

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES VALIRON

Division en feuillets de la surfaces de Riemann définie par $w = \frac{e^z-1}{z} + h$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 19, n° 1-4 (1940), p. 339-358.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_339_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Division en feuillets de la surface de Riemann

définie par $w = \frac{e^z - 1}{z} + h$;

PAR GEORGES VALIRON.

Étant donnée une fonction entière d'ordre fini, $w = f(z)$, la division du plan des z en domaines d'univalence pour $f(z)$, limités par des courbes d'argument constant, ou, ce qui est équivalent, la division de la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ en feuillets simples limités par des demi-droites $\arg w = \text{const.}$, est obtenue par un procédé dont le principe est dû à M. Iversen ⁽¹⁾. On considère les branches de la fonction inverse $z = \varphi(w)$ qui sont holomorphes à l'origine $w = 0$, on les prolonge radialement, les étoiles d'holomorphie ainsi définies constituent un premier système de feuillets. Pour une branche qui admet $w = 0$ pour point critique algébrique, on la décompose en branches uniformes au voisinage de l'origine en coupant le long d'un rayon, et l'on prolonge radialement les éléments obtenus; on obtient un deuxième système de feuillets. A chacun des feuillets obtenus correspond dans le plan des z un domaine d'univalence; si ces domaines, leurs frontières et les points limites de ces frontières couvrent tout le plan, la division est achevée. Dans le cas contraire, les domaines restants correspondent à des domaines angulaires de la surface de Riemann (angles d'ouverture finie ou infinie); on fait le partage de ces angles en marquant une coupure le long d'un rayon

⁽¹⁾ Thèse : *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsingfors, 1914.

$\arg w = \text{const.}$, on obtient un troisième système de feuillets. Ces feuillets du troisième système ne se présentent que si $w = 0$ est point critique transcendant; si ce point est *directement critique*, il est directement critique de *première espèce* ⁽¹⁾, il lui correspond une infinité de feuillets d'ouverture 2π ; si $w = 0$ est *directement et indirectement critique*, il peut exister des feuillets d'ouverture moindre que 2π , il leur correspond dans le plan des z des *domaines incomplets d'univalence*. Un domaine d'univalence obtenu à partir des deux premières espèces de feuillets est complet, mais il peut être singulier; un domaine est *singulier* si les valeurs $w = f(z)$ lorsque z parcourt le domaine et sa frontière ne recouvrent pas une ligne; la frontière du feuillet riemannien correspondant n'est pas entièrement accessible, *elle contient nécessairement un point critique transcendant qui est directement et indirectement critique* ⁽²⁾. À côté de ces anomalies relatives aux feuillets ⁽³⁾ peuvent se présenter des anomalies dans leur jonction. Supposons que $w_0 \neq 0$ soit un point critique direct et indirect, qu'il n'y ait pas d'autre point critique sur la demi-droite (du plan simple) joignant w_0 à l'origine, et supposons que lorsque w tend vers w_0 de telle façon que $|w| > |w_0|$, $\arg w = \arg w_0$, une branche de $z = \varphi(w)$ tende vers l'infini. Le point z décrira une ligne allant de l'infini à l'infini. Il peut exister plusieurs lignes de ce genre et diverses circonstances semblent possibles, la plus simple est sans doute la suivante : les points de la ligne en question sont points limites des frontières d'une suite infinie de domaines d'univalence; on ne peut pas joindre par un chemin continu un point d'un domaine d'univalence situé d'un côté de la ligne à un point d'un domaine situé de l'autre côté sans traverser une infinité de domaines d'univalence. Nous dirons que la division du plan en domaines d'univalence est *impropre*. Une telle

⁽¹⁾ Voir VALIRON, *Bulletin des Sciences math.*, t. 63, 1939, p. 132.

⁽²⁾ VALIRON, *loc. cit.*

⁽³⁾ Il peut exister des feuillets non singuliers dont la frontière contient cependant une infinité de points critiques algébriques. Voir VALIRON, *Comptes rendus*, t. 208, 1939, p. 711. Dans l'énoncé qui termine cette Note, il convient d'ajouter que les courbes argument $w = \text{const.}$, que l'on considère à partir d'une transversale module $w = \text{const.}$, sont bornées à cette transversale et prises dans le sens des modules croissants.

division ne peut provenir que de la présence d'un *point directement et indirectement critique*, placé comme il a été indiqué.

L'introduction d'une classification doit s'appuyer sur des exemples montrant que les classes ne sont pas vides. Un exemple des trois circonstances signalées ci-dessus est fourni par la fonction

$$w = \frac{e^z - 1}{z} + h.$$

Dans sa Thèse citée ci-dessus, M. Iversen a étudié le cas $h = 0$, il a montré qu'il existe un domaine incomplet d'univalence; toutefois la méthode qu'il a employée pour déterminer la ramification de la surface de Riemann ne me semblant pas entièrement probante pour les raisons que j'indique au n° 5, je reviendrai sur ce point. Lorsque $h = -1$, j'ai déjà démontré (*Bulletin des Sciences mathématiques*, loc. cit.) qu'il existe un domaine singulier, je compléterai ce résultat en étudiant la ramification de la surface. Enfin, pour $h = 1$, je montrerai qu'il y a division improprie (il n'y a plus de domaine singulier, contrairement à ce que j'avais annoncé dans la dernière phrase de l'article qui vient d'être cité).

