JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL SEGOND

Sur l'intervalle de convergence dans la méthode de Cauchy-Lipschitz

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 20 (1941), p. 339-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20__339_0>

Sur l'intervalle de convergence dans la méthode de Cauchy-Lipschitz;

PAR MARCEL SEGOND.

1. On sait que la méthode la plus naturelle et la plus puissante pour l'intégration des équations différentielles dans le domaine réel est celle consistant à les assimiler approximativement à des équations aux différences; cette méthode (dont le principe avait déjà été aperçu par Euler) a été enseignée par Cauchy, exposée en détail par ses élèves, et rendue plus tard un peu plus compréhensive par Lipschitz; aussi l'appelle-t-on généralement méthode de Cauchy-Lipschitz.

Peano a montré ensuite que les conditions de Cauchy (ou de Lipschitz) n'étaient pas nécessaires à l'existence des intégrales et n'intervenaient que pour assurer (sous des conditions initiales déterminées) leur unicité. Ainsi l'équation $y' = f(x, y)$, où le second membre est continu en x et y, admet toujours une solution répondant aux conditions initiales (x_0, y_0), existant pour x suffisamment voisin de x_0 (elle en admet même en général une infinité). Dans ce qui suit nous nous placerons généralement à ce dernier point de vue.

2. THÉORÈME I. — *Soit l'équation $y' = f(x, y)$, où le second membre est continu pour $x_0 \leqq x \leqq x_0 + a$; $y_0 - b \leqq y \leqq y_0 + c$. Il existe une intégrale $y = g(x)$ vérifiant $y_0 = g(x_0)$ et définie pour $x_0 \leqq x \leqq x_1$, ce dernier nombre satisfaisant à l'une ou l'autre des trois conditions*

$$1^\circ \quad g(x_1) = x_0 + a;$$
$$2^\circ \quad g(x_1) = y_0 - b;$$
$$3^\circ \quad g(x_1) = y_0 + c.$$

Autrement dit, il existe une courbe intégrale aboutissant au périmètre du rectangle où $f(x, y)$ est définie et continue; ce qui est évidemment ce qu'on pouvait espérer de mieux. Bien entendu, dans l'énoncé précédent, $g(x)$ n'est supposée admettre de dérivée qu'à droite pour x_0, qu'à gauche pour x_1.

Pour l'établir, soit $y = g(x)$ une intégrale (existant d'après Peano) vérifiant $y_0 = g(x_0)$, prolongeable aussi près de x_1 que l'on veut, mais non au delà; nous allons montrer qu'elle satisfait aux conditions prescrites.

Soient x' et x'' compris entre x_0 et x_1; on a, par la formule des accroissements finis,

$$g(x') - g(x'') = (x' - x'')g'(\overline{x}) = (x' - x'')f(\overline{x}, \overline{y}),$$

ce qui tend vers zéro lorsque x' et x'' tendent vers x_1, car $f(x, y)$ étant continue est bornée. Alors un théorème fondamental de Cauchy nous dit que lorsque x tend vers x_1, $g(x)$ tend vers une valeur parfaitement déterminée $g(x_1) = y_1$.

Appliquant encore la formule des accroissements finis (qui ne suppose pas l'existence de la dérivée aux bornes), nous avons

$$g(x) - g(x_1) = (x - x_1)g'(\dot{x}),$$

avec $x < \dot{x} < x_1$; donc

$$\frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} = f(\dot{x}, \dot{y}).$$

Quand x tend vers x_1, il en est de même de $\dot{x}$; $\dot{y} = g(\dot{x})$ tend alors vers $g(x_1) = y_1$; $f(\dot{x}, \dot{y})$ tend donc vers $f(x_1, y_1)$; $g(x)$ admet donc pour $x = x_1$ une dérivée à gauche $f(x_1, y_1)$.

Alors, si le point (x_1, y_1) était intérieur au rectangle au sens strict, on pourrait, d'après Peano, trouver une intégrale s'étendant dans un certain intervalle à partir de x_1, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La même démonstration prouve évidemment qu'*une intégrale quelconque de conditions initiales* (x_0, y_0), *peut toujours être prolongée de manière à atteindre le périmètre du rectangle*, et aussi que *toute intégrale qui n'est pas arrêtée artificiellement l'atteint nécessairement.* Ceci entraîne une conséquence pour le cas où $f(x, y)$ est définie dans tout un demi-plan :

Corollaire. — *Soit $f(x, y)$ définie et continue sous la seule condition $x \geqq x_0$; alors si une intégrale existe jusqu'en* X, *mais n'est pas prolongeable au delà, elle prend au voisinage de* X *des valeurs aussi grandes qu'on veut en valeur absolue.*

En effet, si le côté latéral droit du rectangle n'est pas atteint, il faut que l'un des côtés supérieur et inférieur le soit, si éloignés qu'ils puissent être.

