JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. BRELOT

Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 319-337.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_319_0>

Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel;

PAR M. BRELOT.

I. — Introduction.

1. Bien que la théorie moderne du potentiel soit déjà fort développée, il reste encore, même dans le cas classique, des points assez obscurs dont quelques-uns vont être ici un peu approfondis. Les recherches disparates sur les points irréguliers ne semblent pas avoir atteint un stade de clarté définitive, et je vais reprendre ici la question en faisant rentrer l'irrégularité et l'instabilité dans une notion nouvelle, celle d'ensemble effilé, qu'il paraît d'ailleurs utile d'isoler dans l'étude locale des fonctions sous-harmoniques.

J'avais déjà remarqué ([1]) l'intérêt dans le plan du rabattement circulaire de masses >0 autour d'un point O sur une demi-droite issue de O; car cela diminue les distances mutuelles, donc augmente le potentiel au point rabattu (tout en le conservant en O). Cela m'amène à expliciter plus généralement quelques propriétés presque immédiates des transformations continues, majorant ou minorant les distances.

En revenant alors à la notion d'ensemble effilé, on peut en éclairer le caractère topologique et reprendre pour la perfectionner et la mieux comprendre, la propriété *spécialement plane* de Lebesgue, qu'un point frontière irrégulier O d'un ensemble ouvert Ω peut être entouré de

([1]) BRELOT, *Bull. Soc. royale des Sc. de Liège*, juin 1939.

courbes de Jordan arbitrairement petites tracées sur Ω, et même (Beurling) de circonférences de centre O.

Je me placerai dans l'espace euclidien à $n \geqq 2$ dimensions, en me limitant au potentiel ordinaire newtonien ou logarithmique, mais on apercevra à divers points de vue des extensions possibles [1].

II. — Notions préliminaires.

2. Capacité [2]. — Pour une plus grande analogie du plan et de l'espace, on se placera pour le plan, sauf indication contraire, exclusivement dans un disque circulaire Γ de rayon R. On posera alors, dans le plan,

$$\varphi(P, Q) = \log \frac{D}{PQ} \qquad (D > 2R),$$

et dans l'espace à $n \geqq 2$ dimensions

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{\overline{PQ}^{n-2}}.$$

Ainsi $\varphi > 0$.

Considérons sur un ensemble *borné* E, une distribution de masses > 0, c'est-à-dire une fonction additive $\geqq 0$ d'ensemble, définissant donc une certaine mesurabilité (μ), telle que : 1° les ensembles boréliens soient mesurables (μ); 2° E soit mesurable (μ); 3° $\mu(E) = 1$ et $\mu(CE) = 0$; c'est-à-dire que la masse totale, égale à 1, est portée par E. Il y correspond un potentiel

$$v(P) = \int \varphi(P, Q)\, d\mu_Q > 0$$

de borne supérieure V et une intégrale d'énergie

$$W = \int v(P)\, d\mu_P > 0.$$

On sait, d'après De la Vallée Poussin-Frostman, que pour les μ

(1) L'essentiel du présent travail a été résumé dans une Note aux *Comptes rendus* (décembre 1939).

(2) *Voir* surtout la thèse de Frostman (Lund, 1935).

précédents, V et W admettent la même borne inférieure, finie ou non, soit $\mathcal{J} > 0$. $\frac{1}{\mathcal{J}}$ sera appelé la *capacité* $\mathcal{C}(E)$, d'ailleurs $\geqq 0$, de E.

Dans le plan on peut introduire, d'ailleurs directement,

$$K = \mathcal{J} - \log D$$

indépendant de Γ et D, et l'on appelle e^{-k} la *capacité logarithmique* $\mathcal{C}_l$ de E. Noter que

$$\mathcal{C}_l = D e^{-\frac{1}{\mathcal{C}}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{\log D - \log \mathcal{C}_l}.$$

Pour plus d'uniformité on ne se servira généralemenl que de $\mathcal{C}$.

Rappelons quelques propriétés essentielles de $\mathcal{C}(E)$:

a. Si

$$E_1 \subset E_2, \qquad \mathcal{C}(E_1) \leqq \mathcal{C}(E_2);$$

si les E_n sont boréliens,

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_1^\infty E_n\right) \leqq \sum_1^\infty \mathcal{C}(E_n).$$

b. $\mathcal{C}(E)$ est la borne supérieure des capacités des sous-ensembles fermés de E.

c. Si E est fermé, $\mathcal{C}(E)$ est la borne inférieure des capacités des ensembles ouverts (sur Γ, dans le plan) contenant E.

d. Si E est fermé, considérons pour les systèmes de n points sur E

$$A_n = \min \sum_{i \neq j} \varphi(P_i, P_j).$$

On démontre que

$$\frac{A_n}{n^2} \to \mathcal{J} \qquad (n\, \infty).$$

On a appelé $\lim \frac{n^2}{A_n}$ le diamètre transfini de E, qui vaut donc $\mathcal{C}(E)$ (*voir* Fekete-Polya-Szegö-Frostman).

e. Si E fermé est de capacité nulle, on peut y distribuer des masses >0 de façon que le potentiel soit $+\infty$ sur E et fini ailleurs (Evans) ([1]).

