D'après (1.48) le premier crochet peut s'écrire

$$\frac{a+b}{4} - \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)},$$

si l'on observe que

$$\theta(\nu+1) = -\theta(\nu).$$

(46) Notons que d'après les résultats du paragraphe 9 on a

$$s_1 = \pi \varepsilon,$$

$s_1$  tend donc vers zéro comme  $\frac{1}{|a|}$ .

La fonction  $\theta(\nu)$  étant impaire, l'expression  $\varepsilon \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)}$ , régulière pour  $\varepsilon = 0$ , peut se développer, en effectuant le quotient, en série de puissances de  $\varepsilon$  de la forme

$$\varepsilon \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)} = \frac{\theta'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \theta''(0) + \dots}{\theta'(0) + \frac{\varepsilon^2}{3!} \theta'''(0) + \dots} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{3} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} + \dots$$

On peut donc, en tenant compte des formules (1.49) et (1.49'), écrire

$$\frac{a+b}{4} - \frac{1}{2\omega_1} \frac{\theta'(\varepsilon)}{\theta(\varepsilon)} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} - \frac{1}{2\omega_1 \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\omega_1} \frac{1}{3} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} + \dots$$

Il s'ensuit que le premier crochet de (1.46) converge uniformément vers

$$\frac{b}{3} + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} \right].$$

Occupons-nous maintenant du second crochet; celui-ci s'écrit, en utilisant l'équation  $\theta(\nu+1) = -\theta(\nu)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa=1} \frac{1}{2\omega_1} \left[ \frac{\theta'(\nu+\nu_1)}{\theta(\nu+\nu_1)} - \frac{\theta'(\nu)}{\theta(\nu)} \right] &= \frac{\theta(\nu') \theta''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')} \lim_{\kappa=1} \frac{\varepsilon}{2\omega_1} + \dots \\ &= - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta(\nu') \theta''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')}. \end{aligned}$$

Il en résulte que,  $\kappa$  tendant vers 1, la correspondance (1.46) converge uniformément vers la limite

$$f = \frac{b}{3} + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} \right] - \frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta(\nu') \theta''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')}.$$

Cette formule est équivalente à la relation de M. Villat

$$(1.50) \quad t = \frac{b}{3} + p \left[ \frac{\omega_4'}{i\pi} \log Z - \omega_3' | \omega_1', \omega_3' \right],$$

qui réalise la correspondance entre les domaines  $\mathfrak{C}'$  et  $d'$ . En effet, nous pouvons exprimer la fonction  $\theta(\nu', q')$  et ses dérivées au moyen de la fonction  $p(u' | \omega'_1, \omega'_3)$ , puisque, rappelons-le,  $\lim_{\kappa=1} \tau = \tau'$ ; on a posé

$$u' = 2\omega'_1 \nu' = -\frac{\omega'_1}{i\pi} \log Z + \omega'_3.$$

Dès lors, pour justifier (1.50), il suffit de remarquer que

$$p[u' | \omega'_1, \omega'_3] = -\frac{\eta'_1}{\omega'_1} - \frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta(\nu') \theta''(\nu') - \theta'^2(\nu')}{\theta^2(\nu')},$$

et s'appuyer sur la relation

$$\frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} = -3 \frac{\eta'_1}{\omega'_1},$$

qu'on établit comme suit : on tire de l'expression de  $pu'$  qui précède,

$$\frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)} = [\zeta^2 u - pu] - \frac{2\eta_1}{\omega_1} u \zeta u + \frac{\eta_1^2}{\omega_1^2} u^2 - \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

en y remplaçant  $\frac{1}{4\omega_1'^2} \frac{\theta''(\nu)}{\theta(\nu)}$  par sa valeur  $\zeta u - \frac{\eta_1}{\omega_1} u$ , et en supprimant les accents, désormais inutiles. Si l'on fait tendre  $\nu$  vers zéro, le premier membre de l'égalité précédente tend vers  $\frac{1}{4\omega_1^2} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}$ ; par suite

$$\frac{1}{4\omega_1^2} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} = -3 \frac{\eta_1}{\omega_1},$$

puisque  $\lim_{u=0} (\zeta^2 u - pu) = 0$  et  $\lim_{u=0} u \zeta u = 1$ .

