JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Étude d'un espace à quatre dimensions décomposable en la somme de deux espaces à deux dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 237-260.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_237_0>

Étude d'un espace à quatre dimensions décomposable en la somme de deux espaces à deux dimensions;

PAR BERTRAND **GAMBIER**.

1. INTRODUCTION. — Je dédie cette étude géométrique à M. Borel qui, outre ses travaux de pure analyse, a publié divers travaux de géométrie, en particulier l'appendice au Traité de Géométrie Analytique de Niewenglowski sur la théorie des groupes et le Mémoire couronné sur les déplacements à trajectoires sphériques.

J'ai essayé de m'inspirer des leçons de Darboux et M. Borel, dont j'ai été l'élève, il y a quelque quarante ans. Mobilisé, n'ayant aucun document mathématique sous la main, j'ai consacré quelques instants de loisir à ce travail et je m'attacherai aux résultats plutôt qu'aux démonstrations.

Les droites de l'espace euclidien à trois dimensions sont les éléments générateurs d'un espace à quatre dimensions, que Plücker représente par une quadrique à quatre dimensions immergée dans un espace euclidien à cinq dimensions. Ici je donne une autre représentation sous forme d'un feuillet sphérique double : à chaque droite D correspondent deux points a, α prélevés chacun sur l'un et l'autre feuillet; si une droite D a pour images le couple (a, α) et si (b, β) constituent les images d'une autre droite D_1, *l'égalité des arcs de grand cercle* ab, $\alpha\beta$ *est la condition nécessaire et suffisante de rencontre des deux droites.*

Ce résultat, par rapprochement avec ceux que j'ai obtenus en 1929 au *Journal de Mathématiques* pour les cycles orthogonaux à la sphère $S(x^2+y^2+z^2+1=0)$, montre que l'espace à quatre dimensions engendré par ces cycles est homéomorphe à l'espace réglé, orienté; ensuite la transformation de Sophus Lie étend ces résultats à l'espace engendré par les sphères de l'espace euclidien ordinaire.

2. Espace réglé. — Rapportons l'espace euclidien à un tétraèdre de référence quelconque; soient p_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) les coordonnées plückériennes d'une droite et

$$(1) \qquad p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0,$$

la relation caractéristique liant les coordonnées d'une même droite. Posons

$$(2) \qquad \begin{cases} p_1 + p_4 = P_1, & p_2 + p_5 = P_2, & p_3 + p_6 = P_3, \\ p_1 - p_4 = P_4, & p_2 - p_5 = P_5, & p_3 - p_6 = P_6. \end{cases}$$

La relation (1) devient

$$(3) \qquad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P_4^2 + P_5^2 + P_6^2.$$

D'autre part, on peut profiter de l'homogénéité pour supposer que chaque membre de l'égalité (3) a pour valeur l'unité; autrement dit on remplace P_i par $\dfrac{\varepsilon P_i}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}}$ où ε est soit $+1$ soit -1 (et ne dépend pas de i).

Une fois cela fait, pour ne pas compliquer l'écriture, nous désignerons les coordonnées *normalisées* par P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 et nous avons

$$(4) \qquad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = P_4^2 + P_5^2 + P_6^2 = 1;$$

(P_1, P_2, P_3), (P_4, P_5, P_6) sont les coordonnées respectives de deux points a, α qui décrivent la même sphère $\Sigma(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$; il est commode d'appeler feuillet *romain* celui qui porte les points a, feuillet *grec* celui qui porte les points α, en convenant d'employer toujours les caractères romains et grecs pour distinguer les deux points dont la réunion forme les images d'une même droite; l'espace à quatre dimensions formé par l'ensemble des droites de l'espace euclidien se trouve ainsi remplacé par la somme de deux espaces sphériques à deux dimensions, immergés dans un espace euclidien à trois dimensions.

La droite D indéfinie donne, suivant la détermination adoptée pour ε, soit le couple (a, α), soit le couple (a', α'), où a', α' sont les points diamétralement opposés à a, α respectivement; inversement, à un couple (a, α) correspond une droite indéfinie et une seule.

Considérons maintenant les deux demi-droites opposées D_0, D'_0 portées par D; sur les deux couples (a, a) (a', α') correspondant à D, nous pouvons en choisir un arbitrairement pour l'attribuer à D_0, tandis que l'autre est attribué à D'_0; si (a, α) correspond à D_0, considérons un couple $(\bar{a}, \bar{\alpha})$ où $\bar{a}$ est un point mobile du feuillet romain, partant de a et décrivant tout le feuillet romain, tandis que $\bar{\alpha}$ part de α et décrit tout le feuillet grec; la demi-droite $\overline{D_0}$ sera ainsi parfaitement définie par continuité à partir de la demi-droite D_0 correspondant à la position initiale (a, α); quand $\bar{a}$ arrive en a', pendant que $\bar{\alpha}$ est supposé arriver en même temps en α', la demi-droite $\overline{D_0}$, viendra recouvrir D'_0; *de la sorte notre représentation s'applique à l'espace réglé orienté, et il y a correspondance biunivoque entre une demi-droite d'une part et un couple (a, α) de l'autre.*

La condition de rencontre de deux droites (P, Q) prend une forme remarquable

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 = P_4Q_4 + P_5Q_5 + P_6Q_6. \tag{5}$$

Cette relation exprime que la distance sphérique ab des images romaines a, b est égale à la distance $\alpha\beta$ analogue des images grecques. Pour ce dernier résultat, il n'est pas absolument nécessaire d'avoir normalisé les coordonnées P, Q : le point (P_1, P_2, P_3) serait alors un certain point a, (Q_1, Q_2, Q_3) un point b : de même (P_4, P_5, P_6) serait un certain point α, et (Q_4, Q_5, Q_6) un point β; on aurait $Oa = O\alpha$, $Ob = O\beta$, ces distances Oa, Ob pouvant être quelconques l'une et l'autre; l'égalité $(\widehat{Oa, Ob}) = (\widehat{O\alpha, O\beta})$, où chaque membre est un angle non orienté de deux directions orientées, angle compris entre zéro et π, exprime que les droites se rencontrent.

On peut se demander ce que représentent les coordonnées $(P_1, P_2, P_3, -P_4, -P_5, -P_6)$: on voit aisément que ce sont les coordonnées de la droite D' conjuguée de D relativement à la quadrique

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0;$$

dans ce qui suit, nous supposerons presque toujours que le système de référence est formé de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, de sorte que $t=0$ est le plan de l'infini et que la quadrique annoncée est la sphère $S(x^2+y^2+z^2+1=0)$ qui va jouer un rôle important. Si la droite D a pour équations

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{6}$$

les coordonnées plückériennes sont $(a, b, c, l=cy_0-bz_0, m=az_0-cx_0, n=bx_0-ay_0)$ et la droite D′ est définie par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x_0x+y_0y+z_0z+1&=0,\\ a\,x+b\,y+c\,z\quad&=0,\end{aligned}\right. \tag{7}$$

de sorte que ses coordonnées plückériennes sont (l, m, n, a, b, c) et la proposition annoncée en résulte. Si donc D a pour images soit le couple (a, α), soit le couple (a', α') formé des points diamétralement opposés à a et α, la droite D′ a pour images soit (a, α'), soit (a', α).

