JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT FORTET

Résolution d'un système d'équations de M. Schrödinger

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 83-105.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_83_0>

Résolution d'un système d'équations de M. Schrödinger;

PAR ROBERT FORTET.

1. INTRODUCTION. — *Position du problème.* — Dans ce Mémoire (¹), nous nous proposons de résoudre le problème suivant, posé par M. Schrödinger dans un Mémoire intitulé : *Über die Umkehrung der Naturgesetze* (*Sitzungsberichte der Preussischen Academie*, *Phys. Math. Classe*, 1931, p. 144) (²).

Soient x et y deux nombres réels variables respectivement sur les intervalles finis ou non $\mathcal{J}^1$ et $\mathcal{J}^2$ (³). Soient $g(x, y)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(y)$ trois fonctions réelles bien définies de x et y, mesurables et sommables pour $x \subset \mathcal{J}^1$, $y \subset \mathcal{J}^2$, et satisfaisant aux conditions suivantes, dont nous désignons l'ensemble sous le nom d'*hypothèses I* (⁴).

$$\textit{Hypothèses I.}\quad \begin{cases} (1) & g(x, y) \geqq 0; \\ (2) & \omega_1(x) \geqq 0, \qquad \omega_2(y) \geqq 0; \\ (3) & \displaystyle\int_{\mathcal{J}^1} \omega_1(x)\, dx = \int_{\mathcal{J}^2} \omega_2(y)\, dy > 0. \end{cases}$$

(¹) Le présent Mémoire est le développement d'une Note aux *Comptes rendus* parue sous le même titre, t. 206, 1938, p. 721-723.

(²) Voir aussi : SCHRÖDINGER, *Sur la théorie relativiste de l'électron* (*Ann. de l'Inst. Henri-Poincaré*, II, 1932, p. 300.)

(³) Lorsque ces intervalles sont finis nous les supposons fermés.

(⁴) Dans le problème de probabilité de M. Schrödinger, il faut supposer de plus que

$$\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\, dy = 1.$$

On considère le système d'équations (S)

$$(S)\quad \boxed{\begin{cases} (4) & \varphi(x)\displaystyle\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\,\psi(y)\,dy = \omega_1(x), \\ (5) & \psi(y)\displaystyle\int_{\mathcal{J}^1} g(x, y)\,\varphi(x)\,dx = \omega_2(y), \end{cases}}$$

où $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont deux fonctions inconnues définies respectivement sur $\mathcal{J}^1$ et $\mathcal{J}^2$.

Il s'agit d'abord de savoir si (S) admet une solution, c'est-à-dire s'il existe un couple de fonctions bien déterminées φ et ψ, ni nulles ni infinies presque partout et satisfaisant aux équations de (S); et si (S) admet une solution, il faut savoir s'il n'en admet qu'une, étant entendu qu'on ne distingue pas deux solutions de la forme $\varphi(x)$, $\psi(x)$ et $\varphi(x).\,\rho$, $\dfrac{\psi(y)}{\rho}$, où ρ est une constante non nulle.

Nous ne rappellerons pas l'interprétation probabiliste de ce problème (voir à ce sujet le Mémoire de M. Schrödinger); indiquons cependant que cette interprétation fait présumer que, sous des conditions assez générales, (S) admet une solution.

Nous appellerons *solution positive* de (S) toute solution constituée par deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y) \geqq 0$: nous nous intéresserons particulièrement aux solutions positives, les seules intéressantes du point de vue de M. Schrödinger.

Cas de Bernstein. — On est dans le *cas de Bernstein* si

a. $\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^2 = (-\infty, +\infty)$;

b. $g(x, y) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}}$ $(\sigma > 0$, quelconque)

c. $\omega_1(x)$ et $\omega_2(y)$ sont continues.

M. S. Bernstein a fait savoir (*Verhandlungen des Internat. Math. Kongr.*, Zürich, 1932, 1^er Band, p. 288) que dans ce cas (S) admet une solution. A notre connaissance il n'a pas publié sa démonstration; il ne parle pas, d'autre part, de l'unicité de la solution.

Hypothèses II. — Nous étudions le système (S) sous les hypothèses assez générales suivantes, que nous faisons une fois pour toutes et que nous appellerons les *hypothèses II.*

a. $g(x, y)$ *est continu, borné supérieurement par un nombre* $\Sigma > 0$, *et différent de zéro, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle pour chaque valeur fixe de* x *ou de* y.

b. $\omega_1(x)$ *et* $\omega_2(y)$ *sont continues.*

D'autre part, *il n'y a pas d'inconvénient à supposer*

$$\int_{\mathfrak{J}^1} \omega_1(x)\, dx = \int_{\mathfrak{J}^2} \omega_2(y)\, dy = 1, \tag{3'}$$

et c'est ce que nous faisons dorénavant.

Résultats. — Dans ces conditions nous avons établi que le système (S) a au plus une solution positive (Théorème III), et nous avons défini deux cas où l'existence d'une solution positive est assurée (Théorème I et Théorème II) : le deuxième cas comprend comme cas particulier le cas de Bernstein.

Remarque. — *On pourrait toujours supposer* $\mathfrak{J}^1$ *et* $\mathfrak{J}^2$ *finis,* car on peut généralement se ramener à ce cas par un changement de variables, comme le prouve le calcul suivant, où l'on a supposé pour simplifier $\mathfrak{J}^1 = \mathfrak{J}^2$

Faisons le changement de variables

$$x = \alpha(x'), \qquad y = \alpha(y'), \text{ où } \alpha \text{ est dérivable,}$$

et posons

$$\varphi'(x') = \varphi[\alpha(x')], \qquad \psi'(y') = \psi[\alpha(y')], \qquad g'(x', y') = g[\alpha(x'), \alpha(y')],$$
$$\omega'_1(x') = \omega_1[\alpha(x')], \qquad \omega'_2(x') = \omega_2[\alpha(y')].$$

Désignons par $\alpha'(x')$ et $\alpha'(y')$ les dérivées de $\alpha(x')$ et $\alpha(y')$ par rapport respectivement à x' et y' ; enfin soit $\mathfrak{J}'$ l'intervalle de variation des nouvelles variables x' et y' ; (4) et (5) deviennent

$$\varphi'(x') \times \int_{\mathfrak{J}'} g'(x', y')\, \psi'(y')\, \alpha'(y')\, dy' = \omega'_1(x'); \tag{4'}$$

$$\psi'(y') \times \int_{\mathfrak{J}'} g'(x', y')\, \varphi'(x')\, \alpha'(x')\, dx' = \omega'_2(y'). \tag{5'}$$

