JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI PONCIN

Étude d'une équation intégrale de l'hydrodynamique du fluide visqueux (écoulement laminaire en régime variable)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, nº 1-4 (1940), p. 163-195.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_163_0>

Étude d'une équation intégrale de l'hydrodynamique du fluide visqueux (écoulement laminaire en régime variable);

PAR HENRI PONCIN.

INTRODUCTION. — La connaissance exacte des coefficients de viscosité est fondamentale dans de nombreuses questions d'hydrodynamique et de physique moléculaire. L'une des méthodes de détermination, parmi les plus commodes et les plus précises, repose sur des mesures de débit lorsque le fluide s'écoule dans un tube cylindrique capillaire. L'interprétation des phénomènes observés, telle qu'on la trouve dans les traités classiques, a pour base l'hypothèse de Newton relative à l'action réciproque de deux éléments fluides contigus. Elle supppose en outre l'établissement d'un régime permanent symétrique par rapport à l'axe du tube, dans lequel le liquide adhère à la paroi et s'écoule par filets parallèles à l'axe. Dans ces hypothèses, les équations de Navier peuvent être intégrées facilement parce qu'elles se réduisent à des équations différentielles ordinaires.

Soient a le rayon du capillaire, L sa longueur, ΔP la différence entre les pressions à l'entrée et à la sortie, η le coefficient de viscosité du fluide, $w(r\,|\,z)$ la vitesse et $p(r\,|\,z)$ la pression au point M situé à la distance r de l'axe du tube et à la distance z de son origine. Les équations de Navier admettent la solution indépendante de t

$$w(r\,|\,z) = \frac{\Delta P}{4\eta L}[a^2 - r^2],$$

$$p = p_0 + \frac{\Delta p}{L} z.$$

qui sert de point de départ pour l'interprétation des résultats expérimentaux au moyen de formules analogues aux formules classiques de Poiseuille, de Stokes, etc.

Après avoir analysé avec précision les conditions nécessaires à une mesure exacte des coefficients de viscosité, M. Grumbach (1) a été conduit à étudier la période variable de l'écoulement et m'a signalé l'intérêt qui s'attache à la détermination et à l'étude des solutions des équations de Navier qui dépendent du temps suivant la forme des conditions aux limites et des conditions initiales. Même lorsque les caractères de l'écoulement sont analogues à ceux des écoulements Poiseuille, l'étude de ces régimes variables présente des difficultés d'un ordre beaucoup plus grand que l'étude des régimes permanents. An lieu d'équations différentielles, on a en effet affaire à des équations aux dérivées partielles ou à des équations intégrales. Dans son Mémoire « sur l'écoulement libre des liquides dans les tubes capillaires » (*Journal de Physique*, t. IX, 1938, p. 49). M. Grumbach a déterminé explicitement les solutions du problème dans le cas d'un capillaire d'une longueur très grande par rapport à la hauteur de liquide qui le surmonte. Il en a déduit d'importantes conséquences au sujet de la précision avec laquelle les mesures de débit, dans les viscosimètres à écoulement libre, permettent de déterminer les coefficients de viscosité.

Dans un esprit différent, M. Szymanski (2) a étudié, dans un important Mémoire publié au *Journal de Mathématiques*, les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial t} = f(t)$$

qui permet d'obtenir de nombreux résultats sur les écoulements du type Poiseuille lorsque la différence de pression aux deux extrémités du capillaire est une fonction connue du temps $f(t)$.

Toutefois certains types d'écoulement ne rentrent pas dans cette catégorie, car la différence de pression Δp y est en relation avec la fonction inconnue $w(t)$. Tel, par exemple, est le cas des viscosimètres

(1) GRUMBACH, *Journal de Physique*, t. 9, 1938, p. 49.

(2) SZYMANSKI, *Journ. de Math. pures et appliquées*, t. 11, fasc. I, 1932, p. 67.

à écoulement libre. Le problème est alors lié à l'étude de l'équation intégrale

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{C} + \int\int w(r \mid t)\, r\, dr\, dt.$$

Nous nous sommes proposé d'étudier dans ce Mémoire les propriétés des solutions de cette équation intégrale.

Position du problème. — A l'instant initial le liquide étudié est en équilibre dans deux récipients S_1 et S_2 reliés l'un à l'autre par un tube capillaire de rayon a et de longueur L, faisant un angle θ avec le plan horizontal. Nous supposerons que les portions de S_1 et S_2 qui intéressent le mouvement sont cylindriques et ont pour rayons a_1 et a_2. La discussion des résultats correspondant à des conditions expérimentales différentes et généralisant le problème étant réservée pour la suite du Mémoire. Les niveaux L_1 et L_2, atteints par le liquide dans S_1 et S_2, sont distants de H_1 et H_2 des extrémités A_1 et A_2 du capillaire (distances verticales). On exerce alors des pressions p_1 et p_2 constantes, sur les surfaces libres. Un mouvement se produit, le liquide s'écoulant dans un sens déterminé à travers le capillaire. A un instant t les différences de niveau entre L_1 et A_1 d'une part, L_2 et A_2 d'autre part sont respectivement $H_1(t)$ et $H_2(t)$. Leurs variations sont liées aux constantes caractéristiques du liquide : la densité ρ et le coefficient absolu de viscosité η. Leurs mesures permettent donc la détermination de ce coefficient, si l'on connaît de façon suffisamment précise la forme des fonctions $H_1(t)$ et $H_2(t)$.

Nous pouvons admettre comme conforme à l'expérience que, dans les conditions d'emploi, l'écoulement à travers le capillaire s'effectue par filets parallèles à l'axe du tube et que les variations de pression dans les récipients extrêmes S_1 et S_2 suivent la loi hydrostatique. [*Cf.* par exemple Duclaux, *Viscosité* (*Actualités Scientifiques*), Hermann] ([1]). Dans le tube capillaire $A_1 A_2$ la vitesse w d'une particule (parallèle à l'axe oz du tube) ne dépend que de la distance r de cette particule à l'axe et du temps t. p désignant la pression au point

([1]) On trouvera dans le Mémoire de M. Grumbach une importante blibliographie sur l'état actuel de la question.

considéré et ox désignant une horizontale située dans une section droite du tube les raisonnements classiques de l'hydrodynamique conduisent aux équations de pression

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g \cos\theta = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\,\Delta w + \rho g \sin\theta = \rho \frac{\partial w}{\partial t} \tag{3}$$

et à l'équation de continuité

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

D'après (4), w est indépendant de z; il en est donc de même de $\frac{\partial p}{\partial z}$ (équation 3). Par conséquent si à l'instant t la différence des pressions en A_1 et A_2 est $\Delta p(t)$. On a

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{L} \Delta p(t). \tag{5}$$

Soit H la hauteur de la colonne liquide qui équilibrerait la différence de pression $p_1 - p_2$. Lorsque l'extrémité A_2 du capillaire est au-dessous du niveau libre S_2

$$\Delta p(t) = \rho g[H + H_1(t) - H_2(t)]. \tag{6}$$

Lorsqu'elle se trouve au-dessous

$$\Delta p(t) = \rho g[H + H_1(t) + H_2(t)]. \tag{7}$$

Le volume liquide qui s'est écoulé entre les instants o et t a pour valeur

$$V(t) = 2\pi \int^t \int_0^a w(r \mid t)\, r\, dr\, dt. \tag{8}$$

Il en résulte une diminution de H_1 définie par

$$H_1 - H_1(t) = \frac{V(t)}{\pi a_1^2}, \tag{9}$$

une augmentation de H_2 dans le premier cas, une diminution dans le second, telle que

$$(10) \qquad |H_2(t) - H_2| = \frac{V(t)}{\pi a_2^2}.$$

On a donc

$$(11) \qquad \Delta p(t) = \rho g \left[H + H_1 - H_2 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) V(t) \right]$$

ou bien

$$(12) \qquad \Delta p(t) = \rho g \left[H + H_1 + H_2 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) V(t) \right].$$

Portons cette valeur dans les équations (3) et (5). Nous formons ainsi l'équation intégrodifférentielle

$$(13) \quad \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \rho g \left[\sin\theta + \frac{H + H_1 - H_2}{L} - \frac{2}{L} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) \int_0^t \int_0^a w(r \mid t) r \, dr \, dt \right] = \rho \frac{\partial w}{\partial t}$$

que nous transformons au moyen du changement de variables $r^2 = a^2 u$ pour aboutir à l'équation

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial w}{\partial u} \right) - \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial t} - \lambda \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 < t < t}} w(t \mid u) \, du \, dt + \beta = 0,$$

où les constantes α, β, λ ont pour valeurs

$$(15) \qquad \alpha^2 = \frac{\rho}{4\eta} a^2;$$

$$(16) \qquad \lambda = \frac{\rho g a^4}{4\eta L} \left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right];$$

$$(17) \qquad \beta = \frac{\rho g a^2}{4\eta} \left[\sin\theta + \frac{h + h_1 \pm h_2}{L} \right].$$

Nous devons exprimer, d'autre part, qu'à l'instant initial les particules fluides sont en équilibre. D'où

$$(18) \qquad w(u \mid 0) = 0$$

et que les particules qui sont au contact des parois ont, à tout instant, une vitesse nulle. D'où

$$(19) \qquad w(1 \mid t) = 0.$$

Pour simplifier l'écriture nous désignerons par $A_{\alpha,\lambda}[f|u, t]$ l'opérateur, à deux paramètres

$$(20) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial f}{\partial u}\right) - \alpha^2\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\int_0^1\int_0^t f(u, t)\,du\,dt$$

applicable à une fonction f quelconque des variables u et t qui possède des dérivées partielles des deux premiers ordres.