Remarque. — La capacité de l'ensemble des points M tels que

$$\varphi(O, M) \geqq x \qquad \text{vaut } \frac{1}{x} \quad ([2]).$$

Enfin, on appellera *capacité extérieure* ([3]) de E, notée $\overline{\mathcal{C}}(E)$, la borne inférieure des capacités des ensembles ouverts (sur Γ, dans le cas plan) contenant E. Noter que si E est ouvert ou fermé $\overline{\mathcal{C}}(E) = \mathcal{C}(E)$ et que $\overline{\mathcal{C}}$ possède aussi les propriétés (a) même pour E_n quelconques.

3. Régularité. — Considérons dans l'espace ou plan entier un ensemble ouvert Ω et un point frontière O. O est dit régulier pour Ω et aussi pour le complémentaire, fermé, s'il existe sur l'intersection de Ω et d'un voisinage de O une fonction harmonique >0 tendant vers zéro quand $M \to O$. Sinon irrégulier.

Prenons alors un ensemble borné fermé E (complètement intérieur à Γ dans le plan). On sait (Evans) que l'ensemble des points frontière irréguliers est de capacité nulle.

Ajoutons une propriété *caractéristique* de la régularité, assez nouvelle sous la forme suivante :

Théorème A. — *Pour que le point frontière* O *de* E *fermé soit irrégulier, il faut et il suffit* (a) *qu'il soit isolé ou sinon* (b) *qu'il existe au voisinage de* O *une distribution de masses* >0 *dont le potentiel* v *soit tel que*

$$v(O) > \text{p.p.l}\, v(M) \qquad \text{pour } [M \to O,\ M \in E \cap \complement O] \quad ([4]),$$

autrement dit qu'il existe au voisinage de O une fonction sous-harmo-

---

([1]) Evans, *Monatsh. für math. u. Physik*, Bd. 43, 1936.

([2]) Dans le cas du plan, O est supposé *intérieur* à Γ et x assez grand.

([3]) *Voir* ma Note aux *Comptes rendus* précitée et, indépendamment, un article de A. F. Monna (*Proc. Kon. Ned. Akad.*, Amsterdam, vol. 43, 1940, p. 84).

([4]) Cela signifie la plus petite limite de $v(M)$ quand M tend vers O en restant sur l'intersection de E et du complémentaire du point O.

nique u telle que

$$u(O) > \text{p.g.l}\, u(M) \qquad \text{pour} \quad [M \to O,\ M \in E \cap CO].$$

Une forme équivalente de (b) *est qu'il existe sur* E (1) *une distribution de masses* > 0 *dont le potentiel satisfait à la même condition en* O, ce qui a l'avantage topologique de ne faire intervenir que E dans l'espace. En effet : (α). Supposons O régulier. Il est immédiat qu'il n'est pas isolé. Soit alors u sous-harmonique quelconque au voisinage de O et voyons que

$$u(O) = \text{p.g.l}\, u(M) \qquad \text{pour} \quad [M \to O,\ M \in E \cap CO].$$

C'est là une proposition de De la Vallée Poussin (2), qui rentre dans le théorème suivant, que j'ai donné récemment (3).

Soient u sous-harmonique dans Ω ouvert quelconque, $L_P u$ sa p.g.l. au point frontière P quand M sur Ω tend vers P. Alors si O est régulier et si $L_O u < +\infty$

$$L_O u = \text{p.g.l.}\, L_P u \qquad \text{pour} \quad [P \neq O,\ P \to O].$$

(β). Supposons O irrégulier et non isolé, montrons qu'on peut trouver une charge > 0 sur E de potentiel v tel que

$$v(O) < \text{p.p.l.}\, v(M) \qquad \text{pour} \quad [M \to O,\ M \in E \cap CO].$$

1° E est de capacité nulle au voisinage de O. Alors soit γ_n l'intersphère $\left(\frac{1}{n+1} \leqq OM \leqq \frac{1}{n}\right)$. On peut, pour n assez grand, charger $E \cap \gamma_n$ de façon que le potentiel y vaille $+\infty$, et que la charge totale et le potentiel en O soient moindres que $\frac{1}{n^2}$. En sommant ces distributions on obtient une charge finie de potentiel fini en O et $+\infty$ sur $E \cap CO$ au voisinage de O, ce qui répond à la question.

---

(1) Et même sur sa frontière, comme le montre la démonstration qui suit.

(2) De la Vallée Poussin, *Bull. Ac. royale des Sc. de Belgique,* juin 1938, p. 384.