Posons encore

$$\bar{\varphi}(x') = \varphi'(x') \times \alpha'(x'), \qquad \bar{\psi}(y') = \psi'(y');$$
$$\bar{\omega}_1(x') = \omega'_1(x') \times \alpha'(x'), \qquad \bar{\omega}_2(y') = \omega'_2(y') \times \alpha'(y');$$
$$\bar{g}(x', y') = g'(x', y') \times \alpha'(y').$$

On a

$$\int_{\mathcal{J}'} \bar{\omega}_1(x')\, dx' = \int_{\mathcal{J}'} \bar{\omega}_2(y')\, dy' = 1.$$

Et, si l'on a choisi la fonction α non décroissante, on a aussi

$$\bar{g}(x', y') \geqq 0, \qquad \bar{\omega}_1(x') \geqq 0, \qquad \bar{\omega}_2(y') \geqq 0.$$

Multiplions alors les deux membres de $(4')$ et $(5')$ respectivement par $\alpha'(x')$ et $\alpha'(y')$, on trouve le système $(\bar{S})$

$$(\bar{S}) \qquad \begin{cases} \bar{\varphi}(x') \times \displaystyle\int_{\mathcal{J}} \bar{g}(x', y')\, \bar{\psi}(y')\, dy' = \bar{\omega}_1(x'), \\ \bar{\psi}(y') \times \displaystyle\int_{\mathcal{J}'} \bar{g}(x', y')\, \bar{\varphi}(x')\, dx' = \bar{\omega}_2(y'), \end{cases}$$

système parfaitement analogue à (S), avec les nouvelles inconnues $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$; il suffit donc de choisir α de telle sorte que $\mathcal{J}'$ soit fini pour obtenir le résultat annoncé.

Seulement un tel changement de variable transformera généralement une fonction donnée simple $g(x, y)$ en une fonction $\bar{g}(x', y')$ généralement discontinue lorsque x' ou y' sont aux extrémités de $\mathcal{J}'$. D'où des difficultés qui font qu'il est préférable de raisonner directement sur $\mathcal{J}^1$ et $\mathcal{J}^2$, finis ou non.

2. Existence d'une solution dans un premier cas. — Le système (S) équivaut au système (S')

$$(S') \qquad \begin{cases} (6) \quad \varphi(x) = \dfrac{\omega_1(x)}{\displaystyle\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y) \dfrac{\omega_2(y)\, dy}{\left[\displaystyle\int_{\mathcal{J}^1} g(z, y)\, \varphi(z)\, dz\right]}}; \\ (5'') \quad \psi(y) = \dfrac{\omega_2(y)}{\displaystyle\int_{\mathcal{J}^1} g(x, y)\, \varphi(x)\, dx}, \end{cases}$$

et tout revient à résoudre l'équation (6), que nous représenterons symboliquement par

$$\varphi = \Phi(\varphi) \tag{6'}$$

et dont il faut chercher les solutions qui ne sont pas presque partout nulles ou infinies.

Or, considérons l'équation

$$h(x) = \int_{\mathcal{J}^2} g(x, y) \frac{\omega_2(y)\,dy}{\left[\int_{\mathcal{J}^1} g(z, y) \frac{\omega_1(z)}{h(z)}\,dz\right]}, \tag{7}$$

que nous représenterons symboliquement par

$$h = \Omega(h). \tag{7'}$$

A toute solution de (7) qui n'est pas presque partout nulle ou infinie, la formule

$$\varphi(x) = \frac{\omega_1(x)}{h(x)} \tag{8}$$

fait correspondre une solution $\varphi(x)$ de (6), du moins en général [(8) ne définit pas $\varphi(x)$, par exemple si $\omega_1(x)$ et $h(x)$ sont simultanément nuls].

Nous allons donc étudier l'équation (7).

Fonction de la classe (C). — Nous disons qu'une fonction $H(x)$ définie sur $\mathcal{J}^1$ appartient à la *classe* (C) si

a. elle est mesurable (B);

b. elle est bornée inférieurement par un nombre positif et finie presque partout.

Démonstration d'un lemme. — Soient $\mathcal{J}_1^1, \mathcal{J}_2^1, \ldots, \mathcal{J}_n^1, \ldots,$ et $\mathcal{J}_1^2, \mathcal{J}_2^2, \ldots, \mathcal{J}_n^2, \ldots$ deux suites d'ensembles finis, tendant respectivement vers $\mathcal{J}^1$ et $\mathcal{J}^2$ et tels que

$$\mathcal{J}_n^1 \subset \mathcal{J}_{n+1}^1, \qquad \mathcal{J}_n^2 \subset \mathcal{J}_{n+1}^2.$$

Posons

$$G_n(H, y) = \int_{\mathcal{J}_n^1} g(z, y) \frac{\omega_1(z)}{H(z)}\,dz,$$

où $H(z)$ est une fonction de la classe (C); la fonction $G_n(H, y)$ est bien définie, > 0 au moins pour n assez grand, et continue; elle est de plus non décroissante avec n, et si l'on pose

$$G(H, y) = \lim_{n \to \infty} G_n(H, y),$$

$G(H, y)$ existe, est de la première classe de Baire [donc mesurable (B)], finie partout et > 0 : plus précisément, sur tout intervalle fini, $G(H, y)$ est borné inférieurement par un nombre positif, car il en est ainsi de $G_n(H, y)$ au moins pour n assez grand; l'intégrale

$$H'_n(x) = \int_{\mathfrak{I}^2_n} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H, y)} dy$$

a par suite un sens, est continue, finie, > 0, et non décroissante quand n croît; on peut donc poser

$$H'(x) = \lim_{n \to \infty} H'_n(x),$$

$H'(x)$ est de la première classe de Baire, donc mesurable (B), > 0 et même bornée inférieurement par un nombre positif sur tout intervalle fini.

Posons

$$F(x, y) = g(x, y) \times \frac{\omega_2(y)}{G(H, y)} \times \frac{\omega_1(x)}{H(x)},$$

$F(x, y)$ est bornée, mesurable (B) en x et en y, donc en (x, y), > 0.

