

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULIEN KRAVTCHENKO

**Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz;
théorie des sillages et des proues; (suite)**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 20 (1941), p. 107-234.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1941_9_20__107_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz;
théorie des sillages et des proues;*

PAR JULIEN KRAVTCHENKO.

(Suite.)

CHAPITRE II.

Validité physique des solutions des problèmes du sillage
et de la proue.

15. OBJET DU CHAPITRE. LEMME PRÉLIMINAIRE. — Nous nous proposons d'examiner les solutions indéterminées de M. Villat du point de vue de deux conditions de validité physique de M. M. Brillouin. Nous ferons d'abord connaître des classes étendues de fonctions arbitraires $\Phi(s)$ de M. Villat, qui conduisent à des solutions entièrement acceptables du problème du sillage. Puis nous étendrons au fluide limité par deux parois planes les théorèmes de validité que M. Leray a obtenus pour le problème de la proue en fluide illimité.

Dans la suite nous utiliserons fréquemment le lemme suivant, déjà utilisé par M. Leray : « Considérons une fonction $\Phi(s)$ satisfaisant à l'ensemble des conditions (V) et une fonction réelle $R(s, s_1)$ des variables réelles s et s_1 , définie dans le domaine $\alpha \leq s \leq \beta$, $0 \leq s_1 \leq \pi$, où elle est continue; $R(s, s_1)$ est supposée décroissante par rapport à s_1 . Dans ces conditions, la quantité $I(s)$

$$I(s) = \int_0^\pi R(s, s_1) \Phi(s_1) ds_1$$

est négative ». On a, en effet,

$$I(s) = \int_0^\pi [R(s, s_1) - R(s, s_0)] \Phi(s_1) ds_1,$$

compte tenu de l'équation (1.16); or,

$$\left. \begin{array}{l} R(s, s_1) - R(s, s_0) \leq 0 \\ \Phi(s_1) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ pour } s \geq s_0,$$

la dernière inégalité résultant de (1.18). L'élément différentiel de l'intégrale $I(s)$ est donc négatif ou nul : comme il ne peut être constamment nul, en vertu des conditions (V) et des hypothèses faites sur $R(s, s_1)$, $I(s)$ est négative et non nulle. Bien entendu $I(s)$ serait positive si $R(s, s_1)$, envisagée comme fonction de s_1 , était croissante.

16. ALLURE DES LIGNES LIBRES. DEUXIÈME CONDITION DE VALIDITÉ DE M. BRILLOUIN. — Considérons un sillage caractérisé par les constantes a , b , ψ_1 , ψ_2 et la fonction $\Phi(s)$, assujettie à vérifier les conditions (V). On a le théorème suivant.

THÉORÈME I. — *L'ordonnée y de chaque ligne de jet varie toujours dans le même sens le long de chacune d'elles depuis le point de détachement jusqu'au point à l'infini; elle est non décroissante le long de λ_1 et non croissante le long de λ_2 .*

D'après (1.14) la dérivée $\frac{dy}{df}$ vaut $\sin \Theta(X, 0)$ ou $\sin \Omega(X, 0)$ le long des lignes libres; tout revient donc à établir que l'angle $\Theta(X, 0)$ n'est pas négatif sur λ_1 , et n'est pas positif sur λ_2 .

Or, l'équation (1.15) peut s'écrire

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \Omega(Z) &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s_1) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right) \right] ds_1 \\ &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s_1) \left[\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right) + \zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_1 \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\zeta \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right] ds_1 \\ &= \frac{i\omega_1}{\pi^2} p' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \int_0^\pi \Phi(s_1) \frac{ds_1}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1}, \end{aligned}$$

compte tenu de l'équation (1.16) et de la formule C III, T. M. Sur le segment $(q, 1)$ de l'axe réel, l'imaginaire pure $\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$ varie de ω_3 à zéro; il s'ensuit que $ip' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)$ est une quantité réelle positive.

La fraction réelle

$$\frac{1}{p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1},$$

envisagée comme fonction de s_1 , est décroissante dans l'intervalle $0, \pi$, puisque $p \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)$ est réel et compris entre e_3 et $-\infty$, alors que $p \frac{\omega_1}{\pi} s_1$ décroît de $+\infty$ à e_1 quand s_1 croît de 0 à π .

Dans ces conditions, le lemme du paragraphe 13 s'applique; la fonction $\Omega(Z)$ est réelle et non positive si Z est réel et positif. On établirait tout pareillement que sur le segment $(-1, -q)$, $\Omega(Z)$ n'est pas négative; enfin, la partie réelle de $\Omega(Z)$ ne peut prendre pour $q < |Z| < 1$ les valeurs $\pm \pi$, valeurs maxima et minima de cette fonction sur les frontières de C ; cela démontre notre théorème ⁽⁵³⁾.

⁽⁵³⁾ Voici comment on pourrait obtenir la démonstration de ce théorème en utilisant le domaine $\mathfrak{E}$ et les formules (1.53) et (1.54). En retranchant du second membre de (1.53) l'expression

$$-\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)}}{t-t_0} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)}},$$

nulle en vertu de (1.54) et dans laquelle t_0 désigne l'abscisse de l'image du point de bifurcation, nous avons, pour $1 < t < b$,

$$\Omega(t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(b-t)}}{(t-t_0)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(t'-t_0) dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)(t-t')}}.$$

L'élément différentiel de l'intégrale du second membre est positif, puisque le radical qui y figure est positif et que, d'autre part, le produit

$$\Phi(t')(t'-t_0)$$

n'est pas négatif pour $-1 \leq t' \leq 1$, puisque

$$\begin{aligned} \Phi(t') &\geq 0, & \text{pour } t' &\geq t_0, \\ \Phi(t') &\leq 0, & \text{pour } t' &\leq t_0. \end{aligned}$$

La démonstration du théorème s'achève dès lors comme dans le texte.

Ainsi, lorsque l'on place les points de détachement aux extrémités de l'obstacle (problème du sillage), l'obstacle et les lignes libres forment une courbe dont l'intersection, avec toute parallèle avec Ox , se réduit à un seul point. Les lignes λ_1 et λ_2 ne recoupent donc pas l'obstacle et ne se recoupent pas. Le domaine $\mathfrak{A}$ ne se recouvre donc jamais; sa frontière est dépourvue de points doubles. Par suite, la solution indéterminée du problème du sillage, déduite d'une fonction $\Phi(s)$ vérifiant les conditions (V), satisfait toujours à la deuxième condition de validité de M. Brillouin. Au contraire, la solution du problème de la proue, posé relativement à l'obstacle caractérisé par $\Phi(s)$, peut n'être pas satisfaisante, puisque les arcs tels que $\widehat{P_1C}$ (voir *fig. 1*) peuvent recouper les lignes libres; une discussion supplémentaire est alors nécessaire.

On a déjà fait observer (*cf.* § 7) que les lignes libres ont une forme particulièrement satisfaisante du point de vue physique lorsqu'elles sont convexes vers le courant; il en est ainsi moyennant les conditions

$$\frac{d\Omega}{dZ} < 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} -1 \leq Z \leq -q. \\ q \leq Z \leq 1. \end{cases}$$

La discussion que nous venons de rappeler prouve d'ailleurs que l'inégalité (1.2) de M. Brillouin n'est satisfaite que si la condition ci-dessus est remplie; celle-ci apparaît donc comme une condition nécessaire de validité. Nous allons préciser le signe de $\Omega'(Z)$ pour Z réel dans un certain nombre de cas particuliers; cette étude repose sur les lemmes suivants.

LEMME I. — *Quelle que soit la fonction $\Phi(s)$ vérifiant les conditions (V), $\Omega'(Z)$ est négative ⁽⁵⁴⁾ pour Z réel, dans le voisinage des points $Z = \pm q$.*

En chacun de ces points, en effet, $\Omega(Z)$ est analytique; la différentiation est donc toujours légitime et l'on trouve

$$\Omega'(-q) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q} \int_0^\pi \Phi(s) \left[p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_2 \right) + p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \omega_2 \right) - 2e_2 \right] ds,$$

* (54) Comme il était, du reste, à prévoir, compte tenu du résultat que l'on vient de démontrer.

relation qui s'écrit, en tenant compte de VII₉ T. M.,

$$\Omega'(-q) = -\frac{2\omega_1^2}{\pi^3 q} (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \int_0^\pi \frac{\Phi(s)}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2} ds.$$

Or, la fraction $\frac{1}{p \frac{\omega_1}{\pi} s - e_2}$ est réelle et croissante dans l'intervalle $0, \pi$;

d'après le lemme du paragraphe 15, l'intégrale du second membre est positive. Par suite $\Omega'(-q) < 0$.

LEMME II. — *Toute courbe d'équation $\Theta(X, Y) = \text{const.}$, intérieure au domaine d et issue d'un point du segment $(-1, -q)$, ne peut aboutir qu'à un point $Z = e^{is}$, $s_0 \leq s \leq \pi$.*

La fonction $\Theta(X, Y)$ étant analytique le long de l'axe réel et prolongeable par symétrie à travers cet axe, ne peut prendre sur OX des valeurs isolées; chaque point de l'axe réel est donc l'origine d'une courbe d'équation $\Theta(X, Y) = \text{const.}$ et issue de ce point.

Ensuite, cette ligne est analytique régulière à l'intérieur de d (et par suite de C); elle ne peut donc présenter de point d'arrêt dans d . Elle ne peut aboutir à un point du segment $(-1, -q)$; sinon, en prenant le symétrique de cette courbe par rapport à OX, on obtiendrait un domaine fermé, limité par une courbe simple le long de laquelle la fonction harmonique $\Theta(X, Y)$ serait constante, donc constante dans tout le domaine. La courbe $\Theta(X, Y) = \text{const.}$, issue d'un point du segment $(-1, -q)$, ne peut atteindre un point du segment $(q, 1)$, puisque $\Theta(X, Y)$ est positive sur l'un des segments et négative sur l'autre. Cette courbe ne peut enfin aboutir à un point de $|Z| = q$, puisque $\Theta(X, 0)$ n'est pas nul pour $-1 < X < -q$; donc elle doit nécessairement atteindre un point de l'arc $s_0 \leq s \leq \pi$ de $Z = e^{is}$ le long duquel $\Theta(\cos s, \sin s)$ n'est pas négative.

LEMME III. — *Deux courbes quelconques $\Theta(X, Y) = C_1$, et $\Theta(X, Y) = C_2$ issues de deux points distincts de $(-1, -q)$ ne peuvent avoir de points communs à l'intérieur de d .*

En effet, $\Omega(X, Y)$ étant uniforme et régulière dans d , cette éven-

tualité ne pourrait se présenter que si les constantes C_1 et C_2 étaient égales; or, les raisonnements précédents prouvent que cela est impossible.

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉOREME II. — *Si l'arc ϖ_1 de l'obstacle (ou ϖ_2) possède des points d'inflexion, la ligne libre λ_1 correspondante (ou λ_2) peut avoir $n + 1$ points d'inflexion au plus.*

Pour simplifier la démonstration, nous admettrons que $\frac{d\Phi(s)}{ds}$ existe et est continue pour $0 \leq s \leq \pi$ sauf pour $s = s_0$; par hypothèse, elle s'annule donc n fois dans l'intervalle $s_0 \leq s \leq \pi$. Ceci posé, soit $Z = X_1$, l'affixe d'un point de l'intervalle $-1 < X_1 < -q$ où $\Omega'(Z) = 0$; $\Omega(Z)$ étant analytique pour $q \leq |Z| < 1$, $\Theta(X, 0)$ n'est pas une valeur de $\Theta(X, Y)$ isolée dans le voisinage de $Z = X_1$. Il part donc de ce point au moins deux courbes d'équation $\Theta(X, Y) = \Theta(X_1, 0)$ qui aboutissent, d'après les lemmes II et III aux points $Z = e^{is_1}$ et $Z = e^{is'_1}$; $s_0 \leq s_1 < s'_1 \leq \pi$.

Si $s_0 \neq s_1$, la valeur de $\Theta(\cos s_1, \sin s_1)$ est bien définie; on a donc $\Phi(s_1) = \Phi(s'_1)$, ce qui ne peut avoir lieu que si $\Phi'(s)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle s_1, s'_1 . Il peut donc y avoir au plus n points d'affixes $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($-1 < X_n < \dots < X_1 < -q$) tels que : 1° $\Omega'(X_i, 0) = 0$; 2° les extrémités $Z = e^{is_i}, Z = e^{is'_i}$ des courbes $\Theta(X, Y) = \Theta(X_i, 0)$, issues des points $Z = X_i$, soient intérieures à l'arc $s_0 < s \leq \pi$.

Il reste à discuter le nombre de zéros de $\Omega'(X, 0)$ pour $X_1 < X < -q$ dans l'hypothèse $s_1 = s_0$. Dans ce cas, on ne peut avoir $s_1 = s'_1$; sinon $\Theta(X, Y)$ serait constant sur la frontière d'un domaine simple et, par suite, constant dans d . Avec nos conventions, on a donc $s'_1 > s_1 = s_0$. Or, d'après les lemmes I et II, toutes les courbes d'équation $\Theta(X, Y) = \Theta(X', 0)$ issues des points $Z = X, X_1 < X' < -q$ aboutissent nécessairement au point $Z = Z_0$ sans se recouper à l'intérieur de d . Il en résulte, d'après la formule (A) du paragraphe 10, qu'aux λ croissants et, par conséquent, aux X décroissants, ne peuvent correspondre que des valeurs croissantes de Θ , et, par suite, de $\Theta(X', 0)$. Il s'ensuit que la dérivée de $\Theta(X, 0) = \Omega(X, 0)$ ne change pas de

signe sur l'intervalle considéré ⁽⁵⁵⁾ $X_1 < X < -q$; cela établit notre théorème.

Ce théorème entraîne les conséquences suivantes :

COROLLAIRE I. — *Chacune des lignes libres λ_1 et λ_2 , correspondantes aux profils formés de deux arcs ϖ_1 et ϖ_2 convexes vers le courant, ne peut avoir plus d'un point d'inflexion.*

Cela résulte du fait que $\frac{d\Phi}{ds}(s)$ est, dans ce cas, négative dans chacun des intervalles $0 \leq s \leq s_0$, $s_0 \leq s \leq \pi$.

COROLLAIRE II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes libres λ_1 et λ_2 correspondant aux profils visés par le précédent corollaire, soient convexes vers le courant s'écrit*

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_{Z=\pm 1} \leq 0.$$

D'après (1.36), cette condition est manifestement nécessaire; il reste à faire voir qu'elle est suffisante. Le précédent corollaire montre que λ_1 et λ_2 possèdent un point d'inflexion au plus. Dès lors, pour que ces lignes en soient dépourvues, il suffit qu'elles soient convexes vers le courant aux points de détachement P_1 et P_2 ; en effet, elles le sont, d'après le lemme I, à l'infini.

Or, l'inégalité $[\Omega'(Z)]_{Z=\pm 1} \leq 0$ exprime justement le fait que les détachements de λ_1 et de λ_2 sont, soit en amont, soit en poue [cf. (1.36)]. Dans ces deux cas, λ_1 et λ_2 sont convexes en P_1 et P_2 , puisque l'obstacle y est convexe.

Remarques. — 1° Ce théorème constitue l'extension au cas dissymétrique d'un résultat dû à M. Villat.

2° Dans le cas où λ_1 , par exemple, présente un détachement en poue, les résultats ci-dessus ne suffisent pas à assurer le non-recouplement de λ_1 avec l'obstacle, supposé prolongé au delà de P_1 ; *a priori*, la condition de validité de M. Leray n'est pas satisfaite et une étude supplémentaire est nécessaire.

Dans certains cas, il est possible d'abaisser la borne supérieure que

(55) Ce fait est à rapprocher du lemme I du présent paragraphe.

le théorème précédent assigne au nombre des points d'inflexion d'une ligne libre; c'est notamment le cas de l'obstacle dont la fonction caractéristique $\Phi(s)$ vérifie, outre les conditions (V), les conditions suivantes : la dérivée $\Phi'(s)$ existe et est continue dans chacun des intervalles $0 \leq s \leq s_0$ et $s_0 \leq s \leq \pi$; δ_1 et δ_2 désignant deux nombres tels que $s_0 \leq \delta_1 \leq \pi$ et $0 \leq \delta_2 \leq s_0$, $\Phi'(s)$ est négative pour $0 \leq s \leq \delta_2$ et $\delta_1 \leq s \leq \pi$, positive pour $\delta_2 \leq s \leq s_0$ et $s_0 \leq s \leq \delta_1$. Autrement dit, l'obstacle correspondant sera formé de deux arcs concaves vers le courant, formant au point de bifurcation un angle rentrant ou saillant et dont chacun est prolongé d'un arc convexe; comme cas limite, chacun des quatre arcs ci-dessus pourra être supposé réduit à un point, en sorte que pour $\delta_1 = s_0 = \delta_2$ on obtient des obstacles convexes visés par le corollaire I. Ceci posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Lorsqu'une solution du problème du sillage est construite à partir d'une fonction $\Phi(s)$ vérifiant les conditions énumérées ci-dessus, chacune des lignes libres correspondantes ne peut avoir plus d'un point d'inflexion (alors que ce nombre maximum serait de deux d'après le précédent théorème).*

En effet, le nombre maxima de points d'inflexion éventuel de λ_1 serait de deux; soient X_1 et X_2 , ($-1 < X_2 < X_1 < -q$) leurs images sur d . D'après ce qu'on a vu, l'une des courbes $\Theta(X, Y) = \Theta(X_1, 0)$ aboutit nécessairement au point $Z = Z_0$; sinon, il ne pourrait y avoir qu'un point d'inflexion sur λ_1 .

La formule (A) du paragraphe 10 prouve que $\Theta(X_1, 0) \leq \Phi(s_0 + 0)$; il en résulte, d'après nos hypothèses, $\Theta(X_1, 0) < \Phi(\delta_1)$. Par suite, les autres courbes d'équation $\Theta(X_1, 0) = \Theta(X, Y)$, et l'on sait qu'il y en a au moins une, atteindront le cercle $|Z| = 1$ en un point $Z = e^{is_1}$ tel que $s_1 > \delta_1$. Or, cela empêchera deux courbes d'équation

$$\Theta(X, Y) = \Theta(X_2, 0)$$

d'atteindre l'arc $s_1 < s < \pi$ de $Z = e^{is}$ en deux points $Z = e^{is_1}$ et $Z = e^{is_2}$ tels que la dérivée $\Phi'(s)$ s'annule dans l'intervalle $s_2 \leq s \leq s_1$.

Cette remarque établit notre théorème.

COROLLAIRE I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes libres λ_1 et λ_2 , qui correspondent aux fonctions $\Phi(s)$ visées par*

l'énoncé du théorème III, soient convexes vers le courant, est que la condition de M. Villat,

$$\Omega'(\pm 1) \leq 0,$$

soit satisfaite.

La démonstration est identique à celle du corollaire II du théorème II.

COROLLAIRE II. — *Si la fonction caractéristique $\Phi(s)$ pourvue d'une dérivée continue dans chacun des intervalles $0 \leq s \leq s_0$, $s_0 \leq s \leq \pi$, conduit à un obstacle dont l'arc ϖ_1 (ou ϖ_2) est concave, la ligne libre λ_1 (ou λ_2) n'a pas de point d'inflexion.*

Cela résulte des raisonnements mêmes employés pour établir le théorème III.

Remarque. — Dans le cas que nous venons de considérer, la ligne λ_1 ne peut pas présenter en P_1 de détachement en proue. En effet, λ_1 serait osculatrice en P_1 à l'obstacle, donc concave vers le courant dans le voisinage de ce point, et convexe à l'infini, d'après le lemme I. Elle présenterait donc nécessairement un point d'inflexion, ce qui est impossible. On peut arriver à cette conclusion en discutant la nature du détachement à partir des formules (B) et (B') du paragraphe 13.

17. ÉTUDE DE LA FONCTION $T(X, Y)$. PREMIÈRE CONDITION DE M. BRILLOUIN. — Le sillage étant caractérisé, comme précédemment, par les éléments arbitraires de M. Villat, nous nous proposons de l'étudier du point de vue de la première condition de validité de M. Brillouin qui s'écrit, d'après (1.2) et (1.12),

$$(2.2) \quad T \leq 0.$$

Nous avons vu (cf. § 9) qu'il n'y a besoin de vérifier cette condition que le long des images de l'obstacle et des parois. Le théorème I ci-dessous affirme que les vitesses sont toujours acceptables le long de $Z = qe^{is}$, $0 \leq s \leq \pi$.

Tout revient alors à vérifier l'inégalité (2.2) le long du demi-cercle supérieur $Z = e^{is}$; le théorème III fait connaître une condition suffisante de validité.

THÉOREME I. — *La première condition de M. Brillouin est satisfaite le long des parois du canal.*

Faisons, en effet, $Z = qe^{is}$ dans la formule (2.1). La fonction $\Omega(qe^{is})$ se réduit à $iT(qe^{is})$; il vient, en effet,

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = \frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3,$$

d'où

$$T(qe^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) \int_0^\pi \Phi(s) \frac{ds_1}{p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1}.$$

La fonction

$$\frac{1}{p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} s_1}$$

est réelle puisque $p \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right)$ est réel dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$; envisagée comme fonction de s_1 , elle est une fonction régulière et décroissante de cette variable dans l'intervalle $0 \leq s_1 \leq \pi$. D'après le lemme du paragraphe 13, l'intégrale qui figure au second membre de l'expression de $T(qe^{is})$ est négative. Par ailleurs, la quantité $p' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \omega_3 \right)$ est positive pour $0 < s < \pi$, ce qui démontre notre théorème.

On peut préciser davantage, en étendant au cas dissymétrique l'énoncé suivant de M. Jacob.

THÉOREME II. — *La dérivée $\frac{dT}{ds}(qe^{is})$ ne s'annule qu'une fois dans l'intervalle $0 < s < \pi$.*

1° En effet, les fonctions harmoniques conjuguées $\Theta(X, Y)$ et $T(X, Y)$ sont analytiques pour $Z = qe^{is}$ (cf. 9); elles vérifient donc, le long de ce cercle, l'équation

$$(2.3) \quad \frac{d\Theta}{dn} = \frac{1}{q} \frac{dT(qe^{is})}{ds},$$

où n désigne la normale intérieure au domaine d . Jointe à la relation $\Theta(qe^{is}) = 0$, (2.3) montre que, dans le voisinage du point $Z = qe^{is}$, la fonction $\Theta(X, Y)$ est positive ou négative selon que $\frac{dT(qe^{is})}{ds}$ est

positive ou négative en ce point. D'après cela, si $\frac{dT(qe^{is})}{ds}$ s'annule pour $s = \varepsilon$ en passant du négatif au positif, par exemple, $\Theta(X, Y)$ sera positive dans le voisinage de l'arc $Z = qe^{is}$, $s > \varepsilon$ et négative dans celui de l'arc $Z = qe^{is}$, $s < \varepsilon$; ceci entraîne l'existence d'une ligne, au moins, d'équation $\Theta(X, Y) = 0$, issue de $Z = qe^{i\varepsilon}$, autre que $|Z| = 0$ et intérieure au domaine d . De plus, une de ces lignes (on pourrait, en précisant un peu le raisonnement, établir dès maintenant qu'elle est unique) est orthogonale à $|Z| = q$, puisque, d'après (2.3), il vient

$$\left(\frac{d\Theta}{dn}\right)_{Z=qe^{i\varepsilon}} = 0$$

et que, d'autre part, ce zéro du premier membre est nécessairement d'ordre 1.

2° Les lignes $\Theta(X, Y) = 0$, dont on vient d'établir l'existence, aboutissent nécessairement à un point $Z = e^{is}$.

En effet, aucune d'elles ne peut atteindre le cercle $|Z| = q$; sinon, la fonction harmonique $\Theta(X, Y)$, régulière à l'intérieur du domaine limité par cette ligne et $|Z| = q$ serait nulle sur ses frontières, donc nulle partout dans d . Le même raisonnement prouve que deux lignes en cause ne sauraient avoir de points communs dans d . Par ailleurs, on a vu que la ligne $\Theta(X, Y) = 0$ issue de $Z = qe^{i\varepsilon}$ ne peut atteindre un point de l'axe réel (cf. § 16, lemme II).

3° Ceci posé, on a, en tenant compte du lemme du paragraphe 16,

$$\Omega'(+q) = \left(\frac{d\Theta}{dn}\right)_{Z=q} < 0, \quad \Omega'(-q) = -\left(\frac{d\Theta}{dn}\right)_{Z=-q} < 0,$$

d'où, d'après (2.3),

$$\frac{dT(qe^{is})}{ds} \gtrless 0 \quad \text{pour } Z = \mp q.$$

Ainsi, la dérivée $\frac{dT(qe^{is})}{ds}$ change de signe dans l'intervalle $0 < s < \pi$, et cela un nombre impair de fois. Montrons qu'elle ne peut admettre qu'un seul zéro, par exemple qu'elle ne peut changer de signe pour $s = \varepsilon_1$, $s = \varepsilon_2$, $s = \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$.

En effet, dans ce cas, $\frac{dT(q^{is})}{ds}$ serait positive pour $\varepsilon_1 < s < \varepsilon_2$ et négative pour $\varepsilon_2 < s < \varepsilon_3$.

Considérons alors le domaine b , limité par l'arc $Z = qe^{is} (\varepsilon_1 \leq s \leq \varepsilon_2)$ par les deux courbes d'équation $\Theta(X, Y) = 0$, issues respectivement de $Z = qe^{i\varepsilon_1}$ et $Z = qe^{i\varepsilon_2}$, contiguës à cet arc; enfin, l'arc de $Z = e^{is}$ aux extrémités duquel aboutissent les courbes $\Theta(X, Y) = 0$ précédentes — compte tenu de l'alinéa 2°.

D'après ce qui précède $\frac{d\Theta}{dn} > 0$ pour $Z = qe^{is}$, $\varepsilon_1 < s < \varepsilon_2$; $\Theta(X, Y)$ serait donc positive dans le voisinage de cet arc. Ceci exige que le domaine b atteigne l'arc de $Z = e^{is}$, $s > s_0$, où $\Theta(X, Y)$ prend des valeurs positives ou nulles $\Phi(s)$; sinon $\Theta(X, Y)$ serait nul ou éventuellement négatif sur les frontières de b et, par conséquent, nul ou, éventuellement, négatif dans b , ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Il suit de là que $\Theta(X, Y) \geq 0$ sur les frontières du domaine limité par $Z = qe^{is}$, $\varepsilon_2 < s < \varepsilon_3$, le segment $(-1, -q)$ de l'axe réel, l'arc $|Z| = 1$ et la ligne $\Theta(X, Y) = 0$ issue de $Z = qe^{i\varepsilon_2}$. Or, le raisonnement de l'alinéa 1° prouve que $\Theta(X, Y)$ est négative dans le voisinage de l'arc $Z = qe^{is}$, $\varepsilon_2 < s < \varepsilon_3$ appartenant à ce domaine. Cette contradiction établit le théorème que nous avons en vue.

Remarques. — Ainsi, la fonction $T = qe^{is}$ n'a qu'un seul minimum, $s = \varepsilon$, le long de $|Z| = q$, image des parois μ_1, μ_2 du canal; comme $T(q) = T(-q) = 0$, $T(qe^{is})$ est constamment négative. Il y a plus. La fonction $\Theta(X, Y)$ change de signe lorsque le point $Z = X + iY$ traverse une ligne d'équation $\Theta(X, Y) = 0$; les raisonnements ci-dessus prouvent que la ligne $\Theta(X, Y) = 0$, issue du point $Z = qe^{i\varepsilon}$, est unique et qu'elle aboutit nécessairement au point $Z = Z_0$. Cette courbe partage donc le domaine d en deux domaines partiels b_1 et b_2 ; $\Theta(X, Y) \geq 0$ dans b_1 appartenant à l'image de λ_1 ; $\Theta(X, Y) \leq 0$ dans l'autre.

Il reste à étudier et à discuter la condition (2.2) le long de l'image de l'obstacle; on a, d'après la formule (1.20) de M. Villat,

$$T(e^{is}) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi [\Phi(s_1) - \Phi(s)] \left\{ \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_1) \right] + \zeta \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_1) \right] \right\} ds_1 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2} s \Phi(s).$$

Transformons le second membre au moyen de la formule

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1} \cot \frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \sin \frac{r\pi u}{\omega_1}$$

(cf. T. M. CVI₂); nous poserons, pour simplifier,

$$u = \frac{\omega_1}{\pi} s, \quad u_1 = \frac{\omega_1}{\pi} s_1,$$

il vient

$$\begin{aligned} \omega_1 [\zeta(u + u_1) + \zeta(u - u_1)] &= \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi} s + \frac{\pi}{2} \left[\cot \frac{s + s_1}{2} + \cot \frac{s - s_1}{2} \right] \\ &\quad + 2\pi \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} [\sin r(s + s_1) + \sin r(s - s_1)], \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de l'équation (1.16) et après quelques calculs faciles,

$$\begin{aligned} (2.4) \quad T(e^{is}) &= \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(s_1) - \Phi(s)}{\cos s_1 - \cos s} ds_1 \\ &\quad + \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \sin rs \int_0^\pi \Phi(s_1) \cos rs_1 ds_1. \end{aligned}$$

Nous désignerons, suivant l'usage, par $\tau(s)$, la première intégrale du second membre. On sait que la fonction $\tau(s)$ est égale — d'après une formule bien connue de M. Villat⁽⁵⁶⁾ — au logarithme de la vitesse le long des obstacles, construits en fluide indéfini à partir de la même fonction arbitraire $\Phi(s)$. (Ces obstacles en fluide indéfini dépendent d'un seul paramètre.) Ceci posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME III. — La différence $T(e^{is}) - \tau(s)$ est sûrement négative lorsque le paramètre q ⁽⁵⁷⁾ est inférieur à 0,517.

Posons, en effet,

$$\varphi(s, s_1) = \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} \sin rs \cos rs_1.$$

⁽⁵⁶⁾ Cf. *loc. cit.*, Aperçus théoriques, page 9.

⁽⁵⁷⁾ Le paramètre q est relié aux éléments a, b de M. Villat par les formules (1.6) et (1.8).

On a, d'après (2.4),

$$T(e^{is}) = \tau(s) + \int_0^\pi \Phi(s_1) \varphi(s, s_1) ds_1.$$

Pour démontrer le théorème, il suffira d'établir, d'après le lemme du paragraphe 15, que $\varphi(s, s_1)$, envisagée comme fonction de s_1 , est décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$, quel que soit s , $0 \leq s \leq \pi$; cela équivaut à vérifier l'égalité

$$(2.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} < 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq \pi, \\ 0 \leq s_1 \leq \pi. \end{cases}$$

C'est à cette vérification qu'est consacrée la suite de la démonstration. Mettons $\varphi(s, s_1)$ sous la forme

$$\frac{\pi}{2} \varphi(s, s_1) = \sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin r(s + s_1) + \sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin r(s - s_1).$$

Nous transformerons le second membre à l'aide de l'identité élémentaire⁽⁵⁸⁾

$$(2.6) \quad \Lambda(u) = \sum_{r=1}^\infty \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin ru = \sum_{p=1}^\infty \frac{q^{2p} \sin u}{(1 - 2q^{2p} \cos u + q^{4p})} = \sum_1^\infty V_p(u)$$

(58) Pour démontrer cette formule on peut procéder comme il suit. On a

$$\frac{1}{1 - q^{2r}} = 1 + q^{2r} + \dots + q^{2pr} + \dots$$

On en déduit

$$\Lambda(u) = \sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \sin ru = \sum_{p=1}^\infty \sum_{r=1}^\infty q^{2pr} \sin ru.$$

Dans le second membre, remplaçons $\sin ru$ par sa valeur $\frac{1}{2i}(e^{iru} - e^{-iru})$. La fonction $\Lambda(u)$ s'écrit alors

$$\Lambda(u) = \frac{1}{2i} \sum_{p=1}^\infty \left(\sum_{r=1}^\infty q_{1p}^r - \sum_{r=1}^\infty q_{2p}^r \right),$$

où l'on a posé

$$q_{1p} = e^{2p\tau i \pi + iu} \quad \text{et} \quad q_{2p} = e^{2p\tau i \pi - iu}.$$

Les séries qui figurent entre les parenthèses du second membre sont des progressions géométriques convergentes; en effectuant les sommations par rapport à r , en réduisant et en remplaçant les exponentielles par q , $\sin u$ et $\cos u$, on trouve la formule du texte.

ou

$$(2.7) \quad V_p(u) = \frac{q^{2p} \sin u}{1 - 2q^{2p} \cos u + q^{4p}}.$$

Moyennant ces conventions, nous pourrions écrire

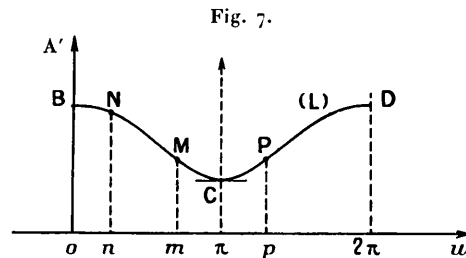
$$\frac{\pi}{2} \varphi(s, s_1) = [A(s + s_1) + A(s - s_1)],$$

en sorte que l'inégalité (2.5) est équivalente à la suivante :

$$A'(s - s_1) - A'(s + s_1) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq \pi, \\ 0 \leq s_1 \leq \pi. \end{cases}$$

Nous allons faire voir que l'inégalité (2.5) est sûrement vérifiée lorsque la fonction $A'(u)$ est décroissante dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$; il suffit, évidemment, de se limiter au cas où $s > s_1$, puisque les diverses expressions de la fonction $\frac{\partial \varphi(s, s_1)}{\partial s_1}$ sont symétriques par rapport à ses arguments.

Admettons, en effet, que $A'(u)$ décroisse dans l'intervalle $0 \leq u \leq \pi$, la courbe L, représentative des variations de $A'(u)$, est symétrique par rapport à la droite $u = \pi$ et affecte, dans l'intervalle $0, 2\pi$, la forme indiquée sur la figure 7. Nous appellerons M, N, P les points de L dont les abscisses sont respectivement égales à s , $s - s_1$ et $s + s_1$.



Or, d'une part, l'argument $(s - s_1)$ étant positif, car $s > s_1$, le point N est situé sur l'arc $\widehat{BM}$ de L. La différence $(2\pi - s - s_1)$ des abscisses des points D et P est, d'autre part, supérieure à $(s - s_1)$ puisque $s < \pi$. Les arcs $\widehat{BC}$ et $\widehat{CD}$ étant symétriques par rapport à $u = \pi$, il suit de là que l'ordonnée de N est supérieure à celle de P lorsque s croît de zéro à π .

C. Q. F. D.

Nous sommes ainsi ramenés à étudier les variations de $A'(u)$.

Or, il vient, d'après (2.6),

$$A''(u) = \sum_1^{\infty} V_p''(u),$$

avec, en vertu de (2.7),

$$V_p''(u) = -q^{2p} \sin u \frac{(1+q^{4p})^2 - 8q^{4p} + 2q^{2p}(1+q^{4p}) \cos u}{(1-2q^{2p} \cos u + q^{4p})^2}.$$

Nous poserons

$$h_p(u) = (1+q^{4p})^2 - 8q^{4p} + 2q^{2p}(1+q^{4p}) \cos u.$$

Il est clair que le terme de rang p du développement de $A''(u)$ est du signe de $-h_p(u)$ pourvu que $0 < u < \pi$; il suffit donc, pour que la dérivée $A''(u)$ soit négative dans l'intervalle considéré, que toutes les fonctions $h_p(u)$ [$p=1, 2, \dots, \infty$] soient positives.

Or, une discussion élémentaire montre que : 1° les $h_p(u)$ sont des fonctions décroissantes de $\cos u$; le minimum de chacune d'elles est atteint pour $u = \pi$; on a

$$h_p(\pi) = a_p^4 - 2a_p^3 - 6a_p^2 - 2a_p + 1,$$

formule où l'on a posé

$$a_p = q^{2p};$$

2° $h_p(\pi)$ se présentent sous forme de polynômes symétriques en a_p qui se réduisent à 1 pour $a_p = 0$ et dont la plus petite racine est égale à $2 - \sqrt{3}$.

Il suit de là que tous les $h_p(u)$ seront sûrement positifs, pourvu que

$$q \leq \sqrt{a_1} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \neq 0,517,$$

car a_p est une fonction décroissante de p . Ce résultat démontre notre théorème.