Dans les trois cas, l'étude de la ramification de la surface de Riemann est faite en s'appuyant sur ce que, les points critiques algébriques étant tous simples et d'arguments différents, il leur correspond dans le plan des z des points z_n qui sont l'origine de quatre lignes $\Gamma_n, \Gamma'_n, \gamma_n, \gamma'_n$; sur deux de ces lignes γ_n, γ'_n , le module de w décroît et tend vers zéro, sur les deux autres Γ_n, Γ'_n le module croît indéfiniment. La détermination directe des propriétés de ces lignes semblant compliquée, on a étudié le comportement de l'argument de w sur certaines droites, ce qui a permis de limiter le nombre des points de passage des lignes Γ et γ .

$$\text{I. — Cas de } w = f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

1. La fonction inverse $z = \varphi_1(w)$ de $f_1(z)$ admet pour points critiques algébriques les images W_n des nombres w_n donnés par

$$e^{z_n}(z_n - 1) + 1 = 0, \quad w_n = e^{z_n} = \frac{1}{1 - z_n}, \quad z_n \neq 0.$$

Comme $f_1''(z_n) \neq 0$, chaque point W_n n'échange que deux branches, n'appartient qu'à deux feuillets ⁽¹⁾. Posant $z = x + iy$, on voit que les points A_n d'affixes z_n sont sur les courbes

$$(1) \quad e^{-x} \cos y = 1 - x,$$

$$(2) \quad e^{-x} \sin y = y,$$

donc sur la courbe d'équation

$$(3) \quad y^2 = e^{-2x} - (x - 1)^2.$$

De l'étude des variations de y^2 on déduit la forme de cette courbe qui comprend deux arcs infinis, L, L' , symétriques par rapport à Ox et situés dans le demi-plan $x \leq 0$; et une petite boucle b située dans le demi-plan $x \geq 0$. Ces courbes sont tracées dans la figure 1. Sur la boucle b , on a $|y| < 1$. La courbe L est au-dessus de sa tangente en O puisque

$$e^{-2x} - (1 - x)^2 = x^2 + \frac{1}{6}(-2x)^3 + \dots > x^2, \quad x < 0.$$

Supposons $y > 0$; l'équation (2) montre que $\sin y > 0$, donc

$$2n\pi < y < 2n\pi + \pi, \quad n \text{ entier positif ou nul}$$

[l'équation (2) n'est pas vérifiée sur la boucle puisque $y > \sin y$]. Alors dans (1), $1 - x > 0$, donc les points A_n sont sur la courbe L'' définie par (1), avec $0 < y < \frac{\pi}{2}$, et sur les courbes qui s'en déduisent par les translations $2in\pi$. Sur L'' , y décroît de $\frac{\pi}{2}$ à zéro lorsque x croît de $-\infty$ à zéro. L'' est tangente à L en O , mais est au-dessous de la tangente, car, pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, la condition $y < -x$ équivaut à

$$e^x(1 - x) > \cos x,$$

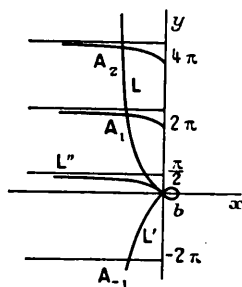
qui est bien vérifiée. On voit qu'il existe un point solution de (1), (2) dans chaque bande

$$2\pi n < y < 2(n+1)\pi, \quad n \text{ entier positif.}$$

⁽¹⁾ Les propriétés indiquées dans ce n° 1 sont données, à des détails près, dans la *Thèse* de M. IVERSEN.

Nous appellerons A_n ce point, et z_n son affixe; A_{-n} désignera le symétrique de A_n par rapport à Ox , z_{-n} son affixe. On a l'aspect de la figure 1.

Fig. 1.



Si l'on pose

$$u = |w|, \quad w = u e^{i\nu}, \quad w_n = u_n e^{i\nu_n}, \quad z_n = x_n + i y_n,$$

on a

$$w_n = \frac{1}{1 - z_n} = e^{z_n}.$$

Eu égard à la forme de L , on devra prendre

$$\nu_n = y_n - 2n\pi,$$

et vu la forme de L'' , on trouve que, lorsque n croît de 1 à l'infini, ν_n croît à partir d'une valeur positive et tend vers $\frac{\pi}{2}$. On a aussi

$$u_n = e^{x_n},$$

u_n décroît et tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Les zéros de $f_1(z)$ sont les points H_n , d'affixes $z'_n = 2ni\pi$, n entier non nul.

Pour $z = x$ réel,

$$w = \frac{e^x - 1}{x}$$

croît de zéro à $+\infty$ lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Lorsque le point d'affixe z s'éloigne indéfiniment, w tend vers zéro si x reste inférieur à un nombre fixe arbitrairement donné, et même dans des conditions plus larges qu'il est inutile de préciser. Si le

chemin va à l'infini de façon que x tende vers $+\infty$ et que $|y|$ reste borné, u tend vers l'infini.

2. Pour

$$z = x + 2i\pi n, \quad n \text{ entier positif},$$

on a

$$w = \frac{e^x - 1}{z}$$

donc, si $x \neq 0$,

$$\nu = \arg \frac{1}{z} + k\pi;$$

il s'ensuit que ν , qui est nul pour $x = -\infty$, croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$ lorsque x croît de $-\infty$ à 0. Comme on passe alors par un zéro simple, ν passe à la valeur $-\frac{\pi}{2}$, puis croît de cette valeur à zéro lorsque x croît de zéro à $+\infty$.