Cela posé soient (a, α), (b, β) deux droites sécantes D, D′; on a $ab=\alpha\beta$. Comment obtient-on toutes les droites qui rencontrent à la fois (D, D′)? Ces droites se divisent en deux groupes distincts : celles qui passent par le point (D, D′), celles qui sont contenues dans le plan (D, D′); si (c, γ) sont les images d'une droite en jeu, les triangles sphériques (abc), $(\alpha\beta\gamma)$ sont égaux s'il s'agit d'une droite de la première catégorie, mais le second triangle est égal à un symétrique du premier s'il s'agit d'une droite de la seconde catégorie. Cela se voit aisément par continuité, en remarquant par exemple qu'une droite issue de l'origine a pour coordonnées plückériennes $(a, b, c, 0, 0, 0)$ et que les points images sont confondus avec le point où la droite perce la sphère $\Sigma(x^2+y^2+z^2=1)$.

(On peut, en intercalant ici une parenthèse, profiter de cette remarque pour représenter le déplacement général de l'espace euclidien autour d'un point fixe O par un point de l'espace euclidien, et inversement. En effet, considérons un point M de l'espace euclidien et deux droites quelconques D, D′ de cet espace, issues de M; D a pour images (a, α), D′(b, β) avec $ab=\alpha\beta$; le point M peut servir d'image au déplacement où O reste fixe, pendant que a vient en α et b en β.)

Quand on amène l'arc de grand cercle ab sur l'arc de grand cercle $\alpha\beta$, un point c pris sur le grand cercle ab vient en un point γ de l'arc de grand cercle $\alpha\beta$ et le couple (c, γ) est l'image d'une droite située dans le plan (D, D′) et passant par le point (D, D′).

Remarquons qu'en faisant varier le tétraèdre de référence, une droite *donnée* D a ∞^{15} systèmes possibles de coordonnées plückériennes p_i et par suite ∞^{15} systèmes possibles de coordonnées P_i se déduisant de l'un d'eux par une substitution linéaire reproduisant la forme quadratique

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 - P_4^2 - P_5^2 - P_6^2,$$

et par suite aussi la forme bilinéaire

$$P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 - P_4 Q_4 - P_5 Q_5 - P_6 Q_6.$$

On peut dire que cette substitution linéaire est une substitution orthogonale (de déterminant $+1$ ou -1) effectuée sur les variables P_1, P_2, P_3, iP_4, iP_5, iP_6; quel que soit le système de coordonnées P employé, on peut considérer les points (a, α) introduits précédemment et l'égalité $ab = \alpha\beta$, s'il s'agit de coordonnées normalisées, exprime toujours la condition nécessaire et suffisante de rencontre des droites (a, α), (b, β). On doit remarquer que la substitution linéaire en jeu, appliquée à des coordonnées P_i normalisées ne fournit pas, en général, des coordonnées nouvelles $\overline{P}_i$ normalisées; il n'y a aucune raison pour que $\overline{P}_1^2 + \overline{P}_2^2 + \overline{P}_3^2$ soit égal à l'unité; tout ce que l'on peut dire c'est que, si a, α sont les points (P_1, P_2, P_3), (P_4, P_5, P_6) et de même b, β les points (Q_1, Q_2, Q_3), (Q_4, Q_5, Q_6), les expressions $Oa^2 - O\alpha^2$, $Ob^2 - O\beta^2$, $Oa.Ob - O\alpha.O\beta$, (où $Oa.Ob$ signifie un produit scalaire), se conservent. En coupant les demi-droites Oa, $O\alpha$, Ob, $O\beta$ par la sphère Σ et de même $O\bar{a}$, $O\bar{\alpha}$, ..., on a ainsi ∞^{15} transformations appliquées à un feuillet sphérique double : pour ne pas compliquer les notations, nous avons des couples (a, α), (b, β), ..., portés par le feuillet double Σ; chaque transformation en jeu déduit de a, α un couple $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$, où le point $\bar{a}$ dépend *simultanément* de a et α, pendant que $\bar{\alpha}$ dépend, lui aussi, simultanément de a et α et cette transformation est telle que la différence $\widehat{ab} - \widehat{\alpha\beta}$, où $\widehat{ab}$ et $\widehat{\alpha\beta}$ sont les arcs de grand cercle, inférieurs à une demi-circonférence, conserve sa valeur après la transformation.

Il est important de démontrer que *toute transformation du feuillet double* Σ, *qui conserve la différence* $\widehat{ab} - \widehat{\alpha\beta}$ *quels que soient les deux couples* (a, α), (b, β) *est l'une de celles qui viennent d'être définies.*

On le voit plus aisément en interprétant les opérations faites, non pas comme s'appliquant à la même droite rapportée à des tétraèdres différents, mais comme s'appliquant à un même tétraèdre et aux droites déduites d'une même droite par une certaine transformation dont il s'agit de démontrer que c'est une homographie ou une dualité. Si nous considérons la transformation annoncée du feuillet sphérique double, on voit que tout couple de droites concourantes est remplacé par un couple de droites concourantes et par suite que la transformation annoncée est une homographie ou une dualité de l'espace.

Parmi les ∞^{15} transformations en jeu, il y a lieu de séparer celles qui conservent séparément $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$ et $P_4^2 + P_5^2 + P_6^2$; autrement dit, on exécute sur (P_1, P_2, P_3) une substitution orthogonale et de même sur (P_4, P_5, P_6), ces substitutions étant de déterminant $+1$ ou -1 séparément; par conséquent (a, α) est transformé en $(\overline{a}, \overline{\alpha})$ où $\overline{a}$ ne dépend que de a, et non de α, tandis que $\overline{\alpha}$ ne dépend que de α et non de a; le feuillet sphérique (a) a donc subi une rotation d'amplitude ω autour d'un certain diamètre (ω pouvant être nul), complétée éventuellement par une symétrie autour de O et le feuillet sphérique (α) a subi une transformation de même nature. On peut aussi supposer que $\overline{a}$ ne dépend que de α seul et que $\overline{\alpha}$ ne dépend que de a; cela revient à composer avec les opérations définies à l'instant celle qui consiste à échanger purement et simplement le feuillet romain avec le feuillet grec et inversement. On a ainsi un sous-groupe à six paramètres du groupe des homographies et dualités. Il résultera clairement des paragraphes qui suivent que ce sous-groupe est formé des homographies et dualités particulières qui conservent la sphère S $(x^2+y^2+z^2+1=0)$; il suffit d'adjoindre aux homographies qui conservent S la polarité relative à S; en particulier nous avons vu plus haut que passer de (a, α) à (a, α') revient à effectuer la polarité S; remplacer (a, α) par (a', α') revient à remplacer chaque demi-droite par son opposée.

On voit aisément que les demi-droites (a, α), (b, β) où $b = \alpha$, $\beta = a$, ce qui revient à échanger feuillets romain et grec, sont parallèles et de même sens, tandis que leurs supports sont symétriques par rapport à l'origine.