Soit

$$\text{(9)} \qquad I_{p,q} = \int_{\mathfrak{I}^2_p} \int_{\mathfrak{I}^1_q} F(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\text{(10)} \qquad = \int_{\mathfrak{I}^2_p} \omega_2(y) \frac{G_q(H, y)}{G(H, y)} dy,$$

$$\text{(11)} \qquad = \int_{\mathfrak{I}^1_q} \frac{H'_p(x)}{H(x)} \omega_1(x)\, dx.$$

On peut passer à la limite sous les intégrales, d'après un théorème de Beppo-Levi complété par de La Vallée Poussin (*voir* La Vallée Poussin, *Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensembles*, p. 53), et cela sans s'inquiéter de savoir si $H'(x)$ est fini ou non; (10) et (3') indiquent alors que $I_{p,q}$ a une limite égale à 1 lorsque p et q tendent simultanément et indépendamment vers $+\infty$; de (11) on déduit alors que

$$\int_{\mathcal{J}^1} \frac{H'(x)}{H(x)} \omega_1(x)\, dx = 1. \tag{12}$$

Désignons par A la partie de $\mathcal{J}^1$ sur laquelle $\omega_1(x) > 0$ et par B celle sur laquelle $\omega_1(x) = 0$; de (12) on déduit d'abord que $H'(x)$ est fini presque partout sur A; supposons d'autre part que, par hypothèse, on ait presque partout

$$H'(x) \geqq H(x) \qquad \text{ou bien} \qquad H'(x) \leqq H(x).$$

On aurait presque partout

$$\frac{H'(x)}{H(x)} \geqq 1 \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{H'(x)}{H(x)} \leqq 1.$$

On déduit aisément de (3') et de (12) que l'on a forcément presque partout sur A

$$H'(x) = H(x).$$

Lemme. — *Si* $H(x)$ *est une fonction de la classe* (C) *et si* A *désigne la partie de* $\mathcal{J}^1$ *sur laquelle* $\omega_1(x)$ *est* > 0, *la fonction* $H'(x) = \Omega(H)$ [*voir* (7) *et* (7')] *est mesurable* (B), *bornée inférieurement par un nombre positif sur tout intervalle fini, et finie presque partout sur* A; *si de plus on a presque partout* $H'(x) \geqq H(x)$ *ou bien* $H'(x) \leqq H(x)$, *on a presque partout sur* A : $H'(x) = H(x)$.

Remarque I. — Le lemme précédent subsiste entièrement si l'on suppose que $H(x)$, *toujours mesurable* (B) *et fini presque partout, est borné inférieurement non par un nombre positif, mais seulement par zéro, pourvu que l'on soit assuré par ailleurs que la fonction* $G(H, y)$ *reste finie presque partout, et même* $G(H, y)$ *peut être infini pour les valeurs de* y *qui annulent* $\omega_2(y)$.

Remarque II. — Observons :

a. que la fonction $H(x) = 1$ est de la classe (C);

b. que, si H_1 est de la classe (C), si H_2 est mesurable (B) et finie presque partout, et si l'on a $H_1(x) \leqq H_2(x)$, H_2 est de la classe (C); que, si H_2 est de la classe (C), si H_1 est mesurable (B) et bornée inférieurement par un nombre >0, et si l'on a $H_1(x) \leqq H_2(x)$, H_1 est de la classe (C);

c. que si H_1 et H_2 sont de la classe (C), il en est de même des fonctions $M(H_1, H_2)$ et $m(H_1, H_2)$ [1].

Utilisation d'une méthode d'approximations successives. — Ceci étant, nous allons appliquer une sorte de méthode d'approximations successives. Posons

$$H_1 = 1, \qquad H'_1 = \Omega(H_1), \qquad H''_1 = m(H_1, H'_1);$$
$$H_2 = M\left(H''_1, \frac{1}{2}\right), \qquad H'_2 = \Omega(H_2), \qquad H''_2 = m(H_1, H'_2);$$
$$H_n = M\left(H''_{n-1}, \frac{1}{n}\right), \qquad H'_n = \Omega(H_n), \qquad H''_n = m(H_1, H'_n).$$

Les H_n sont tous de la classe (C), et l'on a évidemment

$$H_{n+1} \leqq H_n; \qquad H'_{n+1} \leqq H'_n.$$

Deux cas peuvent alors se présenter.

Premier cas. — *Supposons que pour une valeur n_0 de n, H'_n soit $\leqq H_1$, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle.* On aura presque partout

$$H''_{n_0} = H'_{n_0},$$

H'_{n_0} n'appartient pas forcément à la classe (C), en ce sens que sa borne inférieure peut être nulle et non >0; mais posons

$$K_p = M\left(H'_{n_0}, \frac{1}{p}\right),$$

K_p est de la classe (C) et tend vers H'_{n_0} quand $\frac{1}{p}$ tend vers zéro; et si l'on pose

$$K'_p = \Omega(K_p)$$

---

[1] Nous désigons par $M(H_1, H_2)$ la fonction définie de la façon suivante :

$$M(H_1, H_2) = H_1, \quad \text{si } H_1 \geqq H_2; \qquad M(H_1, H_2) = H_2, \quad \text{si } H_2 \geqq H_1;$$

et par $m(H_1, H_2)$ la fonction définie par

$$m(H_1, H_2) = H_1, \quad \text{si } H_1 \leqq H_2; \qquad m(H_1, H_2) = H_2, \quad \text{si } H_2 \leqq H_1.$$

lorsque p croît indéfiniment, K'_p tend en décroissant vers une limite K' mesurable (B); d'ailleurs, d'après le théorème de Beppo-Levi, et compte tenu de ce que les fonctions qui interviennent sont $\geqq 0$ et toutes croissantes ou décroissantes par rapport à p, on voit que

$$K' = \lim_{p\to\infty} \Omega(K_p) = \Omega(H'_{n_0}).$$

Je dis que

$$\int_{\mathcal{J}^1} \frac{K'}{H'_{n_0}} \omega_1(x)\, dx = 1.$$

On a, en effet,

$$H_{n_0} \geqq \frac{1}{n_0}, \qquad H'_{n_0} \geqq \frac{H'_1}{n_0};$$

$$K_p \geqq H'_{n_0} \geqq \frac{H'_1}{n_0},$$

$$K_p \leqq H_1 \quad \text{(presque partout)}, \qquad K'_p \leqq H'_1 \quad \text{(partout)},$$

d'où

$$(13) \qquad \frac{K'_p}{K_p} \leqq n_0, \qquad \frac{K'}{H'_{n_0}} \leqq n_0.$$

