JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. POTRON

Sur la décomposition d'un groupe continu fini

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 19, no 1-4 (1940), p. 143-161.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1940_9_19_1-4_143_0>

Sur la décomposition d'un groupe continu fini;

PAR M. L'ABBÉ J. POTRON,

Professeur à l'Institut catholique de Paris.

M. Lévi (¹) a établi le théorème suivant : *Soit* G *un groupe continu fini, ni intégrable ni semi-simple; si* H *est son sous-groupe invariant intégrable principal* (*celui qui contient tous les autres*), G *contient toujours un sous-groupe isomorphe au groupe-quotient* G | H.

M. Whitehead (²) a donné récemment une nouvelle démonstration de ce théorème, en ajoutant la précision suivante : *Si la structure de* G *est réelle*, G *contient un sous-groupe réel isomorphe à* G | H.

En dehors de résultats classiques, tirés, pour la plupart, de la Thèse de M. Cartan (³), M. Whitehead invoque quelques théorèmes appartenant à la théorie de la représentation linéaire. Il peut sembler intéressant de montrer que la démonstration de M. Whitehead peut s'appuyer uniquement sur des théorèmes appartenant à la théorie de la structure des groupes, et qui se déduisent immédiatement de la Thèse de M. Cartan. A cette occasion, un point de la démonstration, qui pourrait, semble-t-il, prêter à quelques objections, sera repris et complété.

(¹) LÉVI, *Sur la Structure des Groupes* (*Atti della Academia di Torino*, t. 40, 1904-1095, p. 551).

(²) WHITEHEAD, *On the Decomposition of an infinitesimal Group* (*Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, t. 32, 1936, p. 229), cité *W*.

(³) É. CARTAN, *Sur la Structure des Groupes de Transformations finis et continus*, 1894, cité *C*.

1. Soit une base (¹) de G dans laquelle les opérateurs de H seront désignés par la lettre Y affectée d'indices grecs parcourant les nombres 1, ..., m, les autres étant désignés par la lettre X, affectée d'indices romains parcourant les nombres 1, ..., p. La structure de G sera définie par les relations

$$(1)\quad (X_i\, X_k) = \Sigma c_{ik}{}^j X_j + \Sigma c_{ik}{}^\lambda Y_\lambda, \qquad (X_i\, Y_\alpha) = c_{i\alpha}{}^\lambda Y_\lambda, \qquad (Y_\alpha\, Y_\beta) = \Sigma c_{\alpha\beta}{}^\lambda Y_\lambda.$$

En remplaçant par zéro tout opérateur Y, on a la structure $(c_{ik}{}^j)$ du groupe-quotient G | H, qui est semi-simple (²), dont les X peuvent être considérés comme opérateurs.

Si l'on fait un changement d'opérateurs

$$(2)\qquad X'_i = X_i + \Sigma f_i{}^\alpha Y_\alpha,$$

les relations (1) deviennent

$$(3)\qquad (X'_i\, X'_k) = \Sigma c_{ik}{}^j X'_j + \Sigma c'_{ik}{}^\lambda Y_\lambda, \qquad \ldots,$$

avec

$$(4)\qquad c'_{ik}{}^\lambda = \Sigma c_{i\beta}{}^\lambda f_k{}^\beta - \Sigma c_{k\alpha}{}^\lambda f_i{}^\lambda + c_{ik}{}^\lambda + \Sigma\Sigma c_{\alpha\beta}{}^\lambda f_i{}^\alpha f_k{}^\beta.$$

Il suffit de démontrer qu'il existe mp coefficients f_i^α, réels en même temps que la structure de G, vérifiant les $\frac{mp(p-1)}{2}$ équations

$$(5)\qquad c'_{ik}{}^\lambda = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, m).$$

Il suffit (³) de démontrer le théorème dans les trois cas suivants :

1° H est un groupe à un paramètre;

2° H est abélien et ne contient aucun sous-groupe, même à structure imaginaire, qui soit normal dans G;

3° H est abélien et ne contient, la structure de G étant réelle, aucun sous-groupe à structure réelle qui soit normal dans G, mais en contient un de structure imaginaire.

(¹) Pour les notations, définitions et démonstrations des théorèmes classiques, *voir* Potron, *Les Groupes de Lie* (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. 81, 1936).