(3) Voir *Bull. Soc. royale des Sc. de Liége,* oct. 1939, p. 469, où l'on trouvera un énoncé amélioré. Cet ordre de question est repris dans un article à l'impression au *Bull. des Sc. math.*

2° E n'est pas de capacité nulle en O, donc O est limite de points frontière réguliers. Soit alors Σ un domaine sphérique assez petit de centre O et chargeons l'ensemble ouvert $\Delta = \Sigma \cap CE$ par la « distribution-mesure », valant pour tout ensemble borélien sa mesure ordinaire. Le balayage de Δ, qui peut s'interpréter diversement, diminue effectivement le potentiel aux points frontière irréguliers de Δ (qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$ des points frontière irréguliers de E) donc en particulier en O et conserve le potentiel en tout autre point de $C\Delta$ (1). Ce nouveau potentiel, au contraire du premier, est donc discontinu en O. La nouvelle distribution de masses, qui est sur la frontière de Δ, charge donc E, et cette charge partielle δ donne en O un potentiel fini et strictement inférieur à sa p.p.l. en O sur $E \cap C\mathcal{E}$.

Or $\mathcal{E}$ est réunion dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle; $\mathcal{E} \cap \gamma_n$ aussi. On en déduit un moyen de charger $\mathcal{E}$, de façon que le potentiel soit fini en O et $+\infty$ sur $\mathcal{E} \cap CO$. Si δ' est une telle distribution, $\delta + \delta'$ répond à la question.

4. Stabilité. — De même que le problème de Dirichlet classique pour ensembles ouverts conduit à l'introduction des points irréguliers, le problème analogue pour ensembles fermés (2) demande celle des points instables, dont on peut donner la définition suivante, de caractère également local :

Soit le point frontière O d'un ensemble fermé E (3).

On dit qu'*il est instable* (*sinon stable*) *pour* E *s'il existe au voisinage de* O *une distribution de masses* > 0 *dont le potentiel* v *soit tel que*

$$v(O) < \text{p.p.l.}\, v(M) \qquad \text{pour} \quad [M \to O,\ M \in CE],$$

ou encore une fonction sous harmonique u au voisinage de O telle que

$$u(O) > \text{p.g.l.}\, u(M) \qquad \text{pour} \quad [M \to O,\ M \in CE].$$

(1) *Voir*, par exemple, Brelot, *Bull. Ac. royale des Sc. de Belgique*, mars 1939.

(2) *Voir*, sur ce sujet, Brelot, *Bull. Soc. des Sc. math.*, mars-avril 1939, où, l'on trouvera sur la stabilité une étude (dont j'extrais ici quelques résultats) que j'ai complétée dans ma Note précitée de l'*Ac. royale de Belgique*, mars 1939.

(3) Supposé, dans le cas plan, complètement intérieur à Γ, comme dans la suite en cas analogue.

On démontre que *cela équivaut à l'existence sur* E *seul d'une distribution de masses* $>$ o *dont le potentiel* v *satisfait à la même condition.*

Applications. — Si u est sous-harmonique au voisinage d'un point O et finie en O, l'ensemble des points où $u(M) \geqq u(O) - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ (réduit à son intersection avec un voisinage fermé assez petit de O) est un ensemble fermé admettant O comme un point intérieur ou point frontière instable.

D'après cela, soit pour E fermé un point-frontière non isolé irrégulier O.

a. Il existe F fermé rencontrant E seulement en O instable pour F.

b. Il existe sur CE une distribution de masses $>$ o à potentiel v tel que

$$v(O) < \underset{M \to O,\ M \in E}{\text{p. p. l.}}\ v(M).$$

Il est important de signaler que l'ensemble des points frontière instables peut être de capacité $\neq 0$ [1].

5. Critères du type de Wiener. — Soit le point frontière O de l'ensemble fermé E. Le critère de régularité bien connu de Wiener [2] se met immédiatement sous la forme :

a. Soit γ_n l'ensemble des points de E satisfaisant à

$$\lambda^n \leqq \varphi(O, M) \leqq \lambda^{n+1} \qquad (\lambda > 1).$$

Alors O est irrégulier ou régulier suivant que la série $\lambda^n \mathcal{C}(\gamma_n)$ converge ou non. On passe aisément de là au critère analogue (qu'on notera *b*) obtenu en remplaçant γ_n par l'ensemble ζ_n des points de E tels que $\lambda_n \leqq \varphi(O, M)$ [3].

---

(1) *Voir* l'exemple de De la Vallée Poussin (*Bull. Ac. royale*, nov. 1938, p. 686) donné dans l'espace ordinaire, mais transposable au plan comme aux espaces supérieurs.

(2) A part le travail original de Wiener (*Journ. of the Mass. Inst. of Technology*, vol. III, n° 3, 1924); *voir* surtout De la Vallée Poussin (*Bull. Ac. royale de Belgique*, nov. 1938, p. 672).

(3) *Voir* Kellog-Vasilesco, *Am. Journ. of Math.*, oct. 1929, p. 515.

On obtient alors immédiatement la forme intégrale [1].

c. Si δ_x est l'ensemble des points de E tel que $\varphi(O, M) \geqq x$, O est irrégulier ou régulier suivant que $\int^{+\infty} \mathcal{C}(\delta_x)\, dx$ est fini ou non.