Avec cette notation, le problème qui nous occupe revient à chercher une solution de l'équation intégrodifférentielle

$$(21) \qquad A_{\alpha,\lambda}[f(u\,|\,t)] + \beta = 0$$

telle que

$$(22) \qquad w(u\,|\,0) = w(1\,|\,t) = 0.$$

ÉTUDE DE L'OPÉRATEUR $A_{\alpha,\lambda}[f|u, v]$. — Soient u et v deux variables reliées par la condition

$$(1) \qquad v^2 - 4\alpha^2 m^2 u = 0.$$

Nous désignerons par $B_m f(u)$ l'opérateur de Bessel d'ordre zéro relatif à la fonction f et à la variable v, par J_0 et J_n les fonctions classiques du premier groupe de Bessel d'ordre zéro et n, par $I_0 I_n$ les fonctions du deuxième groupe.

1. DÉFINITION D'UN ENSEMBLE f_i DE FONCTIONS RÉELLES. — En appliquant l'opération A à une fonction f des deux variables indépendantes u et t de la forme

$$(2) \qquad f(u, t) = e^{-m^2 t} f_i(u),$$

nous obtenons

$$(3) \qquad A_{\alpha,\lambda}[f(u, t)] = D_m[f_i(u)]\,e^{-m^2 t} - \frac{\lambda}{m^2}F_i.$$

Dans cette formule F_i désigne une intégrale définie liée à la fonction f_i et déterminée par

$$(4) \qquad F_i = \int_0^1 f_i(u)\,du,$$

et D_m désigne un opérateur fonctionnel relatif à la fonction f_i, à la variable u et dépendant de trois paramètres α, m, λ ayant pour expression

$$D_m[f_i(u)] = \alpha^2 m^2 B_m[f_i \mid u] + \frac{\lambda}{m^2} F_i. \tag{5}$$

Nous définissons l'ensemble de fonctions f_i par les conditions suivantes :

1° Ce sont des fonctions de la variable u, définies et continues pour toutes les valeurs de la variable u de l'intervalle o, 1 et possédant des dérivées continues des deux premiers ordres.

2° Ces fonctions s'annulent à l'extrémité 1 de l'intervalle où elles sont définies.

3° Pour toutes les valeurs de u entre o et 1 on a

$$D_m[f_i(u)] = 0. \tag{6}$$

Une quatrième condition sera imposée à la fin du paragraphe pour obtenir une détermination complète de f_i. Nous allons obtenir explicitement un ensemble $f_i(u)$ dépendant de deux paramètres.

On a, en effet, en désignant par K_i une constante réelle,

$$D_m[J_0 + K_i] = \alpha^2 m^2 K_i + \frac{\lambda}{2\alpha^2 m^4} \int_0^{2\alpha m} J_0(v)\, v\, dv + \frac{\lambda k_i}{m^2}. \tag{7}$$

Par conséquent l'expression $D_m[J_0 + k_i]$ sera nulle si l'on choisit pour k_i une valeur définie en fonction de λ, α, m par

$$k_i = \frac{-\lambda}{2\alpha^2 m^2[\lambda + \alpha^2 m^4]} \int_0^{2\alpha m} J_0(v)\, v\, dv. \tag{8}$$

L'intégrale qui figure dans le deuxième membre de cette relation est facile à calculer. En tenant compte, en effet, de

$$J_0(v) = \frac{dJ_1}{dv} + \frac{1}{v} J_1(v), \tag{9}$$

on peut écrire

$$\int v J_0(v)\, dv = \int v\, dJ_1 + \int J_1\, dv \tag{10}$$

et une intégration par parties conduit à

$$\int v J_0(v)\,dv = v J_1(v). \tag{11}$$

Portant cette valeur dans la relation (8), nous obtenons l'expression de k_i sous la forme

$$k_i = -\frac{\lambda}{\alpha m[\lambda + \alpha^2 m^4]} J_1(2\alpha m). \tag{12}$$

Il résulte de là, que les fonctions $J_0 + k_i$ satisfont à toutes les conditions relatives aux fonctions f_i, si la valeur k_i peut être choisie de façon telle que l'on ait

$$k_i = -J_0(2\alpha m). \tag{13}$$

Posons

$$2\alpha m = x; \tag{14}$$

$$16\alpha^2\lambda = \mu. \tag{15}$$

La comparaison de (12) et (13) conduit à une relation entre les paramètres α, λ, m sous la forme d'une relation entre x et μ

$$U(x \mid \mu) = 2\mu J_1(x) - x(x^4 + \mu) J_0(x) = 0. \tag{16}$$

A toute solution réelle $x(\mu)$ de cette équation correspond une fonction f_i définie à un facteur près. Nous achèverons la détermination par la condition

4° $$F_i = \int_0^1 f_i(u)\,du = 1.$$

On obtient, dans ces conditions,

$$f_i(u) = \frac{\mu[J_0(x_i\sqrt{u}) - J_0(x_i)]}{x_i^4 J_0(x_i)}. \tag{17}$$

En anticipant sur les résultats qui seront démontrés dans les paragraphes suivants, nous pouvons dire que la formule (17) définit un ensemble de fonctions à deux paramètres, le paramètre i qui pourra prendre toutes les valeurs entières positives et le paramètre μ dont la valeur est liée, ainsi que nous l'avons vu, aux caractéristiques du liquide et du capillaire. Ces fonctions satisfont aux quatre conditions que nous avons explicitement formulées plus haut. On en conclut la relation

$$(18) \qquad A_{\alpha,\lambda}\left[e^{-\frac{x_i^2}{4\alpha^2}t}f_i(u)\right] = -\frac{\mu}{4x_i^2} = -\frac{x_i^2 J_0(x_i)}{4[2J_1(x_i) - x_i J_0(x_i)]}$$

qui sera utilisée ultérieurement.

Les deux dernières formules que nous venons d'écrire supposent l'existence effective des nombres x_i liés à chaque valeur de μ. Il nous faut donc étudier la correspondance entre ces deux variables. Les formules écrites supposent la réalité de x_i. Cependant nous ferons l'étude complète dans le plan complexe x_i entier, de façon à obtenir d'un seul coup toutes les formules qui nous seront utiles dans ce Mémoire.

2. Étude de la correspondance entre la variable μ et l'ensemble numérique x_i attaché à l'ensemble fonctionnel f_i. — *a.* Pour les valeurs réelles de x, variant de façon continue, l'équation

$$(1) \qquad U(x \mid \mu) = 0$$

définit une fonction $\mu(x)$ continue, sauf aux points de l'ensemble ξ défini par

$$(2) \qquad U_1(\xi) = 2J_1(\xi) - \xi J_0(\xi) = 0.$$

Si nous désignons par $j_{0,n}$ et $j_{0,n+1}$ deux zéros consécutifs de la fonction de Bessel d'ordre zéro, on a

$$(3) \qquad U_1(j_{0,n})U_1(j_{0,n+1}) < 0.$$

D'autre part, la fonction $U_1(x)$ est une fonction entière dont la dérivée

$$(4) \qquad \frac{dU_1}{dx} = J_0(x) + \left(x - \frac{2}{x}\right)J_1(x)$$

prend, en un point de l'ensemble ξ, la valeur

$$(5) \qquad \left(\frac{dU_1}{dx}\right)_{x=\xi} = \frac{\xi^2}{2}J_0(\xi),$$

mais $U_1(x)$ est continue dans l'intervalle $j_{0,n}, j_{0,n+1}$ et $\frac{dU_1}{dx}$ ne saurait avoir le même signe aux différents points de l'ensemble ξ intérieurs à cet intervalle. Par conséquent, il ne peut pas exister plus d'une valeur ξ dans cet intervalle. La relation (3) montre qu'il en existe une. Pour une localisation plus précise des valeurs ξ, on peut considérer l'intervalle $j_{1,n+1}\, j_{0,n+1}$ et obtenir des résultats analogues aux précédents.