On démontre sans peine que si, dans le couple $(\bar{a}, \bar{\alpha})$, le point $\bar{a}$ dépend de a seul et non de α, la même circonstance se produit pour $\bar{\alpha}$ qui ne dépend que de α et non de a; cela revient à démontrer que si, dans une substitution orthogonale,

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 + a_{i5}x_5 + a_{i6}x_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

on a

$$\begin{array}{lll} a_{14} = 0, & a_{15} = 0, & a_{16} = 0, \\ a_{24} = 0, & a_{25} = 0, & a_{26} = 0, \\ a_{34} = 0, & a_{35} = 0, & a_{36} = 0; \end{array}$$

on a aussi

$$\begin{array}{lll} a_{41} = 0, & a_{42} = 0, & a_{43} = 0, \\ a_{51} = 0, & a_{52} = 0, & a_{53} = 0, \\ a_{61} = 0, & a_{62} = 0, & a_{63} = 0. \end{array}$$

Cela résulte aussitôt des propriétés des substitutions orthogonales.

Une demi-droite issue de l'origine a ses images, romaine et grecque, confondues avec le point où elle perce la sphère Σ; une droite du plan de l'infini a ses images diamétralement opposées.

Ce qui vient d'être développé, si on le confronte avec le Mémoire déjà cité sur les cycles orthogonaux à la sphère S, montre clairement que l'espace réglé et l'espace des cycles en jeu sont homéomorphes. Nous allons d'ailleurs retrouver directement les résultats relatifs aux cycles, par une méthode différente de celle qui a été développée dans le Mémoire en jeu.

5. Cycles orthogonaux a la sphère S $(x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0)$. — Nous considérons une sphère S de rayon imaginaire pure; nous en prenons le centre, supposé réel, pour origine; le quotient par i du rayon est une longueur réelle, que nous prenons pour unité. Il y a ∞^4 cercles orthogonaux à S; chacun se définit sans imaginaires en remarquant

que le plan du cercle Γ passe par O et que la puissance du point O par rapport à Γ est égale à (-1); ω étant le centre de Γ, le rayon de Γ est donc égal à $\sqrt{1+\overline{O\omega}^2}$.

Il existe deux droites, D et D′, d'ailleurs conjuguées par rapport à S, parfaitement déterminées quand Γ est connu et dont chacune, réciproquement, détermine parfaitement Γ; D′ est l'axe du cercle Γ; si D′ est donnée, le plan de Γ est celui, mené par O, perpendiculairement à D′; ω en résulte, puis Γ. Considérons maintenant deux points m et m' inverses par rapport à S; m et m' sont alignés avec O et $\overline{Om}.\overline{Om'}=-1$; soit μ le milieu du segment mm', puis M l'inverse de μ par rapport à S; on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &2\,\overline{O\mu}=\overline{Om}+\overline{Om'}=-\frac{1}{\overline{Om'}}-\frac{1}{\overline{Om}} \\ &\overline{O\mu}=\frac{-1}{\overline{OM}}\qquad \frac{2}{\overline{OM}}=\frac{1}{\overline{Om}}+\frac{1}{\overline{Om'}}. \end{aligned}\right.$$

Le point M peut donc être défini comme le conjugué de O par rapport au couple mm'; de la sorte, un point m détermine un seul point m', puis un seul point M; mais à un point M correspond un seul point μ, puis deux points m, m' obtenus en portant sur la droite $O\mu$ à partir de μ une longueur $\sqrt{1+\overline{O\mu}^2}$ dans un sens ou l'autre. Ces explications prouvent que si m décrit Γ, le point M décrit la polaire D de Γ par rapport à O et que cette droite D est conjuguée de D′ par rapport à S; la donnée de D donne donc D′, puis Γ d'une façon unique. Nous avons retrouvé pour passer de Γ à D la transformation étudiée par Darboux au tome III de la *Théorie des Surfaces* (§ 846 et suiv.).

Les coordonnées de m étant x, y, z et celles de M(X, Y, Z), on a aisément

$$(2)\quad X=\frac{-2x}{x^2+y^2+z^2-1},\qquad Y=\frac{-2y}{x^2+y^2+z^2-1},\qquad Z=\frac{-2z}{x^2+y^2+z^2-1}.$$

Le calcul se fait aisément en remarquant que μ a pour coordonnées

$$(3)\quad \frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right),\qquad \frac{y}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\qquad \frac{z}{2}\left(1-\frac{1}{x^2+y_2+z^2}\right).$$

Ensuite on a

$$1+X^2+Y^2+Z^2=\left(\frac{x^2+y^2+z^2+1}{x^2+y^2+z^2-1}\right)^2; \tag{4}$$

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}=\frac{1}{1\pm\sqrt{1+X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{5}$$

La transformation qui fait passer de chaque cercle Γ à une droite D, et inversement, peut être améliorée en orientant Γ, car m et m' décrivent alors le cycle Γ dans le même sens et déterminent par suite une orientation sur D; *cette transformation est une transformation ponctuelle*. Comme la droite orientée D peut être représentée par un couple de deux points (a, α), *il en résulte que chaque cycle* Γ *peut lui-même être représenté par un couple* (a, α); la droite D est l'axe d'un cercle Γ' lui aussi orthogonal à S et l'on voit sans peine que les deux cercles Γ et Γ' sont *conjugués*, c'est-à-dire tels que toute sphère menée par l'un coupe l'autre orthogonalement; en effet, quand deux cercles sont conjugués leurs plans sont rectangulaires, leurs centres sont sur la droite d'intersection des deux plans et, si l'on rabat l'un des cercles sur le plan de l'autre, le cercle non rabattu et le cercle rabattu sont orthogonaux; or le centre ω de Γ est sur D', le centre ω' de Γ' est sur D et la corde de Γ (ou Γ') issue de O et perpendiculaire à $O\omega\omega'$ admet le point O pour milieu et a pour longueur 2; dans le rabattement annoncé, on a donc deux cercles, de centres ω, ω' alignés avec O, se coupant en un point P, tel que $\overline{OP}^2=-\overline{O\omega}.\overline{O\omega'}$, ce qui prouve que les deux cercles rabattus sont orthogonaux. De plus, si Γ et Γ_1 sont deux cycles orthogonaux à S, les cycles Γ et Γ_1 sont sécants (et par suite bisécants) si D et D_1 se coupent (car il s'agit d'une transformation ponctuelle); d'autre part, l'angle *cayleyen* de D et D_1 est égal à l'angle *euclidien* des cycles Γ et Γ_1, comme Darboux le montre.

Il est intéressant de situer d'une façon précise les images a, α d'un cycle Γ. Si l'on imagine un déplacement de l'espace euclidien autour de O, le cycle Γ, la droite D et les images a, α participent à ce déplacement euclidien; pour Γ et D c'est évident; or si l'on prend une droite D d'équations $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$, on peut regarder (a, b, c) comme les composantes d'un vecteur porté par D et (l, m, n) comme le moment par rapport à O de ce vecteur : de la sorte (a, b, c, l, m, n) coordonnées plückériennes de la droite, donnent deux vecteurs (a, b, c), (l, m, n) participant au déplacement en jeu; on a posé, pour avoir les images,

$$(6)\qquad \begin{cases} P_1 = a + l & P_2 = b + m & P_3 = c + n, \\ P_4 = a - l & P_5 = b - m & P_4 = c - n, \end{cases}$$

de sorte que les vecteurs (P_1, P_2, P_3), (P_4, P_5, P_6) participent au mouvement en jeu, donc aussi les points a, α dont il est question.