*Remarque.* — D'après (1.44) et (1.50),  $Z$  s'exprime en fonction de  $t$  au moyen de la relation différentielle

$$(1.50') \quad \frac{\omega_1}{i\pi} = \frac{dZ}{Z} \frac{dt}{\sqrt{4(1-t^2)(b-t)}},$$





qu'on peut mettre sous la forme finie

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = \int_{-1}^t \frac{dt}{\sqrt{4(1-t^2)(b-t)}},$$

en écrivant que les points  $Z$  et  $t$  d'une part,  $Z=1$  et  $t=-1$ , d'autre part, sont images l'un de l'autre et en convenant de choisir pour le radical sa détermination arithmétique lorsque  $t$  est réel et compris entre  $-1$  et  $+1$ .

Ainsi la formule (1.50) peut se déduire de (1.9) au moyen d'un passage à la limite uniformément continu. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier en détail que les formules (1.15), (1.19), (A), (A'), (B) et (B') du paragraphe 13 convergent uniformément vers les limites qui s'obtiennent simplement en remplaçant les éléments construits à partir des périodes  $2\omega_1$  et  $2\omega_3$  qui y figurent par ceux qui leur correspondent dans le système  $2\omega'_1$ ,  $2\omega'_3$ . Il suffira de passer par l'intermédiaire des fonctions  $\theta$  et de tenir compte des conditions (1.16) et (1.24).

On trouve ainsi que la fonction  $\Omega(Z)$  définie par (1.15) ou (1.23) s'écrit, en substituant aux fonctions  $\sigma u$  et  $\rho u$  la fonction  $\theta(v, q)$  et en tenant compte de (1, 16) [cf. XXIII<sub>3</sub>, T. M.]<sup>(47)</sup>

$$\begin{aligned} (1.51) \quad \Omega(Z) &= \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)} + \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)} \right] \Phi(s) ds \\ &= \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi}, q \right)} + \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi}, q \right)} \right] \Psi(s) ds \\ &\quad - i \log \frac{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s_0}{2\pi}, q \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi}, q \right)}. \end{aligned}$$

Pareillement, les fonctionnelles  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$ , définies par les

---

<sup>(47)</sup> Pour la signification de cette notation, d'un usage constant dans la suite, on se reportera au renvoi <sup>(45)</sup>.

équations (A) et (A') du paragraphe 13 se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}
 (1.51') \quad \Omega'(+1) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \frac{\theta'^2\left(\frac{s}{2\pi}, q\right) - \theta\left(\frac{s}{2\pi}, q\right)\theta''\left(\frac{s}{2\pi}, q\right)}{\theta^2\left(\frac{s}{2\pi}, q\right)} \\
 &\quad \times [\Psi(0) - \Psi(s)] ds - \frac{1}{\pi} \frac{\theta'\left(\frac{s_0}{2\pi}, q\right)}{\theta\left(\frac{s_0}{2\pi}, q\right)}; \\
 (1.51'') \quad \Omega'(-1) &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \frac{\theta'^2\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right) - \theta\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)\theta''\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)}{\theta^2\left(\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)} \\
 &\quad \times [\Psi(s) - \Psi(\pi)] ds + \frac{1}{\pi} \frac{\theta'\left(\frac{s_0}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)}{\theta\left(\frac{s_0}{2\pi} + \frac{1}{2}, q\right)},
 \end{aligned}$$

$\theta(v, q)$  étant une fonction analytique de  $q$  pour  $0 \leq q < 1$ , il est clair que les expressions précédentes de  $\Omega(Z)$ ,  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  convergeront continûment vers leurs limites respectives lorsque  $K$  tendra vers 1.

Dans ces conditions, toutes les fonctions qui interviennent dans la formule (1.14) convergent uniformément vers leurs limites respectives lorsque  $K \rightarrow 1$ ; à la limite on obtient la correspondance entre les domaines  $\mathcal{A}'$  et  $d'$ . Cela achève de justifier notre assertion.