Dans le domaine de l'origine, on a, d'autre part,

$$U_1(x) = \frac{x^3}{8} + \theta(x)x^5, \tag{6}$$

$\theta(x)$ étant une fonction bornée en valeur absolue. En ordonnant les valeurs remarquables obtenues jusqu'à présent suivant une suite croissante, nous obtenons la suite infinie

$$0,\quad \xi_1,\quad j_{01},\quad j_{11},\quad \xi_2,\quad j_{02},\quad j_{12},\quad \ldots,\quad j_{1n},\quad \xi_n,\quad j_{0n},\quad j_{1n+1},\quad \xi_{n+1},\quad \ldots.$$

La fonction $\mu(x)$ définie implicitement par l'équation (1) est donc continue dans l'intervalle $j_{0,n}\, j_{1,n+1}$ et, comme $(-1)^{n+1}J_1(j_{0,n})$ et $(-1)^n J_0(j_{1,n+1})$ ont des valeurs positives, les deux expressions

$$U(\mu\,|\,j_{0,n})\,U(\mu\,|\,j_{1,n+1}) \quad \text{et} \quad \mu[j_{1,n+1}^4 + \mu]$$

ont le même signe.

Supposons d'abord μ positif. L'équation (1) considérée comme une équation en x aura un nombre impair de racines dans l'intervalle $j_{0,n}\, j_{1,n+1}$ et à une variation infiniment petite $d\mu$ correspondra une variation infiniment petite dx définie par

$$U_1(x)\,d\mu + \left[(\mu - 5x^4)J_0(x) + \left(x^5 + \mu x - \frac{2\mu}{x}\right)J_1(x)\right]dx = 0. \tag{7}$$

Si le point considéré appartient à l'ensemble ξ, on peut mettre cette expression sous la forme

$$\frac{\xi_i^2 J_0(\xi_i)}{2\mu}\,[2\xi_i^3\,d\mu + (\mu^2 - 12\mu\xi_i^2 + 2\mu\xi_i^4 + \xi_i^8)\,dx].$$

Le discriminant de la forme quadratique en μ qui figure dans cette expression a pour valeur

$$12\xi_i^4(3 - \xi_i^2)$$

et par conséquent $d\mu$ et dx ont même signe si ξ_i est supérieur à $\sqrt{3}$, ce qui a lieu effectivement pour toutes les valeurs de i à partir de $i = 1$.

La relation $U(x \mid \mu)$ définit donc dans l'intervalle $\xi_n j_{0,n}$ une fonction $x(\mu)$ dont les valeurs extrêmes sont

$$x_n(0) = j_{0.n}, \qquad x_n(\infty) = \xi_n(+0).$$

Lorsque μ prend des valeurs négatives, on aboutit à des conclusions analogues. Dans ce cas, on peut écrire

$$j_{0,n} < x_n < \xi_{n+1},$$
$$x_n(0) = j_{0,n}, \qquad x_n(-\infty) = \xi_{n+1}(-0).$$

Il nous reste encore à considérer l'intervalle $0 < x < \xi_1$. Or, dans le domaine du point $x = 0$, U est infiniment petit en valeur absolue et a le signe du paramètre μ. D'autre part

$$U(j_{01} \mid \mu) = 2\mu J_1(j_{01})$$

a également le signe de μ et

$$U(\xi_1 - 0 \mid \mu) = -\xi_1^5 J_0(\xi_1)$$

a une valeur positive. Enfin, si μ est définie en fonction de x par l'équation (1), $\frac{d\mu}{dx}$ s'annule pour les valeurs de x qui satisfont à l'équation

$$(8) \qquad 3xJ_0^2(x) - 6J_0(x)J_1(x) + xJ_1^2(x) = 0.$$

Or cette équation admet une racine et une seule dans l'intervalle $0\xi_1$. Cette racine correspond à la valeur 1,71 de x et $M = 10,77$ (à 1/100^e près).

Il résulte de là que pour les valeurs négatives de μ et pour les valeurs positives supérieures à une certaine quantité M dont l'ordre de grandeur est 10, l'équation $U(x \mid \mu) = 0$, où μ a une valeur donnée, n'admet pas de racines réelles de module inférieur à ξ_1. Pour les valeurs positives de μ inférieures à M elle admet deux racines x_1 et x_2 qui, lorsque l'on fait varier μ de façon continue, définissent deux fonctions continues, la première croissante, la deuxième décroissante, dont les valeurs limites sont définies par

$$x_1(0) = 0, \qquad x_1(M) = 1,71;$$
$$x_2(0) = j_{0,1}, \qquad x_2(M) = 1,71.$$

Dans les calculs numériques liés à l'étude des écoulements laminaires, cette fonction $x_1(\mu)$ a une grande importance. Aussi dressons-nous un tableau de correspondance permettant de suivre ses variations dans le domaine utile.

Valeurs de $x_1(\mu)$.	Valeurs correspondantes de μ (à 10^{-4} près).	Valeurs de $x_1(\mu)$.	Valeurs correspondantes de μ (à 10^{-4} près).
2.10^{-2}	0,0003	0,5	1,9143
4 »	0,08189	0,6	2,7486
10^{-1}	0,0907	0,7	3,6001
0,2 »	0,3168	0,8	4,5670
0,3 »	0,5473	0,9	5,6010
0,4 »	1,2417	1	6,6590

Dans le domaine de l'origine, la fonction $x_1(\mu)$ est une fonction à deux branches. La fonction

$$X = \frac{x^2(\mu)}{\mu}$$

est holomorphe et définie par l'équation

$$(9) \qquad \sum_0^\infty \frac{(-1)^n \mu^n X^{n+1}}{[2.4.6, \ldots, (2n-4)]^2}\left[1 + \frac{\mu}{2^4(n-1)^2 n(n+1)}\right] - \frac{1}{8} = 0.$$

D'où l'on déduit

$$(10) \qquad X = \frac{1}{2^3} + \frac{\mu}{3.2^7} + \frac{65}{3^2.2^{16}}\mu^2 + \theta_1(\mu)\mu^3,$$

$\theta_1(\mu)$ restant finie pour $\mu = 0$. On a donc

$$(11) \qquad x_1(\mu) = \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{2}}\left[1 + \frac{\mu}{96} + \frac{19\mu^2}{12.288} + \theta_2(\mu)\mu^3\right].$$

Dans le même domaine $x_n(\mu)$ est holomorphe et définie par

$$(12) \qquad x_n(\mu) = j_{0,n} - \frac{2}{j_{0n}^5}\mu + \frac{2(j_{0n}^2 - 11)}{j_{0n}^{11}}\mu^2 + \theta_3(\mu)\mu^3,$$

j_{0n} désignant le zéro d'ordre n de la fonction J_0 de Bessel et $\theta_3(\mu)$ étant bornée pour $\mu = 0$.

b. Lorsque x prend des valeurs purement imaginaires de la forme iy, l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$2\mu I_1(y) - y[y' + \mu] I_0(y) = 0, \tag{13}$$

où $I_0(y)$ et $I_1(y)$ représentent les fonctions d'ordre o et 1 du second groupe de Bessel (¹), $d\mu$ et dy étant des variations infiniment petites de μ et de y à partir de deux valeurs associées, on déduit de (13) l'inégalité

$$\frac{d\mu}{dy}[y I_1^2(y) + 6 I_0(y) I_1(y) - 3y I_0^2(y)] > 0. \tag{14}$$

Ceci posé, si l'on étudie les variations de la fonction $\frac{I_1(y)}{I_0(y)}$, on constate que la courbe C_1 représentée dans le plan (y_1, y_2) par l'équation

$$(y_2) I_0(y_1) - I_1(y_1) = 0, \tag{15}$$

n'a qu'un point commun avec la cubique C_2 d'équation

$$y_1 y_2^2 + 6 y_2 - 3 y_1 = 0, \tag{16}$$

le point (o,o). Or, au voisinage de ce point, on peut écrire

$$\frac{I_1(y_1)}{I_0(y_1)} = \frac{y_1}{2} - \frac{y_1^3}{16} + o(y_1^5), \tag{17}$$

tandis que l'ordonnée du point de la cubique C_2, qui correspond à l'abscisse y_1, est définie par

$$y_2 = \frac{y_1}{2} - \frac{y_1^3}{24} + o(y_1^5). \tag{18}$$

Il résulte de là qu'au voisinage de l'origine et par conséquent, d'après la disposition des courbes C_1 et C_2, pour toutes les valeurs positives de y_1 on a

$$I_1(y_1) - y_2 I_0(y_1) < 0, \tag{19}$$

et par conséquent

$$y I_1^2(y) + 6 I_0(y) I_1(y) - 3y I_0^2(y) < 0. \tag{20}$$

(¹) WHITTAKER and WATSON, *Modern Analysis*, Fourth Edition, § 17-7.