On peut donc, pour simplifier, prendre un cycle Γ situé dans xOy, son centre ω étant sur Ox; posons $\overline{O\omega} = \cot\varphi$; le rayon du cercle est $R = \frac{\pm 1}{\sin\varphi}$; $O\omega' = -\operatorname{tang}\varphi$.

Si l'observateur placé sur Oz, les pieds en O, la tête en z voit le mobile, qui décrit le cycle Γ, tourner autour de lui dans le sens direct, nous considérerons le rayon comme positif, sinon le rayon est négatif; dans ces conditions les formules

$$\overline{O\omega} = \cot\varphi, \qquad R = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad \overline{O\omega'} = -\operatorname{tang}\varphi,$$

déterminent φ à 2π près (et non plus à π près). La droite D a pour équations

$$z = 0, \qquad x = -\operatorname{tang}\varphi,$$

et a pour coordonnées plückériennes $(0, 1, 0, 0, 0, -\operatorname{tang}\varphi)$, de sorte que les coordonnées P_i non normalisées sont

$$(0, 1, -\operatorname{tang}\varphi), \quad (0, 1, \operatorname{tang}\varphi).$$

Les coordonnées P normalisées sont

$$(0, \cos\varphi, -\sin\varphi), \quad (0, \cos\varphi, \sin\varphi).$$

On a ainsi les coordonnées $(0, \cos\varphi, -\sin\varphi)$ de a et $(0, \cos\varphi, \sin\varphi)$ de α; les droites Oa, $O\alpha$ sont dans le plan perpendiculaire à $O\omega$ issu de O; elles sont symétriques par rapport au plan de Γ et font avec ce plan, dans l'un ou l'autre sens, l'angle φ défini par la formule $\cos\varphi = \frac{O\omega}{R}$; on reconnaît la définition des *droites focales* de Γ issues de O. On voit que, remplacer le cycle Γ par le cycle opposé revient à changer R de signe, donc à augmenter φ de π et à remplacer (a, α) par (a', α')

où (a, a') sont diamétralement opposés, ainsi que (α, α'). On peut définir directement les points (a, α) à partir du cercle Γ, supposé d'abord non orienté : les focales issues de O sont construites d'après la règle indiquée; on peut en choisir une comme focale romaine et elle perce Σ en a, a'; α, α' sont respectivement symétriques de a, a' relativement au plan de Γ; si l'on oriente Γ, il devient le support de deux cycles Γ_0, Γ'_0; on peut associer à Γ_0 le couple (a, α) par exemple et alors c'est le couple (a', α') qui correspond à Γ'_0; bien entendu deux opérateurs différents pourraient appeler l'un focale romaine ce que l'autre appelle focale grecque et inversement; au cas où ils auraient adopté les mêmes dénominations, l'un pourrait appeler a ce que l'autre appelle a' et inversement, de sorte que, finalement, il y a quatre façons possibles de placer le point a, en l'un des points où Σ est percée par les focales; le placement de a détermine sans ambiguïté la position de a', α, α' mais le changement d'appellations n'a aucune importance primordiale (pas plus, par exemple, que l'obligation de circuler à droite plutôt qu'à gauche, ou inversement, pour les usagers des routes terrestres).

Les conventions précises indiquées plus haut pour le nom des images a, α d'une droite orientée D ou du cycle Γ dont elle est la polaire ont suffisamment été explicitées; nous n'y revenons pas. *On constatera que l'on retrouve les définitions trouvées par une autre voie dans le Mémoire déjà cité.*

Il y a une propriété fondamentale à signaler : *si les cycles* $\Gamma(a, \alpha)$, $\Gamma_1(b, \beta)$ *sont sécants, c'est-à-dire si* $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$, *la valeur commune de l'arc* ab *ou* $\alpha\beta$ *est égale à l'angle des cycles.*

Cette propriété a été démontrée, dans le Mémoire cité, par des raisonnements de géométrie élémentaire; nous allons en donner une démonstration différente, qui n'exige aucune figure ni aucun calcul. Il va suffire de faire une étude de quelques transformations simples.

Effectuons une symétrie par rapport à O, le cycle $\Gamma(a, \alpha)$ est remplacé par un cycle $\Gamma_1(a_1, \alpha_1)$ avec $a_1 = \alpha'$, $\alpha_1 = a'$; cela se voit aussitôt en remarquant que, Γ donné, une rotation de π autour de la perpendiculaire élevée en O au plan de Γ transforme aussi Γ en Γ_1; remarquons d'ailleurs que Γ et Γ_1 ont mêmes focales issues de O, ce qui exige bien une discussion précise pour distinguer les images de Γ et Γ_1.

Une demi-droite issue de O peut être considérée comme un cycle Γ particulier; elle perce Σ en un point en lequel se confondent les images de cette demi-droite (soit que l'on étudie comme droite, soit comme cycle). Un cercle diamétral de Σ a pour images les deux points diamétralement opposés où son axe perce Σ; d'ailleurs cet axe est le cycle, orthogonal à S, conjugué de ce cercle diamétral de Σ. Le résultat relatif à la symétrie relativement à O se vérifie aussitôt pour ces deux espèces particulières de cycles.

Imaginons maintenant la symétrie par rapport à un plan Π issu de O; un cycle Γ a pour images (a, α), le cycle symétrique Γ_1 a pour images (a_1, α_1), a_1 étant symétrique de α par rapport à Π, α_1 symétrique de a : il suffit de le vérifier pour les cycles situés dans Π ou pour les grands cercles de Σ passant par le diamètre de Σ perpendiculaire à Π.

Considérons maintenant l'inversion qui a pour pôle un point ω quelconque et pour puissance $1 + O\omega^2$, de façon à conserver S; un cycle est remplacé par Γ_1; il y a ∞^1 cycles $\overline{\Gamma}$ dont le plan passe par $O\omega$, qui restent invariants, point pour point : ce sont ceux qui ont ω pour centre, dont le plan contient $O\omega$, et dont le rayon est $\sqrt{1 + O\omega^2}$; leurs images sont sur le grand cercle de Σ dont le plan est perpendiculaire à $O\omega$ et elles ont un écart angulaire constant; soit $(\overline{a}, \overline{\alpha})$ l'un de ces couples images; faisons tourner le feuillet romain autour de $O\omega$ de façon que $\overline{a}$ vienne recouvrir $\overline{\alpha}$ l'image a de Γ vient en un point b; le symétrique de b par rapport au plan mené par O perpendiculairement à $O\omega$ est α_1; on fait de même tourner le feuillet grec de façon que $\overline{\alpha}$ vienne recouvrir $\overline{a}$; l'image α de Γ vient en un point β; le symétrique de β par rapport au plan déjà cité est a_1; cela se vérifie immédiatement en songeant aux cycles invariants $\overline{\Gamma}$, puis à la droite orientée $O\omega$ qui est remplacée par son opposée et au cycle diamétral de Σ dans le plan déjà cité, cycle qui ne change pas.