Parallèlement on connaît un critère analogue de stabilité [2], qu'on peut écrire :

a'. Soit γ'_n l'ensemble des points de CE tels que

$$\lambda^n \leqq \varphi(O, M) \leqq \lambda^{n+1} \qquad (\lambda > 1).$$

Alors O est instable ou stable suivant que la série $\lambda^n \mathcal{C}(\gamma'_n)$ converge ou non. On en déduit de même un critère *b'* (analogue à *b*), puis la forme intégrale :

c'. Soit δ'_x l'ensemble de CE tels que $\varphi(O, M) \geqq x$. Alors O est instable ou stable suivant que $\int^{+\infty} \mathcal{C}(\delta'_x)\, dx$ est fini ou non.

Remarque. — Il est aisé de voir qu'on obtient des critères respectivement équivalents à (*b*), (*c*), (*b'*), (*c'*), en supprimant le signe d'égalité dans les énoncés. On verra ensuite qu'on peut dans (*a*) et (*a'*) ôter l'*un* des signes d'égalité dans la double inégalité. On peut même ôter les deux dans (*a'*) [3] [mais pas dans (*a*)].

---

(1) *Voir* Kellog-Vasilesco (*loc. cit.*), et pour une obtention directe de la forme intégrale, Frostman (*Kungl. Fys. Sällsk. Lund. Förh.*, Bd. 9, n° 2).

(2) *Voir* mon article (*Bull. Sc. math.*, mars-avril 1939), où j'adapte aux hypothèses du texte, le critère de Keldych-Lavrentieff (*Bull. Ac. Sc. U. R. S. S.*, 1937, p. 551). *Voir* aussi De la Vallée Poussin (*Bull. Ac. Royale des Sc. de Belgique*, nov. 1938), avec une autre définition de base.

(3) Ce point plus difficile résulte aisément de ce qu'un ensemble ouvert borné dont les points frontière sont stables pour le complémentaire a même capacité que son adhérence (*voir* De la Vallée Poussin, *Bull. Ac. royale des Sc.*, nov. 1938, p. 685-6; valable dans nos hypothèses). Quant à cette forme améliorée de (*a'*), elle a été donnée pour l'adhérence d'un domaine, par Keldych-Lavrentieff (*loc. cit.*) et Keldych (*C. R. Ac. Sc. U. R. S. S.*, 1938, p. 315); *voir* aussi M. Inoue (*Proc. Imp. Ac. Jap.*, t. 14, 1938, p. 276).

III. — La notion d'ensemble effilé.

6. Un ensemble E quelconque sera dit *effilé au point* O (¹) (appartenant ou non à E).

a. Si O est point isolé de $E \cup O$.

b. Sinon, s'il existe une distribution de masses > 0 au voisinage de O, de potentiel v tel que

$$v(O) < \underset{M \to O,\ M \in E \cap CO,}{\text{p. p. l.}}\, v(M)$$

autrement dit, s'il existe une fonction sous-harmonique u au voisinage de O telle que

$$u(O) > \underset{M \to O,\ M \in E \cap CO.}{\text{p. g. l.}}\, u(M)$$

L'intérêt de cette définition est justifié par le théorème immédiat suivant :

Théorème. — *Soit le point frontière* O *de* E *fermé. Pour qu'il soit irrégulier* (*instable*) *il faut et il suffit que* E (*respectivement* CE) *soit effilé en* O.

Propriétés immédiates. — 1° Si E est effilé en O, O est point extérieur ou point frontière de E.

2° Si E est effilé en O, tout sous-ensemble l'est aussi.

3° La réunion finie d'ensembles effilés en O est un ensemble effilé en O. Donc un ensemble et son complémentaire ne peuvent être effilés au même point.

Théorème. — *Si* E *est effilé en* O, *il existe un ensemble ouvert* Ω *effilé en* O *tel que* $\Omega \cup O \supset E$.

C'est évident dans le cas (*a*). Soit, dans (*b*), u sous-harmonique dans un voisinage ouvert de O tel que

$$u(O) > \underset{M \to O,\ M \in E \cap CO.}{\text{p. g. l.}}\, u(M)$$

(¹) Dans le cas plan, O sera supposé intérieur à Γ.

Choisissons λ fini, strictement compris entre $u(O)$ et cette p. g. l. L'ensemble ω des points M où $u < \lambda$ est ouvert et contient les points de E distincts de O et assez voisins. Comme O est instable pour $C\omega$, on trouve aussitôt un Ω en agrandissant convenablement ω.

7. Un ensemble E quelconque sera dit *effilé intérieurement en* O, *si tout sous-ensemble fermé* $\mathcal{E}$ *de* $E \cup O$ *est effilé en* O, c'est-à-dire si O est point frontière irrégulier pour $\mathcal{E}$.

Lorsque O appartient à E, cela est exactement la définition générale d'irrégularité d'un point d'un ensemble quelconque selon De la Vallée Poussin ([1]), utilisée avec succès par cet auteur.

Si un ensemble E *ouvert ou fermé est effilé intérieurement en* O, *il est effilé en* O. C'est évident pour E fermé. Le cas de E ouvert a été traité ailleurs ([2]), à une petite différence de langage près, comme application facile des critères (a) et (a') du n° **5**. On va retrouver ce résultat comme conséquence de critères généraux.