Sur la droite $x = 0$,

$$w = \frac{\sin y + i(1 - \cos y)}{y},$$

$$\tan \nu = \tan \frac{y}{2}, \quad \nu = \frac{y}{2} + k\pi.$$

Compte tenu des résultats précédents, on voit que, lorsque y croît de $2n\pi$ à $2(n+1)\pi$, n entier positif ou nul, ν croît de zéro à π .

Sur la droite

$$z = x + 2ni\pi + i\pi, \quad n \text{ entier positif},$$

on a de même, quel que soit x ,

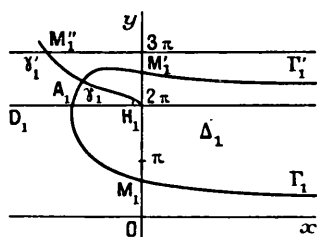
$$\nu = \arg \frac{1}{z},$$

ν croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$, puis à π , lorsque x croît de $-\infty$ à zéro, puis de zéro à $+\infty$.

Une conséquence immédiate du premier résultat est qu'un arc de courbe $\nu = \text{const.}$, sur lequel u croît indéfiniment, finit par rester dans une demi-bande $x > 0$, $2n\pi < y < 2(n+1)\pi$, et a une asymptote parallèle à Ox .

3. Considérons la demi-bande $R : x < 0, 0 < y < 3\pi$; elle contient le point A_1 qui est l'origine de deux lignes γ_1, γ'_1 , sur lesquelles $v = v_1$ et u décroît et tend vers zéro et de deux lignes Γ_1, Γ'_1 , sur lesquelles $v = v_1$ et u croît indéfiniment; v_1 est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Sur la frontière de R se trouvent exactement quatre points en lesquels $v = v_1$: un point M''_1 sur la demi-droite $y = 3\pi$, un point M'_1 sur Oy entre H_1 et le point d'ordonnée 3π , le point H_1 qui est un zéro, un point M_1 entre O et H_1 . Eu égard à l'alternance des courbes γ et Γ , Γ_1 et Γ'_1 franchissent Oy en M_1 et M'_1 , γ_1 joint A_1 à H_1 et γ'_1 traverse la droite d'ordonnée 3π . On a l'aspect de la figure 2; d'ailleurs Γ'_1 ne coupe pas les droites $y = 2\pi, y = 3\pi$, Γ_1 coupe $y = 2\pi$, puis reste au-dessous, γ_1 ne coupe pas $y = 2\pi$.

Fig. 2.

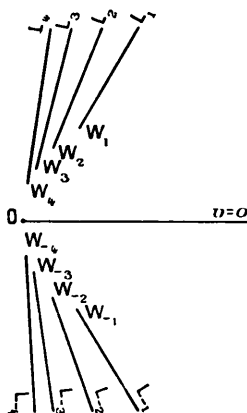


Lorsque le point d'affixe z parcourt le domaine Δ_1 limité par Γ_1, Γ'_1 et contenant H_1 , le point d'affixe $w = f_1(z)$ parcourt le feuillet de la surface de Riemann obtenu en prolongeant la branche de la fonction inverse qui est telle que $\varphi_1(0) = 2i\pi$. Ce feuillet, que nous appellerons F_1 , ne contient sur sa frontière que le point critique W_1 ; Γ_1 et Γ'_1 correspondent aux lignes de passage portées par L_1 (fig. 3).

Montrons que la ligne γ'_1 s'éloigne indéfiniment. S'il n'en était pas ainsi, elle aboutirait à quelque point zéro H_q (elle ne passe par aucun point $A_p, p > 1$, puisque $0 < v_1 < v_p < \frac{\pi}{2}$), le feuillet correspondant à H_q sur la surface de Riemann contiendrait sur sa frontière, non seulement le point W_1 , mais au moins un autre point W_q , qui serait tel que, lorsqu'on tournerait sur un grand cercle $u = \text{const.}$ de la surface de Riemann dans le sens négatif à partir de L_1 au sortir de F_1 , on

arriverait à L_q , prolongement de OW_q . A L_q correspondrait dans le plan des z , une courbe Γ_q qui devrait aller à l'infini en passant entre

Fig. 3.



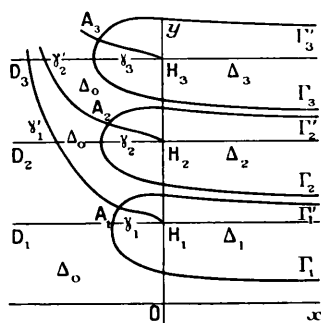
Γ_1 et Ox . C'est impossible puisque, sur le segment OM_1 , on a $0 < v < v_1$ tandis que $v_1 < v_q$.

Ainsi, γ'_1 s'éloigne indéfiniment et traverse une fois et une seule les droites D_q , $y = 2\pi q$, à gauche de Oy . Tous les points A_p , $p > 1$ sont à droite de γ'_1 . Car, si l'un de ces points, A_p , se trouvait à gauche de γ'_1 , il serait dans un domaine limité par D_p , D_{p+1} , γ'_1 ; sur la frontière de ce domaine v serait positif et au plus égal à v_1 ; les lignes Γ_p , Γ'_p ne pourraient pas la franchir, puisque $v_p > v_1$. Or, ces lignes doivent aller à l'infini vers la droite. La disposition est donc celle de la figure 4.