Il reste à faire voir que le problème du sillage en fluide indéfini peut être envisagé comme cas limite du même problème posé pour un courant en présence d'une seule paroi plane. Les éléments arbitraires de M. Villat qui caractérisent ce dernier régime sont ici  $A$ ,  $b$ ,  $\psi_1$  et  $\Phi(s)$ .

Envisageons encore ces éléments comme fonctions d'un paramètre auxiliaire  $K$ , définies et continues pour  $0 \leq K \leq 1$ ; supposons de plus que lorsque  $K$  tend vers 1, les nombres  $b$  et  $\psi_1$  augmentent indéfiniment de manière que les quotients  $\frac{\psi_1}{b^2}$  et  $\frac{A}{b}$  tendent continûment vers des limites finies; au contraire, le paramètre  $t_0$  devra avoir une limite comprise entre  $-1$  et  $+1$ . Dans ces conditions on voit comme

ci-dessus que la paroi  $\mu_1$  du plan  $z$  et son image  $\psi = \psi_1$  dans le plan  $f$  s'éloignent indéfiniment. Le domaine  $F'$  que nous avons obtenu tout à l'heure se réduit donc au plan  $f$  tout entier, fendu le long du demi-axe réel positif, alors que son image  $\mathcal{A}'$  du plan  $z$  comprend, à la limite, tout le domaine extérieur au sillage. Nous appellerons respectivement  $\mathcal{A}''$  et  $F''$  les domaines limites de  $\mathcal{A}'$  et  $F'$  pour  $K = 1$ .

Le demi-plan supérieur  $\mathcal{E}'$  se réduit au demi-plan  $\mathcal{E}''$  sur lequel l'image de la paroi  $\mu_1$  serait réduite au point à l'infini. Vérifions que pour  $K = 1$  la correspondance (1.43) entre les domaines  $F'$  et  $\mathcal{E}'$  se réduit précisément à la correspondance entre  $\mathcal{E}''$  et  $F''$ . On peut écrire (1.43) <sup>(48)</sup>

$$f = \frac{A}{b} \left[ b(t - t_0) + b(b - t_0) \log \frac{b - t}{b - t_0} \right].$$

Or, pour toute valeur de  $t$  inférieur à  $b$  en module, on a le développement

$$\log \frac{b - t}{b - t_0} = \frac{t_0 - t}{b} + \frac{t_0^2 - t^2}{2b^2} + \dots,$$

qui est convergent, puisque  $\left| \frac{t}{b} \right|$  et  $\left| \frac{t_0}{b} \right|$  sont inférieurs à 1. Il vient donc, après quelques simplifications,

$$f = -\frac{|A|}{b} \left[ t_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(t_0^2 - t^2) - \frac{t_0}{2b}(t_0^2 - t^2) + \dots \right].$$

Le second membre tend visiblement vers  $A_1(t - t_0)^2$  ou  $A_1$  désigne la limite de  $\frac{|A|}{2b}$ ; on obtient donc à la limite la correspondance entre  $F''$  et  $\mathcal{E}''$ .

C. Q. F. D.

Les fonctions elliptiques à l'aide desquelles on réalise l'application conforme du domaine  $\mathcal{E}'$  sur  $d'$  dégénèrent pour  $K = 1$ . En effet, les paramètres de ces fonctions dépendent de  $K$  par l'intermédiaire de  $b$  seul [cf. par exemple, les formules (1.44)]; formons le paramètre  $\chi$

$$\chi = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

---

<sup>(48)</sup> On aura soin de remplacer, dans (1.43), le paramètre  $\psi_1$  par sa valeur tirée de l'expression de  $t_0$  [cf. le renvoi <sup>(45)</sup>].

On trouve [cf. les formules (1.44)]

$$\chi = \frac{2}{b+1},$$

en tenant compte des relations

$$e_1 = \frac{2b}{3}, \quad e_2 = 1 - \frac{b}{3}, \quad e_3 = -1 - \frac{b}{3}.$$

Ainsi,  $b$  augmentant infiniment lorsque  $K$  tend vers 1,  $\chi$  tend vers zéro comme  $\frac{2}{b}$ ; dans ces conditions les formules (XXII. T. M.) s'appliquent<sup>(49)</sup>.