COROLLAIRE. — Une condition suffisante pour que l'inégalité (2.2) de M. Brillouin soit vérifiée peut s'écrire

$$(2.8) \quad \begin{cases} q < 0,517, \\ \tau(s) < 0. \end{cases}$$

$\tau(s)$ désignant la fonction de M. Villat définie par

$$(Cf. 2.4) \quad \tau(s) = \frac{\sin s}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(s_1) - \Phi(s)}{\cos s_1 - \cos s} ds_1.$$

Or, M. Villat a fait connaître de vastes classes de fonctions $\Phi(s)$

vérifiant la deuxième inégalité (2.8). Chacune de ces fonctions fournira donc en fluide limité par une ou deux parois planes des obstacles le long desquels les vitesses seront acceptables pourvu que le paramètre correspondant q ne dépasse pas 0,517; tel sera, notamment, le cas des fonctions $\Phi(s)$ croissantes pour $0 \leq s \leq \pi$ (caractérisant les profils concaves vers le courant); cet énoncé constitue l'extension au cas du canal (ou d'une seule paroi) d'un théorème de M. Boggio⁽⁵⁹⁾.

A de telles fonctions $\Phi(s)$ correspondent des lignes λ_1 et λ_2 convexes vers le courant (pourvu que q soit assez petit) (cf. § 7); ces lignes ne se recoupent pas (cf. § 16, théorème I). La solution du problème indéterminé est alors entièrement acceptable; les inégalités (2.8) constituent donc des conditions suffisantes de validité physique pour les solutions construites à partir des éléments a , b , ψ_1 et ψ_2 et des fonctions $\Phi(s)$ vérifiant l'ensemble des conditions (V).

Remarque. — Il est possible de préciser la signification géométrique de la première condition (2.8). Les résultats du troisième chapitre, en effet, permettent de relier q aux dimensions de l'obstacle d'une part, et aux distances d_1 , d_2 des points de détachement aux parois μ_1 , μ_2 du canal d'autre part; on montre ainsi que, qualitativement, la première inégalité (2.8) exprime que les parois du canal doivent être suffisamment éloignées de l'obstacle. Nous renvoyons pour les précisions quantitatives aux travaux de M. Oudart⁽⁶⁰⁾.

18. PROBLÈME DE LA PROUE. OBSTACLES EN ACCOLADES DE M. LERAY. — Nous allons maintenant étendre au cas du canal (et, par suite, au cas d'une seule paroi plane) un théorème de validité que M. Leray a fait connaître pour le cas du fluide illimité. Contrairement à ce qui avait lieu jusqu'ici, les catégories d'obstacles qu'intéresse l'énoncé en cause

(⁵⁹) Dans le paragraphe suivant nous établirons cette proposition indépendamment de toute limitation du paragraphe 7. On trouvera une autre démonstration, très simple, de cette propriété dans notre travail « Sur un théorème de validité dans la théorie des sillages » qui paraîtra dans les *Mémoires de l'Académie*, t. 63, 1940.

(⁶⁰) *C. R. Acad. Sc.* t. 208, 1939, p. 721.

Journ. de Math., tome XX. — Fasc. 2, 1941.

ne seront plus caractérisés par les éléments arbitraires de M. Villat, mais par des propriétés intrinsèques. On commence par postuler à priori l'existence d'une solution du problème de la proue correspondant à un obstacle de forme donnée et de position connue par rapport aux parois planes : on montre ensuite qu'une telle solution est nécessairement acceptable ⁽⁶¹⁾.

M. Leray appelle accolade tout obstacle vérifiant les conditions suivantes :

Son intersection avec une parallèle aux parois de l'obstacle se réduit à un point unique. La courbure $c(l)$ de l'obstacle, considérée comme une fonction de l'arc l de celui-ci (compté à partir du point d'ordonnée minimum B) possède, relativement à l une dérivée $c'(l)$ vérifiant une condition $\mathcal{L}_n(l)$ le long de chacun des arcs $\widehat{BO}$ et $\widehat{OC}$ — en lesquels un point O partage, éventuellement, le profil — extrémités comprises. Au point O le profil peut présenter, éventuellement, un point anguleux ou un point de rebroussement [cf. § 10 et l'équation (1.17)]; nous appellerons $2\pi\alpha$ l'angle que font en O les demi-tangentes aux arcs $\widehat{OC}$ et $\widehat{BO}$.

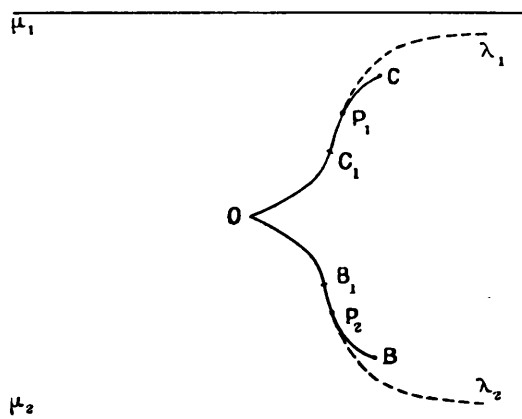
L'arc $\widehat{OC}$ de l'obstacle (c'est-à-dire l'arc situé tout entier dans la bande comprise entre μ_1 et l'horizontale de O; voir la figure 8) se compose d'un arc $\widehat{OC_1}$, non convexe vers le courant (c'est-à-dire d'un arc concave pouvant contenir, éventuellement, des portions rectilignes) et d'un arc $\widehat{C_1C}$ convexe vers le courant; la courbure de $\widehat{C_1C}$ ne décroît pas en valeur absolue quand on parcourt $\widehat{C_1C}$ de C_1 vers C.

Pareillement, l'arc $\widehat{OB}$ de l'obstacle se compose d'un arc $\widehat{OB_1}$, non convexe vers le courant, et d'un arc convexe $\widehat{B_1B}$; la courbure de $\widehat{B_1B}$ ne décroît pas en valeur absolue lorsqu'on décrit cet élément de profil

(61) Remarquons à ce sujet que le théorème II du paragraphe 16 peut s'énoncer comme suit : *supposons qu'il existe une solution du problème du sillage posé pour un obstacle convexe donné de forme et de position relativement aux parois d'un canal; alors, chacune des lignes libres λ_1 et λ_2 correspondantes ne peut avoir plus d'un seul point d'inflexion.*

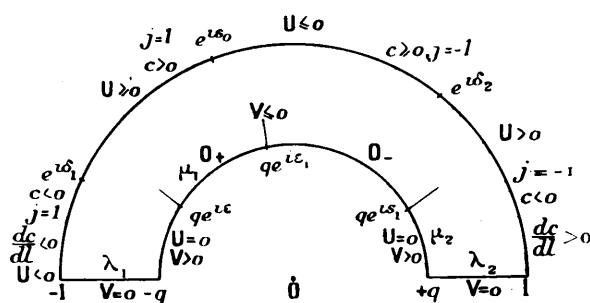
de B, vers B. A la limite, chacun des arcs $\widehat{B_1 B}$, $\widehat{B_1 O C_1}$, $\widehat{C_1 C}$ peut être supposé réduit à un point unique : ceci permet de considérer un arc

Fig. 8.



de cercle, un arc concave, un arc convexe, comme des cas particuliers de l'obstacle en accolade. Remarquons enfin qu'un tel obstacle rentre

Fig. 8 bis.



dans la catégorie générale des profils visés par l'énoncé du théorème II du paragraphe 16.

Cela étant, posons-nous, relativement à un tel obstacle, le problème de la proue (énoncé au § 7); supposons qu'on ait construit une solution de ce problème [c'est-à-dire qu'on ait déterminé les éléments ψ_1, ψ_2, a, b et $\Phi(s)$ associés à l'accolade] telle que les détachements soient

en proue ou vers l'aval⁽⁶²⁾ (ce dernier cas se présentant lorsque P_1 ou P_2 sont confondus avec C et B) et que le point de bifurcation soit placé au point anguleux O du profil⁽⁶³⁾ si celui-ci en possède un ou coïncide avec un point de l'arc B_1C_1 dans le cas contraire; nous construisons le domaine d qui correspond à ces éléments et nous allons montrer que toute solution de l'espèce considérée vérifie les deux conditions de validité de M. Brillouin.

Les points de détachement P_1 et P_2 sont à priori inconnus; mais nous allons montrer qu'ils sont nécessairement situés sur les arcs $\widehat{B_1B}$ et $\widehat{C_1C}$ respectivement lorsque ces arcs ne se réduisent pas à un point unique (par exemple, dans le cas de l'obstacle concave vers le courant). Dans ce cas les points C et C_1 sont confondus; d'après notre énoncé P_1 sera alors nécessairement confondu avec C . Sinon, en effet, l'un des arcs ϖ_1 et ϖ_2 serait réduit à un arc concave vers le courant, alors que le détachement correspondant serait nécessairement en proue (puisque P_1 et P_2 sont distincts de B et C). Or, ces deux faits sont incompatibles, d'après le corollaire II du théorème IV (cf. § 16) et la remarque additionnelle. Cela étant, nous appellerons $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$ les images respectives des points C_1 et B_1 dans le plan Z ; la fonction $\Phi(s)$ est par suite croissante dans les intervalles $\partial_2 \leq s \leq s_0$, $s_0 \leq s \leq \partial_1$ et décroissante pour $0 \leq s \leq \partial_2$, $\partial_1 \leq s \leq \pi$. D'après les résultats⁽⁶⁴⁾ du paragraphe 13, $\Phi'(s)$ et $\Phi''(s)$ existent (sauf pour $s = s_0$) puisque c et $\frac{dc}{dl}$ existent. Nous allons montrer que les lignes libres sont nécessairement convexes vers le courant.

En effet, si le point P_1 coïncide avec C , la quantité correspondante $\Omega'(-1)$ ne peut être positive, puisqu'en ce point la ligne λ_1 présente, par hypothèse, soit un détachement en aval, soit un détachement en proue; dans le premier cas λ_1 sera convexe dans le voisinage de C en vertu d'un résultat du paragraphe 13; il en sera de même dans le second cas puisque ϖ_1 est convexe en C ; en vertu du

(62) Nous montrerons que de telles solutions existent.

(63) Cette hypothèse est sûrement remplie dans le cas particulier de la configuration symétrique.

(64) Et leurs réciproques qui seront établis au cours du Chapitre III.

théorème III du paragraphe 16, λ_1 est toujours convexe. La conclusion subsiste si l'on suppose P_1 placé en un point quelconque de $\widehat{C_1 C}$.

Cela acquis, considérons les fonctions harmoniques conjuguées $U(X, Y)$ et $V(X, Y)$ définies par l'équation (1.35). Ces fonctions existent pour $|Z|=1$, puisque $\Phi'(s)$ existe (cf. § 13).

Nous appellerons O l'ensemble ouvert des points de d en lesquels V est négatif; l'ensemble ouvert des points de O en lesquels U est positif (ou négatif) sera désigné par O_+ (ou O_-). Les ensembles O , O_+ , O_- se décomposent respectivement en domaines D , D_+ et D_- d'un seul tenant; nous désignerons par D' , D'_+ et D'_- leurs frontières respectives, supposées orientées dans le sens des rotations positives.

1° Nous allons montrer tout d'abord que dans le voisinage de $|Z|=q$ il existe des points appartenant à chacun des ensembles O , O_+ et O_- . On remarquera que la démonstration s'applique à tout obstacle vérifiant les conditions (V).

En effet, d'après les équations de définition même, $U(qe^{is})=0$; d'autre part, le long de $Z=qe^{is}$, on a

$$V(qe^{is}) = \frac{dT}{df} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{df}.$$

Or, le théorème II du paragraphe 17 montre que $\frac{dT}{ds}$ change de signe une fois pour $s=\varepsilon_1$, alors que $\frac{ds}{df}$ change de signe une fois pour $s=s_1$ ($Z_1=qe^{is_1}$ étant l'image du point à l'infini, en amont, du domaine $\mathfrak{A}$); en définitive, le long de $|Z|=q$, V est positif pour $0 \leq s \leq s_1$ et $\varepsilon \leq s \leq \pi$; $V < 0$ pour $s_1 \leq s \leq \varepsilon$ ⁽⁶⁵⁾, donc dans le voisinage de l'arc correspondant de $|Z|=q$. Il s'ensuit que l'ensemble O n'est pas vide.

D'après ce qui précède, $V(qe^{is})$ possède au moins un minimum dans l'intervalle $s_1 \leq s \leq \varepsilon$; il existe donc un argument $s=\varepsilon_1$ où $\frac{dV(qe^{is})}{ds}$ s'annule en passant du négatif au positif. Comme $U(qe^{is})=0$, la

(65) Dans le cas symétrique $s_1=\varepsilon$; on adaptera aisément les raisonnements à cette hypothèse. Nous admettons, pour fixer les idées, que $\varepsilon > s_1$; cette hypothèse ne diminue en rien la généralité du raisonnement.

relation

$$\frac{dU}{dn} = \frac{1}{q} \frac{dV}{ds}(qe^{is})$$

montre alors que $U < 0$ dans le voisinage de $Z = qe^{is}$ pour $\varepsilon_1 - s > 0$ et suffisamment petit, et que $U > 0$ dans le voisinage de $Z = qe^{is}$ pour $s - \varepsilon_1 > 0$ et suffisamment petit; ces raisonnements établissent l'existence de chacun des ensembles O_+ et O_- , puisque $V < 0$ dans le voisinage de $q = e^{i\varepsilon_1}$ (⁶⁶).

2° Nous allons maintenant étudier les valeurs frontières de U et de V .

On vérifie aisément que le point $Z = q$ est un zéro double de la fonction $t(Z) - a$.

(⁶⁶) Lorsque l'une des parois, μ_2 pour fixer les idées, s'éloigne indéfiniment, les raisonnements doivent être retouchés comme suit. En admettant la réciproque du théorème du paragraphe 14, nous supposons que la condition $d_2 = \infty$ entraîne : $\lim |a| = \infty$; il vient alors, d'après ce qu'on a vu : $\lim s_1 = 0$; la fonction $V(qe^{is}) = \frac{d\Gamma}{df}(qe^{is})$ ne change de signe qu'une fois dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$.

Comme $V(q) = \left(\frac{d\Gamma}{ds}\right)_{s=0} \left(\frac{ds}{df}\right)_{s=0}$ est nul, $V(qe^{is})$ sera négatif dans le voisinage de $s = 0$; l'ensemble O existe encore dans le voisinage de $Z = q$. Les formules (1.43) et (1.50) montrent, en effet, que dans le voisinage de $Z = q$, on a

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{Z=q} = A, \quad t = -\frac{\pi^2 q^2}{\omega_1^2} \frac{1}{(Z-q)^2} + \dots$$

Cela montre que $\frac{d\Omega}{df}$ est holomorphe pour $Z = q$ et y possède un zéro d'ordre trois; on a

$$U + iV = \frac{\omega_1^2}{2\pi^2 q^2} \Omega'(q) \left(\frac{dt}{df}\right)_{Z=q} (Z-q)^3 + \dots$$

Il s'ensuit que $s = 0$ est un zéro de $\frac{dV(qe^{is})}{ds}$; $V(qe^{is})$ possède donc au moins un minimum dans l'intervalle $0 \leq s \leq \varepsilon$. Dès lors le raisonnement du texte suffit pour établir l'existence des points de O_+ et de O_- dans le voisinage de ce minimum $Z = qe^{i\varepsilon_1}$.

Si la paroi μ_1 s'éloigne indéfiniment, on retombe sur le cas du fluide indéfini traité par M. Leray.

D'après (1.10') : $\left[\frac{dt(Z)}{dZ} \right]_{z=q} = 0$ puisque $p'(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi i} \log Z)$ se réduit pour $Z = q$ à $p'(\omega_1) = 0$. On a donc

$$\lim_{z \rightarrow q} \frac{t-a}{(Z-q)^2} = -\frac{\omega_1^2}{2\pi^2 q^2} \frac{p' \frac{\gamma}{2} p'' \omega_1}{\left(e_1 - p \frac{\gamma}{2}\right)^2}.$$

Des conclusions analogues valent pour $Z = -q$; ce point est, en effet, un pôle d'ordre trois pour le numérateur du second membre de (1.10') et un pôle d'ordre quatre pour le dénominateur; donc

$$t-b = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 Z}{dt^2} \right)_{z=-q} (Z+q)^2 + \dots$$

D'après (1.4) on peut écrire dans le voisinage de $Z = q$

$$f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log(t-a) + \text{série entière en } (Z-q),$$

d'où l'on tire, en utilisant les développements précédents,

$$(2.9) \quad f = -\frac{2\psi_2}{\pi} \log(Z-q) + \text{série entière en } (Z-q).$$

Le comportement de f dans le voisinage de $Z = -q$ est absolument analogue.

[Notons en passant que cela montre que les points $Z = \pm q$ sont des zéros simples de $\frac{d\Omega}{df}$: U et V ne changent pas de signe dans les portions de voisinage (intérieurs à d) de ces points.]

Le long du segment $q \leq Z \leq 1$ (ou $-1 \leq Z \leq -q$), U est positif (ou négatif) puisque les lignes tournent leur convexité vers le courant. Il s'ensuit⁽⁶⁷⁾ qu'aucun domaine D n'atteint les points $Z = +1$ (ou -1) lorsque la quantité $\Omega'(+1)$ [ou $\Omega'(-1)$] diffère de zéro.

a. En effet, si $V(X, Y)$ était négatif dans le voisinage intérieur à d de $Z = +1$ et du segment $(q, 1)$, il résulterait de la relation $V(X, 0) = 0$ l'inégalité

$$\frac{dU}{dX}(X, 0) = \frac{dV}{dn}(X, Y) < 0,$$

(67) C'est un point important de la démonstration.

valable le long de l'axe réel; $U(X, 0)$ serait donc décroissant dans le voisinage de $X = +1$. Or, ce fait est contredit par l'équation (1.36); la convexité de λ_2 entraîne, en effet, $\Omega'(+1) < 0$; donc, d'après (1.36),

$$\lim_{X \rightarrow 1} U(X, 0) = +\infty.$$

Ainsi, la portion considérée du voisinage de $Z = 1$ n'appartient à aucun domaine D.

b. Il en résulte que si un domaine D atteignait le point $Z = 1$, il existerait au moins un arc de courbe d'équation

$$V(X, Y) = 0,$$

aboutissant en ce point et étranger au segment réel $(q, 1)$. Or, ce fait est contredit par la formule (1.36); elle montre que lorsque $\Omega'(1) \neq 0$, la fonction $\frac{d\Omega}{df}$ possède en $Z = 1$ un pôle d'ordre 1. D'après le théorème de M. Magnier ⁽⁶⁸⁾, une seule courbe d'équation $V = 0$ peut alors atteindre ce point intérieurement à la couronne C; nous avons vu que cette courbe se réduit au segment réel $(q, 1)$, ce qui achève de justifier notre assertion.

La première relation (1.35') montre que $U(e^{is})$ est positif pour $0 \leq s \leq \delta_2$ et $s_0 \leq s \leq \delta_1$, et négatif pour $\delta_2 < s \leq s_0$, $\delta_1 \leq s \leq \pi$. Toutefois, U peut être nul le long des arcs concaves puisque ceux-ci peuvent comporter des portions rectilignes. La dérivée $\frac{dV(e^{is})}{ds}$ existe, puisque Φ'' existe.

Il reste à préciser le comportement de $\frac{d\Omega}{df}$ dans le voisinage de

$$Z = Z_0 = e^{is_0}.$$

D'après l'équation (1.30), $\frac{d\Omega_0}{dZ}$ s'y comporte comme

$$\frac{1-2\alpha}{i} \frac{1}{Z-Z_0} + \dots,$$

puisque $H(Z)$ est régulière et dérivable pour $Z = Z_0$; (1.23) et (1.27)

⁽⁶⁸⁾ Cf. le renvoi ⁽⁶⁹⁾.

permettent d'écrire alors le développement limité

$$(2.10) \quad \frac{d\Omega}{dZ} = -\frac{2Z}{i} \frac{1}{Z-Z_0} + \dots$$

Les formules (1.4) et (1.10) montrent que $Z = Z_0$ est un zéro d'ordre deux de $f = f(Z)$; on a

$$(2.11) \quad \lim_{Z \rightarrow Z_0} \frac{\frac{df}{dZ}}{Z-Z_0} = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} \frac{\left(\frac{dt}{dZ}\right)_{Z=Z_0}^2}{(t_0-a)(b-t_0)} = -\frac{K^2}{Z_0^3},$$

où K désigne une constante réelle qui dépend de $\psi_1 + \psi_2$, s_0 , a et b .

L'ensemble de ces résultats permet d'écrire le développement limité

$$U + iV = \frac{2\alpha}{iK^2} \frac{1}{(Ze^{-is_0} - 1)^2} + \dots$$

D'après un théorème de M. Magnier⁽⁶⁹⁾, la disposition des courbes $U = \text{const.}$ et $V = \text{const.}$ au point $Z = Z_0$ est identique à celle qu'y présente le développement de $U + iV$ arrêté à son premier terme; par suite, le point $Z = Z_0$ est l'origine de deux courbes d'équation $V = 0$ qui s'y croisent à angle droit, séparées par une ligne d'équation $U = 0$.

Il existe donc des points de O , O_+ et O_- dans le voisinage de $Z = Z_0$; leur disposition est indiquée sur la figure 8 bis⁽⁷⁰⁾.

En résumé, $\frac{d\Omega}{df}$ est une fonction analytique de Z , régulière pour $q \leq |Z| < 1$; elle possède au point $Z = Z_0$ un pôle double et, éventuellement, un pôle simple en chacun des deux points $Z = \pm 1$ lorsque λ_1 et λ_2 y présentent des détachements en aval.

3° Montrons que tout domaine D_+ (ou D_-) atteint l'arc $s_0 \leq s \leq \delta_1$ (ou $\delta_2 \leq s \leq s_0$) du cercle $Z = e^{is}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la frontière D'_+ d'un domaine D_+ soit étrangère à l'arc $s_0 \leq s \leq \delta_1$ de $Z = e^{is}$. Comme, par

⁽⁶⁹⁾ *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1275.

⁽⁷⁰⁾ Observons que le pôle de $U + iV$ au point $Z = Z_0$ est simple dans le cas où $\alpha = 0$; le point O est alors un point de rebroussement du profil. Il serait facile d'adapter nos raisonnements à cette hypothèse simplificatrice.

ailleurs, l'ensemble O est vide dans le voisinage de $Z = \pm 1$ lorsque $\Omega'(\pm 1) \neq 0$, il en résulterait que O_+ ne pourrait atteindre aucun point de discontinuité de $U + iV$; U serait donc continu le long de D'_+ . Or, les portions de D'_+ étrangères à $Z = e^{is}$ se composent : *a.* d'arcs intérieurs à d (ou appartenant à $Z = qe^{is}$) le long desquels $U = 0$; *b.* éventuellement, des segments de l'axe réel et d'arcs de courbes intérieurs à d le long desquels on aurait $U > 0$; $V = 0$. Pour ces derniers éléments de D'_+ (donc l'arc l est supposé orienté comme il a été dit), on a, en désignant par n_i la normale intérieure à D_+ ,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dn_i} \leq 0,$$

puisque $V \leq 0$ dans D_+ .

D'autre part, d'après (1.35') et les résultats de l'alinéa 2° : *a.* D'_+ est étranger à l'arc $\delta_1 \leq s \leq \pi$, le long duquel par hypothèse $c(l)$ n'est pas nul; *b.* U est nul en des points communs à D'_+ et à l'arc $\delta_2 \leq s \leq s_0$.

Enfin, le long des portions de $Z = e^{is}$, communes à D'_+ et à l'arc $0 \leq s \leq \delta_2$, U ne peut pas croître. En effet, les équations (1.35') permettent d'écrire

$$\frac{dU}{dt} = -e^{-\tau} \frac{dc}{dt} - cV,$$

la dérivation de U étant légitime d'après l'alinéa 2°; or, le long de l'image de $\widehat{B_1 B}$ on a, par hypothèse,

$$c(l) < 0, \quad \frac{dc}{dt} \geq 0.$$

Il s'ensuit que si $V(e^{is})$ était négatif aux points considérés de $Z = e^{is}$, on aurait, en ces points,

$$\frac{dU}{dt} \leq 0.$$

Ainsi, U serait non croissant mais continu le long de D'_+ (sans pouvoir être constant); ces propriétés sont contradictoires et cette incompatibilité établit notre lemme.

COROLLAIRE. — *Il existe un chemin l_- intérieur à O_- et joignant un point de $Z = qe^{is}$ à un point de l'arc $\delta_2 \leq s \leq s_0$ du cercle $|Z| = 1$.*

En effet, d'après l'alinéa 1°, il existe des points de O_- appartenant

à $Z = qe^{is}$; or, d'après l'alinéa 3°, les domaines D_- , dont ces points font partie, atteignent l'arc $\delta_1 \leq s \leq s_0$.

4° L'ensemble O_+ (ou O_-) n'atteint ni le segment $q \leq Z \leq 1$ (ou $-1 \leq Z \leq -q$), ni l'arc $0 \leq s \leq \delta_2$ de $Z = e^{is}$ (ou $\delta_1 \leq s \leq \pi$).

Raisonnons par l'absurde. Un domaine D_+ ayant des points communs soit avec l'arc $0 \leq s \leq \delta_2$ de $Z = e^{is}$, soit avec le segment $q \leq Z \leq 1$ ne peut avoir de points⁽⁷¹⁾ communs avec l'arc $s_0 < s \leq \delta_1$, puisqu'il en est séparé par le chemin L_- (voir le précédent corollaire). Par suite, d'après l'alinéa 3°, D_+ et L_- doivent atteindre nécessairement le point $Z = Z_0$; dans le voisinage de ce point, à l'intérieur du domaine limité par L_- , $Z = e^{is}$, ($s \leq s_0$) et $Z = qe^{is}$, il y aurait des points de O_+ . Or, cela est en contradiction avec l'allure de $U + iV$ telle qu'elle résulte de l'alinéa 2°. L'extension du théorème de M. Leray au cas du courant limité par une ou deux parois planes s'achève alors d'elle-même.

5° La première condition de M. Brillouin est vérifiée. D'après les résultats du paragraphe 17, il suffit de vérifier l'inégalité $T(X, Y) \leq 0$ le long de $Z = e^{is}$.

a. La fonction $T(X, Y)$ n'atteint pas son maximum le long des images des arcs concaves. On a, en effet, le long de $\delta_2 \leq s \leq s_0$, par exemple,

$$\frac{dT}{dn_i} = \frac{d\Phi}{ds} \geq 0.$$

$T(X, Y)$ atteint donc son maximum sur les images des arcs convexes.

b. Le long de l'arc $0 \leq s \leq \delta_2$, par exemple, $U(e^{is}) > 0$; d'après l'alinéa 4°, $V(e^{is}) \geq 0$ pour $0 \leq s \leq \delta_2$. Cela entraîne, en tenant compte de la deuxième relation (1.35'),

$$\frac{dT(e^{is})}{dl} \leq 0 \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \delta_2.$$

Il s'ensuit que le maximum de $T(e^{is})$ est atteint pour $Z = 1$; or

$$T(1, 0) = 0.$$

(71) Autres que $Z = e^{is_0}$.

6° La deuxième condition de validité de M. Brillouin est satisfaite.

On a vu que $U(X, 0) > 0$ pour $q \leq X \leq 1$; d'après l'alinéa 4°, il en résulte que V est positif dans le voisinage de ce segment intérieur à d ; donc, comme $V(X, 0) = 0$,

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{dU}{dX} > 0.$$

Ainsi, la courbure de la ligne libre λ_2 croît quand on se rapproche du point de détachement. Si donc le détachement de λ_2 est en proue, λ_2 est extérieure au cercle osculateur en P_2 à l'obstacle. Au contraire l'arc $\widehat{P_2 B}$ est intérieur à ce cercle puisque sa courbure croît quand on se déplace de P_2 vers B .

Ainsi tout danger de recoupement est écarté.

Remarque. — Il y a lieu de noter que lorsque le détachement au point P_2 est en proue, l'obstacle étant en accolade, on a nécessairement en ce point

$$(2.12) \quad c'_2 > 0,$$

le cas de l'égalité étant exclu [*cf.* la formule (1.37)]; d'après les résultats du paragraphe 13, c'_2 ne peut être négatif lorsque les deux conditions de M. Brillouin sont vérifiées dans le voisinage d'un détachement en proue. Cette remarque, due à M. Leray, nous sera utile.

En effet, rappelons que moyennant les hypothèses faites sur la régularité de l'obstacle et la nature du détachement en P_2 , les fonctions harmoniques $U(X, Y)$ et $V(X, Y)$ sont continues et dérivables dans le voisinage du point $Z = 1$; le long du cercle $|Z| = 1$ elles seront donc liées par la relation

$$(2.12') \quad d \left[\frac{U(e^{is})}{c(s)} \right] = -V(e^{is}) dl(s),$$

qu'on obtient en éliminant la fonction $T(e^{is})$ entre les deux équations (1.35') et qui, dans le cas considéré — cas du détachement en proue — est valable même pour $s = 0$.

Ceci posé, admettons que l'on ait, contrairement à l'énoncé,

$$c'_2 = \left[\frac{d}{dZ} (U + iV) \right]_{Z=1} = 0.$$

La fonction V , nulle le long de l'axe réel, posséderait au point $Z = 1$ un zéro double, ce qui nous permettrait d'écrire, le long de $Z = e^{is}$,

$$|V(e^{is})| \leq \text{const. } s^2.$$

Compte tenu de la relation (2. 12'), cette inégalité entraînerait

$$|U(e^{is}) - U(1)| \leq \text{const. } s^4,$$

puisque, rappelons-le, $\frac{dl(s)}{ds}$ s'annule pour $s = 0$. Dès lors, d'après les résultats de M. Magnier ⁽⁷²⁾, il existerait quatre courbes de Jordan d'équation $U = U(1)$ (et, par conséquent, $V = 0$) aboutissant au point $Z = 1$, intérieures à la couronne C , et dont les tangentes intérieures au domaine d auraient pour arguments $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$; le nombre de courbes précédentes peut d'ailleurs se réduire à deux. En tout état de cause, la fonction $V(X, Y)$ ne pourrait pas être d'un signe constant dans la portion de voisinage de $Z = 1$ intérieure à d ; or, ceci est en contradiction avec l'inégalité

$$V \geq 0 \quad \text{pour} \quad Y \geq 0,$$

que nous avons établie au cours du présent paragraphe.

CHAPITRE III.

Problème de représentation conforme de Helmholtz.

Théorèmes d'existence.

19. PRÉLIMINAIRES. — Jusqu'ici nous avons étudié des sillages dont les obstacles étaient caractérisés par les données arbitraires de M. Villat : $\Psi(l)$, $l(s)$, a , b , ψ_1 , ψ_2 , supposées reliées par l'équa-

⁽⁷²⁾ Cf. *loc. cit.* ⁽⁶⁹⁾.

tion (1.24). Maintenant nous allons nous placer au point de vue opposé; nous chercherons à construire les éléments correspondant à un obstacle donné, placé d'une manière connue par rapport aux parois fixes μ_1 et μ_2 . Ces recherches reposent sur quelques lemmes de représentation conforme et des limitations *a priori* des paramètres; les résultats sont dus à M. Leray⁽⁷³⁾, à moins qu'ils ne soient inspirés par lui. Nous commencerons par exposer ces préliminaires indispensables qui permettent d'étudier *a priori* les propriétés de la solution; la théorie des équations fonctionnelles de MM. J. Schauder et J. Leray nous permettra ensuite de conclure.

20. *Un lemme sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme.* Rappelons tout d'abord quelques notions classiques. Envisageons un arc de courbe réelle, plane, définie — pour fixer les idées — relativement à un système d'axes rectangulaires par les équations paramétriques :

$$\begin{aligned}x &= x(h), \\ y &= y(h),\end{aligned}$$

dans lesquelles les symboles $x(h)$ et $y(h)$ désignent deux fonctions réelles de l'argument réel h , continues dans l'intervalle

$$h_0 \leq h \leq h_1;$$

un tel arc sera dit *arc de Jordan*.

Si les fonctions $x(h)$ et $y(h)$ vérifient les conditions

$$\begin{aligned}x(h_0) &= x(h_1), \\ y(h_0) &= y(h_1),\end{aligned}$$

la courbe sera dite *fermée*.

⁽⁷³⁾ Je n'ai pas cru devoir indiquer en leur lieu et place tous les emprunts que j'ai faits aux travaux de M. Leray. Signalons, toutefois, que les paragraphes 20, 25 et 28 ne font qu'exposer, en les précisant et en les développant, les résultats acquis par cet auteur (voir les chapitres III et IV de son *Mémoire des Comm. Math. Helvetici*). Partout ailleurs, j'ai eu à utiliser à maintes reprises le travail précité ainsi que les suggestions que M. Leray m'a faites de vive voix.

Si le système de deux équations a une seule inconnue

$$\begin{aligned} x(h) &= x(h_2) \\ y(h) &= y(h_2) \end{aligned} \quad \text{avec } h_0 < h_2 < h_1$$

n'admet d'autre solution que $h = h_2$, la courbe sera dépourvue de points multiples. Toute courbe de Jordan Γ' fermée, sans points multiples, partage le plan en deux régions (théorème de Jordan); les points de la région intérieure constitue le domaine simplement connexe Γ ⁽⁷⁴⁾ dont la courbe Γ' sera la frontière.

D'après un résultat de Schœnflies, tout point A d'une courbe fermée Γ' de Jordan est accessible de l'intérieur de cette courbe; nous entendons par là que le point en cause peut être joint à un point intérieur du domaine par un arc de courbe de Jordan n'ayant en commun avec Γ' que le point A, par exemple, par une ligne polygonale; dans le cas général celle-ci aura un nombre infini de côtés dans le voisinage de A et sa longueur totale ne sera pas finie. Mais on montre que tout point A de Γ' peut être considéré comme point limite d'une suite de points $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, de Γ' qui sont accessibles de l'intérieur de Γ par des arcs de courbes rectifiables de longueurs finies (par exemple, des lignes polygonales de longueur finie).

Dans la suite nous aurons à utiliser la notion d'étendues extérieure et intérieure du domaine Γ . Considérons dans le plan de Γ un quadrillage constitué par deux systèmes de droites rectangulaires, parallèles respectivement aux axes; appelons d la longueur maxima des diagonales des rectangles de ce quadrillage, σ_d la somme des aires de ceux des rectangles du quadrillage dont tous les points font partie de Γ , Σ_d la somme des aires de ceux des rectangles de l'espèce considérée qui contiennent les points de Γ . D'après cela, on a

$$\sigma_d \leq \Sigma_d.$$

Cela étant, considérons une suite infinie de quadrillages telle que les diagonales maxima d_i correspondantes vérifient la condition

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = 0.$$

(74) Une telle définition du domaine est très restrictive. Pour plusieurs auteurs, le mot domaine a une acception beaucoup plus large.

On démontre que chacun des nombres σ_{d_i} et Σ_{d_i} tend vers une limite bien déterminée, indépendante du choix des quadrillages; nous désignerons par σ et Σ les nombres ainsi définis

$$\sigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{d_i},$$

$$\Sigma = \lim_{i \rightarrow \infty} \Sigma_{d_i};$$

σ est ce qu'on appelle étendue intérieure de Γ alors que Σ en est l'étendue extérieure.

En général, on a

$$\sigma < \Sigma.$$

Si $\sigma = \Sigma$, le domaine est dit quarrable et sa frontière Γ' est dite d'étendue extérieure nulle; il en est, notamment, ainsi, lorsque Γ' est une courbe rectifiable.

Cela étant, attachons au plan de Γ la variable complexe : $z = x + iy$; envisageons, d'autre part, dans le plan de la variable $Z = X + iY$ le cercle d'équation $|Z| = 1$. On sait qu'on peut représenter conformément Γ sur l'intérieur de $|Z| = 1$; on démontre de façon élémentaire que cette correspondance jouit des propriétés suivantes :

1° toute fonction

$$z = z(Z)$$

qui réalise l'une des correspondances en cause est analytique et holomorphe pour $|Z| < 1$;

2° à un point intérieur à Γ correspond un point intérieur à $|Z| < 1$, et réciproquement; par suite, à un point de $|Z| = 1$ ne peut correspondre qu'un ou plusieurs points de Γ' ; d'après cela, au chemin $\widehat{MN}$, joignant intérieurement à $|Z| \leq 1$ deux points MN de sa frontière (ce qui veut dire que tout point de $\widehat{MN}$, autre que M et N , est étranger à $|Z| = 1$), il correspond un chemin $\widehat{mn}$ (dont la longueur, dans le cas général, ne sera pas finie) joignant intérieurement à Γ deux points m et n de Γ' ;

3° si la longueur l du chemin $\widehat{mn}$ est finie, elle sera donnée par la formule

$$l = \int_{\widehat{mn}} \left| \frac{dz}{dZ} dZ \right|.$$

4° l'étendue intérieure σ du domaine Γ sera donnée par l'intégrale de Dirichlet

$$\sigma = \iint \left| \frac{dz}{dZ} \right|^2 dX dY,$$

étendue à tout le domaine $|Z| < 1$.