4. On peut recommencer le raisonnement en considérant le point A_2 comme appartenant au domaine limité par γ'_1 , Γ'_1 , Oy et par la droite $y = 5\pi$. Les courbes Γ_2 , Γ'_2 couperont Oy , γ_2 joindra A_2 au point zéro H_2 , γ'_2 coupera la frontière $y = 5\pi$. Au domaine Δ_2 limité par Γ_2 , Γ'_2 et qui contient H_2 correspondra le feuillet F_2 obtenu par le prolongement de la branche qui prend la valeur $4i\pi$ pour $w = 0$; ce feuillet ne contient sur sa frontière que le point de ramification W_2 , la ligne de passage L_2 , prolongement de OW_2 , correspond à Γ_2 et Γ'_2 .

On montrera comme ci-dessus que γ'_2 va à l'infini en laissant à sa droite les points A_p , $p > 2$.

Fig. 4.



Et ainsi de suite.

On a la configuration tracée dans la figure 4. A la portion du demi-plan $y > 0$ qui est extérieure aux domaines Δ_p ($p = 1, 2, \dots$), correspond la portion du plan des w telle que $0 < v < \frac{\pi}{2}$, privée des demi-droites L_p ($p = 1, 2, \dots$). Lorsqu'on adjoint à ce quart de plan son symétrique par rapport à $v = 0$, on obtient un demi-feuillet F_0 auquel correspond le domaine incomplet d'univalence Δ_0 , extérieur aux Δ_p ($p \geq 0$). On passe de ce demi-feuillet à chacun des autres F_p en franchissant la demi-droite L_p correspondante. L'étude de la ramification de la surface de Riemann et la division du plan des z en domaines d'univalence est achevée.

5. La méthode suivie par M. Iversen découlait du principe suivant. Pour établir que la configuration indiquée ci-dessus convient, il suffit de montrer que la ligne polygonale P que l'on trace sur la surface de Riemann en partant du point $w = 1$, $z = 0$ et en suivant un chemin dont la projection sur le plan simple est la ligne polygonale obtenue en joignant ce point à W_1 , puis W_1 à W_2 , W_2 à W_3 , etc., que cette ligne P passe effectivement par les points critiques W_n , $n > 0$ de la surface. A cet effet, M. Iversen considère la frontière du domaine riemannien décrit par $w = f_1(z)$ lorsque z décrit la portion Σ du plan situé à gauche des courbes L et L' du n° 1. La frontière correspondant

à L passe bien par les points critiques W_n , $n > 0$. Mais il ne semble pas qu'on puisse en déduire qu'il en sera de même pour P . C'est ce que montrent les figures 5 et 6, où l'on a représenté d'une part une

Fig. 5.

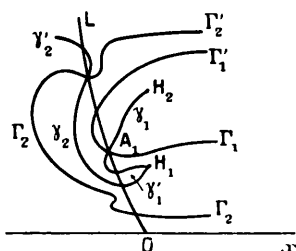
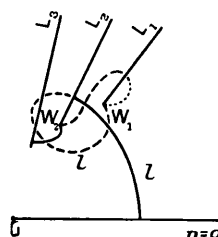


Fig. 6.



disposition possible *a priori* des lignes Γ et γ pour les indices 1 et 2 et un aspect de la ligne l correspondant à L sur la surface de Riemann. Les mêmes groupements sont possibles pour les feuillets suivants.

II. — Cas de $w = f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z} - 1$.

6. Les points A_n images des zéros de $f'_2(z)$ sont les mêmes que précédemment; les points W_n , points critiques algébriques de la fonction inverse $\varphi_2(w)$, sont déduits des précédents par la translation -1 . L'affixe de W_n est ici

$$w_n = \frac{z_n}{1 - z_n}.$$

Pour n positif, les arguments v_n de ces points sont compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , ils croissent avec n et tendent vers π . En effet,

$$\tan v_n = \frac{y_n}{x_n(1 - x_n) - y_n^2}$$

et, compte tenu de (3), l'étude de v_n est ramené à l'étude des variations de

$$\frac{y^2}{[x(1 - x) - y^2]^2} = \frac{e^{-2x} - (1 - x)^2}{[e^{-2x} + x - 1]^2},$$

lorsque x décroît de 0 à $-\infty$. Le numérateur de la dérivée de cette

fonction a le signe de

$$e^{-2x} - 1 + 2x - 2x^2 = \frac{(-2x)^3}{3!} + \dots,$$

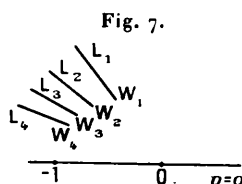
il est positif pour x négatif.

Sur la ligne L , on a, en vertu de (3),

$$\frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} = e^{2x} [e^{-2x} - 1 + 2x] = 1 + e^{2x}(2x - 1), \quad x < 0,$$

cette fonction croît lorsque x décroît, $u_n = |w_n|$ croît avec n , $n > 0$ et tend vers 1.

Les points critiques W_n , ($n > 0$) et les lignes de passage L_n sont placés comme dans la figure 7.



7. Les zéros de $f_2(z)$ sont $z'_0 = 0$ et les solutions non nulles de l'équation

$$e^z = 1 + z,$$

c'est-à-dire du système

$$(4) \quad e^x \cos y = 1 + x, \quad e^x \sin y = y.$$

Si l'on change x et $-x$ dans ce système (4), on retombe sur le système des équations (1), (2); les images des zéros de $f_2(z)$ sont les symétriques des points A_n par rapport à $O\gamma$. Nous appellerons B_n le symétrique de A_n et z'_n son affixe, nous continuerons à appeler H_n le point de coordonnées $0, 2n\pi$, D_n la droite $y = 2n\pi$, F_n le feuillet de la surface de Riemann pour lequel $\varphi_2(0) = z'_n$, et nous appellerons F_0 le feuillet pour lequel $\varphi_2(0) = 0$. L'ensemble de ces feuillets constitue toute la surface puisque $f_2(z)$ n'admet plus zéro pour valeur asymptotique.