Il vient d'abord, en désignant par ... des quantités de l'ordre de  $\frac{1}{b}$  au moins,

$$(1.52) \quad \omega'_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{b+1}} + \dots; \quad \omega'_3 \sqrt{b+1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{2(b+1)} \right] \log 8(b+1) + \dots$$

Ceci montre que le paramètre  $q'$  défini par (1.8) tend vers zéro, si  $K$  tend vers 1; la demi-circonférence  $d'$  se réduit donc, à la limite, au demi-cercle unitaire supérieur  $d''$ .

D'autre part, la correspondance (1.50) entre  $t$  et  $Z$  peut s'écrire, en utilisant la formule d'addition de la fonction  $p\mu$ ,

$$t = \frac{b}{3} + e_3 + \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - e_3} = -1 + 2 \frac{b+1}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) + \frac{b}{3} + 1}.$$

Or, d'après les formules de dégénérescence classique (XXII. T. M.), il vient

$$p\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) = -\frac{b+1}{3} \left[ 1 - \frac{1}{b} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{3}{\sin^2 \frac{\log Z}{2i}} + \dots \right].$$

On en tire, en divisant par  $b$  le numérateur et le dénominateur de la

<sup>(49)</sup> On aurait d'ailleurs pu se passer de la plupart d'entre elles et obtenir directement les développements limités dont il sera fait usage.

fraction qui figure au second membre de l'expression de  $t$ ,

$$t = -1 + \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{3}{\sin^2 \frac{\log Z}{2i}} \right] + \dots},$$

d'où, en passant à la limite et en remarquant que

$$\sin \frac{\log Z}{2i} = \frac{\sqrt{Z} - \frac{1}{\sqrt{Z}}}{2i},$$

la relation finale

$$t = -\frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{Z} \right),$$

qui permet précisément de réaliser l'application conforme du domaine  $\mathcal{G}''$  sur  $d''$ .

Il reste à étudier le comportement de la fonction  $\Omega(Z)$  au cours de cette transformation. Pour simplifier, nous ferons cette étude sur l'expression (1.51), équivalente à (1.15) de  $\Omega(Z)$ ; les conclusions ne seront donc valables que pour  $q' \leq Z < 1$ . Mais il est possible d'effectuer le passage à la limite ci-dessous sur la formule (1.19) et justifier ainsi nos résultats même pour  $|Z| = 1$ .

La fonction  $\Phi(s, K)$  étant assujettie à vérifier l'ensemble des conditions (V) pour  $0 \leq K \leq 1$ , on a, d'après (CXXII<sub>10</sub>, T. M.), et en négligeant les infiniment petits du premier ordre,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)} + \frac{1}{2} \frac{\theta' \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left( \frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)} &= \frac{\pi}{2} \left[ \cot \left( \frac{\log Z}{2i} + \frac{s}{2} \right) + \cot \left( \frac{\log Z}{2i} - \frac{s}{2} \right) \right] + \dots \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\sin \frac{\log Z}{i}}{\sin^2 \frac{\log Z}{2i} \cos^2 \frac{s}{2} - \cos^2 \frac{\log Z}{2i} \sin^2 \frac{s}{2}} + \dots \\ &= \frac{\pi}{i} \frac{1 - Z^2}{1 - 2Z \cos s + Z^2} + \dots \end{aligned}$$

de sorte que, à la limite, la fonction  $\Omega(Z)$  se réduit à

$$(1.52) \quad \Omega(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(s) \frac{1 - Z^2}{1 - 2Z \cos s + Z^2} ds,$$

forme sous laquelle on reconnaît sans peine l'expression bien connue que M. Villat a donnée de  $\Omega(Z)$  dans le cas du fluide indéfini.

Le lecteur vérifiera d'une manière toute semblable (en utilisant la formule précédente et la formule XXXII, T. M.) que les expressions (1.51') et (1.52'') de  $\Omega'(1)$  et  $\Omega'(-1)$  se réduisent continûment, pour  $K = 1$ , aux formes suivantes :

$$(1.52') \quad \Omega'(1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ \Psi[l(0)] - \Psi[l(s)] \} \frac{ds}{\sin^2 \frac{s}{2}} - \cot \frac{s_0}{2},$$

$$(1.52'') \quad \Omega'(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s)] - \Psi[l(\pi)] \} \frac{ds}{\cos^2 \frac{s}{2}} - \tan \frac{s_0}{2},$$

obtenues directement par M. Leray.