8. Critères du type de Wiener. — Soit un ensemble quelconque E et un point O.

α. Si γ_n est l'ensemble des points de E satisfaisant à

$$\lambda^n \leqq \varphi(O, M) \leqq \lambda^{n+1} \quad (\lambda > 1),$$

E *est effilé ou non en* O *suivant que la série* $\lambda^n \mathcal{C}(\gamma_n)$ *converge ou non.*

En effet, si E est effilé en O, soit Ω ouvert effilé en O tel que $\Omega \cup O \supset E$ et γ'_n l'ensemble des points de Ω tels que

$$\lambda^n \leqq \varphi(O, M) \leqq \lambda^{n+1}.$$

Comme O est intérieur ou instable pour $C\Omega$, la série $\lambda^n \mathcal{C}(\gamma'_n)$ converge; donc aussi $\lambda^n \overline{\mathcal{C}}(\gamma_n)$.

Réciproquement, si cette série converge, soit γ''_n ouvert contenant γ_n mais non O et dont la capacité diffère de $\overline{\mathcal{C}}(\gamma_n)$ de moins de $\frac{1}{\lambda^n n^2}$. Alors

([1]) De la Vallée Poussin, *Bull. Ac. royale des Sc. de Belgique*, 1938, p. 377.

([2]) *Voir* Brelot, *Bull. Sc. math.*, mars-avril 1939, dernières lignes du Mémoire.

la réunion des γ''_n est un ensemble ouvert et il est aisé de voir, d'après le critère (a'), que le complémentaire admet O comme point intérieur ou instable. Donc $\bigcup_1^\infty \gamma''_n$ est effilé en O, et par suite E contenu.

β. On passe de là, tout comme plus haut, à la forme intégrale,

Si δ_x est l'ensemble des points de E *tels que* $\varphi(\mathrm{O}, \mathrm{M}) \geqq x$, E *est effilé ou non en* O *suivant que*

$$\int^{+\infty} \overline{\mathcal{C}}(\delta_x)\, dx$$

est fini ou non.

D'autre part :

α_1. *Si γ_n est l'ensemble des points de* E *tels que*

$$\lambda^n \leqq \varphi(\mathrm{O}, \mathrm{M}) \leqq \lambda^{n+1} (\lambda > 1),$$

E *est effilé intérieurement en* O *ou non, suivant que* $\lambda^n \mathcal{C}(\gamma_n)$ *converge ou non.*

Si la série diverge, il est facile de prendre dans les γ_n des ensembles fermés dont la réunion avec O sera un ensemble fermé et non effilé en O. Si E n'est pas effilé intérieurement en O, on conclut à la divergence voulue en introduisant dans E$\bigcup$O un ensemble fermé non effilé en O.

β_1. *Si δ_x est l'ensemble des points de* E *tels que* $\varphi(\mathrm{O}, \mathrm{M}) \geqq x$, E *est effilé intérieurement en* O *ou non suivant que*

$$\int_{+\infty} \mathcal{C}(\delta_x)\, dx$$

est fini ou non [1].

---

[1] Comme pour (β) on passe par l'intermédiaire de critères déduits par remplacement de γ_n par l'ensemble ζ_n des points de E tels que $\varphi(\mathrm{O}, \mathrm{M}) \geqq \lambda^n$. Pour cela on a besoin de ce que

$$\mathcal{C}(\zeta_n) \leqq \mathcal{C}(\zeta_{n+1}) + \mathcal{C}(\gamma_n),$$

qui est vraie bien que ζ_n, ζ_{n+1}, γ_n ne soient pas nécessairement boréliens, comme on le voit en prenant un ensemble fermé quelconque dans ζ_n.

Remarque. — On peut encore *dans* (α) *et* (α_1) *supprimer l'un des signes d'inégalité dans* (β) *et* (β_1), et cela entraîne aussitôt le résultat de la fin du n° **7**.

IV. — Sur les transformations continues en théorie du potentiel.

9. Soit E un ensemble borné fermé et une *application* $\mathcal{T}$ *continue* $(\mathrm{M}, \overset{*}{\mathrm{M}})$ de E sur un ensemble borné fermé $\overset{*}{\mathrm{E}}$, image de E [1]. A toute distribution δ de masses >0 sur E (fonction additive bornée d'ensemble borélien) correspond une distribution analogue $\overset{*}{\delta}$ sur $\overset{*}{\mathrm{E}}$, dite image de δ, par la seule convention que tout ensemble borélien e de $\overset{*}{\mathrm{E}}$ portera une masse égale à celle que δ fait porter à l'*image réciproque* $\overset{-1}{e}$ de e (ensemble, nécessairement borélien, des points de E dont l'image appartient à e).