8. Nous allons étudier l'argument v de $w = f_2(z)$ sur certaines droites.

I. Pour $x = 0$,

$$\omega = \frac{1}{y} [\sin y - y + i(1 - \cos y)], \quad \text{tang } \nu = \frac{1 - \cos y}{\sin y - y}.$$

Le numérateur de la dérivée de $\text{tang } \nu$ est

$$2 - 2 \cos y - y \sin y,$$

il s'annule pour $y = 2n\pi$ et pour

$$\frac{y}{2} = \text{tang } \frac{y}{2}.$$

Si l'on prend $\nu = 0$ sur Ox pour $x > 0$, il suit de là que ν croît de $\frac{\pi}{2}$ à π lorsque y croît de 0 à 2π . Lorsque y croît de $2n\pi$ à $2(n+1)\pi$, n entier positif, ν part de π , décroît d'abord jusqu'à un minimum ω_n supérieur à $\frac{\pi}{2}$ qu'il atteint pour un y compris entre $2n\pi + \frac{\pi}{2}$ et $2(n+1)\pi$, puis croît jusqu'à π .

II. Sur l'axe Ox , $f_2(x)$ croît de -1 à $+\infty$ lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$. On aura donc $\nu = \pi$ pour x infini négatif.

III. Sur la droite D_n , $y = 2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, on a

$$\omega = \frac{(e^x - 1 - x)x - 4\pi^2 n^2 - 2\pi n i(e^x - 1)}{x^2 + 4\pi^2 n^2},$$

$$\text{tang } \nu = \frac{2\pi n(1 - e^x)}{(e^x - 1 - x)x - 4\pi^2 n^2}.$$

Le numérateur de la dérivée de $\text{tang } \nu$ a le signe de

$$\lambda = e^{2x} + e^x [(x-1)^2 - 3 + 4\pi^2 n^2] + 2x + 1,$$

fonction qui est évidemment positive pour $x \geq 0$. La dérivée troisième de

$$\mu = \lambda e^{-x},$$

soit

$$\mu''' = e^x + e^{-x}(5 - 2x),$$

est positive pour x négatif et d'ailleurs $\mu'(0) = \mu''(0) = 0$. Il s'ensuit que μ et par suite λ s'annule une fois seulement entre $-\infty$ et zéro. Le dénominateur de $\text{tang } \nu$ a une racine positive. On déduit de là que,

sur D_n , ν part de π pour $-\infty$, décroît jusqu'à un minimum supérieur à $\frac{\pi}{2}$ qui est atteint pour un x négatif; puis ν croît, passe pour $x=0$ par la valeur π , puis continue à croître jusqu'à 2π lorsque x croît indéfiniment.

9. Il sera commode de tracer les courbes, autres que Ox , sur lesquelles ω est réel. Elles sont définies par

$$(5) \quad (e^x \cos y - 1)y - x e^x \sin y = 0.$$

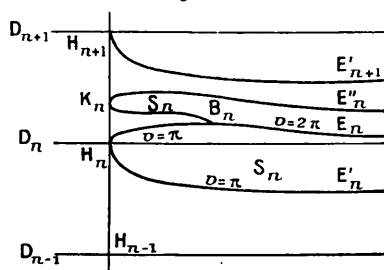
Par chaque zéro B_n passe une de ces lignes, sur l'une des branches E_n , ν est égal à 2π ($\equiv 0$), sur l'autre E'_n , $\nu = \pi$. D'après les résultats du n° 8, E_n est comprise dans la demi-bande limitée par Oy , D_n et D_{n+1} (on suppose toujours $n > 0$), elle est asymptote à D_n . La branche E'_n est tangente à Oy au point H_n ; elle est dans la même demi-bande entre ce point et B_n ; l'arc joignant H_n à l'infini est à droite de Oy et reste entre D_n et son asymptote $y = (2n-1)\pi$. On peut voir que la tangente au point B_n est parallèle à Ox et que c'est le seul point jouissant de cette propriété. Car les points de (5) en lesquels la tangente est parallèle à Ox vérifient la condition

$$(6) \quad y \cos y - (x+1) \sin y = 0,$$

et, pour $y \neq 0$, le système (5), (6) équivaut au système (4).

Les courbes $\nu = \omega = \text{const.}$ issues de B_n restent dans le domaine limité par E_n , E'_n , Oy et E'_{n+1} tant que $0 < \omega < \omega_n$, ω_n étant le minimum défini au n° 8. La courbe E''_n , $\nu = \omega_n$, est donc tangente

Fig. 8.



à Oy en un point K_n . Le domaine S_n situé à droite de Oy , entre D_{n-1} et D_{n+1} , et limité par E'_n et E''_n (voir fig. 8), est représenté confor-

mément par $w = f_2(z)$ sur un angle $\pi < \nu < 2\pi + \omega_n$ situé sur le feuillet F_n .