Ce dernier résultat permet de voir ce qui arrive par une *rotation anallagmatique* autour d'un grand cercle de Σ; il suffit de composer avec l'inversion qui précède la symétrie par rapport au plan Π diamétral de Σ perpendiculaire à $O\omega$: $\Gamma(a, \alpha)$ a été, dans l'inversion remplacé par (a_1, α_1); dans la symétrie annoncée Γ_1 est remplacé par Γ_2 qui a pour image romaine le symétrique de α_1 par rapport à Π, or, ce symétrique est le point b indiqué plus haut; de même l'image grecque de Γ_2 est le point β indiqué plus haut; on peut dire que, si l'on considère le diamètre $O\omega$ qui perce Σ en deux points diamétralement opposés (c, γ), on a fait tourner le feuillet romain et le feuillet grec *du même angle*, l'un autour de la demi-droite Oc, l'autre autour de la demi-droite $O\gamma$; cet angle commun est, en valeur absolue, mesuré par l'arc $\overline{a\alpha}$ et l'on vérifie sans peine que c'est le double de l'angle des deux sphères qui ont servi pour la rotation anallagmatique (sphère de centre ω et rayon $\sqrt{1+\overline{O\omega}^2}$ et plan diamétral Π).

Mais alors imaginons que l'on fasse tourner le feuillet romain d'un angle 2φ autour d'un rayon Oa de Σ : considérons le point α qui coïncide avec a, et le point α' qui coïncide avec le point a' diamétralement opposé à a; on peut composer la rotation de l'angle φ du feuillet romain et du feuillet grec autour de la droite orientée Oa ou $O\alpha$, avec la rotation de l'angle φ du feuillet romain et du feuillet grec autour des demi-droites respectives Oa et $O\alpha'$; *on voit que le feuillet romain a, finalement, tourné de 2φ autour de Oa, tandis que le feuillet grec est resté immobile;* l'opération ainsi effectuée sur les cycles orthogonaux à S est donc *la composition de deux rotations anallagmatiques, égales, l'une autour du cycle (a, α), l'autre autour du cycle conjugué (a, α'),* la valeur absolue de ces rotations étant égale à $|\varphi|$; cette opération est équivalente à l'ensemble de quatre inversions consécutives, le cycle (a, α) fournissant deux symétries planes, puisque a et α coïncident. Dans une telle opération, l'angle de deux cycles sécants Γ et Γ_1 ne change pas. Soient donc deux cycles sécants Γ, Γ_1, d'images (a, α), (b, β); puisque l'on a $\overparen{ab} = \overparen{\alpha\beta}$, on peut appliquer l'arc ab sur l'arc $\alpha\beta$ par une rotation d'amplitude 2φ autour d'un rayon Oc de Σ (les grands cercles médiateurs de $a\alpha$ et $b\beta$ se coupent suivant un diamètre Occ' de Σ); cette rotation du feuillet romain autour de Oc transforme les deux cycles Γ, Γ_1 en les demi-droites respectives $O\alpha$, $O\beta$ sans que leur angle ait changé : *donc l'angle euclidien de Γ et Γ_1 est bien mesuré par la valeur commune des arcs de grand cercle ab et $\alpha\beta$.* C'est la proposition que nous voulions démontrer.

Il y a d'ailleurs un autre moyen simple de changer Γ et Γ_1 en deux droites (orthogonales à S bien entendu). C'est de faire une seule inversion (au lieu de quatre comme précédemment) dont le pôle est l'un des points P ou P' communs à Γ et Γ_1 ; la traduction sur les deux feuillets, romain et grec, est la suivante : le diamètre Occ', déterminé précédemment, est précisément celui qui réunit O à P ou P'; le dièdre d'arête Oc, dont Oca et $Oc\alpha$ sont les faces, a pour angle rectiligne un certain nombre 2φ (angle évalué pour l'observateur placé pieds en O, tête en c, Oca étant la première face, $Oc\alpha$ la seconde); on fait tourner le feuillet romain de l'angle φ autour de Oc, le feuillet grec de l'angle $(-\varphi)$ autour de Oc, ou si l'on préfère, de l'angle φ autour de Oc'; dans ces conditions a, α se confondent en un point unique (d, δ), b et β aussi en (e, ε) et Γ, Γ_1 sont devenus les demi-droites Od, Oe, de sorte que la proposition sur l'angle de Γ, Γ_1 se trouve encore démontrée (l'opération effectuée est une rotation anallagmatique autour du cercle diamétral de Σ dont c est l'image romaine et c' l'image grecque, il suffit d'adjoindre à la rotation des feuillets, romain et grec, la symétrie de ces feuillets relativement au plan diamétral perpendiculaire sur Oc pour avoir une opération qui est l'inversion unique annoncée.

Si l'on considère un cycle $\Gamma(a, \alpha)$, faire tourner le feuillet romain de l'angle φ autour de Oa, le feuillet grec du même angle φ autour de $O\alpha$ constitue *la représentation de la rotation anallagmatique de l'angle φ autour de* Γ : c'est l'ensemble de deux inversions successives relativement à deux sphères issues de Γ, faisant entre elles l'angle $\frac{\varphi}{2}$.

La rotation du feuillet romain, d'amplitude 2φ, autour du rayon Oa, s'appelle *une transformation paratactique d'amplitude φ; elle est de ∞^2 façons décomposable en la composition de deux rotations anallagmatiques, d'amplitude φ chacune, autour de deux cycles conjugués;* en effet, soient α, α' deux points diamétralement opposés du feuillet grec; la rotation anallagmatique d'amplitude φ autour de (a, α) suivie de la rotation anallagmatique, d'amplitude φ aussi, autour de (a, α') fait tourner le feuillet romain de 2φ autour de Oa et laisse le feuillet grec inaltéré.

Ainsi, dans la représentation imagée employée ici, les opérations élémentaires sur les cycles Γ, qui apparaissent comme les plus simples, sont celles qui correspondent aux transformations suivantes des feuillets sphériques portés par Σ :

1° Symétrie d'un feuillet autour de O;

2° Symétrie d'un feuillet par rapport à un plan issu de O;

3° Rotation d'un feuillet autour d'un diamètre;

4° Échange d'un feuillet avec l'autre.

Au contraire, l'étude directe du groupe conforme qui laisse S invariante donne comme élément le plus simple possible l'inversion de pôle ω et puissance $1 + O\omega^2$: cette inversion a une représentation imagée assez compliquée.

On peut maintenant indiquer la transformation précise subie par les ∞^4 *cycles* Γ *orthogonaux à* S *lorsque le feuillet sphérique double* Σ *subit l'une de ces* ∞^{15} *transformations annoncées qui conservent la différence* $\widehat{ab} - \widehat{\alpha\beta}$, *quels que soient les couples* (a, α), (b, β) : on passe de Γ à la droite D orientée polaire de Γ relativement à O; D est remplacée par une droite orientée D_1 qui résulte de D par une homographie ou une dualité; enfin D_1 est remplacée par le cycle Γ_1.

Parmi ces transformations se sépare le sous-groupe à six paramètres qui est celui des *transformations conformes de l'espace à trois dimensions conservant la sphère fondamentale* S, auxquelles on adjoint la transformation (non ponctuelle) qui remplace un cycle Γ par son conjugué.

Dans les deux groupes à 15 ou 6 paramètres indiqués, en ne gardant que les transformations ponctuelles, on doit réunir en un seul bloc les points m, m' inverses l'un de l'autre par rapport à S; ce bloc est remplacé par un bloc de même définition. Dans la transformation (de contact et non ponctuelle) qui remplace un cycle par son conjugué, le bloc m, m' déjà cité est remplacé par une sphère orthogonale à S.