(²) *C.*, p. 97.

(³) *W.*, p. 230.

2. Dans le cas 1°, le théorème avait déjà été démontré par M. Cartan [1]. La démonstration nouvelle de M. Whitehead fait intervenir un autre théorème de M. Cartan [2], à savoir *quand un r-groupe semi-simple* G *contient normalement un m-groupe, il est produit direct de ce m-groupe et d'un* $(r-m)$*-groupe;* d'où se déduit le corollaire immédiat : *si la r-famille des opérateurs d'un groupe semi-simple* K *est invariante par un* 1*-groupe* $\{Y\}$, *l'opérateur* Y *est, ou bien un opérateur de* K, *ou bien échangeable avec tout opérateur de* K [3].

3. Dans les cas 2° et 3°, on a $m > 1$, et le système (5) devient

$$\Sigma c_{i\beta}{}^{\lambda} f_k{}^{\beta} - \Sigma c_{k\alpha}{}^{\lambda} f_i{}^{\alpha} - \Sigma c_{ik}{}^{j} f_j{}^{\lambda} + c_{ik}{}^{\lambda} = 0. \tag{6}$$

L'indice supérieur désignant la ligne et l'indice inférieur la colonne, nous pouvons [4] considérer

les $c_{i\beta}{}^{\lambda}$ comme éléments d'une matrice		$\tilde{c}^i$	de type	(m, m);
les $f_j{}^{\lambda}$	»	$\tilde{f}_j$	»	$(m, 1)$;
les $c_{ik}{}^{\lambda}$	»	$\tilde{A}_{ik} = -\tilde{A}_{ki}$	»	$(m, 1)$.

Le système (6) équivaut alors à

$$\tilde{c}_i \tilde{f}_h - \tilde{c}_h \tilde{f}_i - \Sigma c_{ih}{}^{j} \tilde{f}_j + \tilde{A}_{ih} = 0. \tag{7}$$

4. A la structure (c^j_{hk}) du groupe semi-simple G | H est associée [5] une forme quadratique

$$S(e) = \Sigma\Sigma g_{hk} e^h e^k, \qquad g_{hk} = \Sigma\Sigma c_{hi}{}^{j} c_{kj}{}^{i}, \qquad g = |g_{hk}| \neq 0, \tag{8}$$

somme des carrés des racines du déterminant caractéristique. Ses coefficients, et ceux g^{hk} de la forme adjointe, seront utilisés, comme coefficients d'une forme fondamentale, pour élever et abaisser les indices romains des constantes de structure et des matrices [6].

---

(1) *C.*, p. 128.
(2) *C.*, p. 52.
(3) *W.*, p. 231-232.
(4) *W.*, p. 232 et *passim.*
(5) *C.*, p. 53.
(6) *W.*, p. 231 et *passim.*

Parmi les conditions, déduites des identités de Jacobi, que vérifient les constantes de structure, figurent les suivantes.

Par le cofficient de Y_λ dans l'identité entre Y_α, X_h, X_k,

$$\Sigma(c_{h\beta}{}^\lambda c_{k\alpha}{}^\beta - c_{k\beta}{}^\lambda c_{h\alpha}{}^\beta) = \Sigma c_{hk}{}^j c_{j\alpha}{}^\lambda,$$

ou

$$\tilde{c}_h \tilde{c}_k - \tilde{c}_k \tilde{c}_h = \Sigma c_{hk}{}^j \tilde{c}_j; \tag{9}$$

par le coefficient de Y_λ dans l'identité entre X_i, X_h, X_k,

$$\Sigma(c_{j\beta}{}^\lambda c_{kh}{}^\beta + c_{h\beta}{}^\lambda c_{jk}{}^\beta + c_{k\beta}{}^\lambda c_{hi}{}^\beta) + \Sigma(c_{hk}{}^j c_{ji}{}^\lambda + c_{ki}{}^j c_{jh}{}^\lambda + c_{ih}{}^j c_{jk}{}^\lambda) = 0,$$

ou

$$\tilde{c}_i \tilde{A}_{kh} + \tilde{c}_h \tilde{A}_{ik} + \tilde{c}_k \tilde{A}_{hi} + \Sigma(c_{hk}{}^j \tilde{A}_{ji} + c_{ki}{}^j \tilde{A}_{jh} + c_{ih}{}^j \tilde{A}_{jk}) = 0. \tag{10}$$