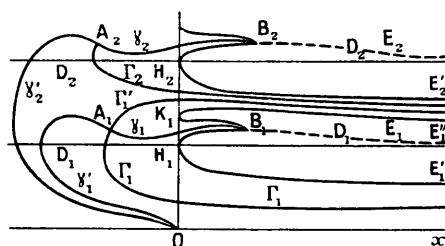
10. Lorsqu'un point m décrit la surface de Riemann en restant sur une circonférence de grand rayon $u = u_0$, tourne dans le sens négatif et part d'un point m_0 , $\nu = 0$, appartenant à F_1 , le point M correspondant du plan des z part d'un point situé sur E_1 et décrit une courbe sur laquelle ν diminue, il se dirige vers Ox . Mais ν ne peut diminuer de 2π sans qu'on atteigne Ox , c'est-à-dire sans que, sur la surface de Riemann, m pénètre dans le feuillet F_0 . On a donc traversé des lignes L_p , $\nu = \nu_p$, soit L_q la première que l'on a rencontrée. A l'angle balayé par la demi-droite Om sur F_1 , correspond un domaine limité par E_1 , par une courbe γ_q joignant B_1 à A_q et par une courbe Γ_q qui joint A_q à l'infini en passant entre Ox et E'_1 . Ce domaine ne contient aucun point A_p , $p \neq q$, ni à son intérieur, ni sur sa frontière. *Montrons que $q = 1$.* Sinon, γ_q et Γ_q couperaient D_2 et A_1 serait soit à droite de γ_q , soit à gauche de Γ_q . La ligne γ_q ne couperait ni Oy , ni D_1 ; le domaine limité par γ_q , D_2 et Oy ne renfermerait pas de zéro de $f_2(z)$, sa frontière ne contiendrait que deux points en lesquels ν puisse être égal à ν_1 , tous deux situés sur Oy , car, sur D_2 , entre le point H_2 et le point situé sur γ_q , on a $\nu_q < \nu < \pi$. Deux des quatre lignes $\nu = \nu_1$ issues de A_1 ne pourraient pas sortir du domaine, A_1 ne s'y trouve pas. De même, le domaine situé entre D_1 et D_2 , à gauche de Γ_q , ne contient pas de zéro de $f_2(z)$, sur sa frontière il n'y a pas de point $\nu = \nu_1$ sur D_2 , il y en a deux au plus sur D_1 , A_1 ne peut pas être dans ce domaine. *On ne peut pas avoir $q > 1$.*

Donc, A_1 est joint à B_1 par une ligne γ_1 , une ligne Γ_1 joint A_1 à l'infini en passant entre E'_1 et Ox . A Γ_1 correspond L_1 . Lorsque m franchit L_1 , il entre dans un nouveau feuillet F_n et il y reste tant qu'il n'a pas atteint $\nu = 0$ et même $\nu = -\frac{\pi}{2}$; sa rotation totale à partir de m_0 est supérieure à 2π , donc M a franchi Ox . Il s'ensuit que n est égal à zéro, L_1 fait passer à F_0 , A_1 est joint à O par une courbe γ'_1 . Cette courbe γ'_1 peut couper ou ne pas couper D_2 , mais dans ces deux cas, Γ_1 ne coupe pas D_2 ; chacune des

courbes Γ_1 et γ'_1 coupe D_1 en un seul point, donc γ_1 ne coupe pas D_1 (voir *fig. 9*).

14. On peut raisonner à partir de B_2, E_2 comme on vient de le faire à partir de B_1, E_1 . Le point m part d'un $v=0$ appartenant à F_2 et tourne dans le sens négatif; lorsqu'il a tourné de 2π , il se trouve dans F_1 , il a donc traversé tout d'abord une ligne Γ_p allant à l'infini entre E'_1 et E'_2 . On montre comme ci-dessus que $p=2$; donc γ_2 joint A_2 à B_2 ; Γ_2 , qui correspond à L_2 , joint A_2 à l'infini en passant entre E'_1

Fig. 9.



et E'_2 (*fig. 9*). Lorsque m a franchi L_2 , il est arrivé dans un nouveau feuillet, F_q , puis lorsque v passe par la valeur $v_1 - 2\pi$, m traverse L_1 ou se trouve projeté sur L_1 , il peut changer de feuillet ou ne pas changer, mais il reste alors dans un même feuillet tant que v reste supérieur à -3π , or m traverse alors E'_1 et E_1 , m se trouve dans F_1 , et, d'après le n° 10, il y reste tant qu'il n'atteint pas de nouveau L_1 . À partir de L_2 , v a alors varié de $2\pi + v_2 - v_1 > 2\pi$; il y a eu changement de feuillet lorsque m a franchi L_1 , il a pénétré dans F_1 . Il s'ensuit que, lorsque m était entre L_1 et L_2 , il était dans F_0 ; que la seconde ligne Γ'_1 , $v=v_1$, joignant A_1 à l'infini passe entre Γ_2 et E'_1 ; qu'une ligne γ'_2 , $v=v_2$, joint A_2 à O ; que le domaine compris entre $\Gamma_2, \gamma'_2, \gamma'_1, \Gamma'_1$, ne contient pas de points A_q .

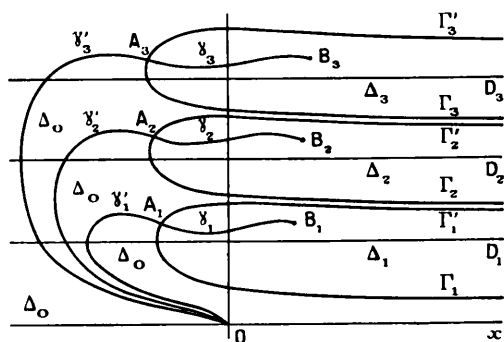
Le feuillet F_1 ne contient sur sa frontière que le point critique W_1 , la traversée de L_1 fait passer de F_1 à F_0 . À F_1 correspond le domaine d'univalence Δ_1 compris entre Γ_1 et Γ'_1 .