Or, d'après le lemme précédent, on a

$$\int_{\mathcal{J}^1} \frac{K'_p}{K_p} \omega_1(x)\, dx = 1,$$

et, comme d'après (13) cette intégrale est uniformément convergente, on a, à la limite,

$$(14) \qquad \int_{\mathcal{J}^1} \frac{K'}{H'_{n_0}} \omega_1\, dx = 1.$$

Notons que l'on a partout

$$1 \geqq K'(x) > 0.$$

D'autre part, pour $p > n_0 + 1$, on a

$$K_p \leqq H_{n_0+1},$$

donc

$$K'_p \leqq H'_{n_0+1} \leqq H'_{n_0}.$$

d'où

$$K' \leqq H'_{n_0}.$$

D'après le lemme, on a presque partout sur A

$$K' = H'_{n_0}.$$

Mais

$$G(K', y) = \int_{\mathcal{J}^1} g(z, y) \frac{\omega_1(z)}{K'(z)} dz$$
$$= \int_A g(z, y) \frac{\omega_1}{K'} dz = \int_A g(z, y) \frac{\omega_1}{H'_{n_0}} dz = \int_{\mathcal{J}^1} g(z, y) \frac{\omega_1}{H'_{n_0}} dz,$$

d'où, partout,

$$\Omega(K') = \Omega(H'_{n_0}) = K',$$

K' *est donc une solution positive de l'équation* (7). *On en déduit sans difficultés une solution pour le système* (S), *par les formules* (8) *et* (5'').

Deuxième cas. — *Supposons au contraire que, quel que soit n,* H'_n *surpasse* H_1 *sur un ensemble de mesure* > 0, J_n. Soient alors H' et H les limites de H'_n et de H_n. On a toujours

$$H \leqq H', \tag{15}$$

H *et* H' *ne peuvent être nulles en un point sans être nulles presque partout.* Il suffit de le montrer pour H' qui, d'après le lemme, est finie presque partout comme tous les H'_n. Supposons que $H'_n(x)$ tende vers zéro pour $x = x_0$,

$$H'_n(x_0) = \int_{\mathcal{J}^2} g(x_0, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)} dy,$$

d'où résulte, d'après les hypothèses II, que $\frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)}$ tend vers zéro en mesure sur $\mathcal{J}^2$. Soit x un point tel que $H'_1(x)$ soit finie; écrivons

$$H'_n(x) = \int_{\mathcal{J}_q} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)} dy + \int_{\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}^2_q} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)} dy.$$

Si l'on a pris q assez grand, on aura

$$\int_{\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}^2_q} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)} dy \leqq \int_{\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}^2_q} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H_1, y)} dy \leqq \varepsilon.$$

Comme $\int_{\mathcal{J}^2_q} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)} dy$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la propriété est démontrée.

Plaçons-nous alors dans le cas où H' *et* H *sont différentes de zéro presque partout. Je dis que* H' *est une solution, mesurable* (B) *et positive, de l'équation* (7). Cela est vérifié d'abord si la limite J des J_n est de mesure nulle. En effet, on a

$$H'_n = \Omega(H_n),$$

d'où

$$H' = \Omega(H). \tag{16}$$

Et, d'après la manière dont sont définies les H_n et les H'_n, on a, puisque J est de mesure nulle,

$$H = H' \quad \text{presque partout,}$$

de sorte que

$$\Omega(H) = \Omega(H') = H' \quad \text{partout.}$$

Je dis d'ailleurs que J est de mesure nulle, car supposons-le de mesure positive, on aurait

$$\text{sur J,} \quad H = 1 = H_1 < H'; \qquad \text{sur } \mathcal{J}^1 - J, \quad H = H';$$

donc

$$\int_{\mathcal{J}^1} \frac{H'}{H} \omega_1 \, dx = \int_J H' \omega_1 \, dx + \int_{\mathcal{J}^1 - J} \omega_1 \, dx > 1. \tag{17}$$

Mais on a

$$\int_{\mathcal{J}_1} \frac{H'_n}{H_n} \omega_1 \, dx = 1 = \int_{\mathcal{J}^1 - J_{n-1}} \frac{H'_n}{H_n} \omega_1 \, dx + \int_{J_{n-1}} H'_n \omega_1 \, dx, \tag{18}$$

car $H_n = 1$ sur J_{n-1}. D'ailleurs

$$\int_J H' \omega_1 \, dx \leqq \int_{J_{n-1}} H' \omega_1 \, dx.$$

Sur $\mathcal{J}^1 - J_{n-1}$, $H_n = H'_{n-1}$, ou $\frac{1}{n}$ si $H'_{n-1} \leqq \frac{1}{n}$; comme $H'_n \leqq H'_{n-1}$, on a de toutes façons

$$\frac{H'_n}{H_n} \leqq 1,$$

de sorte que l'intégrale $\int_{\mathcal{J}^1 - J_{n-1}} \frac{H'_n}{H_n} \omega_1 \, dx$ tend visiblement vers $\int_{\mathcal{J}^1 - J} \frac{H'}{H} \omega_1 \, dx$. De (18) on déduit alors que l'inégalité (17) est impossible.

Condition suffisante pour que l'on soit sûrement ou dans le 1^er^ *cas, ou dans le* 2^e^ *cas avec* H′ *différente de zéro presque partout.* — Il est alors intéressant d'indiquer une condition suffisante pour que l'on soit sûrement ou dans le 1^er^ cas, ou dans le 2^e^ cas avec H′ différente de zéro presque partout. Or, une telle condition est que, sous les hypothèses I et II, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{I}_2} \frac{\omega_2(y)\,dy}{\int_{\mathfrak{I}_1} g(z, y)\,\omega_1(z)\,dz}$$

soit finie.

En effet, dans ce cas, on a

$$H'_1(x) = \Sigma \int_{\mathfrak{I}_2} \frac{\omega_2(y)}{\int_{\mathfrak{I}_1} g(z, y)\,\omega_1(z)\,dz}\,dy$$

en désignant par Σ la borne supérieure de $g(x, y)$; les H'_n seront donc finis partout; de plus, les intégrales

$$H'_n(x) = \int_{\mathfrak{I}} g(x, y)\frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)}\,dy$$

seront uniformément convergentes par rapport à x et à n, car on a

$$G(H_n, y) \geqq G(H_1, y) = \int_{\mathfrak{I}_1} g(z, y)\,\omega_1(z)\,dz$$

$$\int_{\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_p} g(x, y)\frac{\omega_2(y)}{G(H_n, y)}\,dy \leqq \Sigma \int_{\mathfrak{I}_2 - \mathfrak{I}_p} \frac{\omega^2(y)}{G(H_1, y)}\,dy.$$

De sorte que si $H'_n(x)$ tend vers zéro pour la valeur x_0 de x, $H'_n(x)$ tend vers zéro partout et uniformément; on peut alors trouver une valeur N telle que pour $n > N$, on ait, quel que soit x,

$$H'_n(x) \leqq \frac{1}{2}.$$

On est alors dans le 1^er^ cas. De toute façon l'équation (7) admet une solution, > 0 et mesurable (B).