Par élévation d'indices, (9) donne

$$\tilde{c}^b \tilde{c}_a - \tilde{c}_a \tilde{c}^b = \Sigma c_{aj}{}^b \tilde{c}^j. \tag{11}$$

Par sommation après multiplication par $\tilde{c}^k$, et d'après (11), (10) donne

$$\tilde{c}_i \Sigma \tilde{c}^k \tilde{A}_{hk} - \tilde{c}_h \Sigma \tilde{c}^k \tilde{A}_{ik} - \Sigma c_{ih}{}^j \Sigma \tilde{c}^k \tilde{A}_{jk} + \tilde{D}\tilde{A}_{ih} = 0, \qquad \tilde{D} = \Sigma \tilde{c}^k \tilde{c}_k. \tag{12}$$

Il résulte de (9) et (11) que $\widetilde{D}$ et $\tilde{c}_i$ sont échangeables. Si, dans (12), on remplace $\Sigma c^k \widetilde{A}_{ik}$ par $\widetilde{D}\widetilde{f}_i$, on obtient

$$\tilde{D}(\tilde{c}_i \tilde{f}_h - \tilde{c}_h \tilde{f}_i - \Sigma c_{ih}{}^j \tilde{f}_j + \tilde{A}_{ih}) = 0. \tag{13}$$

Tout revient donc à montrer que $\widetilde{D}$ est invertible, c'est-à-dire $|\widetilde{D}| \neq 0$; car il résulte alors de (13) que les $\widetilde{f}_i = \widetilde{D}^{-1} \Sigma \tilde{c}^k \widetilde{A}_{ik}$ vérifient (7).

5. La démonstration se divise en deux parties, dont la première consiste à établir les trois résultats :

A. *Dans les cas 2° et 3°, la trace* T *de la matrice* $\widetilde{D}$ *est un nombre rationnel positif.*

B. *Dans le cas 2°, on a* $\widetilde{D} = d\widetilde{U}$.

C. *Dans le cas 3°, m doit être pair; on peut choisir une base de* H *de* *manière que* $\tilde{\mathrm{D}}$ *ait la forme* $\begin{matrix} d\tilde{\mathrm{U}} & d'\tilde{\mathrm{U}} \\ -d'\tilde{\mathrm{U}} & d\tilde{\mathrm{U}} \end{matrix}$, *chacune des quatre sous-matrices composantes étant de degré* $\frac{m}{2}$ (1).

De ces résultats on déduit immédiatement que la trace de la matrice $\tilde{\mathrm{D}}$ est toujours md, donc que d est un nombre rationnel positif, puis que le déterminant $|\tilde{\mathrm{D}}|$ ne peut être nul, dans le cas 2°, que si $d=0$; et, dans le cas 3° où d et d' sont réels, que si $d^2+d'^2=0$.

6. Les éléments de la matrice $\tilde{\mathrm{D}}=\Sigma g^{hk}\tilde{c}_h\tilde{c}_k$ sont :

$$d_\beta{}^\alpha=\Sigma\Sigma\Sigma g^{hk}c_{h\lambda}{}^\alpha c_{k\beta}{}^\lambda.$$

Sa trace est donc

$$\text{(14)}\qquad \mathrm{T}=\Sigma\, d_\alpha{}^\alpha=\Sigma\Sigma\, g^{hk}\gamma_{hk},\qquad \gamma_{hk}=\Sigma\Sigma c_{h\lambda}{}^\alpha c_{k\alpha}{}^\lambda.$$

Or, la forme quadratique $\Sigma(e)=\Sigma\Sigma\gamma_{hk}e^he^k$ est en relation avec le déterminant caractéristique de G. Soient, en effet, e^h et η^α les $p+m$ paramètres canoniques. Sur ces variables agit le groupe adjoint linéaire (groupe AG), dont les opérateurs sont :

$$\text{(15)}\qquad \mathrm{E}_i=\Sigma\mathrm{C}_i{}^j(e)\frac{\partial}{\partial e^j}+\Sigma\mathrm{C}_i{}^\alpha(e,\eta)\frac{\partial}{\partial\eta^\alpha},\qquad \mathrm{F}_\alpha=\Sigma\mathrm{C}_\alpha{}^\beta(e)\frac{\partial}{\partial\eta^\beta},$$

où l'on a

$$\text{(16)}\quad \mathrm{C}_i{}^j(e)=\Sigma c_{hi}{}^je^h,\quad \mathrm{C}_i{}^\alpha(e,\eta)=\Sigma c_{hi}{}^\alpha e^h+\Sigma c_{\beta i}{}^\alpha\eta^\beta,\quad \mathrm{C}_\alpha{}^\beta(e)=\Sigma c_{h\alpha}{}^\beta e^h.$$