A chaque valeur positive de y correspond une valeur négative pour

$$(21) \qquad \mu = \frac{y^2 \mathrm{I}_0(y)}{\mathrm{I}_1(y) - y\mathrm{I}_0(y)}$$

bien déterminée et finie. Pour $y = 0$, $\mu = 0$ et lorsque y augmente indéfiniment $|\mu|$ augmente également au delà de toute limite. Réciproquement, à une valeur quelconque négative attribuée à μ correspondent deux valeurs bien déterminées de y, opposées.

En résumé, pour toute valeur négative attribuée au paramètre μ réel, l'équation

$$\mathrm{U}(x \mid \mu) = 0$$

admet deux racines complexes conjuguées dont les affixes sont situés sur l'axe des quantités imaginaires. Lorsque μ tend vers zéro par valeurs négatives, ces points tendent vers l'origine. Pour les valeurs positives de μ, il n'existe aucune racine, représentée par un point de l'axe imaginaire.

c. Considérons maintenant, dans le plan complexe $z = x + iy$, le contour $\Gamma(\rho \mid \varphi)$ limité par le rectangle dont les sommets ont pour affixes $\pm \rho e^{\pm i\varphi}$, ρ et φ étant choisies de façon telle que l'expression

$$\rho \frac{\cos\varphi}{\pi} - \frac{1}{4}$$

soit égale à un nombre entier m. Dans le domaine $\mathrm{D}(\rho \mid \varphi)$, limité par Γ, les deux fonctions

$$(22) \qquad \mathrm{F}_1(z) = z^2 \mathrm{J}_0(z)$$

et

$$(23) \qquad \mathrm{F}_2(z) = \frac{\mu}{z^3}[2\mathrm{J}_1(z) - z\mathrm{J}_0(z)]$$

sont des fonctions holomorphes de la variable complexe z.

Pour $|z|$ suffisamment grand les expressions de $\mathrm{J}_0(z)$ et de $\mathrm{J}_1(z)$ se calculent par les formules asymptotiques

$$(24) \qquad \mathrm{J}_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[a_0(z)\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + b_0(z)\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$(25) \qquad \mathrm{J}_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[a_1(z)\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + b_1(z)\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

où $a_0(z)$, $a_1(z)$, $b_0(z)$, $b_1(z)$ désignent les fonctions définies par les séries semi-convergentes

$$a_0(z) = 1 - \frac{9}{128z^2} + o\left(\frac{1}{z^4}\right); \tag{26}$$

$$b_0(z) = \frac{1}{8z} + o\left(\frac{1}{z^3}\right); \tag{27}$$

$$a_1(z) = \frac{3}{8z} + o\left(\frac{1}{z^3}\right); \tag{28}$$

$$b_1(z) = 1 + \frac{15}{128z^2} + o\left(\frac{1}{z^4}\right). \tag{29}$$

Désignons par a'_0, b'_0, a'_1, b'_1 les modules maxima des fonctions ainsi définies sur le contour Γ, par a''_0, b''_0, a''_1, b''_1 les modules minima. Lorsque m augmente indéfiniment

$$\left\{\begin{array}{lll}
a'_0 \sim 1, \quad a''_0 \sim 1; & & \\
a'_1 \sim \dfrac{3}{8\rho\cos\varphi} & \left(\varphi \geqq \dfrac{\pi}{4}\right); & a''_1 \sim \dfrac{3}{8\rho}; \\
a'_1 \sim \dfrac{3}{8\rho\sin\varphi} & \left(\varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}\right); & \\
b'_1 \sim 1, \quad b''_1 \sim 1; & & \\
b'_0 \sim \dfrac{1}{8\rho\cos\varphi} & \left(\varphi \geqq \dfrac{\pi}{4}\right); & \\
b'_0 \sim \dfrac{1}{8\rho\sin\varphi} & \left(\varphi \leqq \dfrac{\pi}{4}\right); & b''_0 \sim \dfrac{1}{8\rho}.
\end{array}\right. \tag{30}$$

Considérons la portion du contour Γ contenue dans le premier quadrant. Soient A le point situé sur Ox, B le sommet $\rho e^{i\varphi}$ et C le point situé sur Oy; M le point de Γ situé à la distance δ de AB et à la distance y de Ox.

On a

$$r_1^2 = \left|\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{\operatorname{ch} 2y + \cos 2\delta}{2}; \tag{31}$$

$$r_2^2 = \left|\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2\delta}{2}, \tag{32}$$

et, d'après (24) et (25),

$$\left|\frac{J_1(M)}{J_0(M)}\right| < \frac{a'_1 r'_1 + b'_1 r'_2}{a''_0 r''_1 - b'_0 r'_2}. \tag{33}$$

Si M est un point de AB,

$$\delta = 0, \qquad (0 < y < \rho \sin\alpha);$$
$$r_1 = \operatorname{ch} y, \quad r_2 = \operatorname{sh} y.$$

(34) $$\left|\frac{J_1}{J_0}\right| < \frac{a'_1 + b'_1 \operatorname{th} y}{a''_0 - b'_0 \operatorname{th} y};$$

(35) $$\begin{cases} a'_1 b'_0 - a''_0 b'_1 \sim \dfrac{}{64\rho^2 \cos^2\varphi} - 1 & \left(\text{pour } \varphi > \dfrac{\pi}{4}\right); \\ a'_1 b'_0 - a''_0 b'_1 \sim \dfrac{3}{64\rho^2 \sin^2\varphi} - 1 & \left(\text{pour } \varphi < \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

On a donc

(36) $$a'_1 b'_0 - a''_0 b'_1 < 0,$$

et le maximum de la quantité qui figure au second membre de l'inégalité (34) correspond à $y = 0$ et a pour valeur $\frac{a'_1}{a''_0}$ dont l'expression asymptotique est $\frac{a'_1}{a''_0} \sim \frac{3}{8\rho \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$. Si M est un point de BC, δ a une valeur comprise entre 0 et $m\pi - \frac{\pi}{4}$. Quand M décrit BC, $\cos\delta$ prend donc toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$,

$$r'_1 = r'_2 = \operatorname{ch}(\rho \sin\varphi),$$
$$r''_1 = \operatorname{sh}(\rho \sin\varphi).$$

En étudiant les variations de $a'_1 r_1 + b'_1 r_2$ le long de BC, on trouve

$$\left|\frac{J_1}{J_0}\right|_M < \frac{a'_1 \operatorname{th}(\rho \sin\varphi) + b'_1}{a''_0 \operatorname{th}(\rho \sin\varphi) - b'_0}.$$

L'expression asymptotique du deuxième membre est

$$1 + \frac{1}{2\rho \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}.$$

Il en résulte que, à chaque contour Γ, nous pouvons faire correspondre un nombre $R(\Gamma)$, qui reste borné supérieurement par un nombre R tel que, lorsque le point M d'affixe z décrit le contour Γ, on ait

(38) $$\left|\frac{J_1(z)}{J_0(z)}\right|_\Gamma < R(\Gamma) < R.$$

En choisissant m assez grand, on aura donc, pour tout point M situé sur Γ,

$$|F_2(z)| < |F_1(z)|. \tag{39}$$

L'inégalité (39) sera en effet assurée si l'on a

$$2\left|\frac{J_1(z)}{J_0(z)}\right| < |z^5| - \mu|z|. \tag{40}$$

Or le premier membre admet une borne supérieure R, le deuxième membre a pour valeur minima

$$\rho^5 \sin^5\varphi - \mu\rho \sin\varphi \qquad \left(\text{si } \varphi \leqq \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\rho^5 \cos^5\varphi - \mu\rho \cos\varphi \qquad \left(\text{si } \varphi \geqq \frac{\pi}{4}\right).$$

Posons

$$S(m) = \frac{\pi}{2^{10}}(4m-1)[(4m-1)^4\pi^4 - 2^8\mu],$$

il existe une valeur m_1 telle que pour $m > m_1$

$$R < S(m), \tag{41}$$

et, *a fortiori*, les inégalités (40) et (39) seront vérifiées pour $m > m_1$.