Plus précisément, c'est une solution continue, car on a, en la désignant par $h(x)$ [$h(x) = \mathrm{H}'$ dans le 2^e cas, $h(x) = \mathrm{K}'$ dans le 1er cas]

$$h(x) \leqq \mathrm{H}'_1(x),$$

$$h(x) = \int_{\mathfrak{J}^2} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{\mathrm{G}(h, y)} dy,$$

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leqq \int_{\mathfrak{J}^2_q} |g(x_1, y) - g(x_2, y)| \frac{\omega_2(y)}{\mathrm{G}(\mathrm{H}_1, y)} dy$$
$$+ 2 \Sigma \int_{\mathfrak{J}^2 - \mathfrak{J}^2_p} \frac{\omega_2(y)}{\mathrm{G}(\mathrm{H}_1, g)} dy.$$

La première intégrale, qui est finie, tend vers zéro avec $|x_1 - x_2|$, d'où résulte la continuité de $h(x)$.

Ajoutons que $h(x) \leqq 1$ et que l'on a partout $0 < h(x)$. La formule (8) détermine alors parfaitement une solution $\varphi(x)$ continue et $\geqq 0$ pour l'équation (6); et (5″) détermine $\psi(y)$; $\psi(y)$ sera $\geqq 0$ et, sinon continue, du moins mesurable (B).

On peut préciser que, si A′ désigne la partie de $\mathfrak{J}^2$ sur laquelle $\omega_2(y)$ est différent de 0, $\psi(y)$ sera $>$ zéro sur A′, à un ensemble de mesure nulle près; car, soit A″ la partie de A′ sur laquelle $\psi(y) = 0$, on a

$$\int_{\mathfrak{J}^2} g(x, y)\psi(y)\,dy = \int_{\mathrm{A}' - \mathrm{A}''} g(x, y)\psi(y)\,dy,$$

car, sur $\mathfrak{J}^2 - \mathrm{A}'$, $\psi(y)$ est évidemment nulle. Et l'on a [toutes les fonctions étant $\geqq 0$ et mesurables (B)]

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{J}^1} \varphi(x)\left[\int_{\mathrm{A}' - \mathrm{A}''} g(x, y)\psi(y)\,dy\right] dx &= \int_{\mathfrak{J}^1} \omega_1(x)\,dx = 1 \\ &= \int_{\mathfrak{J}^1}\int_{\mathrm{A}' - \mathrm{A}''} g(x, y)\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy \\ &= \int_{\mathrm{A}' - \mathrm{A}''} \psi(y)\left[\int_{\mathfrak{J}^1} g(x, y)\varphi(x)\,dx\right] dy \\ &= \int_{\mathrm{A}' - \mathrm{A}''} \omega_2(y)\,dy,\end{aligned}$$

donc

$$\int_{\mathrm{A}' - \mathrm{A}''} \omega_2(y)\,dy = 1 = \int_{\mathrm{A}'} \omega_2(y)\,dy;$$

ceci n'est possible que si A″ est de mesure nulle. D'où

Théorème I. — *Sous les hypothèses I et II, et si l'intégrale*

$$\int_{\mathfrak{I}^2} \frac{\omega_2(y)}{\left[\int_{\mathfrak{I}^1} g(z, y)\, \omega_1(z)\, dz\right]} dy$$

est finie, le système (S) *admet une solution positive où* $\varphi(x)$ *est une fonction continue qui est nulle seulement pour les valeurs de* x *qui annulent* $\omega_1(x)$, *tandis que* $\psi(y)$ *est mesurable* (B) *et ne s'annule, à un ensemble de mesure nulle près, que pour les valeurs de* y *qui annulent* $\omega_2(y)$.

Remarque. — Dans la condition définissant le cas (I), on peut évidemment intervertir le rôle de ω_1 et de ω_2.

D'autre part, *il est très important de remarquer que, sous les hypothèses I et II, il suffit que* $\mathfrak{I}^2$ *soit fini pour que les conditions du théorème I soient satisfaites.*

Application du théorème I. — Soit le cas de Bernstein

$$\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{I}^2 = (-\infty, +\infty), \quad g(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}},$$

avec

$$\omega_1 = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma_1^2}}, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{\sigma_2^2}}.$$

Les hypothèses I et II sont satisfaites; d'autre part, supposons par exemple $\sigma_1 \geqq \sigma_2$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\sigma_1^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\sigma_1^2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{\sigma^2+\sigma_1^2}},$$

de sorte qu'ici

$$\frac{\omega_2(y)}{\int_{\mathfrak{I}^1} g(z, y)\, \omega_1(z)\, dz} = \frac{\sqrt{\sigma^2+\sigma_1^2}}{\sigma_2} e^{-y^2\left[\frac{\sigma^2+\sigma_1^2-\sigma_2^2}{\sigma_2^2(\sigma_1^2+\sigma^2)}\right]};$$

et comme $\sigma^2 + \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ est forcément > 0, l'intégrale

$$\int_{\mathfrak{I}^2} \frac{\omega_2(y)\, dy}{\left[\int_{\mathfrak{I}^1} g(z, y)\, \omega_1(z)\, dz\right]}$$

est bien, ici, convergente. Ainsi le théorème I permet de retrouver le résultat de M. Bernstein dans un cas particulier.

3. Existence d'une solution dans un deuxième cas. — Nous allons chercher à établir l'existence d'une solution pour le système (S), même dans des cas où les conditions du théorème I ne sont pas satisfaites, mais toujours sous les hypothèses I et II ($\mathcal{I}^1$ et $\mathcal{I}^2$ sont donc tous deux infinis). Pour cela définissons une classe de fonctions.