Il importe de bien faire préciser que les résultats des alinéas 3° et 4° subsistent dans le cas le plus général, c'est-à-dire lorsque la dérivée $\frac{dz}{dZ}$ n'existe pas pour tous ou quelques-uns des points de $|Z| = 1$.

Il est évident que les résultats précédents valent tant pour le cercle $|Z| = 1$ que pour tout autre domaine que l'on sait représenter sur $|Z| \leq 1$, par exemple, le demi-plan supérieur, le rectangle, etc.

En utilisant les conclusions élémentaires qui précèdent, nous allons, avec M. Leray, imiter les raisonnements de Grötsch et de J. Wolff et établir un lemme sur la correspondance des frontières dans la représentation conforme d'un domaine sur un demi-plan; cela nous permettra, dans le paragraphe suivant, de retrouver, en les précisant, plusieurs des résultats classiques acquis à ce jour dans cette voie. Il est, du reste, à noter que les conclusions du présent paragraphe peuvent être étendues aux frontières autres que des courbes de Jordan.

Considérons donc un domaine borné, simplement connexe Γ situé dans le plan de la variable z . Nous appellerons $z = f(t)$ la fonction analytique qui réalise l'application conforme de Γ sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{C}$ (cf. § 9). Soient t_1, t_2, t_3, t_4 quatre points de l'axe réel du plan Z . On suppose que $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$; d'après cela les images $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$ des segments $t_1 t_2$ et $t_3 t_4$ seront des portions de Γ' dépourvues de points communs. Il en est de même des images $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ et $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$ des segments $(t_2 t_3)$ et $(t_4, +\infty; -\infty, t_1)$. Nous appellerons $\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_4 \alpha_1})^{(75)}$ la plus courte longueur des chemins tracés dans le plan z *intérieurement* à Γ et joignant $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ à $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$. Ceci posé, nous allons établir

(75) Nous désignerons dans la suite ce nombre simplement par Λ lorsque aucune ambiguïté ne sera à craindre.

l'inégalité suivante

$$(3.1) \quad \frac{\Lambda^2}{\sigma} \leq \frac{4\pi}{\left| \log \frac{1}{|r|} \right|},$$

qui sera valable moyennant la condition $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ et où le symbole r désigne le rapport anharmonique des points t_3, t_2, t_4, t_1 pris dans cet ordre. On observera que r est positif, puisque l'on a

$$(3.1') \quad r = \frac{t_3 - t_3}{t_3 - t_2} \cdot \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.$$

En effet, représentons conformément le domaine $\mathfrak{C}$ sur l'intérieur d'un rectangle R du plan auxiliaire $u = u_1 + iu_2$; on pourra, par exemple, utiliser à cet effet les formules de transformation (1.5) et (1.5'), à condition de substituer aux racines $a, -1, +1, b$ du polynôme $R(t)$ les quantités t_1, t_2, t_3 et t_4 . Considérons un segment rectiligne d'équation $u_1 = \alpha$, intérieur à R et joignant les côtés AD et BC ; la relation $z = f[t(u)]$ lui fait correspondre un chemin intérieur à Γ , reliant les éléments $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ et $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$ de sa frontière Γ' et dont la longueur, qui peut n'être pas finie, est égale à (cf. la figure 4)

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} |f'[t(\alpha + iu_2)]| du_2.$$

Je dis, toutefois, qu'il existe des valeurs de α pour lesquelles l'intégrale ci-dessus a une valeur finie. En effet, d'après ce que nous avons rappelé au début de ce paragraphe, l'intégrale

$$I(\varepsilon_2, \alpha) = \int_{\varepsilon_1}^{\frac{\omega_3}{i} - \varepsilon_2} |f'[t(\alpha + iu_2)]| du_2,$$

dans laquelle ε_2 désigne un nombre positif arbitrairement petit mais non nul, est finie. On en tire, en utilisant l'inégalité de Schwartz,

$$[I(\varepsilon_2, \alpha)]^2 \leq \frac{\omega_3}{i} \int_{\varepsilon_1}^{\frac{\omega_3}{i} - \varepsilon_2} |f'[t(\alpha + iu_2)]|^2 du_2,$$

l'intégrale du second membre, que nous désignerons par $I_1(\varepsilon_2, \alpha)$,

étant encore finie lorsque ε_2 diffère de zéro. D'après l'inégalité qui précède, nous justifierons notre assertion dès que nous aurons prouvé que pour certaines valeurs de α $\left(-\frac{\gamma}{2} < \alpha < -\frac{\gamma}{2} + \omega_1\right)$ l'intégrale $I_1(o, \alpha)$ est supérieurement bornée. Or, l'élément d'aire de Γ étant égal à

$$|f'[\iota(u)]|^2 du_1 du_2,$$

nous pouvons écrire

$$\int_{-\frac{\gamma}{2} + \varepsilon_1}^{\omega_1 - \varepsilon_1 - \frac{\gamma}{2}} I_1(\varepsilon_2, u_1) du_1 \leq \sigma,$$

en désignant par ε_1 un nombre positif arbitrairement petit mais non nul et par σ l'étendue intérieure de Γ .

Faisons alors tendre ε_1 et ε_2 vers zéro; il vient, en passant à la limite et en utilisant un résultat rappelé au début de ce paragraphe,

$$\int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\omega_1 - \frac{\gamma}{2}} I_1(o, u_1) du_1 = \sigma.$$

De cette formule il résulte que la mesure e de l'ensemble des points de l'intervalle $-\frac{\gamma}{2} < \alpha < -\frac{\gamma}{2} + \omega_1$, $u_2 = 0$ en lesquels

$$I_1(o, \alpha) > A,$$

A désignant une constante positive quelconque, vérifie l'inégalité

$$e \leq \frac{\sigma}{A}.$$

Il suit de là que la mesure de l'ensemble des points en lesquels $I_1(o, \alpha)$, et par suite $I(o, \alpha)$, n'est pas supérieurement borné, est nulle.

Ainsi, la borne inférieure de l'ensemble $I(o, \alpha)$ des longueurs correspondant à $-\frac{\gamma}{2} \leq \alpha \leq \omega_1 - \frac{\gamma}{2}$ est finie et au plus égale à A , puisque l'ensemble des segments considérés est inclus dans celui des chemins joignant intérieurement à R les images AD et BC de $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ et $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$. Or, l'inégalité de Schwartz, appliquée à l'intégrale $I(o, \alpha)$ ci-dessus,

permet d'écrire

$$|I(o, \alpha)|^2 \leq \frac{\omega_3}{l} I_1(o, \alpha)$$

en tout point α où $I_1(o, \alpha)$ a un sens.

Cette relation a encore lieu entre les bornes inférieures de deux intégrales considérées; on a donc

$$\Lambda^2 \leq \frac{\omega_3}{l} [\text{borne inférieure de } I_1(o, \alpha)].$$

Appliquons alors le théorème de la moyenne à l'intégrale du second membre (manifestement positive); en utilisant l'expression de l'élément d'aire de Γ , il vient

$$\text{Borne inférieure } I_1(o, \alpha) \leq \frac{1}{\omega_1} \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\omega_1 - \frac{\gamma}{2}} |f'[\iota(u)]|^2 du_1 du_2 = \frac{\sigma}{\omega_1}.$$

De deux dernières inégalités, on tire

$$(3.2) \quad \Lambda^2 \leq \frac{\omega_3}{l \omega_1} \sigma.$$

Cette inégalité, notons-le en passant, est indépendante de l'hypothèse : $o \leq r \leq \frac{1}{2}$.

Il est bien évident que les raisonnements précédents s'appliquent encore aux éléments $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$ de Γ' , à condition d'intervertir partout le rôle de ω_1 et $\frac{\omega_1}{l}$; on aurait donc l'inégalité

$$(3.2') \quad \lambda^2 \leq l \frac{\omega_1}{\omega_3} \sigma,$$

où λ désigne la borne inférieure des longueurs des chemins joignant $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$ à $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$ intérieurement à Γ .

Cela posé, introduisons la fonction modulaire

$$X(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \varphi}},$$

dont l'argument χ est donné par

$$\chi = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad (0 \leq \chi \leq 1),$$

formule où les e_i correspondent à la fonction $p(u; \omega_1, \omega_3)$, dont les périodes sont construites à l'aide de (1.6) en posant

$$R(t) = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4).$$

Les paramètres χ et r sont liés par la relation (CXXXII, et CXXXVII T. M.)

$$\chi = 1 - r.$$

Or, des formules bien connues (cf. CXIX, et CXX T. M.), il résulte

$$\frac{\tau}{i} = \frac{X'(\chi)}{X(\chi)},$$

où les fonctions $X(\chi)$ et $X'(\chi)$ sont données, sous réserve que $|\chi| < 1$, par les relations

$$\begin{aligned} X(\chi) &= \frac{\pi}{2} \lambda(\chi), \\ X'(\chi) &= -\frac{1}{2} \left[4\mu(\chi) + \lambda(\chi) \log \frac{\chi}{16} \right], \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda(\chi) &= 1 - \frac{1}{\pi} \log(1 - \chi) - \varepsilon(\chi), \\ \mu(\chi) &= -\frac{1}{\pi} \log 2 \log(1 - \chi) - \eta(\chi), \end{aligned}$$

les fonctions $\varepsilon(\chi)$ et $\eta(\chi)$ étant assujetties à vérifier respectivement les inégalités

$$|\varepsilon(\chi)| \leq \frac{1}{5} |\chi|, \quad |\eta(\chi)| \leq \frac{1}{3} |\chi|.$$

Comme, par hypothèse, r reste compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, χ sera compris entre $\frac{1}{2}$ et 1; or, les formules précédentes cessent d'être valables pour $\chi = 1$. Pour tourner la difficulté, nous utiliserons les relations fonctionnelles (cf. CXX, T. M.) que vérifie $X(\chi)$

$$\begin{aligned} X(\chi) &= X'(1 - \chi), \\ X'(\chi) &= X(1 - \chi); \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\tau}{i} = \frac{X(1-\chi)}{X'(1-\chi)}.$$

De l'ensemble des résultats qui précèdent, il résulte

$$\frac{\tau}{i} = \frac{\pi \left[1 - \frac{1}{\pi} \log \chi - \varepsilon(1-\chi) \right]}{-\log \frac{(1-\chi)}{16} \left[1 - \frac{1}{\pi} \log \chi - \varepsilon(1-\chi) \right] + \frac{4}{\pi} \log 2 \log \chi + 4 \eta(1-\chi)},$$

la relation étant valable pour $\chi = 1$. Dès lors, une discussion élémentaire permet d'écrire l'inégalité

$$\left| \frac{\tau}{i} \right| \leq \frac{4\pi}{\left| \log \frac{1-\chi}{16} \right|},$$

valable tant que χ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 — c'est-à-dire tant que r est compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ et d'où l'on déduira aisément l'inégalité (3.1) en substituant à χ sa valeur en fonction de r .

Notons également que, d'après (3.2),

$$(3.3) \quad \frac{\tau}{i} \frac{\lambda^2}{\sigma} \leq 1$$

[bien entendu, λ ayant la signification précisée dans le texte à propos de la formule (3.2)]. Il s'ensuit que si $\frac{\tau}{i}$ augmente indéfiniment, λ tend vers zéro.

D'après ce qui précède, cela ne peut avoir lieu que si r est très voisin de l'unité et, par suite χ est voisin de zéro; on a d'ailleurs (CXXII, T. M.) dans ce cas

$$\frac{\tau}{i} = \frac{1}{\pi} \log \frac{\chi}{16} + \text{const.} \chi + \dots,$$

λ est alors au moins de l'ordre de $\frac{1}{\pi} \log |\chi|$.

Il va de soi que les raisonnements précédents demeurent valables si l'on substitue au domaine plan Γ un domaine situé sur une sphère de Riemann.

21. APPLICATION A L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES ENTRE CERTAINS ÉLÉMENTS FRONTIÈRES DANS LA REPRÉSENTATION CONFORME. — Les considérations précédentes permettent de retrouver, en le précisant, ce résultat bien connu de M. C. Carathéodory : la correspondance conforme entre un domaine Γ borné d'un seul tenant du plan z (limité par une courbe de Jordan Γ') d'une part, et le demi-plan supérieur $\mathfrak{G}$ (du plan t) d'autre part, est continue le long de Γ' . Pour préciser, appelons $z = f(t) = R(t) + iI(t)$ la fonction analytique qui permet d'effectuer l'application conforme de Γ sur $\mathfrak{G}$; les frontières se correspondant, les équations paramétriques de Γ pourront s'écrire

$$x = R(t), \quad y = I(t),$$

où t est supposé réel; d'après le théorème de M. Carathéodory, les fonctions $R(t)$ et $I(t)$ sont continues pour t réel; le contour Γ' et l'axe réel t se correspondent donc point par point.

Pour établir ce résultat, il suffit de se reporter aux inégalités (3. 1) et (3. 1'); nous respectons, pour le moment, les notations du précédent paragraphe.

Fixons, en effet, arbitrairement, ce qui est toujours possible, les points t_1, t_3 et t_4 d'une part ⁽⁷⁶⁾, et leurs images respectives α_1, α_3 et α_4 d'autre part; au point t_2 correspondra alors un point $\alpha_2(t_2)$, au moins, de Γ' . Faisons alors tendre t_2 vers t_1 , par exemple; d'après les inégalités (3. 1) et (3. 1'), $\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1})$ tend vers zéro.

Or, le contour Γ' est, par hypothèse, une courbe de Jordan dépourvue de points doubles; donc, sur chaque arc de Γ' , il existe des points accessibles de l'intérieur par des lignes polygonales de longueur finie. Il en résulte, $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ et $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$ étant étrangers l'un à l'autre, que $\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1})$ ne peut tendre vers zéro sans que α_2 ne tende vers α_1 ; la correspon-

(76) Toutefois, les points t_1, t_2, t_3 et t_4 doivent être choisis de manière que la quantité r correspondante [cf. (3. 1')] soit comprise entre -1 et 0 . Ceci ne restreint évidemment pas la généralité du raisonnement. Dans les applications, en effet, nous ferons toujours tendre t_2 vers t_1 ; d'après (3. 1') la valeur absolue du rapport anharmonique r sera suffisamment petite dès que la différence $t_2 - t_1$ est suffisamment petite. Notons aussi que le raisonnement du texte ne prouve pas, tel quel, que la correspondance $z = f(t)$ est bicontinue.

dance entre frontières de Γ et de $\mathfrak{E}$ a donc lieu point par point, ce qui ne peut avoir lieu que si les fonctions $x = R(t)$ et $y = I(t)$ sont continues.

C. Q. F. D.

Le raisonnement précédent rattache l'énoncé de M. Carathéodory à des propriétés géométriques intrinsèques de Γ' ; il permet de construire un module de continuité pour la correspondance $z = f(t)$ pour t réel, toutes les fois que la fonction $\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_4 \alpha_1})$, ou une de ses minorantes, aura été explicitée⁽⁷⁷⁾. Nous nous proposons maintenant d'appliquer ces généralités à quelques exemples⁽⁷⁸⁾.

Considérons un arc de courbe de Jordan en étoile. D'après sa définition même, il existe un point ω tel que l'intersection de toute demi-droite issue de ω avec cette courbe se réduit à un point unique. On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité (en effectuant au besoin une transformation homographique), que le point ω est à l'infini. Dans ces conditions, toute parallèle à un axe fixe, que nous prendrons pour l'axe Ox , Oy , lui étant perpendiculaire, rencontre l'arc considéré en un seul point; tel serait, par exemple, le cas de la courbe sans tangente de Weierstrass. Relativement au système d'axes rectangulaires qu'on vient de définir, l'équation de l'arc $\widehat{BC}$ pourra s'écrire

$$x = x(y),$$

$x(y)$ étant une fonction définie et continue dans un certain intervalle. La continuité étant uniforme, il existe une fonction $\eta(\delta)$, positive, décroissante de son argument et s'annulant avec lui, telle que

$$|x(y) - x(y')| \leq \eta(\delta),$$

pourvu que

$$|y - y'| \leq \delta.$$

Ceci posé, envisageons un domaine Γ , borné et d'un seul tenant

⁽⁷⁷⁾ Il y a lieu de noter que les raisonnements du texte peuvent rendre des services dans des cas plus compliqués. Nous nous proposons de les appliquer à l'étude de la théorie des *bouts premiers* (Primende) que l'on doit à M. Carathéodory.

⁽⁷⁸⁾ Pour cette partie de mon travail, je dois de nombreuses indications utiles à M. F. Roger.

dont la frontière se compose de l'arc $\widehat{B'C'}$ jouissant de la propriété précédente et d'un arc $\widehat{C'B'}$ complémentaire, appartenant à une courbe de Jordan quelconque. Soient B et C deux points de $\widehat{B'C'}$ que l'on peut choisir aussi voisins de B' et C' respectivement, mais distincts de chacun d'eux; soient, d'autre part, M et M' deux points quelconques de BC. Nous supposons que le choix de points sB', B, M, M', C, C' a été fait de manière qu'ils soient rencontrés dans cet ordre lorsqu'on décrit Γ' dans le sens direct.

Il résulte de la propriété caractéristique de l'arc $\widehat{BC}$ et du choix de l'axe Ox que l'ordonnée y est monotone le long de $\widehat{BC}$; d'après cela, les arcs $\widehat{BM}$ et $\widehat{M'C}$ sont séparés par la bande horizontale dont les bords sont constitués par des parallèles à Ox menées par M et M'.

Cela montre que la plus courte distance $\Lambda(\widehat{BM}, \widehat{M'C})$ des arcs $\widehat{BM}$ et $\widehat{M'C}$ est minorée par la différence des ordonnées des points M et M', que nous désignerons respectivement par y_M et $y_{M'}$.

Soit alors A un point quelconque de l'arc $\widehat{C'B'}$, complémentaire de $\widehat{B'C'}$, mais autre que B' et C'. Il résulte des hypothèses faites sur le contour (sans points doubles) et le domaine Γ (borné) que le nombre $\Lambda(\widehat{AB}, \widehat{M'C})$ est borné inférieurement alors que le nombre $|y_M - y_{M'}|$ est borné supérieurement; cela montre que le quotient

$$\frac{\Lambda(\widehat{AB}, \widehat{M'C})}{|y_M - y_{M'}|}$$

est borné inférieurement tout le long de $\widehat{BC}$. Or, d'après la définition même de la fonction Λ , il est clair que le nombre $\Lambda(\widehat{AM}, \widehat{M'C})$ est égal au plus petit des nombres $\Lambda(\widehat{AB}, \widehat{M'C})$ et $\Lambda(\widehat{BM}, \widehat{M'C})$; ce qui précède montre donc que l'on peut trouver une constante positive finie et non nulle, donc la valeur dépend du contour Γ' et du choix des points A, B et C, telle que

$$(3.4) \quad \Lambda(\widehat{AM}, \widehat{M'C}) \geq \text{const.} \cdot |y_M - y_{M'}|,$$

l'inégalité précédente sera valable le long de tout l'arc $\widehat{BC}$, extrémités comprises ⁽⁷⁹⁾

Ceci posé, considérons la fonction analytique $z = f(t)$ qui réalise l'application conforme du domaine Γ précédemment défini sur le demi-plan $\mathfrak{E}$ de manière qu'aux points A, B, C, correspondent respectivement les points d'affixe, $t = \infty$, $t = -1$, $t = +1$; nous appellerons t et t' ($-1 < t < t' < 1$) les affixes des images de M' . Appliquons le lemme du précédent paragraphe en prenant pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 les points M, M' , C et A (ce qui revient à poser $t_1 = t$, $t_2 = t'$, $t_3 = 1$, $t_4 = \infty$). On trouve d'abord [cf. la relation (3.1')]

$$r = \frac{t' - t}{1 - t}.$$

Si l'on suppose, par exemple, $t \leq \frac{1}{2}$, on aura

$$|r| \leq 2|t' - t|,$$

en sorte r sera inférieur à $\frac{1}{2}$ tant que $t' - t \leq \frac{1}{4}$.

D'un autre côté, l'arc $\widehat{BC}$ peut maintenant être défini au moyen des équations paramétriques

$$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x[y(t)] \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1,$$

les fonctions $x[y(t)]$ et $y(t)$, étant respectivement égales aux parties réelles et imaginaires de la fonction complexe $f(t)$ quand l'argument t de celle-ci est réel. Cela permet de mettre la minorante (3.4) de $\Lambda(\widehat{AM}, \widehat{M'C})$ sous la forme

$$\text{const. } |y_M - y_{M'}| = \text{const. } |y(t) - y(t')|,$$

en sorte que l'inégalité (3.1) peut être remplacée par la suivante

$$(3.5) \quad |y(t) - y(t')| \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

(79) Elle peut même être étendue à tout l'arc $\widehat{B'C'}$, à l'exception de ses extrémités B' et C' .

dans laquelle σ désigne encore l'étendue intérieure de Γ et où rappelons-le, la constante est un nombre positif borné, tant inférieurement que supérieurement, dont la valeur dépend de Γ et du choix des points A, B, C. Il est aisé d'étendre l'inégalité (3.5) à la portion de $\widehat{BC}$, image du segment $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$; il suffira d'appliquer le lemme du paragraphe 20 aux arcs $\widehat{BM}$ et $\widehat{M'A}$ en supposant, cette fois, $t > \frac{1}{2}$; on vérifiera alors aisément que r sera inférieur à $\frac{1}{2}$ moyennant la condition

$$t' - t \leq \frac{3}{4}.$$

Portons alors l'inégalité (3.5) dans celle que vérifie $x(y)$ le long de $\widehat{BC}$, en vertu de la continuité de cet arc; on a, la fonction $\eta(\delta)$ étant croissante,

$$(3.5') \quad |x(y) - x(y')| = |x[y(t)] - x[y(t')]| \\ \leq \eta |y(t) - y(t')| \leq \eta \left[\frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Or, on a vu que la fonction $z = f(t)$, analytique dans $\mathfrak{E}$, se réduit sur la frontière de son domaine de définition à $x[y(t)] + iy(t)$ (c'est-à-dire pour t réel). Les inégalités (3.5) et (3.5') entraînent donc la suivante

$$(3.6) \quad |f(t) - f(t')| \leq |x[y(t)] - x[y(t')]| + |y(t) - y(t')| \\ \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}} + \eta \left[\frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}} \right],$$

valable dans le voisinage et sur tout l'arc $\widehat{BC}$. C'est le résultat que nous voulions établir; ainsi, pour les arcs de courbes en « étoile », le module de continuité le long de l'arc de la fonction $f(t)$ correspondante se relie très simplement au module de continuité de l'arc de courbe lui-même.

En appliquant ce résultat à quelques cas particuliers, on retrouve, par une voie que nous croyons nouvelle, une partie des remarquables résultats dus à MM. Seidel ⁽⁸⁰⁾, Lavrentieff ⁽⁸¹⁾, Keldysch, Warschawski ⁽⁸²⁾, Ostrowski ⁽⁸³⁾. Prenons à titre d'exemple le cas des arcs $\widehat{BC}$ vérifiant relativement à γ une condition de Lipschitz; la fonction $\eta(\delta)$ est alors de la forme

$$\eta(\delta) = A\delta,$$

formule où A désigne une constante positive.

Rappelons l'interprétation géométrique de cette condition : elle exprime que les quatre nombres dérivés de la fonction $x = x(y)$ sont bornés le long de l'arc BC . Pour de tels arcs, (3.6) fournit une inégalité du type

$$|f(t) - f(t')| \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma}(1+A)}{\text{const.} \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

dans laquelle le symbole constante a le sens précédemment défini. On sait que les arcs lipschitziens sont rectifiables; c'est par cette propriété que notre résultat se rattache aux travaux de MM. Seidel et Lavrentieff; ce dernier a obtenu d'ailleurs des inégalités plus précises ⁽⁸⁴⁾. Mais les arcs rectifiables possèdent une tangente presque partout. (Théorème de M. Lebesgue.) Cette propriété nous permettra, et ce sera l'objet d'un autre travail, d'améliorer le résultat précédent de

⁽⁸⁰⁾ *Über die Ränder-Zuordnung bei konformer Abbildung* (*Math. Ann.*, Band, 104, 1931, p. 275-300).

⁽⁸¹⁾ *Sur la représentation conforme* (*C. R. Acad. Sc.*, 184, 1927, p. 1407-1409); *Sur l'existence de la dérivée limite* (avec M. Bessonoff) (*Bull. Math. de France*, Vol. 58, fasc. 1-11, p. 175-198). Voir surtout l'important Mémoire des *Annales de l'École normale supérieure*, 1937, p. 1-35.

⁽⁸²⁾ *Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung* (*Math. Zeitschrift*, p. 321-426).

⁽⁸³⁾ M. Ostrowski a consacré un Mémoire fondamental au sujet qui nous occupe; mais il s'est placé au point de vue local; voir *Acta Mathematica*, Band, 64, p. 83-104. Je lui dois personnellement plusieurs indications précieuses.

⁽⁸⁴⁾ Voir son Mémoire des *Annales de l'École Normale*; cf. notamment p. 2.

manière à retrouver les estimations mêmes de MM. Lavrentieff et Keldysch. Notons, toutefois de suite, que les raisonnements de la première partie du paragraphe suivant s'étendent sans difficultés aux arcs lipschitziens dont nous venons de parler à condition de remplacer le mot *tangente* par celui de *directions limites* de P. Du Bois Reymond-Dini ⁽⁸⁵⁾, et de retoucher la démonstration d'un lemme ⁽⁸⁶⁾.

22. CAS DES COURBES DE JORDAN A TANGENTES CONTINUES. FORMULE DE M. U. CISOTTI. — En conservant les notations du précédent paragraphe, nous supposerons maintenant que la courbe Γ' possède une tangente en chacun de ses points. Dans ce cas, les résultats du paragraphe 21 peuvent être améliorés. Pour simplifier l'exposition et pour nous limiter aux cas susceptibles d'application à l'hydrodynamique, nous supposerons que la tangente varie continûment le long du contour Γ' . Mais nous marquerons l'étape du raisonnement à partir de laquelle cette hypothèse devient vraiment indispensable.

Orientons les tangentes à Γ' dans le sens des y croissants; nous désignerons par $\Psi(l)$ son angle algébrique avec Ox exprimé en fonction de l'abscisse curviligne l sur Γ' ; la courbe Γ' étant rectifiable, d'après les hypothèses faites, l existe.

La fonction $\Psi(l)$ sera, pour simplifier, supposée continue. Cela posé, considérons un arc $\widehat{B'C'}$ de Γ' le long duquel $\Psi(l)$ vérifie les inégalités suivantes :

$$(3.7) \quad \varepsilon \leq \Psi(l) \leq \pi - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif, aussi petit qu'on le veut, mais fixe. Nous nous proposons de construire un module de continuité pour la cor-

⁽⁸⁵⁾ Voir, à ce sujet H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 67-73.

⁽⁸⁶⁾ M. Roger m'a signalé que le module de continuité $\eta(\delta)$ de la courbe de Weierstrass, citée dans le texte, est de la forme : $\text{const.} \times \delta^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$; il en résulte que, dans le voisinage d'un arc $\widehat{BC}$ de cette courbe, la fonction $f(t)$ correspondante vérifie une condition [cf. (3.6)] du type

$$|f(t) - f(t')| \leq \frac{\text{const.}}{|\text{Log } |t - t'||^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

respondance $l(t)$ entre un arc $\widehat{BC}$ (cf., pour les notations, le précédent paragraphe) intérieur à $\widehat{B'C'}$, d'une part, et le segment $-1 \leq t \leq 1$ d'autre part, que la fonction $z = f(t)$ établit entre ces éléments de frontière de Γ et de $\mathfrak{C}$; on trouvera

$$\left| \frac{f(t) - f(t')}{l(t) - l(t')} \right| \leq \frac{\text{const.}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^p}, \quad (-1 \leq t \leq t' \leq 1),$$

où p désigne un nombre positif arbitrairement grand et où la constante est un nombre positif, borné dans les deux sens et qui dépend de l'aire σ du domaine, du contour, du choix de l'arc $\widehat{BC}$ et de la quantité ε figurant dans l'inégalité (3.7), cette dernière quantité dépendant d'ailleurs elle-même du contour et de l'arc $\widehat{BC}$.

En effet, moyennant les inégalités (3.7), $\gamma[l(t)]$ est une fonction croissante de t dans l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$; les résultats du paragraphe 21 s'appliquent et l'on a, en tout point de $\widehat{BC}$ ⁽⁸⁷⁾,

$$|\gamma[l(t)] - \gamma[l(t')]| \leq \text{const.} \cdot \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

inégalité dans laquelle le symbole const. désigne un nombre inverse

⁽⁸⁷⁾ De la relation

$$d\gamma(t) = \sin \Psi[l(t)] dl(t),$$

on tire, en tenant compte de (3.7),

$$|\gamma(t) - \gamma(t')| \geq \sin \varepsilon |l(t) - l(t')|,$$

inégalité qui, jointe à celle du texte, fournit pour $l(t)$ un module de continuité dans tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$. Comme $\Psi(l)$ envisagée comme fonction de l est continue, $\Psi[l(t)]$, envisagée comme fonction de t , sera aussi continue. Or, $l(t)$ et $\Psi[l(t)]$ sont reliées par la formule de M. Cisotti (cf. la fin de ce paragraphe); des raisonnements imités de ceux de M. Leray (cf. §§ 17-21 de son *Mémoire des Comment. Math. Helv.*) permettent alors d'en déduire que $l(t)$ vérifie pour $-1 \leq t \leq 1$ une condition de Hölder d'indice aussi voisin de 1 que l'on veut.

de celui qui figure au dénominateur de l'inégalité (3.5) et qui reste valable tant que la différence $t' - t$ est suffisamment petite ⁽⁸⁸⁾.

Transportons les axes du plan z parallèlement à eux-mêmes de manière à amener l'origine en un point M ⁽⁸⁹⁾ de $\widehat{BC}$. Nous appellerons (comme plus haut) t_2 l'affixe réel de son image dans le plan $\mathfrak{C}$: on a $-1 \leq t_2 \leq 1$. Considérons alors la fonction $\arg z(t)$; l'intersection de $\widehat{BC}$ avec Mx se réduisant à un point unique, on pourra, grâce aux inégalités (3.7), définir cette fonction de manière que

$$(3.7') \quad \begin{cases} \varepsilon \leq \arg z(t) \leq \pi - \varepsilon & \text{pour } t \text{ réel et tel que } t_2 \leq t \leq 1. \\ -\varepsilon \geq \arg z(t) \geq -\pi + \varepsilon & \text{» } -1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

Il s'ensuit qu'au point M , $\arg z(t)$ subit une discontinuité égale à π .

Les valeurs de $\arg z(t)$ en tout point de l'arc $\widehat{CB}$ de Γ' complémentaires de $\widehat{BC}$ se déduiront par continuité des valeurs précédentes; l'on suppose le demi-axe positif Mx orienté de manière à pénétrer à l'intérieur du domaine Γ ; la fonction $\arg z(t)$, continue dans Γ et sur Γ' (c'est-à-dire dans $\mathfrak{C}$) sauf au point M , sera aussi uniforme, le voisinage de $z = 0$ excepté. De plus, Γ' étant un contour simple, on a

$$(3.7'') \quad |\arg z(t)| \leq 2\pi k,$$

k étant un entier borné.

Effectuons alors une transformation du plan z définie par

$$(3.8) \quad z_1 = z^{\frac{1}{n}}, \quad (n \geq 2).$$

Le domaine Γ_1 , transformé de Γ sera d'un seul tenant, puisque, d'une part, Γ est à connexion simple et que, d'autre part, la correspondance ponctuelle (3.8) et sa réciproque, sont dépourvues de points multiples. Le contour Γ_1 qui limite Γ_1 est le transformé de Γ' ; c'est, par conséquent, une courbe de Jordan simple à tangente continue partout,

⁽⁸⁸⁾ Dans la suite, il sera toujours sous-entendu que cette dernière condition est remplie.

⁽⁸⁹⁾ Les points B et C étant distincts de B' et C' , le point M pourra coïncider avec B ou C .

le point M excepté. Nous appellerons γ_1 et $\Psi_1(\gamma_1)$ les éléments de Γ_1 analogues aux éléments γ et $\Psi(\gamma)$ de Γ . Soit $\widehat{B_1C_1}$ l'arc transformé de $\widehat{BC}$; nous allons montrer que $\widehat{B_1C_1}$ possède la propriété suivante :

LEMME. — *Il existe un nombre positif η_1 , non nul, tel que l'intersection avec $\widehat{B_1C_1}$, des droites d'équation*

$$y' = \alpha,$$

se réduit à un seul point pourvu que ⁽⁹⁰⁾

$$|\alpha| \leq \eta_1.$$

La démonstration se décompose en deux parties.

1° On peut trouver un nombre positif non nul η_1 jouissant de la propriété suivante : la portion $\widehat{PN}$ de $\widehat{BC}$, comprise entre les droites $y = \pm \eta_1$, se transforme de manière que $\Psi_1(\gamma_1)$ soit compris entre 0 et π le long de $\widehat{P_1M_1}$, transformé de $\widehat{PM}$ et aussi le long du transformé $\widehat{MN_1}$ de $\widehat{MN}$.

Appelons, en effet, M' et M'_1 les points courants correspondant sur Γ' et Γ'_1 , $V(\gamma)$ et $V_1(\gamma_1)$ les angles que font les tangentes à M' et à M'_1 avec les rayons vecteurs ρ et ρ_1 , respectivement, issus de l'origine M , commune aux plans z et z_1 . La transformation (3.8) étant conforme en tout point autre que M , on a

$$V(\gamma) = V_1(\gamma_1)$$

aux points correspondants de Γ' et Γ'_1 .

Cela posé, $V(\gamma)$ est, par hypothèse, une fonction continue de son argument, nulle à l'origine. Il existe donc un nombre positif non nul η_1 , tel que

$$(3.9) \quad |V(\gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

⁽⁹⁰⁾ Si le point M coïncide avec le point B , par exemple, la propriété ne subsiste que si

$$0 < \alpha < \eta_1.$$

pourvu que

$$|y| \leq \eta_1.$$

D'autre part, on a, en combinant l'équation (3.8) avec les inégalités (3.7'),

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\varepsilon}{n} \leq \arg z_1 \leq \frac{\pi}{n} - \frac{\varepsilon}{n} & \text{le long de } \widehat{MC}, \\ -\frac{\varepsilon}{n} \geq \arg z_1 \geq -\frac{\pi}{n} + \frac{\varepsilon}{n} & \text{le long de } \widehat{BM}. \end{array} \right.$$

L'ensemble des inégalités (3.9) et (3.10) permet d'écrire, en remarquant que

$$\Psi_1(y_1) = \arg z_1 \pm V_1(y_1) = \arg z_1 \pm V(y) \quad \text{pour } 0 \leq y \leq \eta_1,$$

$$\Psi_1(y_1) = \pi + \arg z_1 \pm V(y) \quad \text{pour } -\eta_1 \leq y \leq 0$$

l'inégalité

$$\pi > \Psi_1(y_1) > 0 \quad \text{pour } -\eta_1 \leq y \leq \eta_1,$$

ce qui justifie notre assertion.