Pour un contour Γ satisfaisant aux conditions trouvées, on aura

$$\left|\frac{2J_1(z) - zJ_0(z)}{z^5 J_0(z)}\right| < \frac{1}{\mu}, \tag{42}$$

et par conséquent, lorsque z décrit le contour Γ, le point d'affixe

$$Z = 1 - \frac{\mu}{z^2 J_0(z)} \frac{2J_1(z) - zJ_0(z)}{z^3} \tag{43}$$

décrit une courbe fermée Γ' intérieure au cercle de rayon unité dont le centre a pour affixe le point $Z = 1$. Si nous supposons que le point $M(z)$ décrit le contour Γ dans le sens direct en partant de A pour y revenir, le point Z décrit la courbe Γ' et les variations de l'argument de Z sont telles, qu'après le circuit cet argument reprend sa valeur initiale. Si nous considérons les variations pour un même circuit des arguments de $z^2 J_0(z)$ d'une part, de

$$z^2 J_0(z) + \frac{\mu}{z^3}[2J_1(z) - zJ_0(z)]$$

d'autre part, il résulte de ce que nous venons de constater que les variations sont les mêmes et, par conséquent, d'après un théorème classique de la théorie des fonctions analytiques, les équations

$$F_1(z) = 0 \tag{44}$$

et

$$F_1(z) + F_2(z) = 0 \tag{45}$$

ont le même nombre de racines à l'intérieur de Γ. Or, l'équation (44) admet, comme racines, l'origine (racine double) et les zéros de $J_0(z)$ (au nombre de m). L'équation (45) admet donc $(m+2)$ racines à l'intérieur de Γ. Or, dans les paragraphes précédents, nous avons déterminé les racines situées sur l'un ou l'autre des axes Ox et Oy, il est facile d'en déduire le nombre des racines complexes. On arrive ainsi au résultat suivant, M étant la quantité calculée au paragraphe **2** a :

1° pour $\mu < 0$ l'équation $U(x \mid \mu) = 0$ a une infinité de racines réelles appartenant à la suite x_i étudiée au paragraphe **2** a et deux racines imaginaires pures étudiées au paragraphe **2** b;

2° pour $0 < \mu < M$ l'équation $U(x \mid \mu) = 0$ a toutes ses racines réelles. Ces racines appartiennent à la suite x_i étudiée au paragraphe **2** a;

3° pour $\mu > M$ l'équation $U(x \mid \mu) = 0$ admet une infinité de racines réelles appartenant à la suite x_i.

Elle admet en outre deux racines complexes.

Les variations des affixes correspondant aux différentes racines de l'équation, lorsque μ varie, se déduisent facilement des renseignements trouvés dans les études faites aux paragraphes **2** a, **2** b, **2** c. Notons que, dans les conditions d'emploi des viscosimètres à écoulement, nous nous trouvons dans le cas où toutes les racines sont des racines réelles.

3. Étude de l'ensemble fonctionnel f_i. — A chaque terme de la suite x_i définie au paragraphe **2** a, nous ferons correspondre la fonction $f_i(u)$ définie et continue pour toutes les valeurs réelles de u de module inférieur à l'unité déterminée par la formule

$$f_i(u) = \frac{\mu}{x_i^2 J_0(x_i)} \left[J_0(x_i\sqrt{u}) - J_0(x_i) \right]. \tag{1}$$

Avec les notations du paragraphe 1 la fonction $f_i(u)$ satisfait aux conditions

$$F_i = 1; \tag{2}$$

$$D_{\frac{x_i}{2\alpha}}(f_i) = 0; \tag{3}$$

$$f_i(1) = 0. \tag{4}$$

Ceci posé, soient x_i et x_k deux termes distincts de la suite et soient f_i et f_k les fonctions correspondantes. En vertu des conditions (3) nous pouvons écrire

$$\int_0^1 \left[D_{\frac{x_i}{2\alpha}}(f_i) f_k - D_{\frac{x_k}{2\alpha}}(f_k) f_i \right] du = 0; \tag{5}$$

$$\int_0^1 \left[f_k\, d\left(u \frac{df_i}{du}\right) - f_i\, d\left(u \frac{df_k}{du}\right) \right] + \frac{x_i^2 - x_k^2}{4} \int_0^1 f_i(u) f_k(u)\, du + \frac{\mu}{4} \left[\frac{F_k}{x_i^2} - \frac{F_i}{x_k^2} \right] = 0. \tag{6}$$

La première intégrale étant nulle en vertu des conditions (4), on en déduit

$$\int_0^1 f_i(u) f_k(u)\, du = \frac{\mu}{x_i^2 x_k^2}. \tag{7}$$

On a, d'autre part,

$$\int_0^1 f_i(u) D_{\frac{x_i}{2\alpha}}[f_i(u)]\, du = 0, \tag{8}$$

expression que l'on peut mettre sous la forme

$$\int_0^1 f_i\, d\left(u \frac{df_i}{du}\right) + \frac{x_i^2}{4} \int_0^1 f_i^2(u)\, du + \frac{\mu}{4x_i^2} = 0, \tag{9}$$

or

$$\int_0^1 f_i\, d\left(u \frac{df_i}{du}\right) = \left| u f_i \frac{df_i}{du} \right|_0^1 - \int_0^1 u \left(\frac{df_i}{du}\right)^2 du \tag{10}$$

$$= -\int_0^x \frac{v}{2} \frac{df_i^2}{dv} = -\frac{\mu^2}{x_i^8} \int_0 \frac{v}{2} \frac{J_1^2(v)}{J_0^2(x_i)}\, dv,$$

or

$$(11)\qquad \int_0 v J_1^2(v)\,dv = \frac{v^2}{2}\left[J_0^2(v) + J_1^2(v) - \frac{2}{v} J_0(v) J_1(v)\right].$$

On déduit de là

$$(12)\qquad \int_0^1 f_i^2(u)\,du = \frac{\mu_i^2}{x_i^8}\left[\frac{J_0^2(x_i) + J_1^2(x_i)}{J_0^2(x_i)} - \frac{2}{x_i}\frac{J_1(x_i)}{J_0(x_i)} - \frac{x_i^4}{\mu}\right].$$

En tenant compte de l'équation

$$(13)\qquad U(x_i \mid \mu) = 0;$$

$$(14)\qquad \frac{J_1(x_i)}{J_0(x_i)} = \frac{x(x^4 + \mu)}{2\mu};$$

$$(15)\qquad \int_0^1 f_i^2(u)\,du = \frac{\mu^2}{x_i^8} - \frac{(x_i^4 + \mu)^2 - 8\mu x_i^2}{4 x_i^6}.$$

Considérons maintenant l'ensemble des termes de la suite x_i limitée au terme de rang n et associons à chaque fonction $f_i(u)$, ou ce qui revient au même à chaque valeur de x_i, un coefficient numérique c_i suivant une loi déterminée.

La fonction

$$(16)\qquad g_{n,\alpha}(u) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i f_i(u)$$

est une fonction définie et continue pour les valeurs réelles de u de module inférieur à l'unité.