Fonctions de la classe (B). — *Une fonction $g(x, y)$ (définie pour $x \subset \mathcal{I}^1$ et $y \subset \mathcal{I}^2$) est de la classe* (B) *en x pour l'intervalle fini fermé $\mathcal{F}$ (supposé partie de $\mathcal{I}^1$), si elle est $\geqq 0$ et continue et si, $f(y)$ désignant une fonction $\geqq 0$ continue quelconque, l'hypothèse que l'intégrale*

$$F(x) = \int_{\mathcal{I}^2} g(x, y) f(y)\, dy \tag{19}$$

est finie presque partout sur un ensemble ouvert quelconque contenant $\mathcal{F}$, entraîne que cette intégrale est uniformément convergente sur $\mathcal{F}$. $g(x, y)$ est de la classe (B) *en x, si elle est de la classe* (B) *en x pour tout intervalle fini fermé $\mathcal{F}$.* On définirait de même les fonctions de la classe (B) en y.

La classe ainsi définie est assez vaste : pour que $g(x, y)$ soit de classe (B) en x pour $\mathcal{F}$, il suffit par exemple que, pour $x \subset \mathcal{F}$, $g(x, y)$ soit borné inférieurement par un nombre > 0 indépendant de x et de y; ou encore, plus généralement, qu'il existe deux nombres positifs α et β, tels que, quels que soient x_1 et x_2 dans $\mathcal{F}$ et y dans $\mathcal{I}^2$, on ait

$$\alpha < \frac{g(x_1, y)}{g(x_2, y)} < \beta.$$

Voici d'autre part une proposition qui nous sera utile.

Si $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}^2 = (-\infty, +\infty)$ et si, $g(x, y)$ ne dépendant que de $(x-y)$, on pose $U(x-y) = g(x, y)$, $g(x, y)$ est de la classe (B) *en x et en y, pourvu que la fonction $U(t)$ soit non croissante ou non décroissante, d'une part pour t suffisamment petit, d'autre part pour t suffisamment grand.*

Pour simplifier supposons $U(t)$ croissante pour $t < 0$ et décroissante pour $t > 0$. Soit (a, b) un intervalle $\mathcal{F}$ quelconque, avec $a < b$. Soit b' un nombre $> b$. Supposons que sur un ensemble ouvert A, quelconque, mais contenant $\mathcal{F}$, l'intégrale (19) soit finie presque partout : on pourra trouver un nombre $b' > b$ et tel que $F(b')$ soit fini; on a, pour $a \leqq x \leqq b$,

$$g(x, y) \leqq g(b', y), \qquad \text{si} \quad y \geqq b',$$

de sorte que l'intégrale

$$\int_{b'}^{+\infty} g(x, y) f(y)\, dy$$

est uniformément convergente pour $a \leqq x \leqq b$; a' désignant un nombre de A, $< a$ et tel que $F(a')$ soit fini; on verrait de même que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{a'} g(x, y) f(y)\, dy$$

est uniformément convergente pour $a \leqq x \leqq b$.

Ainsi s'établit le résultat annoncé. D'une façon analogue, on établit aussi le résultat suivant :

Si $g(x, y)$ admet une dérivée partielle par rapport à x, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $g(x, y)$ sera de la classe (B) *pour un intervalle $\mathcal{F}$ fini si $\frac{\partial g}{\partial x}$ garde un signe constant lorsque x est dans $\mathcal{F}$, d'une part pour les valeurs suffisamment petites de y, d'autre part pour les valeurs suffisamment grandes de y.*

Ajoutons que si $g(x, y)$ est de la classe (B) pour $\mathcal{F}$, il en est de même pour $\rho_1(x) \times g(x, y) \times \rho_2(y)$, ρ_1 et ρ_2 étant > 0.

Existence d'une solution quand $g(x, y)$ est de la classe (B). — Ceci étant, sous les hypothèses I et II, supposons que $g(x, y)$ soit une fonction de la classe (B) en x.

Soit $\mathcal{F}$ un intervalle fini fermé, quelconque, mais intérieur à l'ensemble A sur lequel $\omega_1(x)$ est différent de zéro.

Soit $\rho(x)$ une fonction :

1° > 0 et continue;

: que $\int_{\mathcal{J}^1} \omega_1 \rho \, dx = 1$;

: que l'intégrale $\int_{\mathcal{J}^1} \frac{\omega_1 \rho}{\left[\int_{\mathcal{J}^2} g(x, z)\,\omega_2(z)\, dz\right]} dx$ soit $< +\infty$;

: que l'inégalité

$$\rho(x) \geqq \frac{1}{2}$$

qu'en des points de $\mathcal{F}$, — et quelconque par ailleurs. L'exis-ne telle fonction peut être considérée comme évidente.

érons le système

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\varphi}(x) \int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\, \bar{\psi}(y)\, dy = \omega_1(x)\, \rho(x), \\ &\bar{\psi}(y) \int_{\mathcal{J}^1} g(x, y)\, \bar{\varphi}(x)\, dx = \omega_2(y); \end{aligned}\right.$$

système de Schrödinger, en $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$, auquel s'applique le I, d'après le choix de $\rho(x)$; on peut donc trouver une solu-$\bar{\psi}$) de ce système constituée par une fonction $\bar{\psi}(y) > 0$ et $\bar{\varphi}(x)$ étant mesurable (B) de la 1^re^ classe de Baire, > 0 et sur A, sauf peut-être sur une partie de mesure nulle de A. grale $\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\, \bar{\psi}(y)\, dy$ est donc finie presque partout mme A est ouvert et que $g(x, y)$ est de la classe (B), cette est uniformément convergente sur tout intervalle fini com-A et représente par suite une fonction continue sur A : alors une fonction continue et > 0 sur A [à vrai dire, A peut tre ouvert, si $\mathcal{J}^1$ est borné d'un côté par exemple par le a, et si $\omega_1(a)$ est > 0; on constate que même dans ces cas on notre raisonnement est valable : $\bar{\varphi}(x)$ sera continu r A, sauf peut-être en a].

lérons maintenant l'équation

$$\bar{h}(x) = \frac{\bar{\varphi}(x)}{\omega_1(x)} \int_{\mathcal{J}^2} g(x, y) \frac{\omega_2(y)\, dy}{\left[\int_{A} g(z, y) \frac{\bar{\varphi}(z)}{\bar{h}(z)}\, dz\right]},$$

où $\bar{h}(x)$ est une inconnue, définie sur A. On peut appliquer à cette équation la méthode du paragraphe **2** (p. 86 et suiv.) comme on le voit aisément. Si $\bar{\mathrm{H}}$ est de la classe (C) (p. 87) et si l'on pose

$$\bar{\mathrm{H}}' = \frac{\bar{\varphi}}{\omega_1}\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\frac{\omega_2(y)\,dy}{\displaystyle\int_{\mathrm{A}} g(z, y)\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathrm{H}}}\,dz} = \bar{\Omega}(\bar{\mathrm{H}}),$$

on a

$$\int_{\mathrm{A}} \frac{\bar{\mathrm{H}}'}{\bar{\mathrm{H}}}\,\omega_1\,dx = 1.$$

Alors, ou bien l'on est dans le 1er cas (p. 90), ce qui conduit à une solution $\bar{h}(x) > 0$; ou bien on est dans le 2e cas, avec des limites $\bar{\mathrm{H}}$ et $\bar{\mathrm{H}}'$ (p. 92). Je dis que $\bar{\mathrm{H}}$ et $\bar{\mathrm{H}}'$ sont différentes de zéro presque partout sur A.