2° Les points de BC d'ordonnée supérieure à η_1 en valeur absolue auront pour transformés des points d'ordonnées supérieures, en valeur absolue, à

$$\eta_2 = \frac{\sin \frac{\varepsilon}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \varepsilon} \eta_1^{\frac{1}{n}}.$$

En effet, introduisons dans le plan z les coordonnées polaires ρ et θ ; pour un point quelconque de BC on a, en tenant compte des inégalités (3.7'),

$$|y| = \rho |\sin \theta| \geq \rho \sin \varepsilon,$$

puisque, sur $\widehat{BC}$, $|\theta|$ est compris entre ε et $\pi - \varepsilon$. Par ailleurs, le transformé M'_1 de M' aura, d'après (3.8) et (3.10), une ordonnée y_1 , telle que

$$|y_1| = \left| \rho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{\theta}{n} \right|.$$

Dès lors, en éliminant ρ entre les expressions de y et de y_1 , il vient

$$|y_1| = \left| y^{\frac{1}{n}} \frac{\sin \frac{\theta}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \theta} \right|.$$

La dérivée, par rapport à θ , de $\frac{\sin \frac{\theta}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \theta}$ est égale à

$$\frac{\sin \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta}{n \sin^{\frac{n+1}{n}} \theta}.$$

Cette expression étant manifestement positive pour les valeurs considérées de θ , nous pouvons écrire

$$\left| \frac{\sin \frac{\theta}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \theta} \right| \geq \frac{\sin \frac{\varepsilon}{n}}{\sin^{\frac{1}{n}} \varepsilon},$$

ce qui établit notre lemme. [Notons que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de continuité de $\Psi(l)$.]

De là, il est aisé de conclure : il suffit de choisir pour η un nombre plus petit à la fois que η_1 et η_2 . En effet, d'après l'alinéa 1°, l'arc de $\widehat{BC}$ intérieur à la bande $y = \pm \eta_1$ et par suite à la bande $y = \pm \eta$ se transformera en un arc de Γ'_1 le long duquel $\Psi_1(y_1)$ sera positif; d'après l'alinéa 2°, les portions restantes de $\widehat{BC}$ auront pour transformés des arcs de Γ'_1 , extérieurs à la bande

$$y = \pm \eta_2$$

et, *a fortiori*, à la bande $y = \pm \eta$.

Cela étant, considérons un point M'_1 de Γ'_1 d'ordonnée y_1 telle que $0 \leq y_1 \leq \eta$, et soit A_1 le transformé de A . On peut supposer A_1 étranger à la bande $y = \pm \eta$. Le lemme précédent permet alors d'affirmer que $\Lambda(\widehat{A_1 M}, \widehat{M'_1 C_1})$ est supérieur à la différence des ordonnées de M'_1 et M ; soit

$$\Lambda(\widehat{A_1 M}, \widehat{M'_1 C_1}) \geq y_1.$$

La fonction $z_1 = [z(t)]^{\frac{1}{n}}$ effectue la représentation conforme du domaine Γ'_1 sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{C}$ de la variable t de manière à faire correspondre les points A_1, B_1, C_1 aux points $t = \infty, -1, +1$;

soient t et t' les affixes (réels) des images de M et de M' ; on a, rappelons-le,

$$-1 \leq t \leq t' \leq 1.$$

Il résulte donc de l'inégalité précédente, en utilisant le lemme du paragraphe 21, en désignant par le symbole const. un nombre inverse de celui qui figure au dénominateur de l'inégalité (3.5) [en l'espèce, ce nombre dépend du contour Γ' et de l'arc de Γ' contenant M et compris entre les droites $y = \pm \eta$; comme η est le même pour tous les points de $\widehat{BC}$, nous pouvons dire que la constante ci-dessus est une fonction de t supérieurement bornée dans l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$] et, en posant encore $t_4 = \infty$, $t_1 = t$, $t_2 = t'$, $t_3 = 1$,

$$|y_1(t')| \leq \frac{2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

où σ désigne l'étendue intérieure du domaine Γ_1 considéré.

Or,

$$y_1(t') = \rho^n(t') \sin \frac{\theta(t')}{n},$$

en désignant par ρ et θ les coordonnées polaires du point M' de $\widehat{BC}$ dont M'_1 est le transformé; on déduit donc de l'inégalité précédente, en y remplaçant y_1 par sa valeur

$$\left| \rho(t') \sin^n \frac{\theta(t')}{n} \right| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{n}{2}}}.$$

D'après ce qu'on a vu,

$$\left| \sin^n \frac{\theta(t')}{n} \right| \geq \left| \sin^n \frac{\varepsilon}{n} \right| > 0,$$

on peut donc trouver une constante K qui dépendra de ε et qui sera bornée inférieurement de manière à pouvoir écrire

$$(3.11) \quad |\sin \theta(t')| \leq K \left| \sin^n \frac{\theta(t')}{n} \right|,$$

ce qui permet d'écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$|y(t')| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{K \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^2},$$

valable dans le voisinage suffisamment petit de chaque point de l'arc $\widehat{BC}$, extrémités comprises, à condition de désigner par σ la plus grande des aires des domaines Γ_i ⁽⁹¹⁾.

Revenons alors au système des axes primitifs Oxy ; cela s'écrira

$$(3.12) \quad |y(t) - y(t')| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{K \left| \text{Log} \frac{1}{|t-t'|} \right|^2},$$

inégalité dans laquelle le nombre const. dépend de t et K est un nombre indépendant de t ; la valeur de K est fonction de ε seulement, c'est-à-dire de l'arc $\widehat{BC}$. En résumé :

L'inégalité (3.12) est valable dans le voisinage fini de tout point, $M(t)$, appartient à l'arc $\widehat{BC}$; ce voisinage est défini par

$$|y(t) - y(t')| \leq \eta(t),$$

l'ensemble des nombres positifs $\eta(t)$ étant borné inférieurement pour $-1 \leq t \leq 1$.

Un raisonnement classique, que l'emploi du lemme de Borel-Lebesgue permet de simplifier, permet d'étendre cette propriété locale à tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$. En effet, l'arc $\widehat{BC}$ peut être partagé en un nombre fini d'arcs partiels de manière que chaque point de $\widehat{BC}$ soit intérieur à l'un au moins des arcs partiels, et que l'inégalité (3.12) soit vérifiée le long de chacun d'eux. Toutefois, la constante qui figure au numérateur de (3.12) peut, d'après ce que nous avons vu, changer d'un arc partiel à l'autre (le coefficient K , par contre, gardant la même valeur le long de $\widehat{BC}$); comme ces constantes sont supérieu-

(91) Il est clair que le nombre σ ainsi défini est supérieurement borné.

rement bornées dans leur ensemble, il suffira de choisir celle dont la valeur est maximum pour qu'une même inégalité (3.12) soit valable le long de chacun des arcs partiels considérés. Dès lors, une discussion élémentaire permettrait d'assigner à la constante de la formule (3.12) une valeur telle qu'une même inégalité (3.12) demeure valable sur deux arcs partiels consécutifs, puis sur trois, etc.; on peut donc choisir la constante qui figure dans (3.12) de manière que cette inégalité soit valable quelles que soient les valeurs de t et de t' de l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$. [La constante de (3.12) dépendra donc, en dernière analyse de Γ' et du choix de l'arc $\widehat{BC}$ seulement.] En d'autres termes, la fonction $\gamma(t)$ appartient dans tout cet intervalle à l'espace $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}}(t)$ ⁽⁹²⁾ (cf. § 11, Chap. I) le nombre positif n pouvant être choisi aussi grand qu'on le veut. Notons qu'en combinant avec (3.11) l'inégalité

$$\frac{d\gamma(t)}{dl(t)} = \sin \Psi[l(t)] \geq \sin \varepsilon = \text{const.},$$

déduite de (3.7), on montrera que $l(t)$ appartient également à l'espace $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}}(t)$ et l'on établirait que $l(t)$ vérifie une inégalité du type

$$(3.13) \quad |l(t) - l(t')| \leq \frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{K \sin \varepsilon \left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{n}{2}}} \quad (1 \leq t \leq 1),$$

⁽⁹²⁾ Il convient de faire remarquer une fois encore (cf. la fin du paragraphe 21) que les raisonnements exposés jusqu'ici s'étendent au cas où les quatre nombres dérivés de la fonction $x = x(\gamma)$ sont bornés le long de l'arc $\widehat{B'C'}$ de Γ' . On peut donc s'affranchir de l'hypothèse de l'existence et de la continuité de la tangente le long de BC (la démonstration du lemme du présent paragraphe doit alors être retouchée). L'ordonnée $\gamma(l)$ étant supposée monotone le long de l'arc $B'C'$, il suffit de remplacer dans les raisonnements $\Psi(l)$ par les fonctions $\Psi_{\min}(l)$, $\Psi_{\max}(l)$, égales respectivement aux angles algébriques des directions limites de P . du Bois Raymond-Dini (orientées dans le sens des l croissants) au point d'abscisse curviligne l . Il faut, par exemple, remplacer les inégalités (3.7) par les suivantes,

$$\varepsilon \leq \Psi_{\min}(l) \leq \Psi_{\max}(l) \leq \pi - \varepsilon \quad \text{le long de } \widehat{BC}.$$

Au fond, ce n'est donc pas la continuité des nombres dérivés qui importe, mais l'amplitude de leurs oscillations le long de l'arc considéré.

dans laquelle le symbole const. a même signification que pour (3.12).

Des considérations toutes pareilles s'appliquent aux arcs de Γ' le long desquels $x(t)$ est une fonction monotone de t , il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$(3.14) \quad -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \Psi(l) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

Le long de tels arcs on pourra construire pour $x(t)$ un module de continuité du type (3.12); on déduira, par un raisonnement identique au précédent, une inégalité du type (3.13) pour $l(t)$. Supposons alors que l'on puisse décomposer le contour Γ' (c'est-à-dire l'axe réel de t) en un nombre fini ou infini d'arcs le long desquels l'un des systèmes (3.7) ou (3.14) soit vérifié, le morcellement étant réalisé de telle sorte que chaque point de Γ' (c'est-à-dire de l'axe réel de t) soit *intérieur* à l'un au moins des arcs considérés. L'inégalité (3.13), étant alors vérifiée le long de chacun des arcs partiels, sera valable pour l'ensemble du contour (d'après le lemme de Borel-Lebesgue).

Les raisonnements précédents montrent en particulier qu'un tel morcellement de la frontière, est toujours possible lorsque $\Psi'(l)$ existe et est bornée⁽⁹³⁾. C'est l'hypothèse que nous ferons désormais; il vient alors, en utilisant (3.13) et en désignant, pour simplifier l'écriture, par const. le facteur $\frac{[2\sqrt{\pi\sigma} \text{ const.}]^n}{K \sin \varepsilon}$,

$$(3.15) \quad |\Psi[l(t)] - \Psi[l(t')]| \leq \text{const.} |l(t) - l(t')| \text{Max} |\Psi'(l)| \\ \leq \frac{\text{const. Max} |\Psi'(l)|}{\left| \text{Log} \frac{1}{|t - t'|} \right|^{\frac{n}{2}}} \quad (-1 \leq t \leq 1).$$

Cette inégalité fondamentale, valable le long de tout l'axe réel de t , va nous permettre d'améliorer le module de continuité (3.13) de $l(t)$ et de montrer que cette fonction possède le long de l'axe réel du plan z une dérivée finie et continue; c'est ce résultat que nous avons en vue.

(93) En modifiant légèrement les raisonnements on pourrait étendre ces conclusions au cas où $\Psi(l)$ serait dépourvue de dérivée mais admettrait des nombres dérivés bornés.

En effet, effectuons la transformation

$$t = i \frac{1-Z}{1+Z},$$

qui fait correspondre au domaine $\mathfrak{C}$ l'intérieur du cercle unitaire du plan $Z = X + iY$. Soient s et s' les arguments des points $Z = e^{is}$ et $Z = e^{is'}$, images des points d'affixes réels t et t' de $\mathfrak{C}$; on a, d'après (3.15) ⁽⁹⁴⁾,

$$|\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]| < \frac{\text{const.} \cdot |\text{Max } \Psi'(l)|}{\left| \text{Log} \frac{1}{|s-s'|} \right|^{\frac{n}{2}}},$$

puisque la fonction $t(Z)$ est analytique pour t réel.

Le nombre positif n étant arbitrairement grand, les intégrales du type (1.21) (cf. § 11) déduites de $\Psi[l(s)]$ appartiennent à l'espace $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}(s)$, l'indice $\frac{n}{2} - 1$ étant positif.

En particulier, la fonction analytique de M. Villat,

$$(3.16) \quad F(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \Psi[l(s')] - s' \right\} \frac{1+Ze^{-is'}}{1-Ze^{-is'}} ds' - i \log a,$$

définie pour $|Z| \leq 1$ et dont les parties réelle et imaginaire se réduisent respectivement à $\Psi[l(s)] - s$ et à $T(e^{is})$ pour $Z = e^{is}$ avec

$$(3.16') \quad T(e^{is}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \Psi[l(s)] - s - \Psi[l(s')] + s' \right\} \frac{ds'}{\tan \frac{s-s'}{2}} - \log a,$$

⁽⁹⁴⁾ La constante qui figure dans cette inégalité est égale au produit de la constante figurant dans (3.15) par le maximum de la fonction de deux variables s et s' ,

$$\left| \frac{\log \frac{1}{|t(s) - t(s')|}}{\log \frac{1}{|s - s'|}} \right|^{\frac{n}{2}}$$

avec

$$0 \leq s \leq 2\pi, \quad 0 \leq s' \leq 2\pi.$$

où a désigne une constante réelle positive, vérifie pour $|Z| \leq 1$ une condition $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}^{(a)}(Z)$.

Cela posé, la correspondance conforme entre le domaine Γ et le cercle $|Z|=1$, sera donnée par la formule bien connue de M. U. Cisotti ⁽⁹⁵⁾

$$\frac{dz}{dZ} = e^{iF(Z)},$$

⁽⁹⁵⁾ Rappelons rapidement l'origine de cette formule. Étant donné le contour Γ du plan z et le cercle $|Z|=1$ du plan Z , supposons qu'on ait déterminé la fonction $z(Z)$ qui réalise l'application conforme du premier de ces domaines sur l'autre; si la dérivée $\frac{dz}{dZ}$ existe pour $Z = e^{is}$, nous aurons

$$\frac{dz}{dZ} = \left| \frac{dz}{dZ} \right| e^{i\{\Psi[l(s)]-s\}}.$$

Il suit de là que la partie réelle de la fonction $\frac{1}{i} \log \frac{dz}{dZ}$ se réduit à $\{\Psi[l(s)] - s\}$ pour $Z = e^{is}$; cela veut dire que $\frac{1}{i} \log \frac{dz}{dZ}$ est donnée par la formule (3.16) du texte; l'égalité ainsi obtenue est équivalente à la formule de M. Cisotti.

Il faut remarquer que la fonction $\Psi_1(s) = \Psi[l(s)] - s$ est périodique de période 2π . Choisissons, en effet, $\Psi[l(s)]$ de manière que

$$-\pi \leq \Psi[l(0)] \leq \pi.$$

Toutes les autres valeurs de π se déduiront par continuité et nous aurons

$$\Psi[l(s+2\pi)] = \Psi[l(s)] + 2\pi.$$

Cette relation fonctionnelle entraîne la périodicité de $\Psi_1(s)$ et, par suite, la continuité de cette fonction pour $s=0$; les expressions (3.16) et (3.16'), introduites dans le texte, auront donc un sens pour $s=0$. Il semble donc qu'il y a avantage à substituer $\Psi_1(s)$ à $\Psi[l(s)]$ dans les formules de M. Cisotti.

Notons encore que l'équation

$$\frac{dl(s)}{ds} = ae^{-T_1(e^{is})}$$

[où $T_1(e^{is})$ est la fonctionnelle de $l(s)$ définie par (3.16')] déduite de la formule de M. Cisotti, peut être considérée comme l'équation de définition de $l(s)$ et peut servir de point de départ à l'étude du problème de représentation conforme de Riemann dans le cas de contours Γ' pourvus d'une tangente continue; en rapprochant les remarques qui précèdent avec les développements du paragraphe 23, on constatera que les formules de M. Cisotti sont au problème de Riemann ce que les formules de M. Villat sont au problème de Helmholtz.

où la constante réelle a est, *a priori*, inconnue et où $F(Z)$ est la fonction définie par (3.16). D'après ce qu'on a vu, l'expression de $F(Z)$ a un sens pour $|Z|=1$. On peut donc faire $Z=e^{is}$ dans la relation précédente; il vient, en prenant les modules des deux membres

$$\frac{dl(s)}{ds} = a e^{-T_1(e^{is})},$$

égalité où l'on a posé

$$T_1(e^{is}) = T(e^{is}) + \log a.$$

Le coefficient de a du second membre appartient à l'espace $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}^{\infty}(s)$ dans tout l'intervalle $0 < s < 2\pi$, extrémités 0 et 2π comprises; on peut donc majorer le paramètre a en fonction de la longueur totale L ⁽⁹⁶⁾ de Γ' en écrivant

$$L = a \int_0^{2\pi} e^{-T_1(e^{is})} ds \geq a \cdot \text{const.},$$

l'intégrale du second membre étant inférieurement bornée par une constante positive non nulle puisque son élément différentiel est continu en s . Il suit de là que $\frac{dl(s)}{ds}$ existe et appartient également à l'espace $\mathcal{L}_{\frac{n}{2}-1}^{\infty}(s)$.

Cela permet d'énoncer le résultat suivant : étant donné un contour Γ' du plan z situé à distance finie et donné par son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l),$$

où $\Psi(l)$ désigne une fonction admettant une dérivée partout bornée, la fonction $z = z(Z)$, qui réalise l'application de l'intérieur Γ de Γ' sur le cercle unitaire du plan Z , possède une dérivée continue $\frac{dz}{dZ}$ pour $|Z| \leq 1$;

⁽⁹⁶⁾ Il importe de remarquer que la majoration du coefficient a de la formule de M. Cisotti peut être faite dans des cas beaucoup plus généraux. On consultera, à ce sujet, le mémoire de M. Leray et le paragraphe 25 de notre travail où cette majoration est rendue indépendante de la construction du module de continuité pour $T(e^{is})$.

on a

$$\left| \frac{dz(e^{is})}{dZ} - \frac{dz(e^{is'})}{dZ} \right| \leq \frac{\text{const.}}{\left| \text{Log} \frac{1}{s-s'} \right|^{\frac{n}{2}}},$$

inégalité dans laquelle la valeur de la constante ne dépend que du contour Γ' (notamment par l'intermédiaire de sa longueur, de la surface σ qu'elle délimite, de la grandeur $[\text{Max } \Psi'(l)]$ et de n et où le nombre n peut être pris aussi grand qu'on le veut.

Il nous a paru intéressant de retrouver ce résultat par une méthode nouvelle. On généralise aisément; en supposant que $\Psi^{(p)}(l)$ existe et appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(l)$, on montrerait que $\frac{d^{(p+1)}l}{ds^{p+1}}$ existe et appartient à l'espace $\mathcal{L}_{n-1}(s)$, lorsque le nombre n est supérieur à l'unité. On retombe ainsi, sous une forme moins large, mais plus précise, sur un théorème de MM. Holzmann et Lavrentieff⁽⁹⁷⁾.

Il nous reste à étendre le résultat précédent à un cas particulier important en raison de ses applications en hydrodynamique. Respectons les notations anciennes et considérons un contour Γ' simple, fermé, et pourvu d'une tangente en chacun de ses points; supposons que la fonction $\Psi(l)$ correspondante possède les propriétés suivantes le long d'un arc $\widehat{B'C'}$ de Γ' :

1° La fonction $\gamma(l)$ ne décroît pas le long de $\widehat{B'C'}$; cela se traduit par les inégalités

$$(3.17) \quad 0 \leq \Psi(l) \leq \pi.$$

Cette fois, $\Psi(l)$ peut atteindre les valeurs extrêmes de 0 et π ; mais en un nombre fini de points de $\widehat{B'C'}$ seulement; d'après cela, l'arc $\widehat{B'C'}$ ne peut pas comprendre de portions rectilignes horizontales.

2° On peut trouver sur $\widehat{B'C'}$ deux points B et C, distincts de B' et C', d'abscisses l_1 et l_2 respectivement ($l_1 < l_2$) et tels que la dérivée $\Psi'(l)$ existe et reste continue dans l'intervalle $l_1 \leq l \leq l_2$, extrémités comprises; d'après cela $\Psi'(l_1 + 0)$ existe et est finie.

(97) *Recueil de la Soc. Math. de Moscou*, 38, 1931, p. 51.

3° La dérivée $\Psi'(l)$ existe le long de l'arc $\widehat{B'B}$; elle est discontinue pour $l = l_1$ ⁽⁹⁸⁾; on a

$$(3.18) \quad \Psi'(l_1 - 0) = \infty,$$

$$4^\circ \quad \Psi(l_1 + 0) = \Psi(l_1 - 0).$$

Nous supposons, de plus, que la direction Ox a été choisie de manière que toute demi-droite parallèle à Ox , issue d'un point quelconque de $\widehat{B'C'}$, pénètre dans l'intérieur du contour Γ' .

(Ainsi, les tangentes positives aux arcs, $\widehat{B'B}$ et $\widehat{BC}$ se raccordent en leur point commun B ; la disposition des deux arcs dans le voisinage de ce point est identique à celle que présente la ligne libre et l'obstacle dans le voisinage du point de détachement correspondant lorsque le détachement n'est pas en proue; cf. le paragraphe 13.)

Choisissons alors, comme plus haut, un point A sur l'arc $\widehat{C'B'}$ complémentaire de $\widehat{B'C'}$ et soit $z = z(t)$ la fonction analytique qui réalise l'application conforme de Γ sur $\mathfrak{C}$ de manière qu'aux points A, B, C correspondent les points $t = \infty, t = -1, t = +1$ de l'axe réel. La fonction $\Psi'(l)$ étant continue, les fonctions $l(t)$ et $\Psi[l(t)]$ vérifient respectivement (d'après le théorème ci-dessus) les inégalités (3.12) et (3.15) dans tout l'intervalle $-1 < t < t' < 1$ et même en ses extrémités $t = \pm 1$ pourvu que $\Psi(l_1)$ et $\Psi(l_2)$ soient distincts de 0 et de π . Nous nous proposons de compléter ce résultat en montrant que, moyennant les hypothèses faites, il subsiste pour $t = -1$ si $\Psi[l(-1)] = \Psi(l_1) = \pi$ et est en défaut si $\Psi(l_1) = 0$.

Observons d'abord qu'en vertu de (3.17) l'intersection de $\widehat{B'C'}$ avec toute droite parallèle à l'axe des x se réduit à un point unique; mais la direction $y = 0$ est la seule à jouir de cette propriété dans le voisinage du point B . En effet, d'après (3.18) la courbure de l'arc $\widehat{B'B}$ y est infinie; il suit de là que toute droite issue de B coupe l'arc $\widehat{B'C'}$

(98) En fait, il est inutile d'étendre les hypothèses 2° et 3° à l'ensemble de l'arc $\widehat{B'C'}$; il suffirait de les supposer vérifiées dans le voisinage du point B seulement.

en deux points distincts, à moins d'être confondue avec la tangente en B à cet arc : il est donc impossible de trouver un système d'axes relativement auquel l'arc $\widehat{B'C'}$ vérifie dans le voisinage de B les conditions (3.7).

Toutefois, les raisonnements du précédent paragraphe permettent de construire pour $\gamma[l(t)]$ un module de continuité du type (3.5'), valable pour $l = -1$. Comme l'axe $\widehat{BC}$ ne comprend, par hypothèse, aucune portion rectiligne parallèle à Ox , l'abscisse curviligne l est, par suite, une fonction continue $l(\gamma)$ de γ . Soit $\eta(\hat{c})$ le module de continuité de $l(\gamma)$ [$\eta(\hat{c})$, en l'espèce, n'est pas lipschitzien, puisque $\frac{dl}{d\gamma} = \frac{1}{\sin \Psi}$ n'est pas borné par $\widehat{BC}$]; $l[\gamma(t)]$, envisagée comme fonction de t possède le module de continuité de $\eta \left[\frac{\text{const}}{\left| \text{Log} \frac{1}{t-t'} \right|^{\frac{1}{2}}} \right]$.

Cela posé, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes de manière à amener leur origine au point B. D'après les hypothèses faites, la direction Bx pénètre à l'intérieur de Γ' ; on peut donc définir la fonction $\arg z(t)$ comme nous l'avons fait au début de ce paragraphe et attribuer aux points de $\widehat{BC}$ des arguments $\Theta(t)$ positifs. Effectuons alors la transformation (3.8); nous affecterons encore de l'indice 1 les éléments relatifs au plan z , et au domaine Γ , ainsi obtenus. Cette transformation permet de passer de (3.5') à (3.12) si

1° il existe un nombre positif η tel que l'intersection $\widehat{BC}_1$ avec la droite d'équation $\gamma = \alpha$ se réduit à un point unique lorsque

$$0 \leq \alpha \leq \eta;$$

2° il existe un nombre positif K borné supérieurement, vérifiant l'inégalité (3.11).

Or, il est clair que cette deuxième condition n'est pas remplie lorsque

$$\Psi[l(-1)] = \Psi(t_1) = \Theta(-1) = 0;$$

n étant plus grand que 2 et $\Theta(t)$ étant continue pour $-1 \leq t \leq 1$, le

rapport [cf. (3.11)]

$$\frac{\sin \Theta(t)}{\sin^n \frac{\Theta(t)}{n}}$$

n'est pas borné pour $t = -1$; cela justifie la première partie de notre assertion.

Au contraire, le rapport précédent est évidemment borné pour $t = -1$ lorsque $\Psi(l_1) = \pi$. Dans ce cas le transformé $\widehat{BC}_1$ de $\widehat{BC}$ aboutira au point B en faisant avec Bx un angle égal à $\frac{\pi}{n}$; l'existence et la continuité de $\Psi'(l)$ assurent alors la croissance de l'ordonnée y_1 de $\widehat{BC}_1$ dans un voisinage fini du point B. D'autre part, l'ordonnée y d'un point M de $\widehat{BC}$ peut être minorée en fonction de $l - l_1$, où l désigne l'abscisse curviligne de M⁽⁹⁹⁾; il en sera donc de même de l'ordonnée y_1 de sa transformée. Ces deux remarques entraînent l'existence du nombre η défini ci-dessus et achèvent la démonstration de notre théorème en ce qui concerne la fonction $y[l(t)]$; l'inégalité (3.12) est donc valable le long de tout l'arc $\widehat{BC}$, extrémités comprises.

Mais, en l'espèce, on ne peut pas passer de (3.12) à (3.13) dans le voisinage de $t = -1$, car la dérivée

$$\frac{dy(t)}{dl(t)} = \sin \Psi[l(t)]$$

(99) En effet, l'arc $\widehat{BC}$ est dépourvu, par hypothèse, de portions rectilignes parallèles à Bx ; la mesure de l'ensemble des points de $\widehat{BC}$ en lesquels $\Psi(l)$ se réduit à 0 ou à π est donc nulle. La fonction $\Psi(l)$ étant continue, il suit de là, qu'étant donné un nombre positif ε abstraitement petit, on peut trouver deux nombres ε_1 et $\delta(l)$ positifs et non nuls, tels que la mesure de l'ensemble des points de $\widehat{BM}$ sur lesquels

$$\sin \Psi(l) \geq \varepsilon_1$$

soit supérieure à $\delta(l)$ moyennant la condition $l - l_1 > \varepsilon$; le nombre $\delta(l)$ est évidemment une fonction croissante de son argument l . On peut alors écrire

$$y = \int_{l_1}^l \sin \Psi(l) dl \geq (l - l_1) \delta(l) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

n'est pas inférieurement bornée dans ce voisinage. On emploie alors un artifice pour déduire directement l'inégalité (3.15) de (3.12).

En effet, le long de $\widehat{BC}$ (extrémités comprises), on peut écrire

$$\sin \Psi \, d\Psi = \Psi'(t) \, dy.$$

On en tire, en intégrant,

$$|\cos \Psi[l(t)] - \cos \Psi[l(t')]| \leq |\text{Maximum } \Psi'(t)| |y[l(t)] - y[l(t')]|$$

avec

$$(-1 \leq t \leq t' \leq 1).$$

En remarquant que

$$\frac{|\cos \pi - \cos \Psi|}{|\pi - \Psi|^2} \geq \frac{2}{\pi^2},$$

lorsque Ψ est compris entre 0 et π , l'inégalité précédente entraîne

$$|\Psi[l(-1)] - \Psi[l(t)]|^2 \leq \frac{\pi^2}{2} \text{Max} |\Psi'(t)| |y[l(-1)] - y[l(t)]|$$

ou encore

$$|\Psi[l(-1)] - \Psi[l(t)]| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\text{Max} |\Psi'(t)|} |y[l(-1)] - y[l(t)]|^{\frac{1}{2}} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

En combinant le résultat précédent avec (3.12), il vient, en conservant les notations de (3.12),

$$|\Psi[l(-1)] - \Psi[l(t)]| \leq \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n}{2}+1} (\sigma \text{ const.})^{\frac{n}{2}} \text{Max} |\Psi'(t)|}{\sqrt{K} \left| \text{Log} \frac{1}{|-1-t|} \right|^{\frac{n}{4}}} \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

inégalité qui, n étant arbitrairement grand, fournit pour la fonction $\Psi[l(t)]$ un module de continuité, valable pour $t = -1$, qui est bien du type (3.15).

La formule de M. Cisotti a donc un sens le long de tout l'arc $\widehat{BC}$, extrémités comprises; il suit de là qu'au point B de cet arc $\frac{d l(t)}{dt}$ existe et vérifie encore une condition $\mathcal{L}_{\frac{n}{4}-1}^2(t)$.

Dans un travail ultérieur nous appliquerons les raisonnements de ces deux paragraphes à l'examen de cas plus compliqués; faute

de place, nous nous sommes borné à résumer les méthodes employées et à énoncer les préliminaires indispensables aux applications hydrodynamiques.

23. PROBLÈME DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ. — Nous nous proposons maintenant de résoudre le problème de représentation conforme de Helmholtz; ce problème consiste à déterminer un mouvement à la Helmholtz qui correspond à une configuration donnée des éléments rigides : parois planes et obstacles. D'une manière précise, soit un arc de courbe $\widehat{BC}$ situé dans le plan $z = x + iy$. La courbe dont l'arc $\widehat{BC}$ fait partie est supposée avoir une tangente en chacun de ses points⁽¹⁰⁰⁾; on la définit au moyen de son équation intrinsèque

$$\Psi = \Psi(l),$$

qui relie l'abscisse curviligne l à l'angle Ψ que fait avec Ox la demi-tangente (orientée dans le sens des l croissants) à l'obstacle. Nous désignerons par α et β les abscisses curvilignes des points B et C que nous choisissons de manière que $0 < \alpha < \beta$ et qu'aux l croissants correspondent des ordonnées croissantes. On suppose que :

1° L'intersection de $\widehat{BC}$ avec les droites d'équation $y = \text{const.}$ se réduit à un point unique; toutefois, $\widehat{BC}$ pourra comprendre des portions rectilignes parallèles aux parois; mais on suppose essentiellement que l'obstacle ne se réduit pas à une lame placée parallèlement à μ_1 et μ_2 ; cette condition se traduira par des inégalités

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi \quad \text{pour } \alpha \leq l \leq \beta,$$

la fonction $\Psi(l)$ ne pouvant se réduire identiquement à 0 ou à π dans tout l'intervalle $\alpha \leq l \leq \beta$. Nous supposerons de plus que $\Psi(\alpha) \neq \pi$, $\Psi(\beta) \neq 0$ (cf. § 26)⁽¹⁰¹⁾.

⁽¹⁰⁰⁾ Sous sa forme actuelle la théorie ne s'applique qu'aux obstacles lisses dépourvus de points anguleux. Mais des extensions sont possibles au cas des profils courbes, comportant des points anguleux.

⁽¹⁰¹⁾ Ces hypothèses ne sont pas essentielles pour la démonstration du théorème

2° La courbure $\frac{d\Psi(l)}{dl}$ existe et est continue pour $\alpha \leq l \leq \beta$ ⁽¹⁰²⁾.

L'arc $\widehat{BC}$ est placé à l'intérieur d'une bande parallèle à Ox dont les bords supérieur et inférieur seront désignés respectivement par μ_1 et μ_2 ; les distances de C à μ_1 , de B à μ_2 seront respectivement appelées d_1 et d_2 ; les longueurs d_1 et d_2 sont données *a priori*; elles peuvent être infinies. Il est clair que la donnée de la fonction $\Psi(l)$ et des quatre paramètres α , β , d_1 et d_2 , définit complètement la configuration des éléments rigides.

Ceci posé, les résultats du premier Chapitre permettent de formuler le problème de Helmholtz comme suit :

Problème du sillage. — Déterminer dans le plan de la variable

$$f = \varphi + i\psi$$

(plan du potentiel complexe) un domaine F (cf. *fig. 2*) formé d'une bande indéfinie, parallèle à $O\varphi$, entaillée le long de tout le demi-axe réel positif, et définir dans F une fonction analytique $z = z(f)$ de manière que le domaine $\mathcal{A}$ du plan z , que la fonction $z = z(f)$ fait correspondre à F , ait les propriétés suivantes :

La frontière de $\mathcal{A}$ se compose des parois μ_1 et μ_2 de l'arc $\widehat{BC}$ et de deux lignes λ_1 et λ_2 de forme inconnue *a priori*, joignant le point à l'infini en *aval* ($x = +\infty$) aux points C et B respectivement. Les courbes λ_1 et λ_2 possèdent en chacun de leurs points (extrémités B et C comprises) une tangente continue.

La transformation $z = z(f)$ fait correspondre entre eux les éléments de frontière suivants :

D'abord, la paroi μ_1 au bord $\psi = \psi_1$, ($\psi_1 > 0$), inconnu *a priori* de la bande F ; la paroi μ_2 au bord $\psi = -\psi_2$ (la constante positive ψ_2 est inconnue *a priori*) de la bande F . La courbe constituée par l'ensemble

d'existence : voir le travail de M. Leray; mais elles facilitent et simplifient l'exposition; sans elles, toutes les conclusions du paragraphe 29 tomberaient en défaut.

⁽¹⁰²⁾ Ces hypothèses ne sont pas indispensables : voir les travaux que publiera M. Oudart.

des lignes λ_1 , l'arc $\widehat{BC}$ (ou encore l'obstacle) et λ_2 aura pour image l'ensemble des deux bords de la coupure pratiquée le long de $O\varphi$. L'origine $f=0$ doit être l'image d'un point de l'obstacle que nous appellerons O ; d'après cela, les points C et B auront pour images les points d'affixes φ_1 et φ_2 (φ_1 et φ_2 étant des constantes réelles, positives, *a priori* inconnues) situés, le premier sur le bord supérieur, le second sur le bord inférieur de la coupure.

En outre, la transformation $z = z(f)$ est assujettie à vérifier les conditions suivantes :

1° Le long de λ_1 (ou de λ_2), c'est-à-dire le long du segment $(\varphi_1, +\infty)$ [ou du segment $(\varphi_2, +\infty)$], la correspondance $z = z(f)$ doit conserver les longueurs. Cela se traduit par la condition

$$\left| \frac{df}{dz} \right| = 1,$$

valable le long des lignes libres (ou de leurs images).

2° Aux points à l'infini de F où $\varphi > 0$, on doit avoir

$$z = f + \text{série entière en } \frac{1}{f}.$$

3° Aux points à l'infini de F où $\varphi < 0$, on doit avoir

$$z = kf + \text{série entière en } \frac{1}{f},$$

où k est une constante réelle, positive, et *a priori* inconnue.

Relativement à cet énoncé nous ferons observer que, dans le schéma du sillage, les points de détachements des lignes libres sont arbitrairement placés aux extrémités de l'obstacle. Les exemples de mouvements à la Helmholtz (notamment le cas de l'obstacle en accolade) nous incitent à assouplir le schéma précédent et à nous poser le problème suivant :

Problème de la proue. — Étant donné un obstacle $\widehat{BC}$ de position

connue relativement aux parois μ_1, μ_2 du canal, trouver un sillage correspondant à un obstacle $P_1 P_2$ qui, soit coïncide avec l'arc $\widehat{BC}$, soit constitue une portion de cet arc. Si le point P_1 (ou P_2) coïncide avec C (ou B), la ligne libre λ_1 (ou λ_2) qui aboutit en ce point y présente soit un détachement en proue, soit un détachement vers l'aval (cf. § 13). Si le point P_1 (ou P_2) est intérieur à l'arc $\widehat{BC}$, la ligne λ_1 (ou λ_2) y présente un détachement en proue. Il y a lieu de noter que ce problème ne se réduit pas à celui du sillage lorsque l'arc $\widehat{P_1 P_2}$ coïncide avec l'obstacle $\widehat{BC}$; nous imposons ici aux lignes libres des conditions de détachement (détachement vers l'aval) qui n'interviennent pas dans l'énoncé du problème du sillage.