4. PARATAXIE. — Soient deux cycles $\Gamma(a, \alpha)$, $\Gamma_1(b, \beta)$ quelconques; cherchons un troisième cycle $\Gamma_2(c, \gamma)$ coupant Γ sous l'angle V, Γ_1 sous l'angle V_1.

Le problème est ramené à construire un triangle sphérique abc dont la base ab est connue et dont les côtés ac, bc, sont donnés, égaux à V et V_1 respectivement, puis un triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ déterminé par les conditions analogues; si a et b ne sont ni confondus, ni diamétralement opposés, c a deux positions possibles (du moins sous certaines conditions d'inégalité). Si α, β satisfont aux mêmes restrictions, γ a deux positions possibles. *Mais les circonstances changent si a et b sont confondus :* V *et* V_1 *doivent être égaux, et alors* c a ∞^1 *positions possibles. Si a et b sont diamétralement opposés, on doit avoir* $V + V_1 = \pi$ *et alors* c a ∞^1 *positions possibles;* d'ailleurs, ce cas d'exception se ramène au premier en changeant Γ_1 en le cycle opposé. Il y a donc un cas très spécial : a et b confondus, α et β diamétralement opposés; autrement dit Γ et Γ_1 sont conjugués; on a $V = V_1$, $V + V_1 = \pi$, d'où $V = V_1 = \frac{\pi}{2}$.

Deux cycles Γ, Γ_1 dont les images romaines sont confondues sont dits *paratactiques romains;* ils sont *paratactiques grecs* si les images grecques sont confondues. Si les images romaines (grecques) sont diamétralement opposées, les cycles sont dits *antitactiques* romains (grecs). Les énoncés relatifs à ces cycles antitactiques peuvent, en général, être remplacés par des énoncés relatifs à des cycles paratactiques, en changeant l'orientation de l'un des cycles.

Tout cycle qui rencontre deux cycles paratactiques les coupe sous le même angle.

Deux cycles non paratactiques (ni antitactiques) admettent deux cycles perpendiculaires communs, conjugués l'un de l'autre, réels tous deux.

Deux cycles paratactiques romains (grecs) admettent ∞^1 cycles perpendiculaires communs tous paratactiques grecs (romains) entre eux.

Si deux cycles sont conjugués, tout cycle, qui les coupe tous deux, les coupe à angle droit.

Étant donnés deux cycles quelconques $\Gamma(a, \alpha)$, $\Gamma_1(b, \beta)$ on peut chercher les rotations anallagmatiques qui transforment Γ en Γ_1; supposons Γ et Γ_1 ni paratactiques, ni antitactiques; si l'axe de la rotation inconnue est le cycle $\Gamma_2(c, \gamma)$, le point c (ou γ) doit se trouver sur le grand cercle médiateur de ab (ou $\alpha\beta$) et le dièdre de sommet c du triangle sphérique acb est égal au dièdre de sommet γ du triangle sphérique $\alpha\gamma\beta$ et cela permet de trouver ∞^1 couples (c, γ); sur les ∞^1 rotations ainsi obtenues, il y en a *deux qui sont des symétries;* on les obtient en prenant pour c l'un des deux milieux, diamétralement opposés du segment ab; de même pour γ; finalement les axes sont deux cercles (non orientés) conjugués; ce sont *les vrais bissecteurs* de Γ et Γ_1. Si Γ et Γ_1 sont paratactiques, il n'y a pas de modification sensible pour ce qui regarde les axes de rotation et les vrais bissecteurs. Si Γ et Γ_1 sont antitactiques, toute rotation anallagmatique est une symétrie : supposons a et b diamétralement opposés, α et β quelconques; le point γ peut occuper deux positions, mais le point c est un point quelconque du grand cercle de Σ dont le plan est perpendiculaire au rayon Oa; de la sorte *deux cercles antitactiques ont ∞^1 vrais bissecteurs.*

Toutes les propositions qui précèdent sont intuitives sur la représentation imagée employée ici.

Il reste à retrouver la définition des cercles paratactiques donnée par les premiers auteurs qui en ont imaginé la théorie : *deux cercles sont dits paratactiques si les foyers* (F, F') *du premier,* (F_1, F'_1) *du second peuvent être associés de sorte que la droite* FF_1 *soit isotrope et de même* $F'F'_1$; du moment qu'il s'agit de cercles réels, F et F' sont imaginaires conjugués, F_1 et F'_1 aussi; si donc FF_1 est isotrope, $F'F'_1$ l'est automatiquement.

Imaginons la sphère S et un cycle Γ qui lui est orthogonal; F et F' sont sur S et toutes les droites isotropes issues de F ou F' s'appuient sur Γ; le cercle Γ coupe S en deux points m, m'; la droite Fm est isotrope; c'est une génératrice de S, car elle coupe S en F, m et au point à l'infini; par Fm passe un plan isotrope unique, asymptote à S, donc passant par O; ce plan est l'un des quatre plans isotropes tangents à Γ que l'on peut mener par O; la droite $F'm'$ est elle aussi génératrice de S, ainsi que Fm' et $F'm$; les plans isotropes correspondants complètent les quatre plans isotropes annoncés; Fm et $F'm'$ sont imaginaires conjuguées, donc du même système et les plans OFm, $OF'm'$ se coupent suivant l'une des deux droites focales indiquées plus haut; les plans OFm' et $OF'm$ donnent l'autre droite focale; nous voyons de plus que notre procédé permet de distinguer deux catégories de focales : en effet, S possède deux systèmes de génératrices, qui se séparent sans radical; appelons, par exemple, romaines ou grecques les génératrices des deux systèmes; si Fm, $F'm'$ sont romaines, les plans isotropes correspondants donnent la focale romaine et Fm', $F'm$ la focale grecque.

Cela posé supposons qu'un nouveau cercle Γ_1 soit défini en choisissant ses foyers F_1, F'_1, l'un F_1 choisi au hasard sur Fm, et l'autre F'_1 imaginaire conjugué de F_1, donc situé sur $F'm'$: ce qui a été expliqué prouve que le cercle Γ_1 est orthogonal à S, puisque ses foyers sont sur S, et que la focale romaine de Γ_1 est confondue avec la focale romaine, de sorte que la définition adoptée dans ce paragraphe pour deux cercles paratactiques entraîne la propriété donnée au paragraphe précédent.

Réciproquement, si deux cercles Γ, Γ_1 orthogonaux à S ont leur focale romaine commune Oa, le premier plan isotrope issu de Oa coupe S suivant deux génératrices, dont une est romaine et porte les foyers F, F_1 de Γ et Γ_1; le second plan isotrope issu de Oa donne sur S la génératrice romaine conjuguée, qui porte les foyers respectivement conjugués F, F'_1; de la sorte la définition adoptée au paragraphe précédent entraîne la propriété qui a été donnée ici comme nouvelle définition; il y a donc équivalence entre les deux définitions.

On voit donc que, si l'on choisit un point a du feuillet Σ romain, il y a ∞^2 cycles, paratactiques romains entre eux, ayant en commun l'image romaine a; leurs foyers décrivent deux génératrices, de même système romain, de S, imaginaires conjuguées; leurs axes D′ et leurs droites D (polaires de O) engendrent la congruence rectiligne dont les directrices sont les génératrices imaginaires conjuguées qui précèdent.