En effet,

$$\bar{\mathrm{H}}'_1 = \frac{\bar{\varphi}(x)}{\omega_1(x)}\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\frac{\omega_2(y)}{\displaystyle\int_{\mathrm{A}} g(z, y)\,\bar{\varphi}(z)\,dz}\,dy = \rho(x),$$

$\bar{\mathrm{H}}'_1$ est donc $< \frac{1}{2}$, sauf peut-être sur $\mathcal{F}$, d'après le choix de ρ; d'ailleurs $\bar{\mathrm{H}}'_1$ peut s'écrire

$$\mathrm{H}'_1 = \frac{\bar{\varphi}}{\omega_1}\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\,\bar{\psi}(y)\,dy.$$

Sur $\mathcal{F}$, l'intégrale $\int_{\mathcal{J}^1} g(x, y)\bar{\psi}(y)\,dy$ est uniformément convergente; on aura de même

$$\bar{\mathrm{H}}'_n = \frac{\bar{\varphi}}{\omega_1}\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\frac{\omega_2(y)}{\displaystyle\int_{\mathrm{A}} g(z, y)\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathrm{H}}_n}\,dz}\,dy.$$

Et comme $\bar{\mathrm{H}}_n \leqq \bar{\mathrm{H}}_1$, l'intégrale

$$\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\frac{\omega_2(y)}{\displaystyle\int_{\mathrm{A}} g(z, y)\frac{\bar{\varphi}}{\bar{\mathrm{H}}_n}\,dz}\,dy$$

sera uniformément convergente sur $\mathcal{F}$, à la fois par rapport à x et par rapport à n : on en déduit facilement que si $\overline{\mathrm{H}}'$ et $\overline{\mathrm{H}}$ étaient nulles en un point, $\overline{\mathrm{H}}'_n(x)$ tendrait vers zéro uniformément sur $\mathcal{F}$, et pour n assez grand, on aurait sur $\mathcal{F}$

$$\mathrm{H}'_n \leqq \frac{1}{2}.$$

Comme on a, en dehors de $\mathcal{F}$,

$$\mathrm{H}'_n \leqq \overline{\mathrm{H}}'_1 = \rho(x) \leqq \frac{1}{2},$$

on aurait partout $\overline{\mathrm{H}}'_n \leqq \frac{1}{2} < \overline{\mathrm{H}}_1$; on serait donc dans le premier cas, et non dans le second.

De toutes façons, on obtient une solution $\bar{h}(x), > 0$, pour l'équation (20) : cette solution est finie ($\leqq \overline{\mathrm{H}}_1 = 1$), donc l'intégrale

$$\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y) \frac{\omega_2(y)}{\displaystyle\int_{\mathrm{A}} g(z, y) \frac{\bar{\varphi}(z)}{\bar{h}(z)} dz} dy$$

est finie sur A ; elle représente donc une fonction continue sur A, de sorte que, d'après (20), $\bar{h}(x)$ est continue sur A.

On constate alors sans difficultés que la fonction $\varphi(x)$ définie par

$$\varphi(x) = \frac{\bar{\varphi}(x)}{\bar{h}(x)} \qquad \text{pour } x \subset \mathrm{A},$$
$$\varphi(x) = 0 \qquad \text{pour } x \subset \mathcal{J}^1 - \mathrm{A}$$

satisfait à l'équation (6) ; (5″) donne alors la valeur correspondante de $\psi(y)$. D'où

THÉORÈME II. — *Sous les hypothèses I et II, si $g(x, y)$ est de la classe* (B) *en x, le système* (S) *admet une solution constituée par une fonction $\varphi(x)$ nulle pour les valeurs de x qui annulent $\omega_1(x)$, > 0 et continue pour les autres ; et par une fonction $\psi(y) \geqq 0$, mesurable* (B) *qui ne s'annule, à un ensemble de mesure nulle près, que pour les valeurs de y qui annulent $\omega_1(y)$.*

Remarque. — D'une façon générale, supposons que $\omega_1(x)$ soit > 0

sur l'ensemble A_1 et ω_2 sur l'ensemble A_2 ; considérons le système

$$(\bar{S})\qquad \begin{cases} \bar{\varphi}(x)\displaystyle\int_{A_2} g(x,y)\,\bar{\psi}(y)\,dy = \omega_1(x), & x \subset A_1;\\ \bar{\psi}(y)\displaystyle\int_{A_1} g(x,y)\,\bar{\varphi}(x)\,dx = \omega_2(y), & y \subset A_2.\end{cases}$$

Soit $\bar{\varphi}$ et $\bar{\psi}$ une de ses solutions ; les fonctions φ et ψ

$$\begin{array}{llll} \varphi = \bar{\varphi} & \text{sur } A_1, & \varphi = 0 & \text{sur } \mathcal{J}^1 - A_1,\\ \psi = \bar{\psi} & \text{sur } A_2, & \psi = 0 & \text{sur } \mathcal{J}^2 - A_2 \end{array}$$

satisfont au système (S).

4. Unicité de la solution. — Nous ne considérons pas comme solution du système (S) une solution où l'une des deux fonctions φ, ψ serait nulle presque partout. Dans ces conditions, une solution positive de (S) est constituée par deux fonctions finies presque partout et différentes de zéro (à un ensemble de mesure nulle près) pour les valeurs de x ou de y qui n'annulent pas ω_1 ou ω_2. Par ailleurs, sous les hypothèses I et II, $\varphi(x)$ est nul en même temps que ω_1 ; de même pour $\psi(y)$ et $\omega_2(y)$.