Théorème B. — *Si l'application* $\mathcal{T}$ *minore les distances* [2] :

a. Le potentiel de $\overset{*}{\delta}$ *en* $\overset{*}{\mathrm{M}}$ *majore celui de* δ *en* M;

b. L'intégrale d'énergie de $\overset{*}{\delta}$ *majore celle de* δ;

c. Si e fermé $\subset$ E, $\overset{*}{e}$ *est fermé et*

$$\mathcal{C}(e) \geqq \mathcal{C}(\overset{*}{e});$$

d. Si $\mathcal{T}$ *transforme tout ensemble ouvert sur* E *en un ensemble ouvert sur* $\overset{*}{\mathrm{E}}$, *on a pour e complètement intérieur à* E

$$\overline{\mathcal{C}}(e) \geqq \mathcal{C}(\overset{*}{e}).$$

Démonstration. — *a.* Le point M étant fixé, considérons la fonc-

---

(1) Il s'agit d'une transformation dans le même espace, d'ailleurs limité à Γ dans le cas du plan.

(2) C'est-à-dire $\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} \geqq \overline{\overset{*}{\mathrm{M}}_1\overset{*}{\mathrm{M}}_2}$, quels que soient M_1, M_2 de E, ce qui entraîne

$$\varphi(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) \leqq \varphi(\overset{*}{\mathrm{M}}_1, \overset{*}{\mathrm{M}}_2).$$

tion $\varphi_n(P)$ égale à $\varphi(M, P)$ lorsque celle-ci est $\leqq n$ et égale à n lorsque celle-ci est $> n$. Définissons de même $\psi_n(P)$ à partir de $\varphi\left(\overset{*}{M}, P\right)$. On se ramène à voir que

$$\int_E \varphi_n(P)\, d\delta_P \leqq \int_{\overset{*}{E}} \psi_n(P)\, d\overset{*}{\delta}_P,$$

ce que nous allons faire pour n fixé, en remarquant que

$$\varphi_n(P) \geqq \psi_n\left(\overset{*}{P}\right).$$

Introduisons l'échelle croissante

$$l_0 = 0, \qquad l_1, \qquad \ldots, \qquad l_p > \varphi_n(P)$$

dans E. Soient α_i le sous-ensemble (borélien) de E où $l_i \leqq \varphi_n(P) < l_{i+1}$ et β_i la borne inférieure de $\psi_n(P)$ dans $\overset{*}{\alpha}_i$ (borélien), puis la distribution δ_i sur E issue par la transformation des seules masses de δ sur α_i. Il vient

$$\delta_i\left(\overset{*}{\alpha}_i\right) = \delta(\alpha_i) \qquad \text{et} \qquad \overset{*}{\delta} = \Sigma\, \delta_i,$$

$$\Sigma\, l_i\, \delta(\alpha_i) \leqq \Sigma\, \beta_i \delta_i\left(\overset{*}{\alpha}_i\right) \leqq \Sigma \int_{\overset{*}{\alpha}_i} \psi_n(P)\, d(\delta_i)_P = \int_{\overset{*}{E}} \psi_n(P)\, d\overset{*}{\delta}_P.$$

On conclut en remarquant que le premier Σ est pour une échelle convenable arbitrairement voisin de

$$\int_E \varphi_n(P)\, d\delta_P.$$

b. A partir de là et par le même raisonnement [1], on démontre l'inégalité des intégrales d'énergie.

c. C'est immédiat, puisque e et $\overset{*}{e}$ sont fermés, en utilisant le diamètre transfini.

Corollaire. — Si e quelconque est contenu dans $\overset{*}{E}$

$$\mathcal{C}(e) \leqq \mathcal{C}\left(\overset{-1}{e}\right).$$

---

[1] On pourrait, pour la comparaison des potentiels, donner un raisonnement plus simple en profitant de la continuité de $\varphi_n(P)$.

d. Soit f un ensemble fermé dans $\overset{*}{e}$, ω un ensemble ouvert contenu dans E et contenant e. En considérant une suite d'ensembles fermés croissants de limite ω, on peut trouver dans ω un ensemble fermé $\mathcal{F}$, dont l'image contienne f. De

$$\mathcal{C}(\omega) \geqq \mathcal{C}(\mathcal{F}) \geqq \mathcal{C}(\overset{*}{\mathcal{F}}) \geqq \mathcal{C}(f),$$

on conclut, grâce à l'arbitraire de f et ω.

Théorème B'. — *Si l'application $\mathcal{T}$ majore les distances, ce qui en fait un homéomorphisme :*

a. Le potentiel de δ *en* M *majore celui de* $\overset{*}{\delta}$ en $\overset{*}{\mathrm{M}}$;

b. L'intégrale d'énergie de δ *majore celle de* $\overset{*}{\delta}$;

c. Si e quelconque est contenu dans E, $\mathcal{C}(e) \leqq \mathcal{C}(\overset{*}{e})$;

d. Si e est complètement intérieur à E, $\overset{*}{e}$ *est complètement intérieur à* $\overset{*}{\mathrm{E}}$, *et* $\overline{\mathcal{C}}(e) \leqq \overline{\mathcal{C}}(\overset{*}{e})$.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la transformation réciproque; (a) et (b) de B fournissent (a) et (b) de B'; le corollaire (c) de B fournit (c) de B'. Quant à (d) de B' on l'obtient en appliquant (c) de B' à un ensemble ouvert contenant $\overset{*}{e}$ et à son image réciproque.