Nous allons maintenant mettre ici en équation chacun de ces problèmes. Pour abréger le langage, nous allons introduire l'espace abstrait $E(a, b, s)$; par définition $E(a, b, s)$ comprend toutes les fonctions réelles de la variable réelle s qui : 1° sont continues dans l'intervalle $a \leq s \leq b$; 2° admettent dans l'intervalle ab , extrémités comprises, des dérivées continues. Nous appellerons *norme* d'une fonction $f(s)$ appartenant à cet espace, la grandeur

$$\|f(s)\| = \text{Maximum de } |f(s)| + \text{Maximum de } |f'(s)|,$$

les maximums du second membre étant relatifs à l'intervalle a, b .

D'après cette définition de $E(a, b, s)$, cet espace est linéaire, normé, complet ⁽¹⁰³⁾.

En particulier, il résulte des hypothèses faites au début de ce paragraphe que $\Psi(l)$ appartient à l'espace $E(\alpha, \beta, l)$.

Mise en équation du problème du sillage. — Considérons une configuration donnée (dans le plan z), définie par la fonction $\Psi(l)$ et les quatre paramètres α, β, d_1 et d_2 . Donnons-nous, d'autre part, un

⁽¹⁰³⁾ Voir au sujet de ces définitions le paragraphe 28. Il est essentiel de noter que les éléments $l(s)$ de $E(0, \pi, s)$ ne sont pas nécessairement des fonctions croissantes de s ; les solutions des problèmes du sillage et de la proue constituent donc des éléments très particuliers de cet espace.

élément $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$ ⁽¹⁰⁴⁾ et les valeurs de deux paramètres a et b tels que $a < -1$, $b > 1$. Nous poserons

$$\Psi(s) = \Psi[l(s)].$$

Dans ces conditions (cf. §§ 8 et 12) :

1° Les équations (1.6), (1.6'), (1.8), (1.8') définissent les demi-périodes ω_1 et ω_3 , le paramètre q des fonctions elliptiques qui interviendront dans les formules ci-dessous, ainsi que les paramètres γ et s_1 .

2° L'équation (1.24), dans laquelle on substitue à $\Psi(s)$ sa valeur $\Psi[l(s)]$, définit une constante s_0 ; le domaine d correspondant est, dès lors, entièrement déterminé. La seconde relation (1.8') fait connaître le paramètre u_{01} , et par suite $u_{01} + \omega_3 = u_0$. Portons la valeur ainsi trouvée de u_0 dans (1.6''); on détermine ainsi le paramètre t_0 , et, par conséquent, d'après (1.4'), le quotient $\frac{\psi_2}{\psi_1}$.

De la façon même dont la valeur de t_0 a été obtenue, il résulte que $|t_0| \leq 1$; ainsi, les paramètres a, b, t_0 vérifient les conditions (1.4'').

3° Les équations (1.23), (1.27), (1.28) et (1.29), permettent de construire à partir des éléments $\Psi[l(s)] = \Psi(s)$, s_0 , ω_1 et ω_3 les fonctions $\Omega(Z) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y)$ et $T(e^{is})$ dans le domaine d précédemment défini.

4° La différentielle $df(Z)$ [cf. les formules (1.10) et (1.10')] est maintenant connue, d'après l'alinéa 2, au facteur $\psi_1 + \psi_2$ près. D'après l'alinéa 3, le second membre de l'équation (1.33'') de M. Villat est donc connu au même facteur près; l'équation en cause définit donc une famille de fonctions $L(s)$ croissantes, dépendant d'une constante d'intégration additive et d'une constante multiplicative ($\psi_1 + \psi_2$). Parmi les fonctions de cette famille, une et une seule vérifie les conditions

$$L(0) = \alpha, \quad L(\pi) = \beta,$$

qui permettent d'éliminer la constante additive et de déterminer le

(104) Au paragraphe 28 nous établirons que, moyennant les hypothèses faites sur la nature de l'obstacle, la fonction $l(s)$ est nécessairement un élément de $E(0, \pi, s)$; nous admettrons ce point pour le moment.

facteur $\psi_1 + \psi_2$ au moyen de la relation ⁽¹⁰⁵⁾

$$(3.19) \quad \beta - \alpha = \int_0^\pi e^{-T(e^{is})} |df(s)|$$

déduite de (1.33'') et dans laquelle $df(s)$ est supposée remplacée par les expressions (1.10) et (1.10').

Pour abréger, nous écrivons désormais

$$L(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b],$$

en désignant par V l'ensemble des transformations fonctionnelles qui

⁽¹⁰⁵⁾ C'est au sujet de la condition analogue à (3.19), imposée dans le cas du fluide indéfini à la constante multiplicative λ , analogue à $\psi_1 + \psi_2$ et *a priori* inconnue, que M. Sekerj-Zenkowitch [cf. l'Introduction] nous semble avoir commis une erreur de raisonnement.

Dans le cas du fluide indéfini, en effet, le problème du sillage (tel qu'il a été énoncé dans le texte), peut se ramener à déterminer la fonction $\Psi(s) = \Psi[l(s)]$ et la constante réelle λ (inconnue *a priori*) vérifiant un système de la forme

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Psi'(s) = \lambda F[\Psi'(s)], \\ (2) \quad & \lambda = \Phi[\Psi'(s)], \end{aligned}$$

où les symboles F et Φ désignent deux transformations fonctionnelles convenables. Cela étant, un processus correct d'approximations successives doit consister en ceci : après avoir désigné les approximations successives des inconnues par $\Psi'_1, \Psi'_2, \dots, \Psi'_n, \dots$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ respectivement, 1° choisir Ψ'_1 ; 2° déterminer λ_1 par la relation (2)

$$\lambda_1 = \Phi[\Psi'_1(s)];$$

3° évaluer Ψ'_2 au moyen de (1)

$$\Psi'_2(s) = \Phi[\Psi'_1(s)]F[\Psi'_1(s)].$$

Dès lors, on aura les relations de récurrence

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1} &= \Phi[\Psi'_{n-1}(s)], \\ \Psi'_n(s) &= \Phi[\Psi'_{n-1}(s)]F[\Psi'_{n-1}(s)]. \end{aligned}$$

Le processus ci-dessus revient, en définitive, à éliminer λ entre les équations

permettent de construire la fonction $L(s)$, précédemment définie, à partir des éléments $l(s)$, $\Psi(l)$, α , β , a , b .

5° Les équations (1.6'') et (3.19), faisant connaître la somme et le quotient de ψ_1 et ψ_2 , permettent de déterminer ces deux derniers paramètres. Par voie de conséquence, les domaines F et $\mathfrak{E}$ et le potentiel complexe $f = f(Z, a, b, \psi_1, \psi_2)$ sont aussi bien déterminés.

6° Enfin les distances D_1 et D_2 des points C et B (qui sont dans notre cas confondus avec les points de détachement P_1 et P_2) sont

tions (1) et (2) et à résoudre ensuite l'équation en $\Psi'(s)$ ainsi obtenue par la méthode des approximations successives.

Le procédé adopté par M. Sekerj-Zenkowitch est tout différent; regardant dans (1) λ comme un paramètre constant, il résout cette équation par approximations successives sans s'occuper de la condition (2); puis, une fois la solution obtenue sous la forme

$$\Psi' = \Psi'[(s, \lambda)],$$

il calcule λ en écrivant

$$(3) \quad \lambda = \Phi[\Psi'(s, \lambda)].$$

Il est évident que les deux processus ne sont pas équivalents; du reste, pour discuter l'équation (3) M. Sekerj-Zenkowitch se borne à y remplacer $\Psi'(s, \lambda)$ par les premiers termes de son développement suivant les puissances de λ .

Ainsi, M. Sekerj-Zenkowitch ne nous paraît pas avoir résolu le problème que nous avons appelé *problème défini du sillage* et dont nous avons donné l'énoncé au cours de ce paragraphe; il a abordé l'étude d'une sorte de problème mixte; du reste sa méthode de résolution de l'équation (1) par approximations successives est très ingénieuse et paraît présenter de l'intérêt en soi.

Par ailleurs, il est certainement probable que les deux mécanismes d'approximations successives décrits dans cette Note donnent, pratiquement, des résultats voisins pour de petites valeurs de λ . Cela ajoute du prix au travail de M. Sekerj-Zenkowitch; les calculs, qu'il a poussés jusqu'aux applications numériques, fourniraient, dans ces conditions, d'excellentes solutions approchées du problème déterminé du sillage posé pour des contours tels qu'un arc de cercle, un arc de parabole, un arc de cycloïde, etc.

Toutefois, nous croyons devoir ajouter qu'à notre avis, il est impossible d'aborder l'étude du système (1), (2) de cette Note par la méthode des approximations successives; l'extrême complexité des fonctionnelles F et Φ qui y figurent est, en tout cas, de nature à décourager bien des chercheurs.

données par les formules [cf. les équations (1.33) et (1.33')]

$$D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b] = \int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df + \psi_1,$$

$$D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b] = - \int_1^q \sin \Omega(X, 0) df + \psi_2.$$

En résumé, aux éléments $\Psi(l), \alpha, \beta$, connus *a priori*, et aux éléments *arbitraires* $l(s), a, b$, nous avons attaché un régime à la Helmholtz; les points de détachements sont placés aux extrémités de l'obstacle; la configuration géométrique correspondante est définie par les éléments $\Psi[l(s)], \alpha, \beta, D_1, D_2$; elle coïncidera avec la configuration donnée, caractérisée par les éléments $\Psi(l), \alpha, \beta, (\alpha < l < \beta), d_1$ et d_2 , si la fonction $l(s)$ et les paramètres a et b vérifient l'équation fonctionnelle

$$(3.20) \quad l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]$$

et le système de deux conditions aux limites

$$(3.21) \quad \begin{cases} d_1 = D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ d_2 = D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]. \end{cases}$$

Il est donc clair que le problème du sillage, tel qu'il a été énoncé au cours de ce paragraphe [la configuration du plan z étant caractérisée par les éléments $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$ et d_2] équivaut à la détermination d'un point $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$ et de deux constantes $a, b, a < -1, b > 1$ vérifiant le système des relations fonctionnelles (3.20) et (3.21). La fonction $l(s)$ réalise la correspondance entre l'obstacle et la demi-circonférence $|Z| = 1$ du domaine d .

Rappelons encore qu'en vertu des hypothèses faites $\Psi(l)$ est un élément de l'espace $E(\alpha, \beta, l)$ qui vérifie les inégalités

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi, \quad \alpha \leq l \leq \beta.$$

Mise en équation du problème de la proue. — Considérons encore dans le plan z une configuration des éléments rigides caractérisée par les éléments $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$ et d_2 . Soient p_1 et p_2 deux paramètres tels que $\alpha \leq p_2 \leq p_1 \leq \beta$; nous appellerons P_1 et P_2 les points de l'obstacle $\widehat{BC}$

dont les abscisses curvilignes respectives sont p_1 et p_2 . Les distances respectives d'_1 et d'_2 des points P_1 et P_2 aux parois μ_1 et μ_2 seront données par les formules

$$(3.22) \quad \begin{cases} d'_1 = d_1 + \int_{p_1}^{\beta} \sin \Psi(l) dl, \\ d'_2 = d_2 + \int_{\alpha}^{p_2} \sin \Psi(l) dl. \end{cases}$$

Donnons-nous alors un élément $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$ et deux constantes réelles a et b telle que $a < -1$, $b > 1$. Les raisonnements que nous venons de développer permettent de construire un mouvement à la Helmholtz à partir des éléments $\Psi(l)$, p_1 , p_2 , a , b et $l(s)$.

L'obstacle correspondant sera identique à l'arc $\widehat{P_2 P_1}$ de $\widehat{BC}$ si les éléments arbitraires $l(s)$, a et b vérifient l'équation (3.20) et les conditions (3.21), dans lesquelles les données d_1 et d_2 sont supposées remplacées par les quantités d'_1 et d'_2 , définies par les équations (3.22).

Dans ces conditions, les arcs $\widehat{P_1 C}$ et $\widehat{BP_2}$ (en supposant que p_1 et p_2 soient distincts de β et de α respectivement) doivent être nécessairement osculateurs aux lignes λ_1 et λ_2 ; on sait (cf. le § 13) qu'il en est ainsi lorsque λ_1 et λ_2 présentent des détachements en proue. Or, ces conditions ne seront remplies que si les fonctionnelles P_1 et P_2 définies par les équations (C) et (C') du paragraphe 13 sont nulles.

Si, au contraire, l'un des paramètres p_1 (ou p_2), se réduit à β (ou α), le détachement de λ_1 (ou de λ_2) sera vers l'aval si la fonctionnelle P_1 (ou P_2) est négative.

Dans l'un comme dans l'autre cas, les nombres p_1 et p_2 sont assujettis à vérifier des conditions *aux limites*. En se reportant alors à l'énoncé du problème de la proue, on voit que, mathématiquement parlant, on peut formuler ce problème comme suit : étant donné quatre constantes réelles, positives, d_1 , d_2 , α , β ($\alpha < \beta$) et un élément $\Psi(l)$ de l'espace $E(\alpha, \beta, l)$ assujetti à vérifier les conditions

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi, \quad \alpha \leq l \leq \beta,$$

trouver quatre constantes réelles a , b , p_1 et p_2 (telles que $a < -1$, $b > 1$) et un élément $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$ qui vérifient l'un des

quatre systèmes suivants :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), p_2, p_1, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), p_2, p_1, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), p_2, p_1, a, b], \\ \alpha < p_2 < p_1 < \beta. \end{array} \right.$$

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, p_1, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, p_1, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, p_1, a, b], \\ \alpha = p_2 < p_1 < \beta. \end{array} \right.$$

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), p_2, \beta, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] = 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), p_2, \beta, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), p_2, \beta, a, b], \\ \alpha < p_2 < p_1 = \beta. \end{array} \right.$$

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ P_1[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ P_2[l(s), \Psi(l), a, b] \leq 0, \\ d'_1 = D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ d'_2 = D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ \alpha = p_2 < p_1 = \beta. \end{array} \right.$$

Dans les équations qu'on vient d'écrire, nous avons explicité tous les arguments des fonctionnelles P_1 et P_2 ; nous rappelons, d'autre part, que d'_1 et d'_2 désignent les fonctionnelles de $l(s)$, $\Psi(l)$, a , b , p_1 et p_2 définies par les équations (3.22).

Soit B_1 (ou C_1) le point de BC où la valeur algébrique de l'angle de la courbe obstacle avec Ox atteint son minimum (ou maximum); si ce minimum (ou maximum) est atteint en plusieurs points de $\widehat{BC}$, on choisira pour B_1 (ou C_1) celui dont l'abscisse curviligne est minima (maxima); nous appellerons α_1 et β_1 les abscisses curvilignes respec-

tives de B, et C₁. Au paragraphe 28, nous montrerons que le problème de la proue a une solution même si on s'impose les restrictions suivantes :

$$(3.27) \quad p_2 < \alpha_1, \quad p_1 > \beta_1.$$

Pour pouvoir appliquer aux problèmes du sillage et de la proue ainsi formulés la théorie des équations fonctionnelles de MM. Leray-Schauder, il est nécessaire de montrer *a priori* qu'aux éléments donnés $\Psi(t)$, α , β , d_1 et d_2 , satisfaisant aux conditions énumérées au début de ce paragraphe, ne peuvent correspondre que des éléments $l(s)$, a , b , ψ_1 et ψ_2 , etc., qui assurent un sens aux équations du problème. Les paragraphes qui suivent ont pour but d'obtenir certaines limitations des éléments inconnus qui garantissent la régularité des formules en cause.

Remarque. — Il sera souvent plus commode de considérer à la place de $l(s)$ la fonction $l(t)$ qui réalise la correspondance entre l'obstacle d'une part, et le segment $-1 \leq t \leq 1$ du domaine $\mathfrak{C}$ d'autre part. Le groupe d'inconnues $l(s)$, a , b , ψ_1 et ψ_2 est équivalent au groupe $l(t)$, a , b , ψ_1 , ψ_2 .

24. LIMITATION DE q . — Les formules (1.6), (1.9), etc. perdent toute signification lorsqu'on y fait $a = -1$ ou $b = 1$; le paramètre q est alors égal à 1. En effet, en reprenant les formules et les notations utilisées au paragraphe 20 et en posant

$$\begin{aligned} t_1 &= a, & t_2 &= -1, \\ t_3 &= 1, & t_4 &= b, \end{aligned}$$

il vient, d'après (3.1'),

$$r = - \frac{(b-1)(1+a)}{(b+1)(1-a)}.$$

D'après cela, r est positif et compris entre 0 et 1 pour toute valeur finie ou infinie de a et de b , pourvu que

$$a \leq -1, \quad b \geq 1.$$

Dans ces conditions, le paramètre χ , relié à r par la relation

$$\chi = 1 - r,$$

ne peut être égal à 1 que pour $r=0$; c'est-à-dire pour $a=-1$ ou $b=1$ seulement. Or, au paragraphe 20, on a vu que

$$\frac{\omega_3}{i\omega_1} = \frac{X(1-\chi)}{X(\chi)} \quad \text{avec} \quad X(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\chi \sin^2 \varphi}}.$$

Cela montre que $\frac{\omega_3}{i\omega_1}$ ne peut devenir nul et, par suite, que le paramètre q , lié au précédent par la formule (1.8) ne peut devenir égal à 1 que si $a=-1$ ou $b=1$. C. Q. F. D.

La réciproque est vraie : on a nécessairement $a < -1$ et $b > 1$ lorsque $q < 1$. Par suite, trouver une borne inférieure pour $|1+a|$ et $b-1$ revient à trouver une majorante pour q en fonction des données géométriques de la configuration des éléments rigides.

Nous supposons donc le problème du sillage ou de la proue résolu pour la configuration $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 , supposée donnée; nous allons nous servir des résultats du paragraphe 20. Ces résultats s'appliquent à l'espèce, puisqu'en vertu de l'hypothèse $0 \leq \Psi(l) \leq \pi$ le domaine $\mathcal{A}$ correspondant sera d'un seul tenant.

L'inégalité (3.2) ne peut être utile que si l'aire σ du domaine Γ est finie. Aussi, nous commencerons par transformer conformément le domaine $\mathcal{A}$ du fluide en mouvement en une portion d'une sphère de Riemann que nous allons définir.

Menons par P_1 et P_2 ⁽¹⁰⁶⁾ des parallèles à Ox (*fig. 9*); menons également des parallèles à Oy par les points d'abscisses maxima et minima de l'obstacle. On obtient ainsi un rectangle A_1, B_1, C_1, D_1 auquel les arcs ω_1 et ω_2 ne peuvent être extérieurs, puisque, par hypothèse, l'intersection d'une droite $y = \text{const.}$ avec l'obstacle se réduit à un point au plus. Nous appelons H_1, H_2 l'axe vertical de ce rectangle. Pour fixer les idées, nous supposons que l'on a (*cf.* § 12)

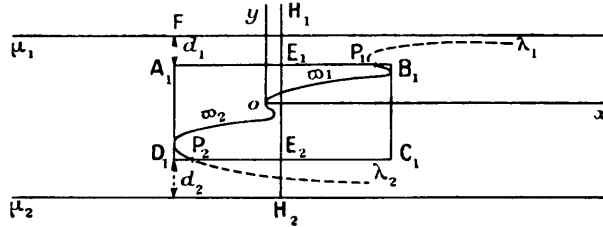
$$d_1 \leq d_2.$$

Ceci posé, considérons la sphère Σ , tangente au plan z au point H , et

⁽¹⁰⁶⁾ Lorsque P_2 et P_1 ne coïncident pas avec les points B et C , il faudra remplacer dans le texte P_2 et P_1 par B et C respectivement.

dont le diamètre D est égal à $D_1 H_1 = H_1 C_1$; D est donc borné dans les deux sens si les dimensions de l'obstacle sont finies et si d_1 n'est

Fig. 9.



pas infinie. Soit P le point de Σ diamétralement opposé à H_1 ; nous obtiendrons une correspondance conforme entre $\mathcal{A}$ et une portion Γ de l'aire de la sphère, en projetant stéréographiquement $\mathcal{A}$ sur Σ . Il est d'abord évident que

$$(3.27) \quad \frac{\pi d_1^2}{2} \leq \sigma \leq \frac{\pi D^2}{2},$$

cela montre que le facteur $\frac{1}{\sigma}$ des formules (3.2) et (3.2') est borné dans les deux sens si les longueurs D et d_1 sont finies, c'est-à-dire toutes les fois que l'obstacle n'est pas une longueur nulle et n'est pas à une distance nulle ou infinie de l'une des parois. Cela étant, nous poserons (cf. §§ 19 et 9)

$$t_1 = a, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = b,$$

cela revient à prendre pour $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ l'image de l'obstacle sur Σ et pour $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$ l'image de l'ensemble des deux parois μ_1 et μ_2 . Pour appliquer (3.2) il ne reste qu'à minorer la borne Λ correspondante.

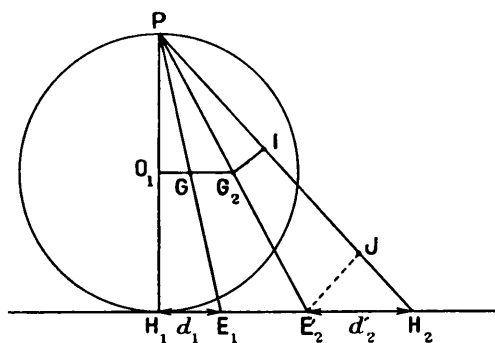
Soient A'_1, B'_1, C'_1 et D'_1 les images des points A, B, C, D sur Σ ; au rectangle rectiligne $A_1 B_1 C_1 D_1$ correspondra un rectangle curviligne dont les côtés sont des arcs de cercle et qui contiendra dans son intérieur l'image de l'obstacle. Il en résulte que la plus courte distance Λ évaluée sur la sphère entre l'image de l'obstacle et celle de l'ensemble des parois est minorée pour la plus courte distance *sphérique* entre l'image de μ_1 et de μ_2 d'une part, et le périmètre du rectangle $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ d'autre part. Or, cette plus courte distance est

minorée à son tour pour la plus courte distance *rectiligne* du périmètre A, B, C, D , aux plans $P\mu_1$ et $P\mu_2$ (dont les intersections avec Σ définissent les images de μ_1 et de μ_2) dont nous allons construire une borne inférieure.

A cet effet, considérons la section de Σ et de $\mathcal{C}$ par le plan PH_1H_2 (cf. la figure 10) sur lequel les distances rectilignes considérées se projettent en vraie grandeur. Nous marquerons en E_1 et E_2 les traces respectives de AB et CD ; nous désignerons par G_1 et G_2 les intersections des PE_1 et PE_2 avec la parallèle à H_1H_2 menée par le centre O_1 de Σ . Le rectangle A, B, C, D , étant intérieur, par construction, au cercle de centre H_1 et de rayon D du plan π , les cotes des points intérieurs au périmètre A', B', C', D' , ne peuvent dépasser $\frac{D}{2}$. Par suite, l'aire limitée par ce périmètre se projette sur le plan de la figure à l'intérieur de la portion de surface commune au grand cercle et au quadrilatère $E_1E_2G_1G_2$; une simple inspection de la figure montre alors

- 1° que les distances des points de A', B', C', D' , au plan $P\mu_1$ sont au moins égales à $\frac{O_1G_1}{2}$, soit $\frac{d_1}{2}$;
- 2° que les distances de ces points au plan $P\mu_2$ sont minorées

Fig. 10.



par G_2I , I étant la projection de G_2 sur PH_2 . Il est aisé de relier cette dernière limitation à la première. On a, en appelant J la projection

de E_2 sur PH_2 ,

$$\frac{E_2 J}{2} = G_2 I;$$

d'où, en exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle PE_2H_2 ,

$$G_2 I = \frac{D d_2}{2 \sqrt{D^2 + (d_1 + d_2 + E_1 E_2)^2}}.$$

On vérifie aisément que le second membre est une fonction croissante de d_2 ; on a donc

$$G_2 I \geq \frac{D d_1}{2 \sqrt{D^2 + (2 d_1 + E_1 E_2)^2}}$$

puisque $d_2 \geq d_1$. Or, de par le choix même de D , on peut écrire

$$2D \geq 2d_1 + E_1 E_2.$$

Il en résulte

$$\frac{D}{\sqrt{D^2 + (2d_1 + E_1 E_2)^2}} > \frac{1}{\sqrt{5}},$$

et finalement

$$G_2 I \geq \frac{d_1}{2\sqrt{5}}.$$

En définitive, Λ est minoré par le plus petit des nombres $\frac{d_1}{2}$ et $\frac{d_1}{2\sqrt{5}}$, soit par $\frac{d_1}{2\sqrt{5}}$. Dans ces conditions, l'inégalité (3.2) devient, en tenant compte de (3.27),

$$\frac{1}{10\pi} \frac{d_1^2}{D^2} \leq \frac{\omega_3}{i\omega_1},$$

ce qui s'écrit encore, d'après (1.8),

$$(3.28) \quad q \leq e^{-\frac{1}{10\pi} \frac{d_1^2}{D^2}},$$

le second membre étant inférieur à 1.

Cette inégalité fondamentale entraîne les conséquences suivantes :

1° Toutes les fois que les distances d_1, d_2 de l'obstacle aux parois μ_1 et μ_2 admettent une minorante positive, le paramètre q correspondant admet une majorante positive inférieure à l'unité; par

suite, le domaine d correspondant aura une épaisseur inférieurement bornée⁽¹⁰⁷⁾.

2° Supposons qu'on ait construit un régime à la Helmholtz, correspondant à une configuration donnée des éléments rigides; supposons que l'on déforme cette configuration de manière que le paramètre q correspondant tende vers 1; nous pouvons alors affirmer que ce fait ne peut se produire que si la déformation est telle que la distance d_1 tend vers zéro. Nous établirons la réciproque de ce théorème un peu plus loin (cf. § 26).

Remarque. — Il y a lieu de noter que la démonstration précédente ne fait appel qu'à un minimum d'hypothèses concernant la nature géométrique de la configuration; l'inégalité (3.28) repose au fond sur deux faits: que le domaine du fluide en mouvement est d'un seul tenant⁽¹⁰⁸⁾; que l'on peut enfermer l'obstacle dans un rectangle $A_1 B_1 C_1 D_1$ intérieur au canal et dont les côtés $A_1 B_1$ et $C_1 D_1$ sont parallèles aux parois de celui-ci. Enfin, convenablement modifiée, l'inégalité (3.28) peut être étendue aux cas des parois courbes.

Nous nous servirons aussi de l'inégalité (3.2) pour établir le théorème suivant:

Soit un régime à la Helmholtz correspondant aux éléments intrinsèques $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 ; si l'on fait varier les données de manière à faire tendre le paramètre q correspondant vers zéro, la configuration des éléments rigides se déformera de manière que les parois μ_1 et μ_2 s'éloignent à l'infini.

Remarque. — Cet énoncé repose sur l'hypothèse de non-recouvrement des lignes libres (sûrement satisfaite si $|\Psi[l(s)]| < \pi$).

⁽¹⁰⁷⁾ $\frac{d_1}{D}$ tend vers 1, lorsque d_1 augmente indéfiniment, les dimensions de l'obstacle restant finies.

⁽¹⁰⁸⁾ Dans l'état actuel de la question cette prémisse a été établie seulement pour les obstacles pourvus d'une tangente assujettie à vérifier la condition

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi.$$

Mais toute extension à une nouvelle catégorie d'obstacles de la propriété de non-recouvrement des lignes libres, avec elles-mêmes et avec l'obstacle correspondant, entraîne l'extension à la même catégorie d'obstacles de l'inégalité (3.28).

En effet, choisissons pour Σ une sphère de rayon fini quelconque, tangente au plan z , au point de bifurcation O , par exemple; l'image Γ du domaine $\mathcal{A}$ est encore finie et d'un seul tenant; le lemme du paragraphe 20 s'applique. Posons (cf. § 19)

$$t_1 = a, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = +1, \quad t_4 = b.$$

Les éléments $\widehat{\alpha_1 \alpha_2}$ et $\widehat{\alpha_3 \alpha_4}$ de Γ' sont donc respectivement les images de λ_1 et λ_2 sur Σ ; ce sont des courbes partant des images des points de détachement pour aboutir au pôle P de Σ où elles sont toutes deux tangentes au méridien de Σ parallèle aux parois.

Cela posé, (3.2) et (4.8) montrent que q , tendant vers zéro, la plus courte distance Λ entre les images de λ_1 et λ_2 (évaluée sur Σ à l'intérieur de Γ) doit aussi tendre vers zéro. Or l'examen de la figure révèle que, dans le cas de non-recoupement de λ_1 et λ_2 , la borne Λ ne s'annule que si les petits cercles de Σ , images de μ_1 et μ_2 , se réduisent au point P , auquel cas les parois μ_1 et μ_2 sont rejetées à l'infini.

C. Q. F. D.

La réciproque de ce théorème sera établie un peu plus loin (cf. § 26).

25. LIMITATION DU QUOTIENT $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$. — LEMME. — Soit $T(t)$ une fonction réelle quelconque, définie, pour fixer les idées, dans l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$; soit $m(t)$ une fonction réelle, analytique et régulière dans le même intervalle ⁽¹⁰⁹⁾.

On a l'inégalité suivante :

$$(3.29) \quad \log \frac{\int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|} > - \frac{\int_{-1}^{+1} |T(t)| |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|}.$$

Associions, en effet, à chaque point t de l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$, le point

$$\begin{aligned} x(t) &= T(t), \\ y(t) &= e^{-T(t)}, \end{aligned}$$

⁽¹⁰⁹⁾ Il serait aisé de se débarrasser de ces hypothèses de régularité sur $m(t)$.

de la courbe $y = e^{-x}$ et plaçons en ce point la masse infinitésimale $|dm(t)|$; les coordonnées ξ et η du centre de gravité G des masses ainsi réparties seront données par les formules

$$\xi = \frac{\int_{-1}^{+1} T(t) |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|},$$

$$\eta = \frac{\int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |dm(t)|}{\int_{-1}^{+1} |dm(t)|}.$$

Or, la courbe $y = e^{-x}$ tourne sa convexité vers l'axe des x ; il en résulte que les coordonnées x, y d'un point appartenant à une corde de $y = e^{-x}$ et, par suite, celles ξ, η du centre de gravité G, vérifient l'inégalité $y > e^{-x}$ ou l'inégalité équivalente $\log y > -x$. Il suffit, dès lors, de remplacer dans la dernière ξ et η par leurs valeurs pour retrouver (3.29).

Remarque. — La démonstration ne suppose nullement la continuité de $T(t)$; la répartition des masses $|dm(t)|$ peut donc être discontinue le long de $y = e^{-x}$. Enfin, il n'est même pas nécessaire de supposer la fonction $T(t)$ bornée.

Cela posé, supposons encore le problème du sillage résolu pour la configuration $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1$ et d_2 donnée ⁽¹¹⁰⁾; les éléments $l(t)$ ⁽¹¹¹⁾, a, b, ψ_1 et ψ_2 correspondant à cette configuration sont alors connus. Dans ces conditions, la correspondance entre le segment $-1 \leq t \leq 1$ d'une part et l'obstacle d'autre part sera donnée par la formule

$$dl = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi} e^{-T} \frac{|t - t_0|}{(b - t)(t - a)} dt \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

que l'on obtient en combinant les équations (1.10) et (1.31). On

⁽¹¹⁰⁾ Si le problème posé était celui de la proue, il suffirait de remplacer dans les raisonnements α et β par p_2 et p_1 . Cette remarque s'applique encore au paragraphe 25.

⁽¹¹¹⁾ Voir la remarque finale du paragraphe 23.

tire de là

$$dt = \frac{1}{\pi} \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b} e^{-T(t)} |t - t_0| \frac{|a|}{|t - a|} \frac{b}{(b - t)} dt.$$

Comme $a \leq -1$ et $b \geq 1$, $-1 \leq t \leq 1$, on a

$$\frac{|a|}{|t - a|} > \frac{1}{2}, \quad \frac{b}{b - t} \geq \frac{1}{2},$$

ces inégalités ayant un sens même pour $|a| = 1$ et $b = 1$. Il suit de là que la longueur totale $\beta - \alpha$ de l'obstacle donné vérifie l'inégalité

$$\beta - \alpha \geq \frac{1}{4\pi} \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b} \int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |t - t_0| dt.$$

Cette inégalité permettra de majorer le facteur $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$ en fonction d'une minorante positive, non nulle de l'intégrale du second membre.

Or, on a

$$\int_{-1}^{+1} |t - t_0| dt = 1 + t_0^2,$$

d'où, puisque $-1 \leq t_0 \leq 1$,

$$1 \leq 1 + t_0^2 \leq 2.$$

Dès lors, l'inégalité (3.29) permet d'écrire (en y posant $|dm(t)| = |t - t_0| dt$)

$$\log \left[\int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |t - t_0| dt \right] \geq -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} T(t) |t - t_0| dt,$$

d'où l'on tire

$$\int_{-1}^{+1} e^{-T(t)} |t - t_0| dt \geq e^{-\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} T(t) |t - t_0| dt}.$$

Ainsi, l'intégrale du premier membre pourra être minorée par une constante positive non nulle si l'on sait majorer le module de l'expression

$$\int_{-1}^{+1} T(t) |t - t_0| dt,$$

dont l'élément différentiel ne contient pas d'exponentielle; c'est là l'avantage qu'offre l'emploi du lemme.

Or, considérons la fonction analytique auxiliaire

$$(3.30) \quad \Pi(t) = \int_{t_0}^t \Omega(t)(t - t_0) dt$$

définie dans le domaine $\mathfrak{E}$; d'après la définition même de $\Omega(t)$ [cf. par exemple (1.23)] les parties réelle et imaginaire de $\Pi(t)$ se réduisent respectivement pour t réel à

$$(3.30') \quad \left. \begin{aligned} \Re \Pi(t) &= \int_{t_0}^t \Theta(t)(t - t_0) dt \\ \Im \Pi(t) &= \int_{t_0}^t T(t)(t - t_0) dt \end{aligned} \right\} \quad (t \text{ étant réel}).$$

Effectuons sur t la transformation

$$t = -\frac{1}{2} \left(t_1 + \frac{1}{t_1} \right)$$

qui substitue : 1° au domaine $\mathfrak{E}$ le demi-cercle unitaire supérieur $\mathfrak{E}_1$ du plan t_1 ; les segments

$$-\infty \leq t \leq -1 \quad \text{et} \quad 1 \leq t \leq \infty$$

auront pour image les segments

$$0 \leq t_1 \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq t_1 \leq 0$$

respectivement; la demi-circonférence $t_1 = e^{i\delta}$ ($0 \leq \delta \leq \pi$) correspondra au segment $-1 \leq t \leq 1$; 2° à la fonction $\Pi(t)$ la fonction

$$\Pi(t) = \Pi_1(t_1) = \frac{1}{2} \int_{e^{i\delta_0}}^{t_1} \Omega[t(t_1)] \left[\frac{1}{2} \left(t_1 + \frac{1}{t_1} \right) - \cos \delta_0 \right] \left(1 - \frac{1}{t_1^2} \right) dt_1,$$

où l'on a posé

$$t_0 = -\cos \delta_0,$$

et où la fonction $\Omega[t(t_1)]$ est donnée par la formule (1.53) dans laquelle il faudra remplacer t par sa valeur en fonction de t_1 . De ce qui précède, il résulte que la fonction $\Omega[t(t_1)]$ est réelle le long des segments

$$-1 \leq t_1 \leq -b + \sqrt{b^2 - 1} \quad \text{et} \quad -a - \sqrt{a^2 - 1} \leq t_1 \leq 1,$$

imaginaire pure le long des portions restantes du segment $-1 \leq t_1 \leq 1$, nulle en les points communs de ces deux éléments de frontière [cf. (1.13)]; la fonction $\Omega[t(t_1)]$ est donc prolongeable à travers l'axe réel; elle peut donc être définie dans tout le cercle $\mathfrak{C}$, à l'intérieur duquel elle est holomorphe, en sorte que la fonction $\Pi_1(t_1)$ est également définie à l'intérieur de ce cercle, mais possédera au point $t_1 = 0$ une singularité dont nous allons préciser la nature.