Soient (φ_1, ψ_1), (φ_2, ψ_2) deux solutions positives et mesurables (B) de (S) ; supposons-les distinctes, c'est-à-dire que l'on n'a pas

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\psi_2}{\psi_1} = \text{const.}$$

On peut supposer que pour une valeur x_0 de x on a

$$+\infty > \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) > 0.$$

En appelant toujours A_1 l'ensemble sur lequel $\omega_1(x) > 0$, et en posant, sur A_1,

$$h_1(x) = \frac{\omega_1}{\varphi_1}, \qquad h_2 = \frac{\omega_2}{\varphi_2},$$

h_1 et h_2 sont deux solutions distinctes de l'équation

$$h(x) = \int_{\mathcal{J}^2} g(x,y)\frac{\omega_2(y)\,dy}{\displaystyle\int_{A_1} g(z,y)\frac{\omega_1(z)}{h(z)}\,dz}, \tag{21}$$

qui est du type de l'équation (7). En posant

$$G(H, y) = \int_{A_1} g(z, y) \frac{\omega_1(z)}{H(z)} dz$$

on a, sur l'ensemble A_2 où $\omega_2(y)$ est > 0,

$$\psi_1(y) = \frac{\omega_2(y)}{G(h_1, y)}, \qquad \psi_2(y) = \frac{\omega_2(y)}{G(h_2, y)},$$

d'où l'on déduit que $G(h_1, y)$ et $G(h_2, y)$ sont finis presque partout sur A_2; soit $h(x) = M(h_1, h_2)$; on a

$$0 < h(x_0) = h_1(x_0) = h_2(x_0) < +\infty,$$

$G(h, y)$ est fini presque partout sur A_2. Si l'on pose

$$h'(x) = \int_{\mathfrak{J}^2} g(x, y) \frac{\omega_2(y)\, dy}{G(h, y)},$$

on aura, d'après une remarque du paragraphe **2**,

$$\int_{A_1} \frac{h'}{h} \omega_1 \, dx = 1. \tag{22}$$

Or, puisque $h \geqq h_1$, on a

$$h' \geqq h_1,$$

de même, $h \geqq h_2$ entraîne

$$h' \geqq h_2.$$

D'où l'on déduit que

$$h' \geqq h.$$

D'après (22), on a alors

$$h' = h.$$

De $h \geqq h_1$, on déduit

$$G(h, y) \leqq G(h_1, y).$$

Or, on a

$$\int_{\mathfrak{J}^2} g(x_0, y) \frac{\omega_2(y)\, dy}{G(h, y)} = \int_{\mathfrak{J}^2} g(x_0, y) \frac{\omega_2(y)\, dy}{G(h_1, y)};$$

on a donc presque partout sur A_2

$$G(h, y) = G(h_1, y),$$

d'où résulte que l'on a partout

$$h = h_1.$$

De même, $h = h_2$, et finalement

$$h_1 = h_2,$$

et par suite :

Théorème III. — *Sous les hypothèses I et II, le système* (S) *a au plus une solution positive et mesurable* (B).

Remarque I. — Tous les résultats établis aux paragraphes **2**, **3** et **4** subsistent, avec seulement de légères modifications d'énoncés, si l'on suppose ω_1 et ω_2 non plus continues, mais seulement mesurables (B).

Remarque II. — Supposons toujours $\omega_1(x)$ continues; supposons $\mathcal{J}^2$ fini, et ne considérons que des solutions bornées, c'est-à-dire telles que φ et ψ soient bornées supérieurement en valeur absolue; l'intégrale

$$\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\psi(y)\, dy$$

est alors une fonction continue, et par suite $\varphi(x)$ aussi; $\varphi(x)$ ne peut s'annuler qu'en changeant de signe, ce qui n'est pas possible si ω_1 est toujours différent de zéro, sans quoi

$$\int_{\mathcal{J}^2} g(x, y)\,\psi(y)\, dy = \frac{\omega_1(x)}{\varphi(x)}$$

deviendrait infini pour certaines valeurs de x, ce qui est contradictoire avec le fait que $|\psi|$ est borné et que $\mathcal{J}^2$ est fini. Le système (S) n'admet alors aucune solution autre que la solution positive dont le théorème I établit l'existence.

Remarque III. — Il est à noter que *si ω_1 ou ω_2 ne reste pas constamment supérieur à zéro, il y aura en général pour le système* (S) *des solutions non positives*, comme le prouve l'exemple suivant :

Si l'on suppose $\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}^2$, $\omega_1(x) = \omega_2(x)$, pour prouver l'existence d'une solution non positive pour (S), il suffit d'établir l'existence d'une solution non positive pour l'équation

$$\varphi(x)\int_{\mathcal{J}^1} g(x, y)\,\varphi(y)\, dy = \omega_1(x).$$

Or, prenons pour $\mathcal{I}'$ l'intervalle $(0, 3\pi)$; soit

$$\begin{aligned} \omega_1(x) &= \frac{\sin x}{4} && \text{pour } 0 \leqq x \leqq \pi; \\ &= 0 && \text{pour } \pi \leqq x \leqq 2\pi; \\ &= +\frac{\sin x}{4} && \text{pour } 2\pi \leqq x \leqq 3\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sin x && \text{pour } 0 \leqq x \leqq \pi, \\ &= 0 && \text{pour } \pi \leqq x \leqq 2\pi, \\ &= -\sin x && \text{pour } 2\pi \leqq x \leqq 3\pi. \end{aligned}$$

Choisissons $g(x, y)$ de la façon suivante :

$$\text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq \pi: \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{pour} \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \\ \dfrac{1}{8} & \text{pour} \quad 2\pi \leqq y \leqq 3\pi; \end{cases}$$

$$\text{pour} \quad 2\pi \leqq x \leqq 3\pi: \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & \text{pour} \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \\ \dfrac{1}{4} & \text{pour} \quad 2\pi \leqq y \leqq 3\pi; \end{cases}$$

ailleurs, $g(x, y)$ est quelconque, mais on s'arrange pour en faire une fonction continue; on constate alors que $\varphi(x)$ est une solution non positive de l'équation précédente.

Application au cas de Bernstein. — La fonction $g(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}}$ est de la classe (B) en x et y, d'après une proposition établie dans le paragraphe **3**. D'après les théorèmes II et III, on a donc :

Dans le cas de Bernstein, le système (S) *admet une solution positive et continue, qui est son unique solution positive et mesurable* (B).

Nous retrouvons ainsi, en le complétant, le résultat de M. Bernstein.