Recommençant le raisonnement avec B_3 et E_3 , on achève de déterminer le feuillet F_2 ; sa frontière ne renferme que le point critique W_2 , la traversée de L_2 fait passer de F_2 à F_0 ; dans le plan des z il lui corres-

pond un domaine Δ_2 limité par Γ_2 et par une courbe Γ'_2 issue de A_2 et allant à l'infini entre E'_2 et E'_1 ; A_2 est joint à O par une courbe γ'_2 .

Et ainsi de suite, de proche en proche, pour n positif. On définit une suite de domaines Δ_n , $n > 0$, extérieurs les uns aux autres, correspondant aux F_n ; à l'extérieur des Δ_n on est dans un domaine Δ_0 correspondant à la moitié de F_0 . On complète par symétrie. L'aspect est celui de la figure 10; il est en apparence le même que dans le cas

Fig. 10.



de $f_1(z)$ en ce qui concerne les frontières des Δ_n , mais ici, les lignes γ'_n aboutissent en O . Sur la surface de Riemann, chaque feuillet F_n ($n \neq 0$) est rattaché à F_0 seulement, le long de L_n .

III. — Cas de $w = f_3(z) = \frac{e^z - 1}{z} + 1$.

12. Les zéros z_n de $f'_3(z)$, leurs images A_n sont toujours les mêmes; les points critiques W_n de la fonction inverse $z = \varphi_3(w)$ se déduisent de ceux de $\varphi_1(z)$ par la translation 1, leur module est supérieur à 1; leurs affixes sont

$$w_n = \frac{2 - z_n}{1 - z_n}.$$

Pour n positif, les arguments ν_n sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On a

$$\tan \nu_n = \frac{y_n}{(2 - x_n)(1 - x_n) + y_n^2}.$$

Eu égard à l'équation (3), l'étude de ν_n est ramenée à celle de la

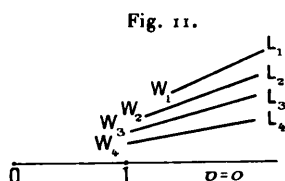
fonction

$$\frac{e^{-2x} - (x-1)^2}{[e^{-2x} - x + 1]^2};$$

le numérateur de la dérivée a le signe de

$$e^{-2x} + 1 - 2(x-1)^2,$$

qui est positif si $x < -1$. Lorsque n croît à partir de 1, v_n décroît et tend vers zéro. Les W_n et les lignes de passage L_n ont l'aspect de la figure 11.



Les zéros sont situés sur les arcs de courbe appelés E'_n au n° 9, mais sur E'_n , le point zéro C_n est au-dessous de D_n ; l'argument est zéro sur l'arc allant de C_n à H_n puis à l'infini, nous appellerons cet arc G_n , et G'_n l'arc sur lequel $v = -\pi (\equiv \pi)$. Si z''_n est l'affixe de C_n , nous appellerons F_n le feuillet de la surface de Riemann sur lequel $\varphi_3(0) = z''_n$. $\omega = f_3(z)$ représente le domaine limité par G_n et G'_n sur la portion de F_n sur laquelle $-\pi < v < 0$.

13. Sur Ox , $f_3(x)$ croît de 1 à ∞ lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, v sera nul à l'infini, à gauche.

I. Sur Oy , $y > 0$, on a

$$\operatorname{tang} v = \frac{1 - \cos y}{y + \sin y};$$

le numérateur de la dérivée de $\operatorname{tang} v$ est

$$y \sin y.$$

Il s'ensuit que, lorsque y croît de $2n\pi$ à $(2n+1)\pi$, $n = 0, 1, \dots$, v croît de 0 à

$$\omega'_n = \operatorname{arctang} \frac{2}{2n\pi + \pi},$$

puis, lorsque y croît de $(2n+1)\pi$ à $2(n+1)\pi$, v décroît de ω'_n à zéro.

La courbe $v = \omega'_{n-1}$ issue de C_n est donc tangente à Oy au point Q_n d'ordonnée $(2n-1)\pi$, nous l'appellerons G''_n . Le domaine S_n limité par G_n et G''_n est représenté par $f_3(z)$ sur l'angle $\omega'_{n-1} - 2\pi < v < 0$ qui appartient au feuillet F_n .

II. Pour $y = 2n\pi$, $n > 0$,

$$\text{tang } v = \frac{2\pi n(1 - e^{-x})}{(e^x - 1 + x)x + 4\pi^2 n^2}.$$

Le dénominateur de cette expression est toujours positif, le numérateur de la dérivée a le signe de

$$\tau = e^x - x^2 + 2x - 2 - 4\pi^2 n^2 + e^{-x}(1 - 2x),$$

et

$$\tau'' = e^x - 2 + (5 - 2x)e^{-x}$$

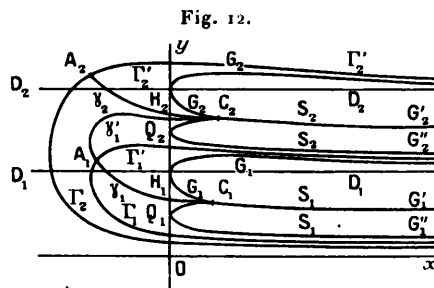
est toujours positif. On en déduit que τ a deux racines, une positive et une négative, et que, lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, v croît d'abord, passe par un maximum inférieur à $\frac{\pi}{2}$, puis décroît jusqu'à zéro (pour $x = 0$) et jusqu'à un certain minimum, enfin croît de nouveau jusqu'à zéro.