Remarque. — L'homothétie étant facile à étudier directement, on obtiendra divers résultats pour les transformations continues telles que le rapport des distances mutuelles correspondantes est borné d'un côté ou des deux côtés par des nombres finis > 0.

10. Remarques. — 1° La *projection orthogonale* dans le plan sur une droite, dans l'espace ordinaire sur un plan, etc., minore les distances. La proposition (c) de B donne alors la propriété de Evans ([1]) que la projection sur un plan ([2]) d'un ensemble spatial fermé de capacité nulle est encore de capacité nulle dans l'espace.

([1]) Evans, *Transactions*, 1935, vol. 38, p. 232.

([2]) Extension immédiate à la projection oblique.

2° On minore les distances dans le plan, par un *rabattement circulaire* autour d'un point O sur une demi-droite Ox issue de O; l'analogue dans l'espace consisterait à faire correspondre à M l'intersection avec Ox de la surface sphérique de centre O passant par M.

3° *Glissement* particulier : considérons sur la demi-droite Ox un ensemble mesurable $\mathcal{E}$, d'intersection $\mathcal{E}_x$ avec l'intervalle (O, x). A chaque point (x) de Ox faisons correspondre sur Ox le point (x') d'abscisse égale à la mesure linéaire de $\mathcal{E}_x$. Cela définit une transformation continue sur Ox, minorant les distances, immédiatement extensible dans tout espace par conservation des autres coordonnées.

V. — Application aux ensembles effilés.

11. En rapprochant les critères du paragraphe III et les théorèmes B — B′, on obtient aisément, grâce à des homothéties convenables, les résultats suivants (¹).

Théorème C. — *Considérons un homéomorphisme* $(M, \overset{*}{M})$ *transformant un voisinage d'un point* $\overset{*}{O}$ *de manière que le rapport de deux distances homologues reste compris entre deux nombres finis* > 0. *Alors un ensemble effilé (ou effilé intérieurement) ou non en* O *devient un ensemble de même nature en* $\overset{*}{O}$.

En détaillant les hypothèses on trouve :

Théorème C_1. — Considérons un homéomorphisme $(M, \overset{*}{M})$, des voisinages des points O, $\overset{*}{O}$ tel que

$$\frac{\overset{*}{M}_1\overset{*}{M}_2}{M_1M_2} > h \text{ fixe} > 0,$$

$$\frac{\overset{*}{O}\overset{*}{M}}{OM} < k \text{ fini} > 0.$$

(¹) Ces résultats rectifient, par une restriction dont on montrerait aisément la nécessité, les énoncés inexacts donnés dans ma Note des *Comptes rendus* (*loc. cit.*), déc. 1939.

Alors un ensemble non effilé (ou non effilé intérieurement) en O devient un ensemble de même nature en $\overset{*}{O}$.

THÉORÈME C_2. — Considérons une transformation continue $(M, \overset{*}{M})$ d'un voisinage fermé E de O telle que :

1° Tout ensemble ouvert sur E devienne un ensemble ouvert sur $\overset{*}{E}$;

2° $$\frac{\overset{*}{M}_1\overset{*}{M}_2}{M_1M_2} < h \text{ fini} > 0;$$

3° $$\frac{\overset{*}{O}\overset{*}{M}}{OM} > k \text{ fixe} > 0.$$

Alors un ensemble effilé en O devient un ensemble effilé intérieurement en $\overset{*}{O}$.

12. Approfondissons *dans le plan la nature topologique de l'ensemble effilé* E *en* O. Faisons sur une demi-droite Ox le rabattement circulaire transformant E en un ensemble $\mathcal{E}$ de Ox. D'après $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{E}$ *est effilé intérieurement en* O. En particulier, si E est fermé, O est irrégulier pour $\mathcal{E}$ comme pour E, ce qui résulte aussi, plus directement, des théorèmes (A) et (B, a).

THÉORÈME D. — *Dans le plan, si* E *est effilé au point* O, *il existe des circonférences arbitrairement petites de centre* O *ne rencontrant pas* E.

En effet, $\mathcal{E}$ étant effilé intérieurement en O ne peut, d'après le critère (n° **8**, β_1), contenir de segment $(O < x < a)$ sur Ox [1].

---

[1] On sait que la capacité logarithmique d'un segment ouvert ou fermé de longueur l est $\frac{l}{4}$. De sorte que le segment de Ox tel que $\varphi(O, M) \geqq x$, c'est-à-dire $\log\frac{D}{OM} \geqq x$, est l'intervalle (O, De^{-x}) de capacité

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\log D - \log\frac{D}{4}e^{-x}} = \frac{1}{x - \log 4}.$$

C'est là, lorsque E est fermé, un théorème de Beurling ([1]) améliorant la propriété rappelée dans l'introduction et due en substance à Lebesgue ([2]). Mais pour E même quelconque effilé en O, il est possible de faire *une large extension* en remplaçant la famille des circonférences de centre O par une famille de courbes de Jordan entourant O telle — et ce serait facile à préciser — qu'elle permette de définir un rabattement sur Ox se prêtant à l'application de C_2. D'ailleurs, d'une manière voisine, on peut, grâce à C, faire préalablement une déformation homéomorphe, puis transformer les circonférences relatives à l'ensemble déformé.