En définitive, la continuité des passages à la limite qu'on vient d'effectuer a été vérifiée pour toute valeur finie des variables  $t$  et  $f$ . Notons aussi qu'on aurait pu faire tendre  $|a|$  et  $b$  vers l'infini simultanément; on aurait alors pu déduire directement les formules intéressant le sillage en fluide indéfini de celles que nous avons données pour le cas du canal.

Dans le cours du chapitre III, nous ferons connaître les réciproques des théorèmes que nous avons énoncés dans le présent paragraphe; après avoir établi l'existence des éléments caractéristiques de M. Villat :  $\psi_1, \psi_2, a, b$  et  $\Phi(s)$  correspondant à une configuration donnée à priori dans le plan du mouvement, nous montrerons, par exemple, que le quotient  $\frac{\psi_2}{|a|}$  reste effectivement fini et non nul lorsque la paroi  $\mu_2$  s'éloigne indéfiniment.

Remarquons enfin que nous avons laissé de côté le cas où  $b$  (pour fixer les idées) tend vers 1. L'étude approfondie de ce cas est réservée pour le chapitre III; mais d'ores et déjà, nous pouvons remarquer que les formules de M. Villat deviennent alors illusoires puisque,  $\omega$ , devenant ici infini, les fonctions elliptiques dégénèrent, alors que leur argument devient infini.

**14<sup>bis</sup>**. Il est intéressant de montrer comment on peut retrouver certains résultats du paragraphe 14 en utilisant l'expression de la

fonction  $\Omega(t)$  dans le plan de la variable complexe  $t = t_1 + it_2$  [cf. fig. 3].

Cherchons, en effet, la fonction analytique

$$\Omega(t) = \Theta(t_1, t_2) + iT(t_1, t_2),$$

régulière dans le domaine  $\mathfrak{C}$  (y compris le point à l'infini) et définie dans son domaine d'existence par les conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta(t_1, 0) &= 0, & \text{pour } \begin{cases} -\infty \leq t_1 \leq a, \\ b \leq t_1 \leq \infty, \end{cases} \\ \Theta(t_1, 0) &= \Phi(t_1), & \text{pour } -1 \leq t_1 \leq 1, \\ T(t_1, 0) &= 0, & \text{pour } \begin{cases} a \leq t_1 \leq 1, \\ 1 \leq t_1 \leq b, \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\Phi(t_1)$  désigne la fonction arbitraire de M. Villat. Pour résoudre le problème de Dirichlet mixte correspondant aux données précédentes, nous envisagerons, avec MM. Volterra <sup>(50)</sup>, Signorini <sup>(51)</sup> et Demtchenko <sup>(52)</sup>, la fonction auxiliaire

$$\omega(t) = \theta(t_1, t_2) + i\tau(t_1, t_2),$$

définie dans le demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}$  par la formule

$$\omega(t) = - \frac{\Omega(t)}{\sqrt{(t^2 - 1)(t - a)(t - b)}},$$

où le radical est pris avec sa détermination arithmétique pour  $t$  réel et très grand; on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} \theta(t_1, 0) &= 0, & \text{pour } \begin{cases} -\infty \leq t_1 \leq 1, \\ 1 \leq t_1 \leq \infty; \end{cases} \\ \theta(t_1, 0) &= \frac{\Phi(t_1)}{\sqrt{(t_1^2 - 1)(t_1 - a)(t_1 - b)}}, & \text{pour } -1 \leq t_1 \leq 1. \end{aligned}$$

Cela montre que  $\theta(t_1, t_2)$  est connue le long de l'axe réel  $t_1$ ; d'après

<sup>(50)</sup> *Sopra alcune condizioni caratteristiche per le funzioni di variabile complessa (Annali di Matematica, 2<sup>e</sup> série, t. 11, p. 1-55).*

<sup>(51)</sup> *Sopra un problema al contorno nella teoria della funzioni di variabili complessa (Annali di Matematica, 3<sup>e</sup> série, t. 25, p. 253-273).*