Ainsi, dans la partie de D_n extérieure à S_n , $x < 0$, v a un seul maximum compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

14. Procédons d'abord comme au n° 10. Le point m tourne sur la surface de Riemann, dans le sens négatif, à partir d'un point m_0 , $v = 0$, pris dans F_1 ; le point correspondant M part de M_0 sur G_1 . M ne peut pas arriver sur Ox sans être sorti de F_1 , puisque Ox , ligne $v = 0$, ne passe pas par C_1 . Le point m rencontre donc une première ligne L_p , et, à l'angle $v_p - 2\pi < v < 0$ correspond le domaine limité par G_1 , par une ligne γ_p joignant C_1 à A_p , et par une ligne Γ_p qui va de A_p à l'infini en passant entre G''_1 et Ox ; dans ce domaine ne se trouve aucun point A_q , $q \neq p$. Il s'ensuit que $p = 1$. Sinon, A_1 serait à droite de γ_p ou à gauche de Γ_p , ce qui est impossible pour des raisons analogues à celles du n° 10. Donc, W_1 est sur la frontière de F_1 ; une ligne γ_1 , $v = v_1$, joint C_1 à A_1 , une ligne Γ_1 joint C_1 à l'infini en passant entre Ox et G''_1 .

Si m tourne à partir de m_0 dans le sens positif, M s'éloigne de Ox , il arrive sur G_2'' , donc m est sorti de F_1 . Il existe donc une ligne Γ_p qui va d'un certain point A_p à l'infini en passant entre G_1 et G_2'' et une ligne γ_p qui joint A_p à C_1 ; le domaine limité par γ_p , Γ_p et G_1 ne contient pas de points A_q , $q \neq p$. On a $p = 1$. Sinon, le point A_1 serait dans un domaine limité par γ_p , D_1 et D_2 , et les deux lignes Γ'_1 et γ'_1 issues de A_1 ne pourraient traverser ni D_1 ni D_2 . Ainsi, $p = 1$; la ligne Γ'_1 joint C_1 à l'infini en passant entre G_1 et G_2'' ; le domaine Δ_1 , qui contient C_1 et qui est limité par Γ_1 et Γ'_1 , correspond à F_1 ; la frontière de F_1 ne contient que le point critique W_1 .

On voit de même que, si m part de m_2 , M partant de M_2 sur G_2 , et si m tourne dans le sens négatif, il sortira de F_2 , il traversera tout d'abord une ligne L_p ; il existe une ligne Γ_p qui va de A_p à l'infini en passant entre G_1 et G_2'' , et une ligne γ_p qui joint A_p à C_2 . Or, sur le segment $H_1 Q_2$, entre Q_2 et le point situé sur Γ'_1 , en lequel $v = v_1$, on a $v > v_1$; il faut donc que $p = 1$. La ligne γ'_1 , $v = v_1$, issue de A_1 , aboutit en C_2 ; la ligne L_1 fait passer du feuillet F_1 au feuillet F_2 . Audessous de Γ_1 , on est d'abord dans F_2 , et l'on peut recommencer le raisonnement du début : il existe une ligne γ_p qui joint C_2 à A_p et une ligne Γ_p qui va de A_p à l'infini en passant en Γ_1 et Ox . On montre que $p = 2$, puis on achève de définir F_2 et le domaine correspondant. On a l'aspect de la figure 12.



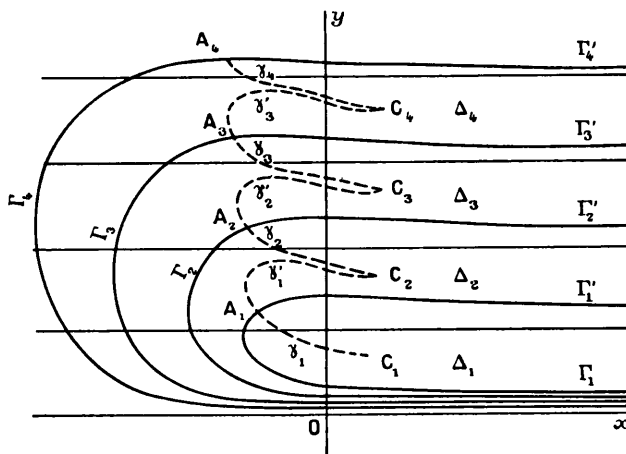
On continue de proche en proche. On voit que γ_1 et Γ_1 coupent D_1 en un seul point; γ'_1 et Γ'_1 ne coupent pas D_1 ; γ_1 et Γ'_1 ne coupent pas D_2 ; mais l'une ou l'autre des lignes Γ_1 , γ'_1 coupe peut-être D_2 , etc. La ramification de la surface de Riemann est donc la suivante :

F_1 ne contient que le point de ramification W_1 , on passe à travers L_1

de F_1 à F_2 ; la frontière de F_2 est formée de L_1 et L_2 , lorsqu'on traverse L_2 on passe à F_3 ; d'une façon générale la frontière de F_n ($n > 1$) est formée de L_{n-1} et L_n , la traversée de L_n conduit de F_n à F_{n+1} . Même résultat pour les valeurs négatives de n . Pour passer d'un point d'un feuillet à indice positif à un point d'un feuillet à indice négatif, il faut traverser une double infinité de feuillets. *La division est impropre.*

Dans le plan des z , chaque domaine d'univalence Δ_n , $n > 0$, s'insère

Fig. 13.



dans le suivant Δ_{n+1} et englobe les précédents. Résultat analogue pour $n < 0$. L'axe Ox n'appartient à aucun de ces domaines, ni à leurs frontières, ses points sont points limites des frontières, on a l'aspect donné dans la figure 13.