On peut modifier la démonstration du théorème ci-dessus de manière à n'avoir pas à appliquer une seconde fois la formule des accroissements finis; il suffit évidemment d'établir le lemme suivant :

Lemme I. — *Soit $g(x)$ une fonction telle que lorsque x' et x'' ($x' \neq x''$) tendent en croissant vers x_1, $\frac{g(x') - g(x'')}{x' - x''}$ tende vers* A : *alors $g(x)$ est continue à gauche pour $x = x_1$, et y a une dérivée à gauche égale à* A.

$g(x)$ est continue, avons-nous dit, d'après Cauchy, pour $x = x_1$. Si petit que soit ε, on peut trouver η tel que pour $x' < x'' < x_1$ et $x'' - x' < \eta$ on ait

$$\left| \frac{g(x') - g(x'')}{x' - x''} - \mathrm{A} \right| \leqq \varepsilon.$$

Mais si nous supposons x' fixe, le premier membre est continu par rapport à x'' pour $x'' = x_1$; par conséquent pour $x_1 - x' < \eta$ on a

$$\left| \frac{g(x') - g(x_1)}{x' - x_1} - \mathrm{A} \right| \leqq \varepsilon,$$

ce qui signifie que $g'(x_1)$ existe et est égale à A.

3. Au risque de nous répéter un peu, nous allons établir directement, en ne supposant connu que le théorème de Peano, la proposition suivante, qui précise le corollaire ci-dessus.

Théorème I *bis*. — *Soit $f(x, y)$ définie et continue sous la seule condition $x \geqq x_0$; alors si une intégrale de l'équation $y' = f(x, y)$ existe de x_0 à* X, *mais n'est pas prolongeable au delà, elle devient infiniment grande (et conserve par suite un signe déterminé) lorsque x tend vers* X.

Soit, en effet, $y = \varphi(x)$ cette intégrale; envisageons son domaine d'indétermination lorsque x tend vers X; il est évidemment d'un seul tenant, et peut se réduire à une seule valeur finie déterminée, à $-\infty$, à $+\infty$ ou, au contraire, comprendre un ensemble de valeurs, s'étendant ou non à l'infini.

Dans le premier cas, la fonction demeure continue à gauche pour $x = X$ et y acquiert la valeur en question $\varphi(X) = Y$. La formule des accroissements finis donne

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(X)}{x - X} = \varphi'(\dot{x}) = f(\dot{x}, \dot{y}),$$

avec $x < \dot{x} < X$; la fonction $\varphi(x)$ a donc pour $x = X$ une dérivée égale à $\varphi(X, Y)$; alors, d'après le théorème de Peano, on peut prolonger l'intégrale à droite de X, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Dans le dernier cas, soient α et β deux nombres distincts, intérieurs au sens strict au domaine d'indétermination, avec $\alpha < \beta$; $\varphi(x)$ devient, lorsque x tend vers X, une infinité de fois égale à α et à β; soient $u_0, u_1, u_2 \ldots$ les valeurs de x la rendant égale à α; $v_0, v_1, v_2 \ldots$ celles la rendant égale à β (chacun des u et des v étant éventuellement indéterminé dans un intervalle); en classant par ordre de grandeur l'ensemble des u et des v, on voit que l'on a une infinité de systèmes de nombres (u_i, v_j) tendant vers X avec $u_i < v_j$, $\varphi(u_i) = \alpha$, $\varphi(v_j) = \beta$ et la fonction redevenant dans l'intervalle (u_i, v_j) égale ni à α ni à β; alors dans cet intervalle, elle ne prend que des valeurs comprises entre α et β; la formule des accroissements finis donne alors

$$\frac{\varphi(u_i) - \varphi(v_j)}{u_i - v_j} = \varphi'(\hat{x}) = f(\hat{x}, \hat{y}),$$

avec $u_i < \hat{x} < v_j$, $\alpha < \hat{y} < \beta$, ou

$$f(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\alpha - \beta}{u_i - v_j},$$

ce qui devient infini, contrairement à la continuité de $f(x, y)$ à distance finie.

Restent donc seuls possibles les cas intermédiaires : lorsque x tend vers X, $\varphi(x)$ tend vers $-\infty$, ou bien vers $+\infty$.