13. Approfondissons plutôt *la distribution des circonférences* du théorème D, c'est-à-dire *la nature du rabattement circulaire $\mathcal{E}$ de* E.

Beurling a établi, pour un point frontière irrégulier O d'un ensemble *fermé* E, une propriété qui revient aussitôt à exprimer que pour le rabattement circulaire $\mathcal{E}$ sur la demi-droite Ox l'intégrale $\int_{\mathcal{E}} \frac{dx}{x}$ est finie ([3]). On observera que si $\lambda(x)$ est la mesure de l'intersection de $\mathcal{E}$ et de l'intervalle (O, x), cela équivaut à dire que $\int_0^{\varepsilon} \frac{\lambda(x)}{x^2} dx$ est fini. Nous allons voir que c'est une pure conséquence du critère de Wiener relatif à $\mathcal{E}$ en O.

Nous allons même, en améliorant beaucoup ce résultat, *traiter la question de* E *quelconque effilé en* O, ou mieux encore, *étudier dans le plan un ensemble quelconque $\mathcal{E}$ de Ox, effilé intérieurement en* O.

Lemme. — Pour tout ensemble linéaire borné, la capacité logarithmique majore le quart de la mesure linéaire *intérieure*.

Il suffit de le voir dans le cas d'un ensemble *fermé*. Mais alors si l'on fait le glissement précisé au n° **10**, on diminue la capacité $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}_l$ et le nouvel ensemble est un segment de capacité logarithmique égale au quart de sa longueur, c'est-à-dire de la mesure de l'ensemble initial.

([1]) BEURLING, *Thèse* (Upsal, 1933, p. 71).

([2]) LEBESGUE, *Rend. del Circolo mat. di Palermo*, 1907. *Voir* aussi KELLOG, *Roundations of potential theory* (Berlin, 1929).

([3]) BEURLING, *Thèse* (*loc. cit.*, p. 66).

Soit alors δ_x l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ tels que

$$\varphi(\mathrm{O}, \mathrm{M}) = \log \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{OM}} \geqq x,$$

c'est-à-dire l'intervalle $(\mathrm{O}, \mathrm{D}e^{-x})$. *Dire que* $\mathcal{E}$ *est effilé intérieurement en* O, *c'est dire que* $\int^{+\infty} \mathcal{C}(\delta_x)\, dx$ est *fini*, ou

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{\log \mathrm{D} - \log \mathcal{C}_i(\delta_x)} \text{ fini ou encore } \int^{+\infty} \frac{dx}{\log \frac{1}{\mathcal{C}_i(\delta_x)}} \text{ fini.}$$

Or *si* $\lambda(r)$ *est la mesure intérieure de* $\mathcal{E} \cap (0, r)$ on a, d'après le lemme

$$\mathcal{C}_i(\delta_x) \geqq \frac{1}{4}\lambda(\mathrm{D}e^{-x}) \qquad \text{d'où} \qquad \int^{+\infty} \frac{dx}{\log \frac{1}{\lambda(\mathrm{D}e^{-x})}} \text{ fini,}$$

ce qui s'écrit de manière équivalente

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{t \log \frac{1}{\lambda(t)}} \text{ fini ou } \int^{+\infty} \frac{dx}{\log \frac{1}{\lambda(e^{-x})}} \text{ fini,}$$

résultat qui condense des propriétés métriques simples de $\mathcal{E}$.

Selon une remarque que m'a faite M. Dieudonné, on en déduit immédiatement que $\frac{\lambda(r)}{r^{\alpha}} \to 0$ *avec* r, *pour tout exposant fixe* α. En effet, λ est croissante, donc $\frac{1}{\log \frac{1}{\lambda(e^{-x})}}$ décroissante. La convergence de la dernière intégrale entraîne que $\frac{x}{\log \frac{1}{\lambda(e^{-x})}} \to 0$ quand $x \to +\infty$, ce qui équivaut à

$$\frac{\log \frac{1}{\lambda(r)}}{\log \frac{1}{r}} \to +\infty \qquad \text{pour } r \to 0$$

ou

$$\lambda(r) = r^{\mathrm{N}(r)} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{N}(r) \to +\infty,$$

ce qui est une forme équivalente de la proposition annoncée.

On voit alors que le résultat de Beurling n'est qu'un cas très particulier du précédent.

Remarque. — Le complémentaire de $\mathcal{E}$ sur Ox n'est pas dénombrable au voisinage de O. Les circonférences de centre O ne rencontrant pas E sont en infinité *non dénombrable* au voisinage de O, résultat simple déjà suffisant pour certaines applications (1).

---

(1) *Voir* un article à l'impression au *Bull. des Sc. math.*, où j'utilise systématiquement la notion d'ensemble effilé pour approfondir l'allure à la frontière des fonctions sous-harmoniques dans l'espace général et dans le plan.