Si nous revenons aux ∞^{15} transformations soit des droites D ou D′, soit des cycles correspondants, on voit que si $\bar{a}$ et $\bar{\alpha}$ dépendent simultanément de a et α, deux cycles paratactiques ne restent pas paratactiques; au contraire, le sous-groupe à six paramètres qui a été mis en évidence remplace deux cercles paratactiques par deux cercles paratactiques : si chaque feuillet s'est conservé, l'espèce de parataxie ne change pas; si chaque feuillet s'échange avec l'autre, l'espèce de parataxie change.

Les droites D, D_1 (ou D', D'_1) attachées à Γ et Γ_1 peuvent être dites *parallèles au sens de Clifford* si Γ et Γ_1 sont paratactiques; il y a deux sortes de parallélisme. Nous retombons sur une théorie qui a été développée à un autre point de vue.

On voit que chaque cycle Γ est commun à deux congruences paratactiques *orientées* d'espèce différente; deux congruences paratactiques non orientées se coupent suivant deux cercles (non orientés) conjugués entre eux.

Enfin, l'étude géométrique que nous avons faite met en évidence une position relative de deux cycles Γ, Γ_1 : coïncidence d'une focale romaine de Γ et d'une focale grecque de Γ_1; les deux plans isotropes issus de cette focale sont tangents à Γ et Γ_1, mais les foyers de Γ et Γ_1 contenus dans l'un de ces plans sont sur une génératrice romaine de S pour Γ et grecque pour Γ_1; un déplacement ou une symétrie autour de O conserve cette disposition, mais une inversion la fait disparaître.

5. Applications. — Si l'on considère *a priori* deux cercles quelconques de l'espace, ils ont une sphère orthogonale commune S et une seule (en écartant le cas où ils se couperaient en deux points; s'ils se coupaient en un seul point, la sphère orthogonale commune serait unique, mais de rayon nul; nous écartons ces deux cas). Un troisième cercle qui rencontre chacun des deux premiers en deux points est orthogonal aussi à S; une étude directe, facile à faire quand la sphère S est réelle (on la réduit à un plan par inversion) montre qu'il y a un seul cercle réel perpendiculaire commun aux deux cercles, et qu'il y a un second cercle perpendiculaire commun, de centre réel, de rayon imaginaire pur, conjugué du premier; c'est le cas où les deux cercles ne sont pas enlacés.

Quand la sphère orthogonale S est de rayon imaginaire pur (son centre est réel), c'est-à-dire quand les deux cercles sont enlacés, on adopte la représentation qui a été étudiée dans ce Mémoire et l'on arrive ainsi à séparer sans difficulté les deux cas : le cas général, où il y a deux cercles perpendiculaires communs, d'ailleurs réels et conjugués, et le cas exceptionnel de parataxie.

Si l'on compare notre méthode avec celles qui ont été adoptées par d'autres auteurs (*voir* en particulier le tome 2 de la *Géométrie* de M. Hadamard), on aperçoit la facilité avec laquelle la question se résout et la façon intuitive dont la parataxie se met en évidence.

Mais il faut bien reconnaître que si l'on considère l'ensemble des cercles paratactiques à un cercle donné, notre méthode ne suffit plus. En effet, il existe ∞^2 points du plan de ce cycle Γ intérieurs à Γ et chacun est le centre d'une sphère S, de rayon imaginaire, orthogonale à Γ; pour chaque sphère S, on trouve ∞^2 cycles orthogonaux à cette même sphère S et paratactiques à Γ de sorte que les cycles paratactiques à un cycle donné forment un système à quatre paramètres. Il y a alors lieu de remarquer que, en remplaçant chaque cercle par ses deux foyers F, F', l'espace formé par l'ensemble des cercles réels tracés dans l'espace euclidien est un espace à six dimensions décomposable en la somme de deux espaces euclidiens à trois dimensions chacun; mais alors, on se heurte à la difficulté que les foyers d'un cercle réel sont imaginaires conjugués et que, pour déterminer un point imaginaire dans l'espace euclidien à trois dimensions, on doit utiliser trois nombres complexes, donc finalement six quantités réelles.

En tout cas, pour les questions concernant des cercles tous orthogonaux à une même sphère S d'équation réelle, de rayon imaginaire pur, la représentation imagée de ce travail réussit, en général, avec le maximum de simplicité. Par exemple, considérons trois cercles A, B, C orthogonaux à la sphère $S(x^2+y^2+z^2+1=0)$, et aussi leurs conjugués A', B', C'; A a pour images (a, α) ou (a', α') et $A'(a, \alpha')$ ou (a', α); de même pour B, B' et C, C'. Nous considérons les deux cercles conjugués A_1, A'_1 perpendiculaires communs à B, B', C, C'; soient (a_1, α_1), (a'_1, α'_1) les images de A_1 considéré comme cercle non orienté; on définit de même B_1, B'_1 perpendiculaires à C, C', A, A', et C_1, C'_1 perpendiculaires à A, A', B, B'. Les cercles A, A', A_1, A'_1 ont deux cercles perpendiculaires communs A_2, A'_2; on définit de même B_2, B'_2 puis C_2, C'_2. Le théorème remarquable est celui-ci : *les cercles* A_2, A'_2, B_2, B'_2, C_2, C'_2 *admettent un couple* D, D' *de deux cercles qui leur sont perpendiculaires communs.* On reconnaît la proposition de Morley Petersen pour les droites de l'espace euclidien à trois dimensions, sauf que deux droites A, B ont une perpendiculaire commune et une seule; on remarque même que si les droites A, B, C sont concourantes en O, toutes les droites qui interviennent sont concourantes aussi en O. On a la proposition bien connue : trois droites Oa, Ob, Oc forment un trièdre; le trièdre supplémentaire Oa_1, Ob_1, Oc_1 jouit de cette propriété que les trois plans Oaa_1, Obb_1, Occ_1 se coupent suivant une droite Od (car Oaa_1 est dans le trièdre primitif le plan mené par Oa perpendiculairement à la face opposée Obc); si l'on considère les plans Obc, Ob_1c_1 ils se coupent suivant une droite Oa_2 perpendiculaire sur Oa, Oa_1, Od; nous pouvons supposer que les dix points a, a_1, ..., d sont sur la sphère $\Sigma(x^2+y^2+z^2=1)$; si maintenant l'on considère une configuration analogue α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2 β_2, γ_2, δ portée cette fois par le feuillet grec, on voit que les cercles A, A' d'images (a, α) pour A, (a, α') pour A' sont conjugués et perpendiculaires aux cercles des trois couples B_1, B'_1; C_1, C'_1; A_2, A'_2; finalement nous avons dix couples de cercles conjugués dans chaque couple, les cercles d'un même couple étant perpendiculaires aux cercles de trois autres couples; c'est la proposition annoncée qui généralise de la façon la plus naturelle la proposition de Morley pour les droites de l'espace euclidien à trois dimensions; la proposition relative aux cercles s'est trouvée ramenée à la proposition relative aux droites, avec même cette simplification que les droites sont concourantes; mais, par contre, on a eu besoin de réunir deux de ces configurations simplifiées. Le théorème de géométrie *euclidienne* sur les vingt cercles peut être remplacé par un théorème de géométrie *cayleyenne* sur les vingt droites correspondantes : un couple de deux cercles conjugués est remplacé par deux droites, elles-mêmes conjuguées par rapport à S, qui sont les axes des deux cercles ou encore les polaires de O par rapport à ces deux cercles. Si l'on désigne par $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ les droites relatives à A et A', on voit que deux droites $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ont deux perpendiculaires communes $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}'_1$ (l'angle en jeu étant cayleyen) et l'on retrouve une proposition analogue à celle de Morley.