4. Les résultats précédents ont été établis au point de vue de Peano, c'est-à-dire sans supposer autre chose que la continuité de $f(x, y)$. Les démonstrations subsistent évidemment — et même les énoncés sont un peu plus simples — au point de vue de Cauchy et Lipschitz, c'est-à-dire lorsqu'on introduit une condition assurant l'unicité de l'intégrale dont le point de départ est donné. On sait alors que, dans les conditions du théorème I, l'application de la méthode sera possible, en une seule suite d'opérations, de x_0 jusqu'à x_1, et permettra d'obtenir ainsi la totalité de l'intégrale à l'intérieur du rectangle; ceci serait d'ailleurs aisé à compléter par la détermination effective par approximations du point (x_1, y_1).

Nous avons obtenu des énoncés dans le demi-plan $x > x_0$; on pourrait en obtenir dans le plan entier. On pourrait également élargir la définition de la continuité du second membre $f(x, y)$ en n'excluant pas la valeur infinie; introduire aussi les points à l'infini du plan (x, y); si bien qu'on se placerait en définitive au point de vue projectif adopté par Poincaré dans sa théorie classique des cycles limites.

Tout ce qui précède s'applique manifestement, sous une forme convenable (le théorème I *bis* excepté), aux systèmes d'équations différentielles du premier ordre; il en est de même pour ce qui va suivre; nous allons nous placer, pour fixer les idées, dans le cas d'un système de deux équations à deux fonctions inconnues.

5. Notre objet est d'établir un théorème que l'on peut appeler *théorème de Lindelöf-Peano;* il réalise en effet l'extension dans l'ordre d'idées de Peano, d'un théorème de E. Lindelöf. Il résultera, moyennant les résultats ci-dessus, d'une proposition accessoire.

Lemme 2. — *Soient y et z deux fonctions continues et dérivables lorsque x varie dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$ (sans atteindre cette dernière valeur); elles prennent pour $x = x_0$ des valeurs y_0 et z_0; de plus, elles satisfont dans l'intervalle ci-dessus à l'inéquation*

$$|y'| + |z'| \leqq |y| + |z| + 1.$$

Alors elles sont bornées en valeur absolue dans cet intervalle par un nombre ne dépendant que de h, y_0, z_0.

Voici deux démonstrations différentes :

1° Soit la fonction $\log(|y|+|z|+1)$; elle admet pour toute valeur x de l'intervalle une dérivée à droite et une dérivée à gauche; dans tous les cas ces dérivées sont égales à $\frac{\pm y' \pm z'}{|y|+|z|+1}$. Elles sont donc au plus égales à 1 en valeur absolue; on a, par suite, entre deux valeurs x_1 et x_2,

$$\left|\log(|y_1|+|z_1|+1)-\log(|y_2|+|z_2|+1)\right| \leqq |x_1-x_2|.$$

Donc

$$|y|+|z| \leqq (|y_0|+|z_0|+1)e^h.$$

2° Pour éviter l'emploi du théorème sur les dérivées unilatérales, écrivons

$$|yy'+zz'| \leqq (|y|+|z|)(|y'|+|z'|) \leqq (|y|+|z|)(|y|+|z|+1) \leqq 3(y^2+z^2)+2.$$

La fonction $\log[3(y^2+z^2)+2]$ a donc une dérivée au plus égale à 6; alors

$$y^2+z^2 \leqq (y_0^2+z_0^2+1)\,e^{6h}.$$

De là résulte immédiatement le

Théorème II (de Lindelöf-Peano). — *Soit le système différentiel*

$$y'=f(x, y, z); \qquad z'=g(x, y, z),$$

où les seconds membres sont supposés continus pour $x \geqq x_0$, tout en satisfaisant aux inégalités

$$|f(x, y, z)| < a|y|+b|z|+c; \qquad |g(x, y, z)| < d|y|+e|z|+f,$$

dont les six coefficients sont des fonctions non négatives et continues de x.

Alors il existe un système d'intégrales prenant pour $x=x_0$ des valeurs arbitraires y_0 et z_0 et définies de x_0 à $+\infty$.

Nous savons, en effet, que s'il n'en était pas ainsi, il y aurait un système d'intégrales répondant à ces conditions initiales, et non prolongeable au delà d'une certaine valeur X, dans le voisinage de laquelle une au moins des deux fonctions ne serait pas bornée.