En vertu des conditions imposées à $f_i(u)$, on a

$$(17)\qquad g_{n,\alpha}(1) = 0, \qquad \text{quel que soit l'ensemble } c;$$

et

$$(18)\qquad \int_0^1 g_{n\alpha}(u)\,du = \sum_{i=1}^{i=n} c_i F_i = \sum_{i=1}^{i=n} c_i.$$

Soit m un nombre quelconque $m < n$, on peut écrire

$$(19)\qquad \int_0^1 g_{n,\alpha}(u) f_m(u)\,du = \sum_{i=1}^{i=n}{}' c_i \int_0^1 f_i(u) f_m(u)\,du + c_m \int_0^1 f_m^2(u)\,du,$$

la somme Σ' étant étendue à toutes les valeurs de i sauf celle qui correspond au terme de rang m. On en déduit, d'après (7) et (15),

$$(20)\qquad \int_0^1 g_{n,\alpha}(u) f_m(u)\,du = \sum_{i\neq m} \frac{\mu}{x_m^2}\frac{c_i}{x_i^2} + c_m \int_0^1 f_m^2(x_m)\,du.$$

A chaque ensemble c se trouvent ainsi associées les deux constantes

$$(21)\qquad C_1(c) = \sum c_i;$$

$$(22)\qquad C_2(c) = \sum \frac{c_i}{x_i^2},$$

et, d'après (20),

$$(23)\qquad c_m\left[\int_0^1 f_m^2(u)\,du - \frac{\mu}{x_m^4}\right] + \frac{\mu C_2(c)}{x_m^2} = \int_0^1 g_{n\alpha} f_m\,du.$$

Posons

$$(24)\qquad k(x_m) = \frac{J_0^2(x_m) + J_1^2(x_m)}{J_0^2(x_m)} - \frac{2}{x_m}\frac{J_1(x_m)}{J_0(x_m)} - \frac{2x_m^4}{\mu},$$

on déduit de là

$$(25)\qquad c_m = \frac{x_m^8}{\mu^2 k(x_m)}\left[\int_0^1 g_{n\alpha}(u) f_m(u)\,du - \frac{\mu C_2(c)}{x_m^2}\right],$$

et, par suite,

$$(26)\qquad g(u) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^8}{\mu^2 k(x_i)}\left[\int_0^1 g(u) f_i(u)\,du - \frac{\mu C_2(c)}{x_i^2}\right] f_i(u).$$

c. A l'ensemble c, précédemment défini, associons de la même façon la fonction de deux variables (u, t) définie par

$$(27)\qquad h(u\,|\,t) = \sum c_i f_i(u) e^{-\frac{x_i^2}{4\alpha^2}t}.$$

D'après les conditions imposées aux fonctions f, on a

$$(28)\qquad h(1\,|\,t) = 0;$$

$$(29)\qquad h(u\,|\,0) = g(u).$$

Si nous appliquons l'opération A à cette fonction, nous obtenons grâce aux propriétés établies au paragraphe 1

$$(30)\qquad A_{\alpha.\lambda}[h(u\,|\,t)] = \sum c_i D_{m_i}[f_i(u)] e^{-m_i^2 t} + \lambda \sum \frac{c_i}{m_i^2} F_i$$

avec $m_i = \frac{x_i}{2\alpha}$, et en vertu de **3** (3),

$$A_{\alpha,\lambda}[h(u \mid t)] = 4\lambda\alpha^2 C_2 = \frac{\mu}{4} C_2(c). \tag{31}$$

S'il est possible de déterminer l'ensemble c de façon telle que l'on ait

$$g(u) = 0; \tag{32}$$

$$\mu C_2 + 4\beta = 0, \tag{33}$$

la fonction h associée à cet ensemble satisfait à toutes les conditions imposées au début du Mémoire à la fonction $w(u \mid t)$. En admettant, provisoirement, la possibilité de cette détermination, la relation (25) détermine c_i sous la forme

$$c_i = -\frac{x_i^6}{\mu}\,\frac{C_2}{k(x_i)} = +\frac{4\beta}{\mu^2}\,\frac{x_i^6}{k(x_i)}. \tag{34}$$

D'où nous déduisons

$$g_n(u) = \frac{4\beta}{\mu}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^2}{k(x_i)}\,\frac{J_0(x_i\sqrt{u}) - J_0(x_i)}{J_0(x_i)}; \tag{35}$$

$$h_n(u \mid t) = \frac{4\beta}{\mu}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^2}{k(x_i)}\,\frac{J_0(x_i\sqrt{u}) - J_0(x_i)}{J_0(x_i)}\,e^{-\frac{x_i^2 t}{4\alpha^2}}. \tag{36}$$

Pour étudier la façon dont se comportent ces fonctions aux limites des domaines, où elles sont définies, nous introduirons les fonctions de la variable complexe z qui se confondent avec U et K pour les valeurs réelles de z, c'est-à-dire les fonctions définies dans le plan complexe tout entier par

$$U(z) = \mu[2J_1(z) - zJ_0(z)] - z^3 J_0(z); \tag{37}$$

$$K(z) = \frac{2z^4}{\mu} - \frac{J_0^2(z) + J_1^2(z)}{J_0^2(z)} + \frac{2}{z}\,\frac{J_1(z)}{J_0(z)}. \tag{38}$$

Pour les valeurs de z, qui appartiennent à la suite x_i, on peut écrire

$$K(x_i) = \frac{x_i^2}{4\mu^2}[12\mu x_i^2 - (x_i^4 + \mu)^2] \tag{39}$$

et

$$\left[\frac{dU}{dz}\right]_{z=x_i} = -2\mu J_0(x_i) K(x_i). \tag{40}$$

Or, la fonction

$$(41)\qquad W_1(z) = \frac{2z^2}{U(z)}[J_0(z\sqrt{u}) - J_0(z)],$$

où u a une valeur déterminée est une fonction méromorphe de z. Elle admet pour pôles tous les points de la suite x_i et ceux-là seulement. Le résidu correspondant au pôle x_i a pour valeur

$$(42)\qquad R_1(x_i) = -\frac{x_i^2}{\mu}\,\frac{J_0(x_i\sqrt{u}) - J_0(x_i)}{J_0(x_i)k(x_i)};$$

$$(43)\qquad R_1(x_i \mid u) = -\frac{x_i^6}{\mu^2}\,\frac{f_i(u)}{k(x_i)}.$$

Considérons le contour Γ_n obtenu en donnant à m la valeur n et à φ une valeur quelconque, $\frac{\pi}{4}$ par exemple, on peut écrire, d'après (35) et (42),

$$(44)\qquad g(u) = -4\beta\sum_n R_1(x_i \mid u),$$

la sommation étant étendue à tous les pôles de la fonction $W_1(z \mid u)$ intérieurs au contour $\Gamma(n)$.

L'étude de la fonction W_1, dans le domaine du point à l'infini, montre que, lorsque n augmente indéfiniment, la somme $\Sigma R_1(x_i \mid u)$ tend vers zéro, quelle que soit la valeur attribuée à u. On en conclut que la fonction $g(u)$, obtenue en remplaçant dans l'expression (35) la somme Σ par une série infinie étendue à tous les termes de la suite (x_i), est une fonction identiquement nulle.

A chaque fonction de l'ensemble $g_n(u)$ obtenue, d'après (35), en donnant à n des valeurs croissantes correspond, d'après (22), la constante

$$(45)\qquad C_2(n) = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{c_i}{x_i^2} = \frac{4\beta}{\mu^2}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^4}{k(x_i)}$$

à la fonction $g(u)$ limite des fonctions $g_n(u)$, lorsque n augmente indéfiniment correspond la constante

$$(46)\qquad C_2 = \frac{4\beta}{\mu^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i^4}{k(x_i)}$$

limite de $C_2(n)$ lorsque n augmente indéfiniment. Pour calculer cette limite, nous introduirons la fonction

$$(47) \qquad W_2(z) = \frac{z^4 J_0(z)}{U(z)}$$

dont le résidu, qui correspond au pôle x_i, a pour valeur

$$(48) \qquad \frac{x_i^4}{2\mu K(x_i)} = R_2(x_i),$$

de sorte que

$$(49) \qquad C_2(n) = -\frac{8\beta}{\mu}\sum_{i=1}^{i=n} R_2(x_i),$$

et, d'après le théorème de Cauchy,

$$(50) \qquad C_2(n) = \frac{4i\beta}{\mu\pi}\int_{\Gamma_n} W_2(z)\,dz,$$

Par conséquent, en vertu des propriétés de $U(z)$ dans le domaine du point à l'infini

$$(51) \qquad C_2 = \lim_{n\to\infty} C_2(n) = -\frac{4\beta}{\mu}.$$

En résumé, sous réserve des conditions de convergence, qui seront examinées dans le paragraphe suivant, la fonction

$$(52) \qquad h(u,t) = \frac{4\beta}{\mu}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{x_i^2}{K(x_i)}\,\frac{J_0(x_i\sqrt{u}) - J_0(x_i)}{J_0(x_i)}\,e^{-\frac{x_i^2}{4\alpha^2}t}$$

satisfait aux trois conditions suivantes :

$$h(1\,|\,t) = 0;$$
$$h(u\,|\,0) = 0;$$
$$A_{\alpha,\lambda}[h(u\,|\,t)] + \beta = 0.$$

4. Détermination et étude de la fonction $w(u\,|\,t)$. — Nous avons étudié au paragraphe **2** les termes de la suite x_i, lorsque μ est très petit, et nous avons vu que, lorsque μ tend vers zéro, les termes de cette suite tendent respectivement vers les zéros j_{0n} de Bessel. Nous allons établir maintenant que j_{0n} est une valeur asymptotique de x_n, lorsque n augmente indéfiniment, ceci quelle que soit la valeur attribuée à la constante μ. Dans l'étude de l'équation $U(x \mid \mu) = 0$, nous avons démontré l'existence d'un terme de la suite x_i entre deux zéros consécutifs quelconques de la fonction J_0 de Bessel.