A cet effet, nous ferons observer qu'en retranchant du second membre de (1.53) la quantité

$$-\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)}}{1+t} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)}}$$

(dans laquelle le radical sous le signe d'intégration est pris avec le signe $+$ et où le radical placé en facteur doit être pris avec le signe $+$ pour de très grandes valeurs de t) qui est nulle en vertu de (1.54), l'expression de $\Omega(t)$ prend la forme

$$\Omega(t) = -\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a)(t-b)}}{(1+t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') dt'}{(t-t')\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t'-a)}}$$

valable même pour $a = -1$ pourvu que $b \neq 1$; au précédent paragraphe, nous avons vu que cette condition était remplie moyennant l'hypothèse $d_1 \neq 0$ que nous adopterons désormais pour toute la suite du raisonnement. La fonction $\Omega(t)$ étant régulière à l'infini, nous avons, en posant

$$R(t) = \sqrt{(t^2-1)(t-b)(t-a)}$$

et en remplaçant t par sa valeur en fonction de t_1 ⁽¹¹²⁾,

$$\begin{aligned} \Omega(t_1) = & -\frac{i}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') dt'}{\sqrt{R(t')}} \\ & - 2\frac{i}{\pi} t_1 \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') \left[(1-t') + \frac{1}{2}(a+b) \right] dt'}{\sqrt{R(t')}} \\ & + \frac{4i}{\pi} t_1^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi(t')(1+t') \left[\frac{1}{2} - t' + t'^2 + \frac{1}{2}(a+b)(1-t') - \frac{1}{8}(a-b)^2 \right] dt'}{\sqrt{R(t')}} \\ & + t_1^3 [\text{série entière en } t_1]. \end{aligned}$$

(112) Ce développement suppose $|a|$ et b borné supérieurement; il serait aisé

Portons ce développement limité dans l'expression de $\Pi_1(t_1)$; on trouve, en désignant par des accents les dérivations effectuées relativement à la variable t_1 au point $t_1=0$, en groupant convenablement les termes du second membre et en intégrant

$$(3.30'') \quad \Pi_1(t_1) = \frac{1}{2} \Omega(0) \left[\frac{1}{4} \left(t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} \right) - \cos \delta_0 \left(t_1 + \frac{1}{t_1} \right) \right] - \frac{1}{4} \Omega'(0) \left(t_1 - \frac{1}{t_1} \right) \\ + \frac{1}{2} \left[\Omega'(0) \cos \delta_0 - \frac{1}{4} \Omega''(0) \right] \log t_1 + \Pi_2(t_1),$$

la fonction $\Pi_2(t_1)$ étant holomorphe dans tout le cercle $|t_1| < 1$. Or, les quantités $[\Omega(t_1)]_{t_1=0}$, $\left(\frac{d\Omega}{dt_1} \right)_{t_1=0}$, $\left(\frac{d^2\Omega}{dt_1^2} \right)_{t_1=0}$ sont imaginaires pures; d'après leurs expressions mêmes, elles sont bornées en modules si $b \neq 1$ et si $|a|$ et b sont bornés supérieurement. Il en résulte, en tenant compte de la définition de $\Pi_1(t_1)$, que le long du cercle $t_1 = e^{i\delta}$ la partie réelle $\Re \Pi_2(t_1)$ de $\Pi_2(t_1)$ se réduit à

$$- \int_{\delta_0}^{\delta} \Theta[t(e^{i\delta'})] (\cos \delta' - \cos \delta_0) \sin \delta' d\delta' + \frac{1}{2i} \left[\Omega'(0) \cos \delta_0 - \frac{1}{4} \Omega''(0) \right] \delta \\ - \frac{1}{2i} \Omega'(0) \sin \delta.$$

La dérivée de $\frac{d\Re \Pi_2(e^{i\delta})}{d\delta}$ existe donc et reste inférieure en module à

$$2\pi^2 + \frac{\pi}{8} |\Omega''(0)| + \frac{\pi+1}{2} |\Omega'(0)|,$$

lorsque $0 \leq \delta \leq \pi$; cette dérivée est, par suite, bornée tant que $b \neq 1$ et tant que $|a|$ et b sont bornés; cela montre que, moyennant les hypothèses faites sur a et b , la fonction $\Re \Pi_2(e^{i\delta})$ vérifie une condition de

de rendre le résultat final indépendant de cette hypothèse en effectuant sur t une transformation du type

$$\frac{kt-1}{k-t} = -\frac{1}{2} \left(t_1 + \frac{1}{t_1} \right),$$

où k désigne une constante réelle, supérieure à 1 mais inférieure au plus petit des paramètres $|a|$ et b . Cette transformation n'altère pas l'image de l'obstacle dans le plan t_1 ; mais au point $t_1=0$ correspondra cette fois le point $t=k$; on achèvera en reprenant les raisonnements du texte. Toutefois, dans ce cas, les formules et les calculs deviendraient plus compliqués.

Lipschitz dans tout l'intervalle $0 \leq \delta \leq \pi$. Comme $\Re \Pi_2(t_1)$ est une fonction harmonique régulière dans tout le cercle $|t_1| < 1$, il en résulte que la fonction conjuguée $\Im \Pi_2(t_1)$ vérifiera une condition de Hölder, d'exposant aussi voisin de l'unité qu'on le veut, pour $|t_1| \leq 1$ (cf. le théorème de Fatou et de Priwaloff, § 11). Ainsi $\Pi_2(t_1)$ est une fonction continue pour $|t_1| \leq 1$, nulle, d'après sa définition même pour $t_1 = e^{i\delta_0}$; elle est donc bornée en valeur absolue pour $|t_1| \leq 1$ ⁽¹¹³⁾. D'un autre côté, l'expression (3.30') de $\Pi_1(t_1)$ prouve que la fonction $\Im[\Pi_1(t_1) - \Pi_2(t_1)]$ est bornée le long du demi-cercle $t_1 = e^{i\delta}$, $0 \leq \delta \leq \pi$ moyennant les hypothèses faites; cela montre que le long de ce demi-cercle $\Pi_1(t_1)$ est supérieurement bornée; il en est donc de même de l'expression

$$\int_{-1}^{+1} T(t) (t - t_0) dt. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous avons déjà fait observer que les hypothèses $|a| \leq \text{const.}$ et $b \leq \text{const.}$ ne sont pas essentielles à la démonstration. Nous pouvons donc énoncer :

Supposons qu'il existe une solution du problème du sillage posé relativement à la configuration caractérisée par les éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 : lorsque la différence $\beta - \alpha$ est supérieurement bornée et lorsque l'une, au moins, des distances d_1 et d_2 , pour fixer les idées, d_1 , est bornée inférieurement par une constante positive non nulle, la valeur correspondante du paramètre $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ sera inférieure à une quantité finie, dépendant d'ailleurs de $(\beta - \alpha)$ et de d_1 .

Remarque. — Il importe de noter que notre conclusion ne suppose pas : 1° que $l(t)$ soit continue; 2° que les paramètres $(b - 1)$ et $|a + 1|$ soient majorés; il faut que l'un d'eux seulement soit minoré par un nombre positif non nul. Pour limiter $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$, nous ne sommes appuyés que sur le fait que les quantités $\Psi[l(t)]$ et $\beta - \alpha$ étaient supérieurement bornées. Cette constatation met bien en lumière l'importance et la généralité du raisonnement que nous venons d'employer et qui

(113) Moyennant, bien entendu, les hypothèses faites sur b et a .

peut servir dans l'analyse de cas plus généraux [cf. § 22 et notamment le renvoi ⁽⁹⁶⁾].

26. CONSTRUCTION D'UN MODULE DE CONTINUITÉ POUR LA FONCTION $\Psi[l(t)]$.

— Supposons toujours le problème du sillage résolu; soient les éléments $l(t)$, a , b , ψ_1 et ψ_2 qui correspondent aux éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 donnés *a priori*. D'après les hypothèses faites sur l'obstacle, $\Psi[l(t)]$ vérifie les conditions

$$0 \leq \Psi[l(t)] \leq \pi.$$

Ces inégalités entraînent, d'après le théorème I du paragraphe 16, la conséquence fondamentale suivante : l'intersection de toute parallèle à Ox avec l'ensemble obstacle-lignes libres se réduit à un point unique ⁽¹¹⁴⁾. Le domaine $\mathfrak{A}$ du fluide en mouvement sera limité par un contour sans points doubles.

Cela posé, considérons deux points, M et M' , de l'obstacle d'affixes respectifs $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$; soient t et t' les affixes des points du segment $(-1, +1)$ qui leur correspondent dans le plan t . Construisons alors la sphère de Riemann, Σ , dont le diamètre sera égal à la longueur $\beta - \alpha$ du profil et tangente en M' au plan z . Comme au paragraphe 24, nous appellerons P le point de Σ opposé à M' et Γ la projection stéréographique relativement à P du domaine $\mathfrak{A}$ du fluide en mouvement. Le contour limitant $\mathfrak{A}$ étant, on l'a vu, dépourvu de points doubles, la frontière Γ' de Γ sera une courbe fermée sans point double. L'usage que nous ferons de cette proposition montrera le rôle capital de l'hypothèse $|\Psi[l]| \leq \pi$ qui nous a permis de l'établir. Appliquons aux domaines $\mathfrak{E}$ et Γ , représentés conformément l'un sur l'autre, le lemme du paragraphe 20, en admettant que $t < t'$ (c'est-à-dire $y < y'$) et en posant

$$t_1 = \infty, \quad t_2 = -1, \quad t_3 = t, \quad t_4 = t'.$$

Cela revient à prendre respectivement pour arcs $\widehat{\alpha_2 \alpha_3}$ et $\widehat{\alpha_4 \alpha_1}$ de Γ'

⁽¹¹⁴⁾ Toutefois l'obstacle peut contenir des segments de droites parallèles à Ox pourvu que ces segments soient étrangers à ses extrémités B et C .

les images de l'arc $\widehat{P_2 M}$ de l'obstacle d'une part, et l'image de l'ensemble formé par l'arc $\widehat{M' P_1}$ de $\widehat{P_2 P_1}$, la ligne libre λ_1 et la paroi μ_1 , d'autre part. De l'allure des lignes libres λ_1 et λ_2 ⁽¹¹⁵⁾, il résulte que leurs images λ'_1 et λ'_2 sur Σ sont extérieures à la portion de Σ comprise entre deux plans parallèles à μ_1 et μ_2 et passant l'un par P et P_1 , l'autre par P et P_2 , portion qui contient l'obstacle.

Une discussion analogue à celle du paragraphe 24 montre alors que la plus courte distance sphérique $\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_4 \alpha_1})$ est minorée par la quantité $\frac{|y' - y|}{2}$. Comme dans notre cas l'aire σ de Γ est majorée par $\frac{\pi(\beta - \alpha)^2}{2}$, (3.1) et (3.1') permettent d'écrire

$$|y(t') - y(t)| \leq \frac{2\sqrt{2}\pi(\beta - \alpha)}{\left|\log \frac{1}{(t - t')}\right|^{\frac{1}{2}}} \quad \text{pour } -1 \leq t \leq t' \leq +1,$$

inégalité qui fournit, pour l'ordonnée $y(t)$, un module de continuité tout le long de l'obstacle, points de détachement compris. Des hypothèses faites sur l'obstacle il résulte (cf. § 22) que $l[y(t)]$, envisagée comme une fonction de t , est continue pour $-1 \leq t \leq 1$. Ce résultat reste valable même pour $d_1 = 0$; il joue un rôle capital dans la suite (cf. § 29). En combinant de tels raisonnements avec ceux du paragraphe 21, on établirait tout pareillement l'existence d'une constante K telle que l'inégalité

$$\Lambda(\widehat{\alpha_2 \alpha_3}, \widehat{\alpha_4 \alpha_1}) \geq K |x(t) - x(t')|$$

soit vérifiée le long de tout arc de $\widehat{P_2 P_1}$ sur lequel $x(t)$ serait une fonction monotone de son argument. (Toutefois, la limitation précédente serait en défaut lorsque l'image d'un des points α_3 ou α_4 de Σ se confond avec P_2 ou P_1 ; voir les conclusions du paragraphe 22 concernant les voisinages des points de détachement.) Il en résulterait que $x(t)$ le long de tels arcs appartient bien à l'espace $\mathcal{L}_{\frac{1}{2}}(t)$.

Utilisons maintenant l'hypothèse de l'existence et de la continuité

(115) Dont l'intersection avec les droites $y = \text{const.}$ se réduit à un point unique.

de $\Psi'(l)$ le long de $\widehat{P_2 P_1}$ ⁽¹¹⁶⁾. De ce résultat, les méthodes du paragraphe 22 permettent de déduire, dans l'ordre, les conséquences suivantes : la fonction $\Psi[l(t)]$ est continue et vérifie une condition $\mathcal{L}_1(t)$ dans tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$, extrémités comprises; $\Psi[l(t)]$ vérifie une condition $\mathcal{L}_n(t)$, où n désigne un nombre positif arbitrairement grand, dans tout l'intervalle $-1 < t < 1$, extrémités exclues; enfin, $\Psi[l(t)]$ vérifiera la condition $\mathcal{L}_n(t)$ dans tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$ extrémités comprises lorsque $\Psi[l(-1)] \neq \pi$ et $\Psi[l(+1)] \neq 0$ ⁽¹¹⁷⁾.

Ainsi, toutes les fonctions $\Psi[l(t)]$ correspondant à l'ensemble des obstacles de l'espèce considérée doivent posséder le même module de continuité $\mathcal{L}_n(t)$; ces fonctions sont donc également continues. D'après le théorème d'Arzela ⁽¹¹⁸⁾, les $\Psi[l(t)]$ forment une famille compacte de fonctions; cela veut dire que, de toute suite infinie de ces fonctions, on pourra extraire une suite partielle convergeant uniformément, sur tout l'intervalle commun de définition, vers une fonction limite appartenant à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$.

Il est essentiel de noter que cet énoncé ne repose pas sur l'hypothèse que les éléments donnés d_1 et d_2 soient inférieurement bornés par une constante positive non nulle.

Le résultat précédent entraîne la conséquence fondamentale suivante. Etant donnée, dans le plan z , une configuration caractérisée par les éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 , supposons qu'on ait déterminé les éléments inconnus, $l(t)$, a , b , ψ_1 et ψ_2 correspondants; si les distances d_1 et d_2 ne sont pas nulles, je dis que la dérivée $\frac{dl(t)}{dt}$ existe et vérifie, dans l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$, une condition $\mathcal{L}_n(t)$.

En effet : 1° l'inégalité (3.28), jointe aux relations (1.6) et (1.8), montre que d_1 et d_2 n'étant pas nuls, les paramètres q , $|a|$ et b sont

⁽¹¹⁶⁾ Au paragraphe 22 nous avons vu que ces hypothèses ne sont pas nécessaires pour justifier les conclusions du texte; lorsque $\Psi'(l)$ n'existe pas, celles-ci sont, en particulier, valables si $\varepsilon < \Psi(l) < \pi - \varepsilon$, ε étant positif (cf. § 22) et si les points P_1 et P_2 coïncident respectivement avec C et B.

⁽¹¹⁷⁾ Rappelons que (cf. § 23) ces hypothèses ne sont pas indispensables pour la démonstration des théorèmes d'existence.

⁽¹¹⁸⁾ On trouvera un exposé de la question dans la thèse de M. Montel.

distincts de 1; le domaine d du plan Z ne dégénère pas; la correspondance $t = t(Z)$ a un sens et est analytique pour $q < |Z| \leq 1$.

2° D'après le paragraphe 11 la fonction analytique $\Omega_0(Z)$ définie dans d à l'aide des formules (1.23) et (1.27) vérifie dans la demi-couronne et sur les frontières $|Z| = 1$ et $|Z| = q$ de celle-ci une condition $\mathcal{L}_n(Z)$; car la partie réelle $\Theta_0(X, Y)$ de $\Omega_0(Z)$ se réduit pour $Z = e^{is}$ à $\Psi[l(t[s])]$, or cette dernière vérifie une condition $\mathcal{L}_n(s)$, donc aussi $\mathcal{L}_n(t)$, d'indice arbitrairement grand. Il en résulte que la fonction $\Omega_0(t) = \Theta_0(t) + iT_0(t)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ dans tout son domaine de définition $\mathfrak{G}$, le point à l'infini excepté.

3° Moyennant les formules (1.14), (1.28) et (1.29), la correspondance entre les plans z et t s'écrit

$$(3.31) \quad |dz| = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a| \cdot b} e^{-T_0(t)} \frac{|t - t_0| \left| \sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s_0 + s) \right] \right|}{\left| \sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right] \right|} \frac{|a| \cdot b}{|t - a| |t - b|} dt.$$

D'après l'alinéa 1°, les paramètres $|a|$, b et q sont différents de 1; les facteurs

$$\frac{t - t_0}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \quad \text{et} \quad \frac{|a| \cdot b}{|t - a| |t - b|}$$

sont des fonctions analytiques régulières dans le voisinage et sur l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$, cela quel que soit t_0 ⁽¹¹⁹⁾. Le facteur $e^{-T_0(t)}$ appartient, d'après l'alinéa 2°, à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ dans tout son domaine de définition, le point à l'infini excepté. Enfin, le facteur $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ est borné supérieurement (cf. le § 25). Le rapprochement de ces remarques justifie notre assertion ⁽¹²⁰⁾.

Du résultat précédent découle la conséquence suivante : la fonction inconnue $l(t)$ possède une norme, au sens défini au paragraphe 23;

(119) Il résulte des raisonnements du paragraphe 14 que ces conclusions restent valables même lorsque $|a|$ et b augmentent indéfiniment. Rappelons que t_0 est compris entre -1 et $+1$; les points $t = t_0$ et $Z_0 = e^{is_0}$ se correspondent; le zéro de $t - t_0$, considéré comme fonction de s , pour $s = s_0$ est simple.

(120) Voir le paragraphe 29 où l'on étend ce théorème à certain cas où $|a|$ et b tendent vers 1.

cette norme est bornée supérieurement en fonction des bornes supérieures de $(\beta - \alpha)$, $\frac{1}{d_1}$, $\frac{1}{d_2}$, la fonction $\Psi(l)$ vérifiant les conditions qui lui ont été imposées au paragraphe 23.

27. ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES PARAMÈTRES a ET b LORSQUE LES DISTANCES d_1 ET d_2 TENDENT VERS ZÉRO OU DEVIENNENT INFINIES. — Supposons encore le problème résolu; soient $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 les éléments connus, $l(t)$, a , b , ψ_1 et ψ_2 les éléments inconnus *a priori*, supposés déterminés. Faisons varier les éléments connus de manière que les conditions qui leur ont été imposées au paragraphe 23 soient vérifiées au cours de cette transformation de la configuration. Nous allons montrer d'abord que si le paramètre d_1 (ou d_2) augmente indéfiniment, le paramètre correspondant b (ou a) croît au delà de toute limite et réciproquement.

La démonstration repose sur la construction d'une minorante du quotient $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ et sur un lemme. Traçons dans le domaine $\mathfrak{E}$ un chemin régulier C_1 , joignant un point quelconque du segment $(1, +\infty)$ de l'axe réel, mais autre que $t = 1$, $t = b$, $t = \infty$, à un point quelconque du segment $(-\infty, -1)$, autre que $t = -\infty$, $t = a$, $t = -1$, tel que la longueur de la ligne C_1 soit finie; il en résulte que chacun de ses points est à distance finie. Lorsque les paramètres d_1 et d_2 ne sont pas nuls, la correspondance $z = z(t)$ fera correspondre à C_1 un chemin régulier C situé à distance finie dans le domaine $\mathfrak{A}$ et reliant un point de λ_1 ou de μ_1 à un point de λ_2 ou de μ_2 . D'après cela, la longueur L du chemin C est bornée inférieurement par la différence des ordonnées des extrémités B et C de l'obstacle, différence qui, par hypothèse, n'est pas nulle (*cf.* le § 23). Tenant compte de (3.31), on peut écrire

$$(3.32) \quad \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a| \cdot b} \int_{C_1} e^{-\tau(t)} |t - t_0| \frac{|a| \cdot b}{|t - a| |t - b|} |dt| \geq \text{const.}$$

La longueur du chemin d'intégration C_1 étant finie et le facteur

$$\frac{|a| \cdot b}{|t - a| |t - b|}$$

étant supérieurement borné le long de C_1 ainsi que le module $|z|$, d'après la façon même dont C_1 est défini, l'intégrale qui figure au premier membre est supérieurement bornée puisque d_1 et d_2 ne sont pas nuls (cf. le § 26); il en résulte que le facteur positif $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ est borné inférieurement par une constante non nulle.

C. Q. F. D.

Ainsi, le paramètre $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ est borné en module, tant supérieurement qu'inférieurement; mais il importe de noter que la deuxième limitation n'est valable que si les distances d_1 et d_2 sont inférieurement bornées.

Sous cette dernière hypothèse, on peut énoncer le lemme suivant :

LEMME. — *La valeur de l'intégrale* ⁽¹²¹⁾

$$(1.32) \quad I_1 = \int_1^b \sin \Omega(t) \frac{b}{b-t} \frac{|a|}{t-a} (t-t_0) dt$$

augmente indéfiniment si la configuration des éléments rigides dans le plan z se déforme de manière que le paramètre b correspondant croît au delà de toute limite.

La réciproque est vraie. Nous appellerons I_2 la même intégrale étendue à l'intervalle $(a, -1)$; un énoncé tout analogue s'applique à I_2 . En effet : 1° d'après (1.51) et (1.16), on peut écrire

$$\Omega[t(Z)] = \frac{i}{2\pi^2} \int_0^\pi \Phi(s) \left[\frac{\theta' \left(\frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left(\frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s}{2\pi} \right)} + \frac{\theta' \left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)}{\theta \left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s}{2\pi} \right)} - \frac{\theta' \left(\frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s_0}{2\pi} \right)}{\theta \left(\frac{\log Z}{2i\pi} + \frac{s_0}{2\pi} \right)} - \frac{\theta' \left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right)}{\theta \left(\frac{\log Z}{2i\pi} - \frac{s_0}{2\pi} \right)} \right] ds,$$

formule où la fonction $\Phi(s)$ se déduit de $\Psi[l(s)]$ au moyen des relations du paragraphe 12. Rappelons que d'après les raisonnements du paragraphe 16, l'élément différentiel de l'intégrale précédente,

⁽¹²¹⁾ Voir le paragraphe 12 pour l'étude du comportement de I_1 pour $t=b$.

divisé par i , n'est pas négatif dans l'intervalle $-1 \leq Z \leq -q$, c'est-à-dire le long de son image $1 \leq t \leq b$ dans le plan t .

2° Les distances d_1 et d_2 différant de zéro, le paramètre q est différent de 1; la fonction analytique $\theta(v, q)$ correspondante est donc régulière en v et en q (y compris pour $q = 0$). D'autre part, on a vu au paragraphe 16 que l'expression qui figure entre crochets au second membre, divisée par i , ne s'annule que pour $s = s_0$; il suit de là que son module peut être borné inférieurement en fonction de $|s - s_0|$ en tout point intérieur à l'intervalle $-1 < Z < -q$.

3° Par hypothèse (cf. § 23), $\Psi(l)$ ne se réduit pas identiquement à zéro dans l'intervalle $\alpha \leq l \leq \beta$. Dès lors, la fonction $\Psi[l(s)]$ étant continue pour $0 \leq s \leq \pi$ (cf. § 26), il existe un nombre positif ε non nul tel que la mesure de l'ensemble des points de l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$, où $|\Phi(s)|$ est supérieur à ε , est supérieure à une constante positive convenable.

4° En combinant les résultats des alinéas 1°, 2° et 3°, on voit que la fonction $\Omega[t(Z)]$, nulle pour $Z = -q$, est bornée inférieurement en tout point Z intérieur à l'intervalle $-1 < Z < -q$. Or, la correspondance $t = t(Z)$ est analytique et régulière dans cet intervalle si q est distinct de 1 (cf. § 14); par suite, à tout point intérieur à l'intervalle $-1 < Z < -q$, correspondra un point intérieur à l'intervalle $1 < t < b$; $\Omega(t)$ peut donc être bornée inférieurement en tout point intérieur à l'intervalle $1 < t < b$.

5° Par hypothèse, on a

$$|\Phi(s)| \leq \pi;$$

le principe du maximum, appliqué à la fonction $\Omega[t(Z)]$, permet d'affirmer que $\Omega(Z)$ est distincte de π en tout point Z intérieur à l'intervalle $-1 < Z < -q$.

6° En combinant les résultats des alinéas 4° et 5° on voit que le module de $\sin \Omega(t)$ est inférieurement borné en tout point t du segment $1, b$ distinct de ses extrémités b et 1 . Il suit de là que la valeur absolue de l'élément différentiel de l'intégrale I , est minorée en tout point intérieur de l'intervalle d'intégration $1 < t < b$; cela montre que I , augmente indéfiniment avec la mesure $(b - 1)$ de cet intervalle.

La réciproque est évidente; le facteur

$$\frac{\sin \Omega(t)}{b-t}$$

de l'élément différentiel positif de I_1 , étant borné pour $t=b$ (cf. §12), l'intégrale I_1 est supérieurement bornée si le paramètre b reste fini.

Tout pareillement, on établirait que I_2 augmente indéfiniment avec $|a|$, et réciproquement. C. Q. F. D.

Remarque. — De la démonstration qui précède, il résulte que I_1 et I_2 sont inférieurement bornés si b et $|a|$ sont différents de 1.

Cela étant, il vient, d'après (1.33), (1.33') et (3.32)

$$(3.33) \quad \begin{cases} d_1 = \psi_1 + \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a|.b} I_1 = \psi_1 + \gamma_1, \\ d_2 = \psi_2 + \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a|.b} I_2 = \psi_2 + \gamma_2. \end{cases}$$

Supposons que la configuration donnée dans le plan z se déforme de manière que d_1 augmente indéfiniment, d_2 restant fini mais différent de zéro. La deuxième équation (3.33) montre alors que chacun des termes positifs

$$\psi_2 \quad \text{et} \quad \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b} I_2$$

reste borné. Comme le quotient

$$\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$$

est à la fois majoré et minoré, il en résulte que

1° l'intégrale I_2 correspondante demeure supérieurement bornée au cours de la transformation envisagée; le lemme précédent montre alors que le paramètre $|a|$ reste nécessairement fini;

2° la distance γ_1 et l'intégrale I_1 deviennent infinies simultanément. Par ailleurs, la première relation (3.33), dans laquelle les deux termes du second membre sont positifs, prouve que si d_1 augmente indéfiniment, l'un, au moins, des paramètres ψ_1 ou γ_1 , c'est-à-dire ψ_1 ou b , augmente indéfiniment. Or $|a|$ et ψ_2 étant bornés supérieurement et $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|.b}$ étant limité dans les deux sens, il est clair qu'au cours de la transformation considérée ψ_1 et b doivent tendre vers

l'infini simultanément, et cela de manière que le quotient $\frac{\psi_1}{b}$ soit borné tant supérieurement qu'inférieurement ⁽¹²²⁾.

Réciproquement, supposons que la configuration donnée dans le plan z se déforme de manière que le paramètre b correspondant augmente indéfiniment, $|a + 1|$ restant limité dans les deux sens. Dans ces conditions l'un, au moins, des paramètres ψ_1 ou ψ_2 doit croître au delà de toute limite, puisque le rapport $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ reste borné dans les deux sens; dans tous les cas, les quotients $\frac{\psi_1}{b}$ et $\frac{\psi_2}{b}$ restent finis. Or, de deux inégalités [cf. (1.4'')]]

$$\text{const.} < \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b} < \text{const.} \quad \text{et} \quad \left| \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \right| < 1,$$

on déduit, en multipliant membre par membre,

$$\left| \frac{\psi_1}{b} - \frac{\psi_2}{|a|} \right| < \text{const.}$$

Cela montre que $\frac{\psi_1}{b}$ et $|a|$ étant bornés supérieurement, ψ_2 est borné supérieurement. Les formules (3.33) prouvent alors qu'au cours de la transformation envisagée, la paroi μ_1 s'éloigne indéfiniment alors que la paroi μ_2 reste à distance finie.

Ainsi, lorsque la configuration donnée dans le plan se déforme de manière que l'un des paramètres correspondants d_1 , ψ_1 ou b tende vers l'infini, d_2 restant fini, les deux autres croissent au delà de toute limite, et cela de façon que le quotient de deux paramètres quelconques soit fini; les paramètres $|a|$ et ψ_2 restent bornés au cours de la transformation.

Tout pareillement, on établirait que si d_1 et d_2 (ou b et $|a|$, ou ψ_1 et ψ_2) augmentent indéfiniment, b , $|a|$, ψ_1 et ψ_2 correspondants augmentent indéfiniment de manière que

$$\left| \frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b} \right| < \text{const.}, \quad \left| \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \right| < 1.$$

⁽¹²²⁾ Ces conclusions résultent aussi, en partie, de la discussion du système (1.4'').

A la limite, on obtiendra un sillage correspondant à l'obstacle donné placé en fluide indéfini. On observera que tous ces résultats sont en complet accord avec les conclusions des paragraphes 14 et 24.

Il est bon de rappeler que la discussion qui précède repose essentiellement sur l'hypothèse suivante : la distance d_1 (nous prendrons, pour fixer les idées $d_1 \leq d_2$) ne devient pas nulle au cours des transformations du plan z que nous avons envisagées; dans ce cas (*cf.* § 24) les paramètres $|a+1|$ et $b-1$ sont bornés inférieurement et les formules de transformation utilisées ne deviennent pas illusoires. Nous nous proposons de compléter notre discussion en montrant que si la configuration du plan z se déforme de manière que d_1 tende vers zéro, le paramètre b correspondant tend vers 1; le théorème réciproque a été déjà établi au paragraphe 24 [*cf.* (3.28)]. En effet, d'après (3.33), le terme

$$v_1 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\pi |a| \cdot b} I_1$$

doit s'annuler avec d_1 . Or, raisonnons par l'absurbe et supposons que b ne tende pas dans ces conditions vers 1; il résulterait des minoration de $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a| \cdot b}$ et de I_1 , que nous avons effectuées au cours de ce paragraphe (et qui seraient valables puisque $b \neq 1$) que γ_1 ne tendrait pas vers zéro; cette contradiction justifie notre assertion.

28. THÉORÈMES D'EXISTENCE. — Rappelons brièvement les principaux résultats obtenus par MM. Leray et Schauder dans le domaine des équations fonctionnelles. Soit un espace abstrait E que nous supposons linéaire, normé, complet (au sens de M. Banach); soient x un élément de cet espace et $F(x)$ une transformation fonctionnelle complètement continue⁽¹²³⁾ (vollstetig, au sens de M. F. Riesz) définie sur E et opérant sur x .

(123) Nous croyons utile de préciser le sens des termes employés.

Un espace abstrait E est dit linéaire si, étant donnés deux éléments x et x' de E ,

1° On peut définir la somme $x + x'$, l'élément résultant ainsi obtenu appar-

Ceci posé, envisageons l'équation fonctionnelle

$$(3.34) \quad x = F(x)$$

à laquelle nous associerons la transformation

$$(3.35) \quad y = x - F(x).$$

tenant à E; l'opération d'addition est commutative. Cela entraîne l'existence de l'élément zéro.

2° m et m' désignant deux nombres réels, on peut définir les produits tels que $mx, m'x'$, etc.; les éléments ainsi introduits doivent appartenir à E. L'opération de multiplication ainsi définie est distributive; on doit donc avoir

$$(m + m')(x + x') = mx + m'x + mx' + m'x'.$$

Un espace abstrait est dit normé si, à tout élément x de E, on peut attacher un nombre positif ou nul, que nous désignerons par le symbole $\|x\|$ et que nous appellerons « norme de x », tel que :

1° l'égalité $\|x\| = 0$ entraîne $x = 0$;

2° l'axiome du « triangle » $\|x + x'\| \leq \|x\| + \|x'\|$ est vérifié;

3° on a, m étant un nombre réel,

$$\|mx\| = |m| \|x\|.$$

Un espace abstrait est complet si l'égalité

$$\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \|x_p - x_q\| = 0$$

entraîne l'existence d'un élément x tel que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x - x_p\| = 0.$$

Relativement à un espace linéaire, normé et complet, nous introduisons les définitions suivantes :

Un ensemble C d'un espace abstrait E est dit compact lorsque toute suite infinie d'éléments de C a au moins un élément limite qui appartient à E.

Une transformation fonctionnelle $F(x)$, définie dans l'espace E et opérant sur l'élément x de cet espace, est dite complètement continue si elle est continue relativement à son argument et si elle transforme tout ensemble borné de E en un ensemble compact de E. Lorsque E est constitué par l'ensemble des fonctions possédant un même module de continuité, on peut attacher la norme $\|x\|$ à tout élément x de E en posant

$$\|x\| = \text{Max. } |x|;$$

alors la transformation $F(x)$ sera, d'après le théorème d'Arzela, complètement

Soit alors D un domaine borné de l'espace E et supposons que la frontière D' de D ne contient aucune solution de (3.34); avec MM. Leray et Schauder, nous appellerons indice total i des solutions de l'équation (3.34) contenues dans D ⁽¹²⁴⁾, le degré topologique $d[x - F(x), D, 0]$ au point zéro de la transformation (3.35) opérant sur D . Cette définition est légitime puisque les hypothèses faites entraînent l'existence du nombre $d[x - F(x), D, 0]$. Admettons

continuë si elle est continue. Dans ce cas, en effet, la transformation $F(x)$ transforme toute famille bornée (en norme) de fonctions de E en une famille bornée (en vertu de la continuité) de fonctions possédant une égale continuité, c'est-à-dire compacte.

Cette remarque s'applique, en particulier, à la transformation V définie au paragraphe 23.

⁽¹²⁵⁾ Faute de place nous ne pouvons développer ici la théorie du degré topologique due à M. Brouwer (*Mathematische Annalen*, t. 71, 1911) et généralisée depuis par MM. Schauder et Leray; nous nous contenterons de rappeler les propriétés fondamentales du degré qui font comprendre l'importance de cette notion.

Considérons d'abord, avec M. Brouwer, un ensemble ouvert ω situé dans l'espace à n dimensions E_n ; nous supposons ω borné et nous désignerons par ω' sa frontière. Soit alors $F(x)$ une transformation continue (et non plus complètement continue) opérant sur E_n et faisant correspondre à tout point x de E_n un point x' appartenant au même espace; nous appellerons $F(\omega)$ et $F(\omega')$ les ensembles de E_n , images respectives des ensembles ω et ω' dans la correspondance $x' = F(x)$. M. Brouwer montre que dans ces conditions on peut définir en chaque point $x = a$ de $F(\omega)$ étranger à $F(\omega')$, un nombre entier, positif ou négatif $d[F, \omega, a]$ [la transformation $x' = F(x)$ peut recouvrir le point a un certain nombre de fois; en affectant chaque recouvrement d'un signe, selon une loi que nous n'aurons pas à utiliser, le degré $d[F, \omega, a]$ se définit, en gros, comme la différence entre les nombres de recouvrements positifs et négatifs; dans la suite, nous n'aurons à considérer que le cas où le degré $d[F, \omega, a]$ correspondant vaut ± 1], que nous appellerons degré topologique de la transformation au point $x = a$ relativement à ω et qui possède trois propriétés suivantes :

- 1° Si $d[F, \omega, a]$ n'est pas nul, le point a fait partie de l'ensemble $F(\omega)$.
- 2° Le degré $d[F, \omega, a]$ reste constant lorsque le point a , la transformation $F(x)$ et l'ensemble ω varient continûment, pourvu que le point a demeure constamment étranger à l'ensemble $F(\omega')$ au cours de la déformation envisagée.
- 3° Si $\omega = \omega_1 + \omega_2$ sont deux ensembles ouverts, sans points communs intérieurs,

alors que l'on puisse construire les transformations auxiliaires

$$\begin{aligned} (3.34') \quad & \gamma = F(x, k) \\ (3.35') \quad & \gamma = x - F(x, k) \end{aligned} \quad \text{avec } 0 \leq k \leq 1,$$

dépendant d'un paramètre réel k et jouissant des propriétés suivantes :

1° Pour chaque valeur de k ($0 \leq k \leq 1$) la transformation (3.35') est complètement continue relativement à l'élément x de D et uniformément continue relativement au paramètre k ; on peut donc définir l'indice $i(k) = d[x - F(x, k), D, 0]$ pour toute valeur de k appartenant à l'intervalle $0 \leq k \leq 1$.