Soit alors M un nombre supérieur à la valeur absolue des six coefficients des inégalités dans l'intervalle (x_0, X); posons $2Mx=\xi$; on aurait, ξ variant de $2Mx_0$ à $2MX$,

$$\left|\frac{dy}{d\xi}\right| + \left|\frac{dz}{d\xi}\right| < |y| + |z| + 1.$$

On serait donc dans les conditions du lemme 2 : y et z seraient bornées dans l'intervalle (x_0, X), ouvert en X, et l'on aurait une contradiction.

On voit, de plus, que *tout système d'intégrales peut être prolongé jusqu'à* $+\infty$.

6. Ce qui précède met en évidence que la méthode de Cauchy-Lipschitz comporte, outre le complément important qui résulte de la découverte de Peano, un accroissement de précision par une autre catégorie de propositions d'énoncé également assez simple. Resterait à savoir quel est le meilleur mode d'exposition de la méthode, et les efforts faits dans cette direction auront probablement dans l'avenir des conséquences importantes; c'est là toutefois un point que nous n'aborderons pas ici.

Il est d'ailleurs une question dont nous n'avons pas encore eu l'occasion de parler, c'est celle que pose l'introduction dans cette théorie de la fonction exponentielle en tant qu'auxiliaire. Nul doute que dans la démonstration (*ab ovo*) du théorème I, par exemple, celle-ci ne soit entièrement superflue (comme elle l'est dans celle du fait qu'une fonction entière dont la partie réelle demeure non négative est une constante). Mais même dans la démonstration du théorème II où elle est, cette fois, liée à la nature des choses, on peut, sans pour cela recourir à un cheminement de proche en proche, se passer de la fonction exponentielle; car on établit aisément sans son intervention le lemme 2 dans le cas où $h \leqq 1$; et cela suffit pour la démonstration du théorème II, à la condition d'appliquer ce lemme non dans l'intervalle (x_0, X), mais dans l'intervalle $(\overline{x}_0, X)$, où $\overline{x}_0$ est suffisamment voisin de X.

Remarquons que, d'une manière générale (ceci n'a que partiellement rapport avec le présent article), il n'est pas certain que le meilleur mode d'exposition d'une question, au point de vue théorique, soit aussi le meilleur au point de vue didactique : le raisonnement le plus parfaitement adéquat à la nature des choses peut être trop subtil ou trop encombrant pour être d'une lecture aisée, si bien que pour l'initiation à un ordre d'idées nouveau il peut être préférable de diviser la difficulté, même au prix de quelques redites, par l'emploi de moyens dépassant le but à atteindre, par une renonciation aux résultats les plus complets. Deux expositions d'une même théorie, unissant toutes deux la parfaite rigueur à la parfaite clarté, peuvent être fort différentes suivant l'ambiance adoptée et, si singulier que cela paraîsse *a priori*, il n'est pas toujours facile, du moins avec nos habitudes de pensée actuelles, de concilier les deux points de vue.

On sait que c'est principalement à Gauss, Cauchy et Abel que revient le mérite d'avoir restauré dans la Science la rigueur, en honneur dans les travaux des anciens, et que les nécessités de l'accroissement en volume de l'édifice mathématique avaient, d'accord avec le mot classique de d'Alembert, fait rejeter un certain temps au second plan. Le moment devait arriver ensuite où les géomètres, ayant à choisir entre plusieurs démonstrations également rigoureuses d'un même théorème, se préoccuperaient de trouver la meilleure, la plus logique, ou du moins celle répondant le mieux à un idéal déterminé; parmi les pionniers les plus résolus de cette entreprise de perfectionnement théorique, figurent en première ligne des mathématiciens célèbres : Weierstrass, Kronecker, Jordan. De nos jours, le constructeur le plus remarquable en matière de raisonnement mathématique fut sans contredit Landau; dans le domaine des démonstrations théoriquement définitives, qui doivent être considérées comme naturelles au sens absolu du mot, il peut être regardé comme un véritable créateur; souvent aussi il fut un vulgarisateur émérite; parfois, enfin, à l'avantage incontesté de l'esprit scientifique, il parvint à concilier les deux tendances; et à plus d'une reprise, par cet effort vers l'idéal logique, il découvrit des vérités insoupçonnées et de haute importance. L'influence de ce grand esprit sur toutes les branches de l'Analyse et de l'Arithmétique sera, sans doute possible, durable et féconde. Et plus que jamais, c'est en perfectionnant, au point de vue de la théorie pure tout ce qui a été acquis jusqu'à présent dans tous les domaines des Mathématiques, que l'on a le plus de chance d'ouvrir la voie à de nouveaux progrès.