<sup>(52)</sup> *Loc. cit. (7).*

un résultat absolument classique il en résulte

$$\omega(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(t_1, 0) dt_1}{t - t_1},$$

l'intégrale étant prise le long de l'axe réel d'où, en remontant à  $\Omega(t)$ ,

$$(1.53) \quad \Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{(t-t') \sqrt{(t'^2-1)(t'-a)(t'-b)}},$$

la constante imaginaire pure, additive de la formule se réduisant à zéro, puisque

$$T(t_1, 0) = 0, \quad \text{pour } a \leq t_1 \leq -1.$$

Nous renvoyons aux raisonnements exposés dans des mémoires originaux pour légitimer en toute rigueur la formule qui précède, et notamment pour montrer qu'elle garde un sens pour de très grandes valeurs de  $|t|$ , lorsque la fonction  $\Phi(t)$  vérifie les conditions analogues aux conditions (V). Mais il est essentiel de préciser que la fonction  $\Phi(t)$  sera assujettie à vérifier la condition

$$(1.54) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)(t-a)}} = 0,$$

que l'on déduira de (1.16) en y remplaçant la différentielle  $ds$  par sa valeur définie par la relation (1.10').

Ceci posé, les résultats du paragraphe 14, relatifs à la dégénérescence de la fonction  $\Omega(Z)$ , se lisent sans difficulté sur la formule (1.53). En conservant les notations et les hypothèses du début du paragraphe en cause, on voit d'abord que la fonction  $\Omega(t, K)$ , envisagée comme fonction de  $K$ , est continue par rapport à son argument dans le voisinage de  $K = 1$ ; lorsque  $K$  tend vers 1 (c'est-à-dire lorsque  $\frac{1}{a}$  tend vers zéro), on a donc

$$(1.55) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(t-b)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{(t'^2-1)(t'-b)(t-t')}}.$$

Or, le second membre de (1.55) représente précisément la fonction  $\Omega(t)$  relative au cas d'une configuration caractérisée par les élé-



ments  $A$ ,  $b$ ,  $\Phi(t)$  [*cf.* le précédent paragraphe], c'est-à-dire d'un courant fluide limité par une seule paroi plane et heurtant un obstacle.

La fonction  $\Phi(s)$ , relative au cas du courant limité par une seule paroi plane, est toujours assujettie à vérifier la condition (1.16). Cela s'écrit, en remplaçant  $s$  et  $ds$  par leurs valeurs tirées de (1.50),

$$(1.56) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = 0.$$

Si maintenant on fait croître indéfiniment  $b$  (les hypothèses énoncées au précédent paragraphe étant toujours remplies), on trouve, à la limite, la formule

$$\Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{t^2-1} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{(t-t')\sqrt{(t'^2-1)}},$$

qui fournit la fonction  $\Omega(t)$  relative au cas du fluide indéfini et que, d'ailleurs, la transformation

$$t = -\frac{1}{2} \left( Z + \frac{1}{Z} \right)$$

permettrait de réduire à la forme classique (1.52) : on notera que la transformation précédente est précisément celle qui fait correspondre au demi-plan supérieur  $\mathfrak{C}''$ , relatif au cas du fluide indéfini (*cf.* le précédent paragraphe), l'intérieur du demi-cercle supérieur auxiliaire du plan  $Z$ .

L'expression de la fonction  $\Omega(t)$  construite ci-dessus peut servir de point de départ à toutes les théories exposées dans ce travail ; elle est d'une obtention plus simple, puisque sa démonstration ne fait pas appel au plan auxiliaire  $Z$  et, d'autre part, elle permet d'éliminer l'emploi des fonctions elliptiques qui rendent difficile toute étude des solutions indéterminées, considérées comme fonctionnelles des paramètres  $a$  et  $b$ .

M. A. Oudart s'est du reste attaché à présenter la théorie des sillages, même dans des cas plus compliqués que ceux traités ici, en se plaçant systématiquement au point de vue que nous avons adopté au cours de ce paragraphe ; son travail, encore inédit, étend les résultats de notre mémoire au cas du canal à parois curvilignes.

(*A suivre.*)