Si nous posons

$$x_n = j_{0n} + \xi_n, \tag{1}$$

ξ_n satisfait donc à l'inégalité

$$\xi_n < j_{0n+1} - j_{0n},$$

et nous pouvons écrire

$$J_0(x_n) = -\xi_n J_1(j_{0n}) + \frac{\xi_n^2}{4}[J_2(j_{0n} + \theta_n \xi_n) - J_0(j_{0n} + \theta_n \xi_n)], \tag{2}$$

θ_n étant une fonction de n dont le module reste inférieur à l'unité. De même

$$J_1(x_n) = J_1(j_{0n}) - \frac{\xi_n}{2} J_2(j_{0n}) + \frac{\xi_n^2}{8}[J_3(j_{0n} + \theta'_n \xi_n) - 3J_0(j_{0n} + \theta'_n \xi_n)] \tag{3}$$

avec

$$|\theta'_n| < 1. \tag{4}$$

En vertu des relations de récurrence qui existent entre les fonctions $J_n(z)$, on a, d'ailleurs,

$$J_2(j_{0n}) = \frac{2}{j_{0n}} J_1(j_{0n}). \tag{5}$$

Rappelons, d'autre part, les expressions asymptotiques

$$j_{0n} = n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right); \tag{6}$$

$$J_1^2(j_{0n}) = \frac{2}{\pi j_{0n}}\left[1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{7}$$

En tenant compte de $U(x \mid \mu) = 0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 2\mu &+ \xi_n \left[j_{0n}^5 + \mu(j_{0n}) - \frac{J_2(j_{0n})}{J_1(j_{0n})}\right] \\ &+ \xi_n^2[\mu + (j_{0n} + \xi_n)^4 + j_{0n}(2j_{0n} + \xi_n)(\xi_n^2 + 2j_{0n}\xi_n + 2j_{0n}^2)] \\ &+ \frac{J_3(j_{0n} + \theta'_n \xi_n) - 3J_0(j_{0n} + \theta'_n \xi_n)}{8J_1(j_{0n})} \xi_n^2 \\ &+ \frac{J_0(j_{0n} + \theta_n \xi_n) - J_2(j_{0n} + \theta_n \xi_n)}{4J_1(j_{0n})} \xi_n(j_{0n} + \xi_n)[(j_{0n} + \xi_n)^4 + \mu] = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

et, d'après (5), (6), (7),

(9) $$\xi_n = o\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

Tous calculs faits, la relation (8) nous donne l'expression de ξ_n sous la forme

(10) $$\xi_n = -\frac{2\mu}{j_{0n}^5} + \frac{2\mu^2}{j_{0n}^9}\theta(n),$$

$\theta(n)$ est inférieur à l'unité et tend vers un par valeurs croissantes quand n augmente indéfiniment.

Ceci posé, considérons la série de terme général

(11) $$u = \frac{J_0\left(\frac{rx}{a}\right) - J_0(x)}{J_0(x)} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}t}}{(x^4+\mu)^2 - 12\mu x^2},$$

on a évidemment, puisque $\left|J_0\left(\frac{rx}{a}\right)\right| < 1$,

(12) $$|u| < w_1 + w_2,$$

en posant

(13) $$w_1 = \frac{1}{(x^4+\mu)^2 - 12\mu x^2},$$

(14) $$w_2 = \frac{1}{J_0(x)} \frac{1}{(x^4+\mu)^2 - 12\mu x^2}.$$

La suite x_n étant telle que l'on a $\frac{x_n}{n} \sim \pi$, la série w_1 est comparable à la série $\frac{1}{n^8}$. D'autre part

$$J_0(x) = J_0(j_{0n} + \xi_n);$$

$$J_0(x) \sim 2\mu\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_{0n}^{-\frac{11}{2}};$$

$$w_2 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\mu\sqrt{2}}\, j_{0n}^{-\frac{5}{2}};$$

(15) $$w_2 \sim \frac{1}{2\sqrt{2}\mu\pi^2}\, n^{-\frac{5}{2}}.$$

Les séries w_1 et w_2 étant convergentes, la série u est absolument et uniformément convergente dans le domaine R (r, t) défini par les inégalités

$$(16) \qquad 0 \leqq r \leqq a, \qquad 0 \leqq t \leqq \mathrm{T},$$

quel que soit T. La série $\frac{4\beta}{\mu} \Sigma u$ représente donc une fonction des deux variables r et t bien déterminée et continue en tout point du domaine R et, d'après les résultats démontrés dans le paragraphe **3**, cette fonction satisfait aux conditions aux limites

$$h(a \mid t) = h(r \mid 0) = 0.$$

En intégrant terme à terme, on obtient

$$(17) \qquad \int_0^t \int_0^a h(r \mid t)\, du\, dt = \sum \frac{16\alpha^2 x^2 \left[1 - e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2} t}\right]}{[(x^4 + \mu)^2 - 12\mu x^2]}.$$

La série, qui figure au second membre de cette égalité, est uniformément convergente dans l'intervalle 0, T. Son terme général est en effet inférieur en module au terme général de la série $\frac{16\alpha^2 x^2}{[x^4 + \mu]^2 - 12\mu x^2}$ dont l'expression asymptotique est

$$\frac{16\alpha^2}{\pi^6} \frac{1}{n^6}.$$

Désignons maintenant par u'_r, u'_t, u''_{r^2}, les séries obtenues en dérivant la série u terme à terme par rapport à r ou par rapport à t. Nous obtenons

$$(18) \qquad u'_r = \frac{-x}{a[(x^4 + \mu)^2 - 12\mu x^2]} \frac{\mathrm{J}_1\left(\frac{rx}{a}\right)}{\mathrm{J}_0(x)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2} t};$$

$$(19) \qquad u'_t = \frac{-x^2}{4\alpha^2[(x^4 + \mu)^2 - 12\mu x^2]} \frac{\mathrm{J}_0\left(\frac{rx}{a}\right) - \mathrm{J}_0(x)}{\mathrm{J}_0(x)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2} t};$$

$$(20) \qquad u''_{r^2} = \frac{-x^2}{a^2[(x^4 + \mu)^2 - 12\mu x^2]} \frac{\mathrm{J}_0\left(\frac{rx}{a}\right) - \frac{a}{rx}\mathrm{J}_1\left(\frac{rx}{a}\right)}{\mathrm{J}_0(x)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2} t}.$$

L'expression

$$(21)\qquad \frac{x}{(x^4+\mu)^2-12\mu x^2}\,\frac{1}{J_0(x)}$$

a pour valeur asymptotique $\frac{1}{2\sqrt{2}\mu\pi}\,n^{-\frac{3}{2}}$.

Il en résulte que la série $\frac{4\beta}{\mu}\,\Sigma u'_r$ est uniformément convergente dans la région $R(0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq t\leqq T)$ et représente, par conséquent, en tout point de ce domaine, la dérivée $\frac{\partial h}{\partial r}$ de la fonction h définie par

$$h(r\mid t)=\frac{4\beta}{\mu}\,\Sigma u.$$

Il n'en est plus de même de u'_t et u''_{r^2}, où figurent l'expression

$$(22)\qquad \frac{x^2\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}t}\,J_0\left(\frac{rx}{a}\right)}{[(x^4+\mu)^2-12\mu x^2]\,J_0(x)}$$

dont la valeur asymptotique, qui correspond à $t=0$, $r=0$, est

$$(23)\qquad \frac{x^2}{[(x^4+\mu)^2-12\mu x^2]J_0(x)}\sim\frac{1}{2\sqrt{2}\mu}\,n^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous sommes ainsi conduit à remplacer le domaine $R[0\leqq r\leqq a,\ 0\leqq t\leqq T]$ par le domaine $R(\theta)$

$$0\leqq r\leqq a,\qquad \theta\leqq t\leqq T,$$

que l'on obtient en retranchant de R une bande d'ailleurs arbitrairement petite qui est définie par

$$0\leqq r\leqq a,\qquad 0\leqq t\leqq \theta.$$

En un point de $R(\theta)$

$$(24)\qquad \frac{x^2}{[(x^4+\mu)^2-12\mu x^2]}\,\frac{J_0\left(\frac{rx}{a}\right)}{J_0(x)}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}t}$$

est inférieur à

$$(25)\qquad \frac{x^2}{[(x^4+\mu)^2-12\mu x^2]}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}\theta}}{J_0(x)},$$

dont la valeur asymptotique

$$(26) \qquad S_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{\pi^2\theta}{4\alpha^2} n^2}$$

satisfait à la condition

$$(27) \qquad \frac{S_{n+1}}{S_n} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\, e^{-\frac{\pi^2\theta}{4\alpha^2}} e^{-\frac{\pi^2\theta}{2\alpha^2} n}.$$