2° Pour toute valeur de k , $0 \leq k \leq 1$, les solutions éventuelles de (3.34') (obtenue en remplaçant γ par x) sont bornées *a priori*; pendant la déformation de l'équation qu'entraîne la variation de k , aucune de

dont les frontières seront notées ω'_1 et ω'_2 , on a

$$d[F, \omega, a] = d[F, \omega_1, a] + d[F, \omega_2, a],$$

pourvu que a soit étranger à $F(\omega'_1)$ et à $F(\omega'_2)$.

Ceci posé, résoudre l'équation fonctionnelle

$$(a) \quad x = F(x)$$

revient, géométriquement, à chercher un point x de E_n qui soit sa propre image dans la correspondance $x' = F(x)$. Supposons qu'on ait réussi à montrer *a priori* que le module de la solution éventuelle $x = a$ de l'équation (a) est borné; le point a appartient donc à un certain ensemble borné ω de E_n . Ce résultat permet de définir le degré $d[F, \omega, a]$ de la transformation $x' = F(x)$ en chaque point de ω puisque $F(a)$ sera alors étranger à $F(\omega')$; et pour établir l'existence d'une solution de (a) il suffira d'établir l'existence d'un point de a de ω en lequel $d[F, \omega, a]$ diffère de zéro (cf. la première propriété du degré). Pour mettre en évidence l'existence d'un tel point, on cherchera à faire varier continûment la transformation $F(x)$ de manière que les solutions éventuelles de (a) restent intérieures au même ensemble ω , c'est-à-dire n'en atteignent pas la frontière ω' . D'après la deuxième propriété fondamentale du degré topologique, le nombre $d[F, \omega, x]$, où x désigne un point intérieur à ω , reste invariant au cours de cette déformation de (a). Supposons que par ce procédé on puisse réduire (a) à une forme $x = F_1(x)$ suffisamment simple pour pouvoir établir l'existence d'un point a_1 de ω en lequel $d[F_1, \omega, a_1]$ diffère de zéro. Cela

ces solutions ne franchit la frontière D' ; dans ces conditions le nombre $i(k) = d[x - F(x, k), D, 0]$ sera indépendant de k .

3° On a

$$F(x, 1) = F(x).$$

4° On peut déterminer le nombre $i(0) = d[x - F(x, 0), D, 0]$ et, par suite, l'indice total i de la transformation (3.34) dans le domaine D . (Nous appellerons *conditions L* l'ensemble des conditions que nous venons d'énumérer.)

Dans ces conditions, si $i(0)$ est différent de zéro, $i = i(1)$ est différent de zéro; il résulte alors des propriétés fondamentales du degré que l'équation (3.34) possède au moins une solution dans D . Nous nous proposons d'appliquer ce critère d'existence de MM. Leray

montre qu'il existe au moins un point de a de ω tel que

$$d[F, \omega, a] = d[F_1, \omega, a_1],$$

c'est-à-dire que l'équation (a) admet au moins la solution $x = a$. Pour effectuer pratiquement la réduction utilisée de $F(x)$, on introduira dans cette transformation un paramètre réel k , appartenant à l'intervalle $0 \leq k \leq 1$, pour fixer les idées. On écrira donc

$$x' = F(x, k)$$

avec

$$F(x, 1) = F(x) \quad \text{et} \quad F(x, 0) = F_1(x).$$

Il sera toujours supposé que la transformation $F(x, k)$ est uniformément continue relativement à k ; d'une façon précise, cela veut dire qu'à toute valeur k telle que $0 \leq k \leq 1$ et à tout nombre positif ε correspond un nombre η tel que l'inégalité $|k - k'| < \eta$ entraîne

$$|F(x, k) - F(x, k')| < \varepsilon,$$

pourvu que x appartienne à l'ensemble ω .

Lorsque $F(x)$ désigne une transformation complètement continue (et non plus simplement continue), MM. Leray et Schauder ont réussi à étendre la définition et les propriétés de degré topologique aux transformations du type (3.35) dans le cas où celles-ci opèrent sur les éléments x d'un espace linéaire, normé, complet E (et non plus sur un élément de l'espace à n dimensions E_n). Il suit de là que les critères d'existence, que nous venons de rappeler, s'appliquent aux équations (3.35), à condition de substituer partout au terme module celui de norme et au terme de degré celui d'indice, défini dans le texte.

et Schauder aux équations fonctionnelles du problème du sillage et de la proue.

Envisageons d'abord la transformation fonctionnelle

$$(3.36) \quad L(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b],$$

où le symbole V désigne l'opération définie par le second membre de (3.20). De par la définition même de V , il est clair qu'étant donné un groupe de ses arguments, $\Psi(l)$ [$\Psi(l)$ étant un élément de $E(\alpha, \beta, l)$] α, β, a et b ($-\infty \leq a < -1 < 1 < b \leq +\infty$), la transformation (3.36) fait correspondre à chaque point $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$ (cf. § 23) un élément $L(s)$ du même espace ⁽¹²⁵⁾. Nous avons constaté par ailleurs que $|a|$ et b étant distincts de 1 (cf. §§ 12 et 14), l'élément $L(s)$ ainsi obtenu dépend continûment de $l(s)$, $\Psi(l)$, α, β, a et b ; il s'ensuit que (3.36) est une transformation continue du type $x' = F(x)$. De plus, il suffit de se reporter aux calculs mêmes (cf. § 23) effectués pour déterminer les paramètres ψ_1 et ψ_2 à partir des éléments $l(s)$, $\Psi(l)$, α, β, a et b pour constater que le paramètre $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$ et, par suite, les grandeurs $\left| \frac{dL(s)}{ds} \right|$ et $|L(s)|$ sont majorés au moyen des quantités $\|l(s)\|$, $\|\Psi(l)\|$, $|\alpha|$ et $|\beta|$, les paramètres a et b correspondants étant astreints à être différents de 1 (cf. §§ 14, 23, 25, 26). Il en résulte qu'à tout ensemble borné ⁽¹²⁶⁾ d'éléments $l(s)$ de l'espace $E(0, \pi, s)$, l'opération (3.36) fait correspondre un ensemble borné situé dans le même espace; cet ensemble sera compact, puisque le principe de Bolzano-Weierstrass s'applique à $E(0, \pi, s)$; cela montre

(¹²⁵) Rappelons, en effet, que d'après la définition même de F , l'élément $L(s)$ est obtenu à partir de l'équation (1.31) de M. Villat, où l'on remplace le premier membre par $\frac{dL(s)}{ds}$; si donc $|a|$ et b sont distincts de 1, et $\Psi(l)$ et $l(s)$ sont des éléments de $E(\alpha, \beta, l)$ et $E(0, \pi, s)$ respectivement, $\frac{dL(s)}{ds}$ existe et est continue; $L(s)$ appartient donc bien à $E(0, \pi, s)$.

Précisons aussi que $l(s)$ désigne maintenant un élément quelconque de $E(0, \pi, s)$; $l(s)$ n'est plus nécessairement une fonction croissante de s lorsque $0 \leq s \leq \pi$.

(¹²⁶) Nous entendons par là que les éléments de l'ensemble considéré ont des normes bornées.

que (3.36) est une transformation complètement continue, opérant dans l'espace linéaire, normé, complet $E(o, \pi, s)$, à laquelle s'applique la théorie de l'indice total de MM. Leray et Schauder.

Moyennant les résultats qui précèdent, le lecteur vérifiera aisément que les fonctionnelles définies par les seconds membres des équations (A) et (A') du paragraphe 13 et des équations (3.21) et (3.22) sont continues relativement à chacun de leurs arguments toutes les fois que (3.36) est continue; comme aux éléments $\Psi(l)$ de $E(\alpha, \beta, l)$ et $l(s)$ de $E(o, \pi, s)$ correspondent des valeurs bornées des fonctionnelles en cause si $b - 1 > 0$ et $a + 1 < 0$, les transformations qu'elles définissent sont même complètement continues.

Cela posé, envisageons dans le plan z une configuration des éléments rigides, définie par les éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 assujettis à vérifier les conditions énumérées au paragraphe 23 (dans la suite nous supposons toujours que ces conditions sont remplies). Au paragraphe 24 on a vu que les paramètres $|a|$ et b , caractérisant un mouvement à la Helmholtz (proue ou sillage) correspondant à cette configuration, diffèrent de 1 lorsque aucune des distances d_1 ou d_2 n'est nulle ⁽¹²⁷⁾; dans ce cas, les hypothèses faites sur la courbe-obstacle entraînent l'existence et la continuité de la dérivée $\frac{dl(s)}{ds}$ (cf. §§ 25 et 26). Nous pouvons donc affirmer, *a priori*, qu'étant donné une configuration définie par $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 (α et β bornés, d_1 et d_2 distincts de zéro) :

- 1° les inconnues $|a|$ et b correspondantes diffèrent de 1 ;
- 2° l'inconnue $l(s)$ appartient à l'espace $E(o, \pi, s)$; les normes des solutions $l(s)$ éventuelles sont bornées *a priori* ;
- 3° les relations fonctionnelles utilisées pour la mise en équation sont complètement continues.

Problème du sillage. — Introduisons, pour faciliter le langage, l'espace abstrait $E(o, \pi, s, a, b)$ dont un élément x sera formé par l'ensemble de l'élément $l(s)$ de $E(o, \pi, s)$ et de deux constantes $\frac{1}{b-1}$ et $\frac{1}{a+1}$.

(127) Au cours de ce paragraphe, cette hypothèse sera supposée remplie.

Étant donné deux éléments

$$x = \left[l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1} \right] \quad \text{et} \quad x' = \left[l'(s), \frac{1}{b'-1}, \frac{1}{a'+1} \right]$$

de l'espace $E(o, \pi, s, a, b)$ et deux constantes réelles m et m' , nous appellerons combinaison linéaire à coefficients m et m' de x' et x , l'élément de $E(o, \pi, s, a, b)$ défini par

$$mx + m'x' = \left[ml(s) + m'l'(s), \frac{m}{b-1} + \frac{m'}{b'-1}, \frac{m}{a+1} + \frac{m'}{a'+1} \right].$$

Nous appellerons norme d'un point de $E(o, \pi, s, a, b)$ la grandeur

$$\|x\| = \|l(s)\| + \left| \frac{1}{b-1} \right| + \left| \frac{1}{a+1} \right|.$$

Il est clair, dès lors, que l'espace $E(o, \pi, s, a, b)$ ainsi défini est linéaire, normé et complet. Moyennant ces conventions, le problème du sillage, tel qu'il a été énoncé au paragraphe 23, peut se formuler comme il suit : étant donné un élément $\Psi(l)$ et $E(\alpha, \beta, l)$ et quatre constantes α, β, d_1 et d_2 , établir l'existence d'un élément de $E(o, \pi, s, a, b)$ vérifiant les relations (3.20) et (3.21). Pour appliquer la théorie de MM. Leray et Schauder, nous allons réduire ce système de trois équations à une équation unique du type $x' = F(x)$.

Soit alors ν une grandeur absolument constante, ayant les dimensions de la distance; les paramètres b et a étant des constantes numériques sans dimensions, le système des équations (3.20) et (3.21) peut s'écrire

$$(3.37) \quad \begin{cases} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b], \\ \frac{1}{(b-1)} = \frac{1}{(b-1)} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_1} - \frac{1}{D_1[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]} \right\}, \\ \frac{1}{(1+a)} = \frac{1}{(1+a)} - \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_2} - \frac{1}{D_2[l(s), \Psi(l), \alpha, \beta, a, b]} \right\}. \end{cases}$$

Grâce à cet artifice d'écriture, les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des relations précédentes feront correspondre à un ensemble d'éléments $l(s), a, b$, un ensemble d'éléments de même nature; nous pouvons, dès lors, considérer l'ensemble de ces transformations comme une transformation fonctionnelle unique opérant sur

les éléments x de l'espace $E(0, \pi, s, a, b)$, en sorte qu'en désignant cette transformation par le symbole $\mathcal{F}\left[x, \Psi(l), \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \alpha, \beta\right]$ les équations (3.27) se réduisent à l'équation unique

$$(3.38) \quad x = \mathcal{F}\left[x, \Psi(l), \frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \alpha, \beta\right]$$

du type même envisagé par MM. Schauder et Leray.

Envisageons alors dans le plan z la configuration auxiliaire, définie au moyen des éléments $\Psi^*(l)$, d_1^* , d_2^* , α et β ,

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^*(l) = k\Psi(l) + (1-k)\frac{\pi}{2}, \\ d_1^* = \frac{d_1}{k}, \\ d_2^* = \frac{d_2}{k}, \end{array} \right.$$

dépendant d'un paramètre réel k tel que $0 \leq k \leq 1$; nous affecterons d'un astérisque les éléments relatifs à cette configuration.

Il est clair que pour $k=1$, la configuration auxiliaire se réduit à la configuration donnée; pour toute valeur de k ($0 \leq k \leq 1$), les éléments $\Psi^*(l)$, d_1^* , d_2^* vérifient les conditions du paragraphe 23⁽¹²⁸⁾; enfin, si k tend vers zéro, l'obstacle se déforme de manière à se réduire pour $k=0$ au segment rectiligne de longueur $\beta - \alpha$, placé en fluide indéfini ($d_1 = d_2 = +\infty$) perpendiculairement à la direction générale du courant. Les paramètres d_1^* et d_2^* ne deviennent jamais nuls au cours de la déformation envisagée des éléments rigides : par suite, les paramètres $|a^*|$ et b^* correspondants sont donc supérieurs à 1 et ne peuvent être égaux à 1. Dans ces conditions, l'équation du problème du sillage posé relativement à la configuration auxiliaire s'écrit, d'après (3.38),

$$(3.40) \quad x^* = \mathcal{F}[x^*, \Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, \alpha, \beta].$$

le symbole $\mathcal{F}$ désignant une transformation de l'espace $E(0, \pi, s, a, b)$ complètement continue relativement à x^* .

(128) On vérifie aisément qu'on a, en particulier,

$$0 \leq \Psi^*(l) \leq \pi,$$

pourvu que

$$0 \leq \Psi(l) \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Elle est, de plus, uniformément continue relativement au paramètre k ($0 \leq k \leq 1$). D'après les équations (3.39) cela est évident tant que k diffère de zéro. Si k tend vers zéro, d_1^* et d_2^* augmentent indéfiniment [cf. (3.39)] et, par suite (cf. § 27), les paramètres $|a^*|$ et b^* correspondants augmentent aussi indéfiniment; or (cf. § 14) les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres de (3.37) sont continues pour $b^* = \infty$ et $|a^*| = \infty$; les quantités $\frac{1}{d_1^*}$ et $\frac{1}{d_2^*}$ sont, en effet, continues tant que les distances d_1^* et d_2^* sont différentes de zéro; d'un autre côté, les raisonnements du § 27 prouvent que les fonctionnelles D_1^* et D_2^* , définies au § 23, sont positives et sûrement différentes de zéro lorsque $d_1^* \neq 0$ et $d_2^* \neq 0$; la transformation $\mathcal{T}$ est donc continue pour $d_1^* = d_2^* = \infty$, c'est-à-dire pour $k = 0$, puisque $\frac{1}{a+1}$ et $\frac{1}{b-1}$ le sont pour les valeurs correspondantes de b et de a .

D'autre part, il résulte de ce qui précède [cf. les formules (3.39) et le début de ce paragraphe], que les éléments $l^*(s)$, a^* et b^* qui définissent la solution éventuelle x^* de (3.40) vérifient les inégalités

$$\|l^*(s)\| \leq \text{const.}, \quad |a^* + 1| \geq \text{const.} > 0, \quad (b^* - 1) \geq \text{const.} > 0.$$

Cela montre que la grandeur $|x^*|$

$$\|x^*\| = \|l^*(s)\| + \frac{1}{|a^* + 1|} + \frac{1}{|b^* - 1|}$$

est supérieurement bornée quel que soit k , $0 \leq k \leq 1$; le point x de $E(0, \pi, s, a, b)$ qui vérifie l'équation (3.40) reste donc intérieur à une certaine hypersphère ω de cet espace. Dès lors, les résultats rappelés au début de ce paragraphe nous permettent d'affirmer :

- 1° que la théorie de l'indice total s'applique à l'équation (3.40);
- 2° que l'indice total des solutions intérieures à ω de cette équation est indépendant de k , $0 \leq k \leq 1$;
- 3° pour $k = 1$ l'équation (3.40) se réduit à (3.38) relative à la configuration donnée;
- 4° pour $k = 0$ l'équation (3.40) est indépendante de l'élément $l(s)$ puisque la configuration correspondante se réduit, on l'a vu, à une lame rectiligne placée orthogonalement au courant d'épaisseur infinie. On sait que pour un tel obstacle le problème du sillage admet une

solution et une seule ⁽¹²⁹⁾; cela montre que pour $k = 0$ l'indice total des solutions de (3.40) est égal à 1; il en résulte que l'indice relatif à $k = 1$, c'est-à-dire relatif à l'équation (3.38), est égal à 1. L'équation (3.38) a donc au moins une solution. C. Q. F. D.

Remarque. — Considérons une configuration des éléments rigides symétrique relativement à l'axe du canal. Les raisonnements précédents, légèrement retouchés, permettent d'énoncer le résultat suivant : il existe au moins un élément $x = x\left[l(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}\right]$ de l'espace $E(0, \pi, s, a, b)$ tel que

$$-a = b$$

qui vérifie les équations du problème du sillage posé par la configuration en cause. En d'autres termes, aux éléments rigides symétriques par rapport à l'axe du canal, on peut faire correspondre au moins un régime à la Helmholtz possédant la même symétrie. Dans ce cas le point de bifurcation est connu *a priori*, puisqu'il coïncide avec le milieu O de l'obstacle; celui-ci peut d'ailleurs présenter en O un point anguleux; l'image de O dans d sera le point $Z = i$. Nous choisirons O pour origine des abscisses curvilignes l ; les inconnues du problème seront : 1° la fonction $l(s)$, définie pour $\frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi$ et assujettie à vérifier les conditions aux limites

$$l\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad l(\pi) = \frac{\beta - \alpha}{2};$$

2° le paramètre $b > 1$. Une fois ces conventions adoptées, les raisonnements qui précèdent s'appliqueront sans modification.

Problème de la proue. — Introduisons, encore pour simplifier l'exposition, un second espace abstrait $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ dont un élément x sera constitué par l'ensemble de l'élément $l(s)$ de $E(0, \pi, s)$ et de quatre constantes $\frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p_1$ et p_2 . Étant donné deux éléments

$$x = \left[l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p_1, p_2\right] \quad \text{et} \quad x' = \left[l'(s), \frac{1}{b'-1}, \frac{1}{a'+1}, p'_1, p'_2\right],$$

⁽¹²⁹⁾ Cf. par exemple M. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* ou U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*.

de l'espace $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ et deux constantes réelles m et m' , nous appellerons combinaison linéaire à coefficients constants de x et x' , l'élément

$$mx + m'x' = \left[\begin{array}{c} m l(s) + m' l'(s), \frac{m}{b-1} + \frac{m'}{b'-1}, \frac{m}{a+1} + \frac{m'}{a'+1}, \\ mp_1 + m'p'_1, mp_2 + m'p'_2 \end{array} \right].$$

Nous appellerons norme d'un point x de $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ la grandeur

$$\|x\| = \|l(s)\| + \left| \frac{1}{b-1} \right| + \left| \frac{1}{a+1} \right| + |p_1| + |p_2|.$$

Il est clair que l'espace $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ ainsi défini est linéaire normé, complet. Moyennant ces conventions, le problème de la proue tel qu'il a été énoncé au paragraphe 23 peut se formuler comme il suit : étant donné un élément $\Psi(l)$ de $E(\alpha, \beta, l)$ et quatre constantes α , β , d_1 et d_2 , établir l'existence d'un élément de $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ vérifiant l'un des systèmes de relations fonctionnelles (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) et les inégalités ^(4.30)

$$(3.41) \quad \left\{ \begin{array}{lll} p_2 < p_1, & p_2 < \alpha_1, & \beta_1 < p_1, \\ b-1 > 0, & a+1 < 0. \end{array} \right.$$

Attachons alors à chaque nombre réel n le nombre n^+ , défini par les relations suivantes :

$$n^+ = n, \quad \text{si } n > 0; \quad n^+ = 0, \quad \text{si } n \leq 0.$$

Nous allons montrer, à la suite de M. Leray, que la convention précédente ainsi que l'artifice d'écriture utilisé lors de l'étude du problème du sillage nous permettent de substituer aux systèmes (3.23),

⁽¹³⁰⁾ Rappelons que les quantités α_1 et β_1 ont été introduites à la fin du paragraphe 23; nous prions le lecteur de se reporter à ce passage.

D'après la définition même de α_1 et β_1 , on peut avoir $\beta_1 < \alpha_1$; c'est notamment le cas de l'obstacle convexe vers le courant où l'on a $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \alpha$. Il est dès lors indispensable, pour donner un sens au problème, de compléter les inégalités $p_2 < \alpha_1$, $\beta_1 < p_1$ par la condition $p_2 < p_1$. En définitive, les inconnues p_1 et p_2 du problème appartiennent au domaine, non borné, du plan (p_1, p_2) , limité par les droites d'équations

$$p_2 = \alpha_1, \quad p_1 = \beta_1, \quad p_1 = p_2.$$

(3.24), (3.25) et (3.26) précédents, le système *unique*

$$(3.42) \left\{ \begin{array}{l} l(s) = V[l(s), \Psi(l), \alpha + (p'_2 - \alpha)^+, \beta - (\beta - p'_1)^+, a, b], \\ \frac{(\alpha - p'_2)^+}{v} = -P_2[l(s), \Psi(l), a, b], \\ \frac{(p'_1 - \beta)^+}{v} = -P_1[l(s), \Psi(l), a, b], \\ \frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \frac{1}{v} \left\{ \frac{1}{d'_1} - \frac{1}{D_1[l(s), \Psi(l), \alpha + (p'_2 - \alpha)^+, \beta - (\beta - p'_1)^+, a, b]} \right\}, \\ \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{v} \left\{ \frac{1}{d'_1} - \frac{1}{D_2[l(s), \Psi(l), \alpha + (p'_2 - \alpha)^+, \beta - (\beta - p'_1)^+, a, b]} \right\}, \end{array} \right.$$

dont les inconnues p'_1 et p'_2 sont astreintes à être intérieures au domaine non borné (3.41).

En effet, supposons que la solution éventuelle

$$x = x \left[l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p'_1, p'_2 \right]$$

de (3.42) vérifie, outre (3.41), les inégalités

$$\alpha \leq p'_2, \quad p'_1 \leq \beta.$$

Alors, en posant

$$p'_2 = p_2, \quad p'_1 = p_1,$$

il vient

$$\begin{array}{ll} \alpha + (p'_2 - \alpha)^+ = p_2, & \beta - (\beta - p'_1)^+ = p_1, \\ (\alpha - p'_2)^+ = 0, & (p'_1 - \beta)^+ = 0. \end{array}$$

Ces inégalités, jointes aux conditions (3.41), montrent que la solution considérée de (3.42) vérifie aussi le système (3.23).

Supposons maintenant que la solution éventuelle

$$x = x \left[l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, p'_1, p'_2 \right]$$

de (3.42) vérifie, outre (3.41), les inégalités

$$p'_2 \leq \alpha, \quad p'_1 \leq \beta.$$

Alors, en posant

$$p_2 = \alpha, \quad p'_1 = p_1,$$

il vient

$$\begin{aligned}\alpha + (p'_2 - \alpha)^+ &= \alpha = p_2, & \beta - (\beta - p'_1)^+ &= p_1, \\ (\alpha - p'_2)^+ &\geq 0, & (p'_1 - \beta)^+ &= 0.\end{aligned}$$

Ces égalités, jointes aux conditions (3.41), montrent que l'élément $x = \left[l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, \alpha, p'_1 \right]$ vérifie le système (3.24).

Le cas $p'_1 \geq \alpha$, $p'_2 \geq \beta$ sera étudié d'une manière toute analogue; il correspond au système (3.25).

Enfin supposons que la solution de (3.42) vérifie les inégalités

$$p'_2 \leq \alpha, \quad p'_1 \geq \beta.$$

Alors, en posant

$$p_2 = \alpha, \quad p_1 = \beta,$$

il vient

$$\begin{aligned}\alpha + (p'_2 - \alpha)^+ &= \alpha = p_2, & \beta - (\beta - p'_1)^+ &= \beta = p_1, \\ (\alpha - p'_2)^+ &\geq 0, & (p'_1 - \beta)^+ &\geq 0.\end{aligned}$$

Ces relations, jointes aux conditions (3.41), montrent que l'élément $x = x \left[l(s), \frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, \alpha, \beta \right]$ vérifie le système (3.26).

De plus, grâce à l'introduction du paramètre d'homogénéité v , les fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des relations (3.42) feront correspondre à un ensemble d'éléments $l(s)$, a , b , $\alpha - p_2$, $p_1 - \beta$ un ensemble d'éléments de même nature; nous pouvons donc considérer l'ensemble de ces transformations comme une transformation fonctionnelle unique, opérant sur les éléments x de l'espace abstrait $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$, en sorte qu'en désignant cette transformation par le symbole $\mathcal{F} \left[x, \Psi(l), \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \alpha, \beta \right]$, les équations (3.42) se réduisent encore à l'équation unique

$$(3.42') \quad x = \mathcal{F} \left[x, \Psi(l), \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \alpha, \beta \right]$$

du type $x = F(x)$ déjà considéré.

Posons-nous alors le problème de la proue pour la configuration auxiliaire du plan z , dépendant du paramètre k ($0 \leq k \leq 1$) et définie au moyen des équations (3.39); ce problème revient à chercher un point $x^*[l^*(s), a^*, b^*, p_1^*, p_2^*]$ de $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ vérifiant les

inégalités ⁽¹³¹⁾ (3.41) et le système de relations fonctionnelles

$$(3.43) \left\{ \begin{aligned} l^*(s) &= V[l^*(s), \Psi^*(l), \alpha + (p_2^* - \alpha)^+, \beta - (\beta - p_1^*)^+, a^*, b^*], \\ \frac{(\alpha - p_2^*)^+}{\nu} &= -P_1[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*], \\ \frac{(p_1^* - \beta)^+}{\nu} &= -P_2[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*], \\ \frac{1}{b^* - 1} &= \frac{1}{b^* - 1} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_1^*} - \frac{1}{D_1[l^*(s), \Psi^*(l), \alpha + (p_2^* - \alpha)^+, \beta - (\beta - p_1^*)^+, a^*, b^*]} \right\}, \\ \frac{1}{a^* + 1} &= \frac{1}{a^* + 1} + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{d_2^*} - \frac{1}{D_2[l^*(s), \Psi^*(l), \alpha + (p_2^* - \alpha)^+, \beta - (\beta - p_1^*)^+, a^*, b^*]} \right\}, \end{aligned} \right.$$

équivalent à l'équation unique

$$(3.44) \quad x^* = \mathcal{F}[x^*, \Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, \alpha, \beta].$$

Les raisonnements faits à propos du problème du sillage s'appliquent encore à la fonctionnelle $\mathcal{F}$ de (3.44); on établit ainsi ⁽¹³²⁾ que cette fonctionnelle est complètement continue relativement à son argument x et uniformément continue relativement à k dans l'intervalle $0 \leq k \leq 1$; la théorie de l'indice total s'applique donc à l'équation (3.44).

Cela posé, nous allons montrer que les solutions éventuelles de (3.44) ne peuvent atteindre les bornes que leur assignent les inégalités (3.41).

1° Les paramètres a^* et b^* vérifient les inégalités $a^* < -1$, $b^* > 1$ de par leur nature même; on a vu d'autre part que les quantités $b^* - 1$ et $|a^* + 1|$ sont bornées inférieurement tant que les distances d_1^* et d_2^* sont différentes de zéro, c'est-à-dire pour $0 \leq k \leq 1$.

⁽¹³¹⁾ Le lecteur s'assurera aisément que la fonction $\Psi^*(l)$, définie par (3.49), atteint son maximum pour $l = \beta_1$ et son minimum pour $l = \alpha_1$; les inégalités (3.41) sont donc indépendantes de k .

⁽¹³²⁾ Les points essentiels de cette discussion, la minoration *a priori* des paramètres $|a^* + 1|$ et $b^* - 1$, s'acquièrent comme pour le problème du sillage. Les raisonnements préliminaires aux théorèmes d'existence établissent alors la continuité complète des fonctionnelles qui figurent aux seconds membres des équations (3.43).

2° On ne peut avoir $p_1^* = p_2^*$. Sinon, en effet, on aurait

$$\alpha + (p_2^* - \alpha)^+ = \beta - (\beta - p_2^*)^+$$

avec

$$p_2^* - \alpha \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta - p_2^* \geq 0,$$

système de conditions qui admet la solution unique $p_1^* = p_2^*$. Dans ce cas la longueur de l'obstacle serait nulle; les constantes ψ_1^* et ψ_2^* déterminées par l'équation (3.19), dans laquelle on aurait remplacé α et β par p_2^* et p_1^* respectivement, seraient égales toutes deux à zéro. Les équations (1.10), (1.10') et (1.31) montrent que $\frac{dl(s)}{ds} = 0$, la fonction $l(s)$, et par suite $\Psi^*[l(s)]$, est donc constante [cf. au paragraphe 23 la définition (3.20) de la transformation V] dans tout l'intervalle $(0, \pi)$; d'après (1.24) on aurait

$$s_0^* = \Psi^*[l(s)], \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \pi.$$

Moyennant cette relation les fonctionnelles $P_2[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*]$ et $P_1[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*]$ [cf. les équations (A), (A'), (C), et (C') du paragraphe 13] se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned} & \frac{2\omega_1^*}{\pi} \left[\frac{s_0^*}{\pi} \eta_1^* - \zeta \left(\frac{\omega_1^*}{\pi} s_0^* \right) \right] \sin \frac{s_0^*}{2}, \\ & \frac{2\omega_1^*}{\pi} \left[\zeta \left(\frac{\omega_1^*}{\pi} s_0^* + \omega_1 \right) - \frac{s_0^*}{\pi} \eta_1^* - \eta_1^* \right] \cos \frac{s_0^*}{2}, \end{aligned}$$

expressions où la fonction ζ est supposée avoir été construite à partir des périodes $2\omega_1^*$ et $2\omega_3^*$.

On constate alors que l'une, au moins, de ces quantités est négative quel que soit s_0^* , $0 \leq s_0^* \leq \pi$ ⁽¹³³⁾; l'une, au moins, des égalités (3.43'') ou (3.43''') est impossible.

C. Q. F. D.

⁽¹³³⁾ Posons, en effet,

$$\frac{s_0}{\pi} = \alpha,$$

et étudions le signe de la fonction $f(\alpha) = \eta_1 \alpha - \zeta(\alpha \omega_1)$ dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 1$. Il vient

$$f'(\alpha) = \eta_1 + \omega_1 p(\alpha \omega_1);$$

comme $p(\alpha \omega_1)$ décroît de $+\infty$ à e_1 lorsque α croît de 0 à 1, le minimum de $f'(\alpha)$ dans l'intervalle considéré est atteint pour $\alpha = 1$; en tenant compte de la

3° On ne peut avoir

$$p_2^* = \alpha_1 \quad \text{ou} \quad p_1^* = \beta_1.$$

Si l'on avait $p_2^* = \alpha_1$, par exemple, le minimum de $\Psi[l(s)]$ serait atteint pour $s = 0$; on aurait

$$l^*(0) = \alpha_1.$$

L'intégrale qui figure au second membre de la formule (A) du paragraphe 13 ne serait pas alors positive.

D'un autre côté, $p_1^* - p_2^*$ est une quantité inférieurement bornée (voir l'alinéa précédent); il en est dès lors de même de $\left| \frac{dl^*(s)}{ds} \right|$ puisque la longueur de l'obstacle n'est pas nulle et que, dès lors, le paramètre $\frac{\psi_1 + \psi_2}{|a|b}$ est inférieurement borné (cf. § 27); $l^*(s)$ est donc un élément de $E(0, \pi, s)$ qui ne se réduit pas à une constante; comme $\Psi^*(l)$ ne se réduit pas identiquement à π (cf. § 23), $\pi - \Psi^*[l(s)]$ est supérieur à ε (ε étant un nombre positif assez petit) sur un ensemble de l'intervalle $(0, \pi)$ dont la mesure η est positive et non nulle; d'après (1.24), s_0^* sera distinct de π . Il s'ensuit, en tenant

formule connue (cf. XXX, T. M.), on a

$$f'(1) = \eta_1 + \omega_1 p \omega_1 = \frac{\pi^2}{2\omega_1} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \frac{4q^{2n}}{(1+q^{2n})^2} \right].$$

Il s'ensuit que $f'(1)$ est positif; $f'(\alpha)$ est donc positive pour $0 \leq \alpha \leq 1$; le maximum de $f(\alpha)$ dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 1$, atteint pour $\alpha = 1$, est égal à zéro; $f(\alpha)$ croît donc de $-\infty$ à 0 lorsque α varie de 0 à 1. Ce résultat justifie les conclusions du texte toutes les fois que s_0 diffère de 0 et de π . Pour traiter ces cas extrêmes, il suffit de noter que pour $s_0 = 0$ ou π les expressions du texte se réduisent respectivement à -1 et à 0 (ou à 0 et -1); notre résultat est donc tout à fait général.

A la vérité, nous avons admis encore que les paramètres $|a|$ et b étaient finis (cf. § 14); pour se débarrasser de cette restriction, il suffisait de raisonner sur les expressions (1.51'), (1.51'') des fonctionnelles $\Omega'(1)$ et $\Omega'(-1)$, valables pour $|a| = \infty$, $b = \infty$; mais la discussion précédente aurait été un peu plus compliquée.

compte de l'alinéa précédent, que la quantité

$$\frac{2\omega_1^*}{\pi} \left[\frac{s_0^*}{\pi} \eta_1^* - \zeta \left(\frac{\omega_1^*}{\pi} s_0^* \right) \right] \sin \frac{s_0^*}{2}$$

est négative et non nulle.

En combinant les deux résultats de cet alinéa on voit que la quantité

$$\Gamma_2[l^*(s), \Psi^*(l), a^*, b^*]$$

[cf. l'équation (C) du paragraphe 13] est égale à la somme de deux quantités négatives; l'équation (3.43''') ne peut alors pas être vérifiée. Un raisonnement tout identique prouverait que $p_1^* \neq \beta_1$.

C. Q. F. D.

Cela étant, observons que la configuration définie par les éléments $\Psi^*(l), d_1^*, d_2^*, p_1^*, p_2^*$ (cf. § 13) qui vérifient les inégalités (3.41), satisfait aux conditions du § 25; dès lors, les raisonnements développés à propos du problème du sillage s'appliquent et montrent que les normes $\|l^*(s)\|$ des solutions éventuelles $l^*(s)$ de (3.44) sont bornées dans leur ensemble. Il s'ensuit que les valeurs prises par les fonctionnelles $P_i[l^*(s), \Psi^*(l), p_1^*, p_2^*]$, ($i=1, 2$) sont aussi bornées dans leur ensemble; il en sera donc de même des valeurs de p_1^*, p_2^* [cf. les équations (3.42''), (3.42''') et les inégalités (3.41), lesquelles sont satisfaites *a priori* d'après les alinéas 2 et 3].

Ces résultats montrent que la racine éventuelle de l'équation (3.44)

$$x^* = \left[l^*(s), \frac{1}{b^*-1}, \frac{1}{a^*+1}, p_1^*, p_2^* \right]$$

est un élément de l'espace $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ qui vérifie une inégalité du type

$$\|l(s)\| + \frac{1}{(b^*-1)} + \frac{1}{|a^*+1|} + |p_1^*| + |p_2^*| < \text{const.}$$

Par suite, la solution x^* en cause est un point intérieur à une hypersphère ω de rayon borné, située dans l'espace $E(0, \pi, s, a, b, p_1, p_2)$ (x^* est donc étranger à la frontière ω' de ω quel que soit k , $0 \leq k \leq 1$). Cela montre que l'indice total des solutions de (3.34) relativement à ω , indice dont nous avons établi plus haut l'existence, est indépendant de k ; nous allons le déterminer en faisant $k=0$ dans l'équation considérée.