D'ailleurs, si l'on revient à la géométrie euclidienne à trois dimensions et aux dix droites Oaa', Obb', ..., Odd', il suffit de remarquer que Oaa' et $Ob_1b'_1$ sont conjuguées par rapport au cône isotrope O pour aboutir à un théorème de géométrie non euclidienne à deux dimensions; coupons en effet par un plan quelconque; le cône isotrope est coupé suivant une conique σ; le trièdre $Oabc$ est coupé suivant un triangle que nous appellerons abc pour ne pas compliquer les notations; le trièdre supplémentaire est coupé suivantle triangle $a_1b_1c_1$; aa_1 est la perpendiculaire non euclidienne abaissée de a sur bc; le théorème exprimant que abc et $a_1b_1c_1$ sont homologiques signifie que les hauteurs non euclidiennes du triangle abc concourent en un point d; ce théorème, pour être complet, doit faire intervenir l'axe d'homologie, qui est la polaire de d relativement à σ; le point de concours de bc, b_1c_1 est appelé a_2 et alors on retrouve les dix points $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, d$ qui forment une configuration parfaitement symétrique; chacun d'eux admet pour conjugués, par rapport à σ, trois autres points de la configuration.

Si l'on prend d par exemple, sa polaire a_2, b_2, c_2 coupe σ en deux points que nous pourrons appeler $\overline{d}$, $\overline{d'}$; on définit de même $\overline{a}$, $\overline{a'}$; $\overline{a}_1$, $\overline{a}'_1$; $\overline{a}_2$, $\overline{a}'_2$ et $\overline{b}$, $\overline{b}'$, ..., $\overline{c}_2$, $\overline{c}'_2$; comme d et a_2 sont conjugués, $\overline{d}$ et $\overline{d'}$ forment un couple de points divisant harmoniquement $\overline{a}_2$, $\overline{a}'_2$ et l'on obtient ainsi sous la forme la plus intuitive le théorème suivant : on considère trois trinomes

$$(1) \qquad az^2+2a'z+a'', \quad bz^2+2b'z+b'', \quad cz^2+2c'z+c''$$

puis le trinome $a_1z^2+2a'_1z+a''_1$ qui divise harmoniquement chacun des trinomes (b), (c), en désignant, par abréviation $bz^2+2b'z'+b''$ par (b), ...; on définit ainsi, à partir de (1), les trinomes (a_1), (b_1), (c_1)

$$(2) \qquad a_1z^2+2a'_1z+a''_1, \quad b_1z^2+2b'_1z+b''_1, \quad c_1z^2+2c'_1z+c''_1.$$

Le trinome (a_2) ou $a_2z^2+2a'_2z+a''_2$ divise harmoniquement (a) et (a_1); on définit de même (b_2), (c_2) :

$$(3) \qquad a_2z^2+2a'_2z+a''_2, \quad b_2z^2+2b'_2z+b''_2, \quad c_2z^2+2c'_2z+c''_2.$$

Le théorème, qui résulte de ce qui précède, est le suivant : les trois trinomes (a_2), (b_2), (c_2) admettent un même trinome (d) les divisant harmoniquement

$$(4) \qquad dz^2+2d'z+d''.$$

Une fois cela fait, on constate que les dix trinomes forment une configuration parfaitement symétrique, chacun divisant harmoniquement trois autres. Ce théorème, de pure algèbre, se démontre intuitivement en faisant intervenir une conique auxiliaire σ, réelle ou non, regardant ensuite chaque trinome comme définissant par ses racines deux points réels ou complexes de σ : un mathématicien qui revendiquerait la priorité pour la découverte de cette proposition aurait grand tort, car cette proposition remonte à Pascal et Desargues ou peut-être même à Euclide ou Apollonius. Les racines des dix trinomes en question peuvent encore servir à définir sur une quadrique dix couples de génératrices tels que chaque couple divise harmoniquement trois autres couples de la configuration.

Bien qu'il entre vingt droites dans cette configuration C et aussi vingt droites dans notre théorème sur les cercles, les deux propositions sont distinctes, car les axes des vingt cercles ne sont pas sur une même quadrique; mais la configuration C′ de ces vingt axes se ramène, comme nous l'avons vu, à deux configurations du type C.

On peut présenter une autre application de notre théorie : considérons la sphère S et une quadrique Q quelconque, considérée comme lieu de points M; chaque point M définit, par la construction expliquée plus haut, deux points m, m' et le couple m, m' engendre une surface Q_1 qui est une cyclide *générale* (mais non cyclide de Dupin); chaque génératrice de Q détermine sur Q_1 un cercle; les deux systèmes de génératrices de Q donnent deux systèmes de cercles sur Q_1 ; un cercle du premier système coupe en deux points un cercle du second et ces deux cercles sont sur une même sphère orthogonale à S, bitangente à Q_1 aux points communs aux deux cercles; S dépend de quatre paramètres, Q de neuf, de sorte que Q_1 dépend de treize paramètres : c'est la surface cyclide générale.

Si S est de rayon imaginaire pur et si Q coupe S suivant deux génératrices du premier système G, G′ et suivant deux génératrices du second, G_1, G'_1, la surface Q_1 est une *cyclide de Dupin;* les cercles d'un même système sont paratactiques entre eux; l'angle d'un cercle du premier système et d'un cercle du second est constant, indépendant du choix de chacun des deux cercles dans le système correspondant. Si cet angle est droit, la quadrique Q coïncide avec sa réciproque par rapport à S et si Γ est un cercle de Q_1, le cercle conjugué est aussi sur Q_1.

Cette théorie ne met d'ailleurs pas en évidence les autres cercles portés par la surface Q_1, cercles non orthogonaux à la sphère S.

Donnons quelques exemples précis : Si Q est la quadrique $x^2-y^2=m(z^2-1)$, où m est une constante, différente de $+1$ ou -1, Q_1 est une cyclide générale; la quadrique Q choisie est toutefois très particulière, car elle est à la fois harmoniquement inscrite et circonscrite à S : les génératrices de Q $(x-y=0, z-1=0)$, $(x+y=0, z+1=0)$ sont conjuguées l'une de l'autre par rapport à S et donnent sur Q_1 deux cercles conjugués; de même pour les génératrices $(x-y=0, z+1=0)$, $(x+y=0, z-1=0)$ encore conjuguées et du système opposé au couple précédent. Si nous prenons $m=1$, la quadrique Q contient les génératrices $(x+i=0, y+iz=0)$, $(x-i=0, y-iz=0)$ de S; elles sont de même système et de même $(x+i=0, y-iz=0)$, $(x-i=0, y+iz=0)$. Cette fois Q_1 est une cyclide de Dupin particulière, dont les cycles d'Yvon Villarceau sont orthogonaux. Sur Q, on peut trouver dix couples de génératrices d'un même système, où chaque couple divise harmoniquement trois autres couples, mais les génératrices d'un même couple ne peuvent, pour chacun des dix couples, être conjuguées par rapport à S.