Ce rapport tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, quelle que soit la valeur (non nulle) attribuée à θ. Par conséquent la série

$$(28) \qquad \sum \frac{x^2}{[(x^4+\mu)^2 - 12\mu x^2]} \frac{J_0\left(\frac{rx}{a}\right)}{J_0(x)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2} t}$$

est uniformément convergente dans la région $R(\theta)$. L'expression $\frac{4\beta}{\mu}\Sigma u''_{r^2}$ représente donc dans cette région la dérivée seconde $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$ de la fonction h, et $\frac{4\beta}{\mu}\Sigma u'_t$ représente $\frac{\partial h}{\partial t}$; il résulte de là que le développement

$$\frac{4\beta}{\mu}\Sigma u$$

représente, en tout point de $R(\theta)$, une fonction h dont les dérivées $\frac{\partial h}{\partial r}$, $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}$ ainsi que l'intégrale $\iint hr\,dr\,dt$ sont respectivement représentées par les développements formels correspondants et relatifs à la série u.

Des propriétés de cette série, il résulte que la fonction h satisfait dans ce domaine à l'équation intégrale

$$(29) \qquad A_{\alpha,\lambda}[h(r \mid t)] + \beta = 0$$

et, sur la frontière

$$r = a,$$

à la condition

$$(30) \qquad h(a \mid t) = 0.$$

De cette relation, on déduira

$$(31) \qquad \left[\frac{\partial h}{\partial t}\right]_{r=a} = 0.$$

La fonction $h(r|t)$ se réduit, pour $t = 0$, à une fonction identiquement nulle, ainsi que nous l'avons démontré au paragraphe précédent.

On en conclut

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{t=0} = 0; \tag{32}$$

$$\left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\right)_{t=0} = 0 \tag{33}$$

et

$$\int_0^t \int_0^a h(r|t) r\,dr\,dt = 0. \tag{34}$$

Par conséquent

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{t=0} = \frac{\beta}{\alpha^2}, \tag{35}$$

quelle que soit la valeur attribuée à r. Cette égalité, rapprochée de l'égalité (31), met en évidence la discontinuité de la dérivée première $\frac{\partial h}{\partial t}$ au point $r = a$, $t = 0$, qui se présente ainsi comme un point singulier. On a, en effet,

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{\substack{t=0 \\ r \to a}} = \frac{\beta}{\alpha^2} \tag{36}$$

et

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{\substack{t=0 \\ r=a}} = 0. \tag{37}$$

De même si nous nous déplaçons sur la droite $r = a$, la dérivée $\frac{\partial h}{\partial t}$, étant continue pour $t = 0$, tend vers 0. D'autre part, $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$. L'intégrale

$$\int_0^t \int_0^a w\,r\,dr\,dt,$$

étant également une fonction continue de t, tend vers 0, on en conclut

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]_{\substack{r=a \\ t \to 0}} = -\frac{4\beta}{\alpha^2} \tag{38}$$

et

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]_{\substack{r \to a \\ t=0}} = 0 \tag{39}$$

ce qui met en évidence la discontinuité. On peut interpréter ce résultat de la manière suivante :

Si $h(r|t)$ représente le champ des vitesses à l'instant t, la dérivée $\frac{\partial h}{\partial t}$ représente, à cet instant, l'accélération des particules fluides qui se trouvent à la distance r de l'axe du capillaire. Comme les forces de viscosité sont fonction des vitesses de ces particules, ces forces sont nulles lorsque l'équilibre existe et elles croissent à partir de zéro lorsque cet équilibre cesse de subsister. A l'instant précis de la rupture d'équilibre, l'accélération de toutes les particules dépend donc uniquement des différences de pression. La différence de pression, aux extrémités du capillaire, a une valeur constante en tout point de la section. Donc l'accélération a la même valeur, quelle que soit la particule considérée dans cette section. En particulier l'accélération a cette valeur (non nulle) pour les molécules en contact avec la paroi et correspondant à $r = a$. Or, pour ces particules, la vitesse reste nulle au cours du mouvement. Leur accélération est donc nulle. D'où contradiction avec le résultat que nous venons d'énoncer. Cette contradiction, valable pour $t = 0$, n'existe plus à l'instant θ, si petite que soit la valeur attribuée à θ. La discontinuité signalée disparaît ainsi au cours du mouvement à l'instant même où l'équilibre antérieur cesse de subsister.

5. Résumé des résultats obtenus. — Nous avons démontré que, dans la région R

$$0 \leqq r \leqq a, \qquad 0 \leqq t \leqq T,$$

le développement

$$(1) \qquad \sum \frac{16\beta\mu}{12\mu x^2 - (x^4+\mu)^2} \frac{J_0\left(\frac{rx}{a}\right) - J_0(x)}{J_0(x)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}t}$$

étendu à toutes les valeurs x, qui sont racines réelles de l'équation

$$(2) \qquad 2\mu J_1(x) - x(x^4+\mu)J_0(x) = 0,$$

représente une fonction définie et continue, des deux variables r et t. Cette fonction possède une dérivée première $\frac{\partial}{\partial r}$, définie et continue en tout point de R. Au contraire, les dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ sont discontinues au point $r = a$, $t = 0$. En dehors de ce point, la fonction ainsi définie est une solution de l'équation intégrale

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{4\alpha^2}{a^2}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{4\beta}{a^2} - \frac{8\lambda}{a^4}\int_0^a \int_0^t w(r \mid t) r\, dr\, dt = 0; \tag{3}$$

les constantes qui figurent dans les expressions (1) et (3) ont respectivement pour valeur, dans le problème hydrodynamique correspondant au début de l'écoulement dans un viscosimètre

$$\beta = \frac{\rho g a^2}{4\eta}\left[\sin\theta + \frac{h + h_1 \pm h_2}{L}\right]; \tag{4}$$

$$\alpha^2 = \frac{\rho a^2}{4\eta}; \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{\rho g a^4}{4\eta L}\left[\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}\right]; \tag{6}$$

$$\mu = 16\lambda\alpha^2, \tag{7}$$

où ρ désigne la masse spécifique du liquide étudié, η son coefficient de viscosité, g l'accélération de la pesanteur, a le rayon du capillaire, a_1 et a_2 les rayons des récipients cylindriques extrêmes, θ l'inclinaison du capillaire sur le plan horizontal, h la différence de pression exercée sur les surfaces libres, h_1 et h_2 les distances de ces surfaces libres aux extrémités du capillaire, L la longueur du capillaire.

La solution de l'équation intégrale ainsi définie satisfait aux conditions

$$w(a \mid t) = 0; \tag{8}$$

$$w(r \mid 0) = 0. \tag{9}$$

Lorsque la longueur du capillaire augmente indéfiniment, μ tend vers zéro.

Les racines x de l'équation (2), qui sont des fonctions continues de μ, tendent vers les racines de l'équation

$$x J_0(x) = 0,$$

c'est-à-dire vers les zéros j_{0n} de la fonction de Bessel d'ordre zéro

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{J}_0\left(\frac{rx}{a}\right) - \mathrm{J}_0(x) \rightarrow \mathrm{J}_0\left(\frac{r}{a} j_{0n}\right).$$

D'après [4, (10)],

$$\text{(11)} \qquad \frac{\mathrm{J}_0(x)}{\mu} = \frac{\mathrm{J}_0(j_{0n} + \xi_n)}{\mu} \rightarrow \frac{2}{j_{0n}^5} \mathrm{J}_1(j_{0n}).$$

D'où résulte que le terme 1 a pour valeur limite

$$\text{(12)} \qquad \frac{8\beta}{j_{0n}^3} \frac{\mathrm{J}_0\left(\frac{r}{a} j_{0n}\right)}{\mathrm{J}_1(j_{0n})}.$$

On retrouve ainsi l'expression qui a été obtenue directement par M. Grumbach dans son étude de l'écoulement libre des liquides dans les tubes capillaires de très grande longueur.