Or, d'après ce que l'on a vu pour le problème du sillage, les para-

mètres $|a|$ et b qui sont solutions de (3.44) pour $k=0$ ne peuvent être qu'infinis, puisque dans ce cas $d_1^* = d_2^* = \infty$ [cf. (3.39)]. D'un autre côté, la fonction $\Psi^*(l)$ se réduit alors à $\frac{\pi}{2}$ [cf. (3.39)]; elle est donc indépendante de l pour $k=0$; il en est donc de même pour la première des transformations (3.43) ⁽¹³⁴⁾.

Dans ces conditions, l'équation (3.44) se réduit à l'ensemble de deux équations seulement, (3.43'') et (3.43'''); pour $k=0$, les valeurs des fonctionnelles qui figurent au second membre de ces relations se réduisent à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⁽¹³⁵⁾, en sorte que le système (3.43) peut s'écrire, lorsque $k=0$,

$$(3.45) \quad \begin{cases} -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (\alpha - p_2^*)^+ = 0, \\ -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (p_1^* - \beta)^+ = 0. \end{cases}$$

En définitive, il suffit, pour déterminer l'indice total des solutions de (3.44) relativement à ω , d'évaluer cet indice pour l'équation $x = F(x)$ équivalente à l'ensemble de deux équations (3.45). Or, de par sa définition même, l'indice en cause est égal au degré topologique au point $x=0$ de la transformation $x' = x - F(x)$ (voir le début de ce paragraphe) équivalente à l'ensemble des transformations

$$(3.45') \quad \begin{cases} p_2' = -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (\alpha - p_2)^+, \\ p_1' = -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} + (p_1 - \beta)^+, \end{cases}$$

⁽¹³⁴⁾ En se reportant à la définition de l'opération $V[l(s), \Psi(l), a, b, \alpha, \beta]$ [cf. (3.20)], le lecteur constatera que $l(s)$ intervient dans V par l'intermédiaire de la fonctionnelle $\Psi[l(s)]$ seulement.

⁽¹³⁵⁾ En effet, pour $k=0$, $\Psi^*[l(s)] = \frac{\pi}{2}$ pour $0 \leq s \leq \pi$; donc $s_0 = \frac{\pi}{2}$, d'après (1.24). D'un autre côté, on a vu que pour $|a|=b=\infty$, les fonctionnelles $\Omega'(1)$ et $\Omega'(-1)$ se réduisent aux expressions (1.52') et (1.52''), égales toutes les deux à -1 pour $\Psi^*[l(s)] = \frac{\pi}{2}$ et $s_0^* = \frac{\pi}{2}$; il suffit de porter ces valeurs de s_0^* , de $\Omega'(-1)$ et $\Omega'(1)$ dans les relations (C) et (C') du paragraphe 13 pour justifier les résultats du texte.

opérant à l'intérieur du domaine E ⁽¹³⁶⁾

$$p_2 < \alpha_1, \quad \beta_1 < p_1, \quad p_2 < p_1,$$

dans l'espace à deux dimensions (p_1, p_2) . Considérons le domaine F de cet espace défini par les inégalités

$$\alpha - p_2 > 0, \quad p_1 - \beta > 0.$$

D'après la définition même du symbole m^+ , les quantités $(\alpha - p_2)^+$ et $(p_1 - \beta)^+$ sont positives à l'intérieur de F , nulles à l'extérieur et sur ses frontières. Or, F est nécessairement intérieur à E , puisque $\alpha < \alpha_1$, $\beta_1 < \beta$, $\alpha < \beta$; il en résulte que la transformation (3.45'), qui est biunivoque, fait correspondre à E le domaine défini par

$$-\nu \frac{\sqrt{2}}{2} < p_1, \quad -\nu \frac{\sqrt{2}}{2} < p_2.$$

Le point $p_1 = p_2 = 0$ est donc recouvert une fois et une seule, ν étant positif, de par sa définition même; par suite, le degré topologique de (3.45') en ce point est égal à 1 (au signe près) ⁽¹³⁷⁾. Ainsi, l'indice total des solutions [intérieures à ω et vérifiant (3.41)] de l'équation (3.44) est égal à 1 en valeur absolue; le problème de la proue, tel que nous l'avons énoncé, possède donc au moins une solution.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il est intéressant de noter, avec M. Leray, que dans certains cas particuliers les raisonnements développés à propos du problème du sillage, manifestement plus simples que ceux qui précèdent, suffisent à établir le théorème d'existence pour le problème de la proue.

I. *Cas où $\alpha_1 = \alpha$.* — Dans ce cas les deux premières conditions (3.41) admettent la solution unique $p_1 = \alpha_1 = \alpha$; l'inconnue p_2 est donc déterminée a priori. Considérons alors dans le plan z la configuration

⁽¹³⁶⁾ Le lecteur est prié de faire la figure.

⁽¹³⁷⁾ D'une manière précise ce degré vaut -1 ; le signe $-$ tient à ce que la transformation (3.45'), égale au produit d'une translation par une symétrie, fait intervenir une symétrie.

des éléments rigides définis par les éléments

$$(3.46) \quad \Psi(l), \quad \alpha, \quad p_1, \quad d_1, \quad d_2; \quad \beta_1 \leq p_1 \leq \beta.$$

[On se reportera à (3.22) pour la définition de d_1 .] Le théorème d'existence que nous avons établi permet d'associer à chaque valeur de $p_1 (\beta_1 \leq p_1 \leq \beta)$ au moins un élément $x = x(p_1)$ de l'espace $E(o, \pi, s, a, b)$ qui vérifie les équations du problème du sillage posé par la configuration (3.46). Or, les éléments (3.46) sont des fonctions continues du paramètre p_1 ; chaque élément $x(p_1)$ correspondant dépendra donc continûment de p_1 ⁽¹³⁸⁾. Il s'ensuit que la fonctionnelle $P_1[l(s), \Psi(l), a, b]$, correspondant à l'élément choisi $x(p_1)$ et que nous écrivons, pour abrégé, $P_1[x(p_1)]$, sera continue relativement à son argument p_1 .

Observons, par ailleurs, que l'hypothèse $\alpha = \alpha_1$ entraîne (cf. § 13),

$$(3.47) \quad P_2[x(p_1)] < 0,$$

pour $\beta_1 \leq p_1 \leq \beta$. Pour les mêmes raisons, il vient

$$(3.48) \quad P_1[x(\beta_1)] \leq 0.$$

Ceci posé, supposons que la solution $x = x(\beta)$ du problème du sillage posé pour la configuration $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$ vérifie la condition ⁽¹³⁹⁾

$$P_1[x(\beta)] \leq 0.$$

Cette inégalité, jointe à (3.47), prouve que $x = x(\beta)$ est solution du problème de la proue posé pour la configuration $\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2$.

⁽¹³⁸⁾ Cela résulte des propriétés générales des équations fonctionnelles du type que nous considérons. Nous admettrons ce point essentiel du raisonnement. D'un autre côté, rappelons, que d'après le théorème d'existence démontré ci-dessus, à chaque groupe d'éléments (3.46) correspond au moins un élément $x(p_1)$ qui résout le problème correspondant du sillage; mais rien ne prouve que cet élément soit unique et l'inconnue $x(p_1)$ peut être à déterminations multiples; mais chacune de ces déterminations est une fonctionnelle continue de son argument p_1 , et c'est une telle détermination que nous envisageons dans le texte.

⁽¹³⁹⁾ Nous supposons que $x(\beta)$ est l'élément qui se déduit par continuité de la branche envisagée de la solution $x(p_1)$ en y faisant $p_1 = \beta$.

Supposons, au contraire, que l'on ait

$$P_1[x(\beta)] > 0.$$

Jointe à (3.48), cette inégalité établit, en utilisant la propriété de continuité de la fonctionnelle $P_1[x(p_1)]$ dans l'intervalle $\beta_1 \leq p_1 \leq \beta$, l'existence d'au moins un élément $x(p_1)$ tel que

$$P_1[x(p_1)] = 0.$$

L'élément $x = x(p_1)$ vérifie donc le système (3.42); il constitue encore une solution du problème de la proue posé pour la configuration donnée.

En résumé, le problème en cause admet toujours une solution, au moins, lorsque $\alpha_1 = \alpha$ (ou $\beta = \beta_1$). Observons, enfin, que le problème de la proue posé pour l'obstacle du type considéré, se réduit au problème du sillage posé pour le même obstacle lorsqu'on a, à la fois,

$$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1.$$

II. *Cas symétrique.* — Considérons le cas d'une configuration symétrique par rapport à l'axe du canal. Nous appellerons β_2 (ou α_2) l'abscisse curviligne du point C_2 (ou B_2) de la moitié supérieure (ou inférieure) de l'obstacle en lequel $\Psi(l)$ atteint sa valeur maxima (ou minima)⁽¹⁴⁰⁾; il est clair que C_2 ou B_2 sont symétriques relativement à l'axe du canal. Nous nous proposons de montrer, en utilisant uniquement le théorème d'existence pour le problème du sillage, que le problème de la proue posé pour une telle configuration possède au moins une solution possédant le même axe de symétrie que les éléments rigides et assujettie, en outre, à vérifier la condition suivante : le point de détachement P_1 devra être choisi sur l'arc $\widehat{C_2 C}$ de l'obstacle; P_2 sera placé symétriquement par rapport à l'axe du canal.

⁽¹⁴⁰⁾ Nous voudrions éviter les confusions entre les quantités α_1, β_1 d'une part et les quantités α_2, β_2 d'autre part. Dans le cas de l'obstacle symétrique convexe placé symétriquement par rapport à l'axe du canal, on a

$$\alpha_1 = \beta, \quad \beta_1 = \alpha \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

En effet, soient P_1 un point d'abscisse p_1 de l'arc $\widehat{C_2C}(\beta_2 \leq p_1 \leq \beta)$ et P_2 le point d'abscisse p_2 , symétrique de P_1 relativement à l'axe ($\alpha \leq p_2 \leq \alpha_2$); il est clair que

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

en sorte que la configuration symétrique formée de $\widehat{P_2P_1}$ et des parois μ_1 et μ_2 dépend d'un seul paramètre, p_1 par exemple. Le théorème d'existence du problème symétrique du sillage permet d'affirmer l'existence d'au moins une solution $x = x(p_1)$ ⁽¹⁴¹⁾ de ce problème posé pour cette configuration et admettant le même élément de symétrie, l'élément $x = x(p_1)$ étant une fonctionnelle continue de son argument p_1 . On vérifiera aisément, d'autre part, que la fonctionnelle $P_1[x(\beta_2)]$ est négative ⁽¹⁴²⁾. Dès lors, le raisonnement se poursuit comme pour l'exemple précédemment traité; si $P_1[x(\beta)] \leq 0$ vérifie le système (3.42) et, par suite, constitue une solution du problème de la proue posé pour la configuration symétrique donnée; si $P_1[x(\beta)] > 0$, il existe au moins un élément $x = x(p_1)$ ($\beta_2 \leq p_1 < \beta$) tel que

$$P_1[x(p_1)] = 0;$$

l'élément $x = x(p_1)$ vérifie donc le système (3.42) et constitue encore une solution du problème de la proue posé pour la configuration donnée. En tout état de cause, le problème symétrique de la proue admet donc au moins une solution symétrique. C. Q. F. D.

⁽¹⁴¹⁾ Rappelons que $x(p_1)$ est un élément de l'espace $E(o, \pi, s, a, b)$ tel que $a = b$.

⁽¹⁴²⁾ Il suffira de faire remarquer que, dans le cas envisagé, on a

$$\Psi[l(s)] + \Psi[l(\pi - s)] = \pi.$$

Cette relation permet de réduire l'intervalle d'intégration (o, π) à l'intervalle $\left(o, \frac{\pi}{2}\right)$ dans les formules (A) et (A') du paragraphe 13; l'hypothèse

$$\Psi[l(\pi)] = \Psi(\beta_2) > \Psi[l(s)] \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi$$

permet alors de conclure.

Remarque. — Le cas de l'obstacle en présence d'une seule paroi, μ_1 , pour fixer les idées, s'obtient, évidemment, comme cas particulier des théorèmes précédents; il suffit de faire $d_2 = \infty$ dans les équations des problèmes du sillage et de la proue. L'inconnue $|a|$ correspondant à cette configuration est infinie (*cf.* §§ 14 et 27); pour cette valeur de a les fonctionnelles utilisées ne subissent aucune discontinuité. Mais l'inconnue a étant déterminée *a priori*, le nombre des équations diminue d'une unité; par ailleurs les raisonnements et les conclusions subsistent intégralement.

29. CAS OÙ d_1 TEND VERS ZÉRO. — Nous nous proposons maintenant d'étudier le comportement des solutions du problème du sillage, dont nous venons d'établir l'existence, lorsque l'une des parois, μ_1 par exemple, se rapproche indéfiniment de l'obstacle ⁽¹⁴³⁾ alors que μ_2 demeure à une distance non nulle de celui-ci. Il est à peu près évident, *a priori*, que les difficultés analytiques ne sont pas essentiellement changées si l'on suppose la deuxième paroi rejetée à l'infini; nous ferons cette hypothèse qui nous permettra de simplifier sensiblement l'exposition

Considérons donc l'élément

$$e = e \left[l(s), 0, \frac{1}{b-1} \right],$$

qui vérifie les équations du problème du sillage posé pour la configuration

$$\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2 = \infty$$

(nous savons, d'après le théorème du paragraphe 28, qu'un tel élément existe); le régime de Helmholtz correspondant est alors entièrement défini à l'aide des formules (1.23), (1.24), (1.43), (1.44), (1.50). Ceci posé, déformons cette configuration de manière à laisser l'obstacle fixe [c'est-à-dire en laissant fixes les éléments $\Psi(l), \alpha, \beta$] et en faisant tendre d_1 vers zéro; nous avons constaté (*cf.* § 27) que l'élément $e = e \left[l(s), 0, \frac{1}{b-1} \right]$ correspondant dépend continûment de d_1 tant

⁽¹⁴³⁾ Nous supposons essentiellement que l'obstacle vérifie les hypothèses que nous lui avons imposées au paragraphe 23.

que $d_1 \neq 0$ et que le paramètre $(b - 1)$ tend vers zéro en même temps que d_1 . Or, les formules (1.43) montrent que, dans ce cas, ω_1 augmente indéfiniment alors que $\frac{\omega_3}{i}$ reste fini; le paramètre q [cf. (1.8)] tend donc vers 1. Il s'ensuit que, pour $d_1 = 0$, la demi-couronne d du plan Z se réduit au demi-cercle supérieur $|Z| = 1$; les fonctions elliptiques p, ζ, σ , grâce auxquelles on réalise l'application conforme du domaine $\mathcal{A}$ du fluide en mouvement sur d , dégèrent, alors que leurs arguments, qui contiennent ω_1 en facteur [cf. par exemple (1.23)], deviennent infinis; les fonctions $\theta(v, q)$ correspondantes ne sont pas définies, comme on sait, pour $q = 1$. Enfin, au paragraphe 26, on n'a établi l'existence et la continuité de $\frac{dl(s)}{ds}$ que moyennant l'hypothèse $b \neq 1$. Ainsi, les formules de M. Villat perdent, telles quelles, toute signification pour $d_1 = 0$; nous sommes donc contraints de renoncer à nous servir du plan Z et du domaine d et à n'utiliser que le plan t et le domaine $\mathfrak{C}$. A l'élément $l(s)$ nous substituons l'élément $l(t)$ qui réalise la correspondance entre l'obstacle et le segment $-1 \leq t \leq 1$ de $\mathfrak{C}$. A l'élément $e = e\left[l(t), 0, \frac{1}{b-1}\right]$ nous substituons l'élément $e\left[l(t), 0, \frac{1}{b-1}\right]$ de l'espace $E(-1, 1, t, \infty, b)$ qui variera continûment avec d_1 tant que $d_1 \neq 0$. Mais il y a plus; au paragraphe 26, nous avons prouvé que la fonction $l(t)$, en admettant qu'elle admette une limite pour $d_1 = 0$, est continue par rapport à son argument t et que la fonction $\Psi(t) = \Psi[l(t)]$ correspondante vérifie une condition $\mathcal{L}_n(t)$, n étant un nombre positif arbitrairement grand, même si $d_1 = 0$; cela justifie le passage à la variable t . Tels quels, les raisonnements employés au paragraphe 28 ne nous permettent pas d'affirmer l'existence d'une solution correspondant à $d_1 = 0$. Mais nous pouvons conclure affirmativement en employant la méthode des images. La distance d_1 étant nulle, complétons la figure en effectuant la symétrie relativement à μ_1 et posons-nous le problème du sillage pour l'obstacle symétrique obtenu par la réunion de BC et de l'arc symétrique $\widehat{CB_1}$ placé dans un courant de largeur infinie parallèle à μ_1 . Ce problème possède au moins une solution symétrique par rapport à μ_1 ; la portion de cette droite située en amont de C constitue une ligne de courant pour le régime considéré;

le point de bifurcation correspondant est alors confondu avec le point C. Il en résulte que le problème du sillage posé pour l'obstacle donné fixé à la paroi μ_1 par son extrémité supérieure C possède au moins une solution. Il existe donc au moins un élément $l(t)$ de l'espace $E(0, 1, t)$ relatif à la configuration $d_1 = 0$; la fonction correspondante $\Psi(t) = \Psi[l(t)]$, que nous représenterons désormais par le symbole $\lim \Psi(t)$, vérifie une condition $\mathcal{L}_n(t)$, n étant un nombre positif arbitrairement grand, dans tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$. Ces faits sont à la base des discussions qui suivent et nous permettront d'établir que la fonction $\Psi'(t)$ converge continûment vers la fonction $\lim \Psi'(t)$ lorsque d_1 tend vers zéro.

Étude du paramètre t_0 pour de petites valeurs de $b - 1$. — Le point $t = t_0$ étant l'image de $Z_0 = e^{is_0}$ (cf. § 9), l'équation de définition de t_0 s'obtiendra en éliminant $Z = e^{is}$ entre les équations (1.24) et (1.50'); on trouve ainsi les relations ⁽¹⁴⁴⁾

$$(3.49) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t) dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = \pi \int_{-1}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}},$$

qu'on peut mettre sous la forme équivalente

$$(3.49') \quad \pi \int_{t_0}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = \int_{-1}^{+1} \frac{[\pi - \Psi(t)]}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} dt.$$

De ces équations nous allons déduire la conséquence fondamentale suivante : si la configuration, dans le plan z , se déforme de manière que d_1 tende vers zéro (c'est-à-dire si le paramètre b correspondant tend vers 1) le paramètre t_0 tend vers 1 et réciproquement.

On a d'abord

$$(3.50) \quad \int_t^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arg \operatorname{ch} \left[1 + 2 \frac{1-t}{b-1} \right] + \sqrt{2} \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t}} + \dots$$

en utilisant une formule d'approximation bien connue (cf. par exemple, G. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 271) et en désignant par $+\dots$ des fonctions qui s'annulent avec $b - 1$. D'un autre

⁽¹⁴⁴⁾ Cette relation résulte aussi immédiatement de l'équation (1.56), en y remplaçant $\Phi(t)$ par $\Psi(t)$.

côté, on peut écrire

$$(3.51) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\pi - \Psi(t)}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} dt = [\pi - \Psi(1)] \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} + I$$

en posant

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(1) - \Psi(t)}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)}} dt.$$

L'intégrale I , ainsi définie, reste bornée même pour $b=1$, puisque la fonction $\Psi(t)$ vérifie, on l'a vu, une condition $\mathcal{L}_n(t)$ pour $b \geq 1$. (Notons que nous n'avons pas encore établi que I est une fonction nulle de d_1 , continue pour $d_1=0$.) En utilisant (3.50) et (3.51) l'équation de définition (3.49') de t_0 peut se mettre sous la forme

$$(3.52) \quad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \arg \operatorname{ch} \left[1 + 2 \frac{1-t_0}{b-1} \right] + \pi \sqrt{2} \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t_0}} \\ = [\pi - \Psi(1)] \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \arg \operatorname{ch} \left[1 + \frac{4}{b-1} \right] + \sqrt{2} \log 2 \right\} + I + \dots,$$

qui permet de discuter aisément le comportement du quotient $\frac{1-t_0}{b-1}$ lorsque $b-1$ tend vers zéro. Deux cas sont à considérer :

$$\Psi(1) \neq \pi \quad \text{et} \quad \Psi(1) = \pi.$$

Cas où $\Psi(1) \neq \pi$. — Dans ce cas, le facteur $[\pi - \Psi(1)]$ n'étant pas nul, le second membre de (3.52) croît indéfiniment lorsque $(b-1)$ tend vers zéro; I étant fini, le premier membre doit augmenter au delà de toute limite; cela exige que

$$\lim_{b \rightarrow 1} \frac{1-t_0}{b-1} = \infty.$$

En utilisant le développement limité

$$\arg \operatorname{ch} x = \log x + \log 2 - \frac{1}{4x^2} + \dots,$$

valable pour de grandes valeurs de x , nous pourrions, dès lors, mettre l'équation (3.52) sous la forme

$$(3.53) \quad \log(1-t_0) + 2 \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t_0}} \\ = -\frac{\Psi(1)}{\pi} \log \frac{1}{b-1} - 5 \frac{\Psi(1)}{\pi} \log 2 + \log 8 + \frac{\sqrt{2}}{\pi} I + \dots$$

Le second membre de cette formule augmente indéfiniment comme $\frac{\Psi(1)}{\pi} \log(b-1)$; cela exige que $(1-t_0)$ tende vers zéro, de manière que la quantité

$$\frac{1-t_0}{(b-1)^{\frac{\Psi(1)}{\pi}}}$$

demeure bornée; $(1-t_0)$ est donc d'un ordre infinitésimal inférieur à celui de $b-1$.

Cas où $\Psi(1) = \pi$. — Dans ce cas, la formule (3.52) se réduit à

$$(3.54) \quad \arg \operatorname{ch} \left[1 + 2 \frac{1-t_0}{b-1} \right] + 2 \log \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1+t_0}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I + \dots$$

Le second membre reste fini pour $b=1$; cela exige que le quotient $\frac{1-t_0}{b-1}$ soit borné tant supérieurement qu'inférieurement, puisque l'intégrale I est bornée tant inférieurement que supérieurement⁽¹⁴⁵⁾, les infiniment petits $1-t_0$ et $b-1$ sont donc de même ordre.

Remarque. — Au lieu d'envisager le cas d'un obstacle fixe $\widehat{BC}$, on aurait pu supposer $\widehat{BC}$ variable en fonction de d_1 (mais astreint à vérifier, pour chaque valeur de d_1 , les conditions du paragraphe 23). Le paramètre t_0 correspondant à chaque valeur de d_1 serait encore défini par l'équation (3.52), mais dans laquelle $\Psi(1)$ désignerait une certaine fonction de d_1 . Si cette fonction est telle que

$$\lim_{b \rightarrow 1} [\Psi(1) - \pi] \log(b-1) = \infty,$$

l'équation (3.52) prend la forme (3.53). Si, au contraire, la limite de $[\pi - \Psi(1)] \log(b-1)$ est finie pour $b=1$, (3.52) est équivalent à

$$(3.55) \quad \frac{1-t_0}{b-1} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \left\{ \left[1 - \frac{\Psi(1)}{\pi} \right] \log \frac{1}{b-1} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} I \right\} - \frac{1}{2},$$

qui se réduit à (3.54) lorsque $[\pi - \Psi(1)] \log(b-1)$ a une limite nulle.

⁽¹⁴⁵⁾ D'après les hypothèses faites, $\Psi(t)$ étant continue, diffère de π d'une quantité non nulle sur un ensemble de mesure non nulle.

On peut préciser la manière dont $\Psi(1)$ doit dépendre de d_1 pour qu'une telle circonstance se produise; nous écrirons $\Psi(1, d_1)$ à la place de $\Psi(1)$ pour rendre évidente cette dépendance.

D'après (3.28) nous avons

$$\log q = \pi i \tau \leq -\frac{1}{10\pi} \frac{d_1^2}{D^2}.$$

On en tire

$$\frac{i\pi}{\tau} \leq \frac{10\pi^3 D^2}{d_1^2}.$$

Or, d'après T. M. CXXII₁₁, on peut écrire

$$-\frac{i\pi}{\tau} = \log \frac{\chi_0}{16} + \chi_0 f(\chi_0),$$

ou

$$\chi_0 = \frac{b-1}{b+1}$$

où $f(\chi_0)$ désigne une fonction holomorphe pour $\chi_0 = 0$.

En combinant ces deux derniers résultats, on est conduit à l'inégalité

$$\log \frac{1}{b-1} \leq \frac{10\pi^3 D^2}{d_1^2} + \log 32 + \chi_0 |f(\chi_0)|,$$

dont on tire

$$[\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} \leq \frac{10\pi^3 D^2}{d_1^2} [\pi - \Psi(1, d_1)] + \dots,$$

où le symbole $+\dots$ désigne encore des fonctions qui s'annulent $(b-1)$. Cela montre que l'on a sûrement

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} [\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} = 0,$$

moyennant la condition

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} \frac{[\pi - \Psi(1, d_1)]}{d_1^2} = 0.$$

La fonction $l(t)$ étant continue, quel que soit d_1 , les résultats précédents entraînent la conséquence suivante : lorsque la paroi μ_1 se rapproche indéfiniment de l'obstacle, le point de bifurcation $z=0$ (dont l'image dans le plan t a pour affixe t_0) tend vers une position

limite, confondue avec l'extrémité supérieure C de l'obstacle. La réciproque est vraie.

Raisonnons, en effet par l'absurde. Si $\lim_{d_1 \rightarrow 0} t_0 \neq 1$, l'intégrale du second membre de (3.49) conserverait un sens lorsque b tend vers 1. Il s'ensuivrait que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t) dt}{\sqrt{(1-t)(b-t)(1+t)}},$$

qui figure au premier membre de cette formule, resterait bornée lorsque b convergerait vers 1; or, ce fait est incompatible avec l'hypothèse $\Psi(1) \neq 0$ et celle de la continuité de $\Psi(t)$; donc $\lim_{d_1 \rightarrow 0} t_0 = 1$.

C. Q. F. D.

La fonction $l(t)$ étant continue quel que soit d_1 , le résultat annoncé est établi.

Étude du paramètre $\frac{b-t_0}{d_1}$ pour de petites valeurs de d_1 . Nous avons, en substituant $\Psi(t)$ à $\Phi(t)$ dans la formule (1.55),

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t-t')}} \\ & + i \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{t_0} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t-t')}}. \end{aligned}$$

Faisons alors $t = t'$ dans la relation (3.49), multiplions-en les deux membres par

$$\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{(t^2-1)(b-t)}}{1-t},$$

et ajoutons le résultat membre à membre avec l'expression de $\Omega(t)$ obtenue ci-dessus; il vient, après quelques transformations immédiates,

$$\begin{aligned} (3.56) \quad \Omega(t) = & -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Psi(t') (1-t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(1-t')}} \\ & + i \sqrt{(t^2-1)(b-t)} \int_{-1}^{t_0} \frac{(1-t') dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b-t')(t-t')}}. \end{aligned}$$

l'égalité précédente ayant un sens même pour $b=1$ pourvu que le point t soit étranger au segment réel $(-1, +1)$; c'est là que réside l'utilité de la transformation que nous venons d'effectuer.

Il suit de là que $\Omega(t)$, et par suite $T(t)$, reste bornée dans tout le domaine b , excepté dans le voisinage du segment $(-1, 1)$; il en est ainsi, en particulier, le long de la courbe C_1 , considérée au paragraphe 27, qui joint dans $\mathfrak{E}$ un point intérieur au segment $(-\infty, 1)$ à un point intérieur au segment $(b, +\infty)$.

Nous avons déjà fait observer que la longueur de l'image de C_1 dans le plan du mouvement était minorée par la quantité $y_C - y_B$ différence des ordonnées, finie et non nulle, des extrémités B et C de l'obstacle. Comme d'après (1.55) et l'équation de définition de t_0 ⁽¹⁴⁶⁾

$$\frac{df}{dt} = A \frac{t - t_0}{b - t},$$

il en résulte

$$y_C - y_B \leq |A| \int_{C_1} e^{-T(t)} \left| \frac{t - t_0}{b - t} \right| dt.$$

La fonction $T(t)$ étant supérieurement bornée sur C_1 , les hypothèses faites sur C_1 montrent que l'on peut trouver une constante positive K , non nulle et bornée supérieurement, telle que l'on ait en chaque point de C_1 , extrémités comprises,

$$e^{-T(t)} \left| \frac{t - t_0}{b - t} \right| \leq K.$$

Il suit de là, en appelant L la longueur du chemin C_1 (L étant finie, par hypothèse)

$$y_C - y_B \leq |A| KL,$$

inégalité qui fournit pour $|A|$ une minorante non nulle; il faut remarquer que ce résultat ne suppose pas que la distance d_1 soit minorée. D'un autre côté, les raisonnements du paragraphe 25 prouvent que le paramètre $|A|$ est borné supérieurement quelle que soit d_1 .

⁽¹⁴⁶⁾ Cf. le renvoi ⁽⁴²⁾. Les calculs de ce renvoi montrent que

$$\psi_1 = -A(b - t_0)\pi.$$

Cela posé, les relations (1.33) et (1.55) permettent d'écrire, en remplaçant ψ_i par sa valeur $-A(b-t_0)\pi$,

$$\frac{d_i}{b-t_0} = |A| \left[\pi + \int_1^b \sin \Omega(t) \frac{t-t_0}{(b-t)(t-t_0)} dt \right].$$

D'après (3.56) l'intégrale qui figure au second membre est bornée supérieurement quel que soit b , pourvu que b soit fini; comme elle est positive et comme, par ailleurs, $|A|$ est majoré et minoré, le second membre est fini quelle que soit d_i ; les infiniment petits d_i et $b-t_0$ sont donc équivalents. C'est ce résultat que nous avons en vue.

Allure de la ligne libre étranglée entre l'obstacle et la paroi. — Effectuons dans les plans z et t des homothéties ayant pour centres respectifs le point C d'ordonnée z_c et son image $t=1$, et de rapports respectifs $\frac{1}{b-1}$ et $\frac{1}{b-t_0}$. Nous poserons

$$t_1 = \frac{t-1}{b-1}, \quad z_1 = \frac{z-z_c}{b-t_0}.$$

Nous admettrons, comme ci-dessus, que l'obstacle se déforme lorsque d_i varie. Deux cas limites sont alors à considérer.

1° Cas où

$$\lim_{d_i \rightarrow 0} [\pi - \Psi(1, d_i)] \log \frac{1}{b-1} = \infty.$$

D'après (3.53) l'homothétique t_0 du point t_0 se réduirait alors à $t_1 = -\infty$ pour $b=1$. La fonction $\Psi(t)$ étant continue, $\Psi(t_1)$ converge uniformément vers $\Psi(1)$ dans tout l'intervalle $-\infty \leq t \leq 1$, lorsque t_0 tend vers 1. L'image du point $t=b$ a l'abscisse constante $t=1$.

Dans le plan z_1 , la distance du point C à l'image de μ_i reste finie, en vertu des résultats du précédent alinéa.

La correspondance $l(t)$ étant continue, l'homothétique du point de bifurcation s'éloigne indéfiniment lorsque t_0 tend vers 1; $\Psi(t_1)$ tendant vers $\Psi(1)$, l'image de l'obstacle dans le plan z_1 converge vers un demi-plan d'extrémité C faisant avec μ_i un angle égal à $\Psi(1)$. En définitive, on obtient dans le plan z_1 la configuration représentée sur la figure 11; il serait facile de construire le mouvement avec sillage correspondant;

l'étude de la ligne libre correspondante ferait connaître le comportement de λ_1 dans le voisinage de C.

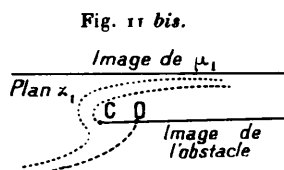
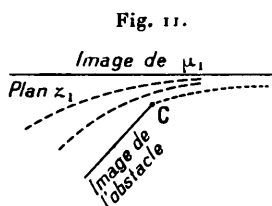
2° Cas où

$$\lim_{d_1 \rightarrow 0} [\pi - \Psi(1, d_1)] \log \frac{1}{b-1} = 0.$$

D'après (3.54) l'homothétique t_{01} de t_0 est à distance finie pour $b=1$: cette formule fournit la distance CO, puisqu'elle permet de calculer la valeur de t_{01} :

$$t_{01} = \frac{t_0 - 1}{b - t_0}.$$

Comme $\lim \Psi(1) = \pi$ présentement, $\Psi(t_1)$ converge uniformément vers π dans tout l'intervalle $-\infty \leq t \leq 1$. Quant au plan z_1 , une discussion analogue à la précédente montre que l'image de l'obstacle se réduit à la limite au demi-plan parallèle à μ_1 et arrêté au point C;



l'image du point de bifurcation et celle de la paroi seront situées à des distances finies. La configuration correspondante est représentée sur la figure 11 bis.

Étude de la fonction limite $\Omega(t)$. — Envisageons maintenant une suite dénombrable de configurations $C_i (i=1, 2, \dots, \infty)$ caractérisées par les éléments $\Psi(t)$, α , β et d_{1i} dont les trois premiers, ne dépendant pas de i , définissent un obstacle fixe; nous admettrons que les distances d_{1i} forment une suite décroissante telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{1i} = 0.$$

A chaque configuration $C_i (i \neq \infty)$ correspond, d'après le théorème d'existence du paragraphe 28, au moins un sillage, c'est-à-dire au

moins un élément $x = x\left[l_i(t), 0, \frac{1}{b_i-1}\right]$ et, par suite, au moins une fonction $\Psi[l_i(t)]$ et une fonction $\Omega_i(t)$. On a vu que les fonctions $\Psi[l_i(t)]$ appartenant toutes à l'espace $\mathcal{L}_n(t)$, étaient également continues; d'après le théorème d'Arzela l'ensemble $\Psi[l_i(t)]$ sera compact. De la suite infinie $\Psi[l_i(t)]$ ($i = 1, 2, \dots, \infty$), nous pouvons donc extraire une suite partielle $\Psi[l_j(t)]$ ($j = 1, 2, \dots, \infty$) convergeant uniformément sur tout l'intervalle $-1 \leq t \leq 1$ vers une fonction limite $\Psi[l(t)]$ de l'espace $\mathcal{L}_n(t)$ ⁽¹⁴⁷⁾. Ces résultats permettent d'étudier le comportement des fonctions $\Omega_j(t)$ correspondantes. Chacune d'elles, en effet, est définie dans le demi-plan supérieur $\mathfrak{E}_j$ par les conditions frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \Theta_j(t) &= \Psi[l_j(t)] - \pi \quad \text{pour } -1 \leq t \leq t_{0j}, & \Theta_j(t) &= \Psi[l_j(t)] \quad \text{pour } t_{0j} \leq t \leq 1, \\ \Theta_j(t) &= 0 \quad \text{pour } b_j \leq t \leq \infty, & T_j(t) &= 0 \quad \text{pour } -\infty \leq t \leq -1 \text{ et } 1 \leq t \leq b_j, \end{aligned}$$

où t_{0j} désigne l'affixe de l'image du point de bifurcation dans le plan $\mathfrak{E}_j$. Il suit de là que la suite $\Omega_j(t)$ convergera vers une fonction limite $\Omega(t)$ qui résout le problème mixte de Dirichlet suivant :

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \Psi[l(t)] \quad \text{pour } -1 \leq t \leq 1, & \Theta(t) &= 0 \quad \text{pour } 1 \leq t \leq \infty, \\ T(t) &= 0 \quad \text{pour } -\infty \leq t \leq -1, \end{aligned}$$

la convergence est uniforme dans tout le demi-plan supérieur, le voisinage du point $t = 1$ excepté. C'est ce qui résulte, en effet, de l'expression (3.56) de $\Omega(t)$ qui fait correspondre à toute suite convergente de fonction $\Psi[l_j(t)]$ une suite convergente de fonctions $\Omega_j(t)$; des artifices analogues à ceux utilisés au paragraphe 10 permettent de transformer (3.56) de manière que l'expression correspondante de $\Omega_j(t)$ ait un sens pour $-1 \leq t < 1$. En langage hydrodynamique, cela veut dire qu'il existe un sillage limite correspondant au cas de l'obstacle fixé à la paroi par son extrémité supérieure; les vitesses tendent uniformément vers leurs valeurs limites dans tout le domaine du fluide en mouvement, exception faite du voisinage du point $t = 1$.

⁽¹⁴⁷⁾ Cela n'implique nullement que l'ensemble $\Psi[l_i(t)]$ ne possède qu'un seul élément limite $\Psi[l(t)]$.

(à suivre)