Le déterminant caractéristique de G (déterminant caractéristique de la matrice des opérateurs du groupe AG) est ici le produit des deux déterminants

$$(-1)^p\,\mathrm{D}(s,e)=(-1)^p\,|\,\mathrm{C}_i{}^j(e)-su_i{}^j\,|=s^p+\psi_2(e)s^{p-2}+\ldots,$$
$$(-1)^m\,\Delta(s,e)=(-1)^m\,|\,\mathrm{C}_\alpha{}^\beta(e)-su_\alpha{}^\beta\,|=s^m-\varphi_1(e)s^{m-1}+\varphi_2(e)s^{m-2}+\ldots.$$

C'est donc

$$\text{(17)}\quad (-1)^{p+m}\,\mathrm{D}\,\Delta(s,e)=s^{p+m}-\varphi_1(e)s^{p+m-1}+[\psi_2(e)+\varphi_2(e)]s^{p+m-2}+\ldots.$$

(1) Le résultat C est nouveau. Il paraît être nécessaire pour que l'invertibilité de la matrice $\tilde{\mathrm{D}}$ soit établie rigoureusement.

On remarquera que $D(s, e)$ est le déterminant caractéristique du groupe $G|H$. Ce groupe étant demi-simple, le coefficient $\psi_1(e)$ est nul (¹); le coefficient $\psi_2(e)$ est une forme quadratique non dégénérée (²). Ces coefficients ont d'ailleurs les expressions

$$0 = \Sigma C_i^i, \qquad \psi_2(e) = \Sigma_{ij}(C_i^i\; C_j^j - C_i^j\; C_j^i) = \frac{1}{2}\Sigma_i\,\Sigma_j(C_i^i\; C_j^j - C_i^j\; C_j^i),$$

$$\varphi_1(e) = \Sigma C_\alpha^\alpha, \qquad \varphi_2(e) = \Sigma_{\alpha\beta}(C_\alpha^\alpha C_\beta^\beta - C_\alpha^\beta C_\beta^\alpha) = \frac{1}{2}\Sigma_\alpha\Sigma_\beta(C_\alpha^\alpha C_\beta^\beta - C_\alpha^\beta C_\beta^\alpha).$$

Les sommes des carrés des racines sont donc

$$(18) \qquad S(e) = \qquad -2\psi_2(e) = \Sigma\Sigma g_{hk} e^h e^k, \qquad g_{hk} = \Sigma\Sigma c_{hi}^{\,j}\; c_{kj}^{\,i},$$

$$(19) \qquad \Sigma(e) = [\varphi_1(e)]^2 - 2\varphi_2(e) = \Sigma\Sigma\gamma_{hk} e^h e^k, \qquad \gamma_{hk} = \Sigma\Sigma c_{h\alpha}^{\,\beta} c_{k\beta}^{\,\alpha}.$$

7. Pour établir une relation entre ces deux formes quadratiques, il est nécessaire de rappeler, et ensuite de compléter, certains résultats de la Thèse de M. Cartan.

Soit $U = \Sigma u^h X_h$ un opérateur *ordinaire* de G, c'est-à-dire tel que les racines de $D\Delta(s, u)$ ne vérifient aucune relation qui ne soit vérifiée quel que soit e. *Une base réduite de* G *relative à* U est un système de $p+m$ opérateurs indépendants, mis en correspondance avec les racines du déterminant caractéristique, et rangés dans un ordre déterminé, de manière à vérifier les propriétés suivantes.

a. Le nombre des opérateurs correspondant à une racine, nulle ou non, est égal à la multiplicité de cette racine.

b. Si W est un des opérateurs appartenant à la racine $s(e)$, nulle ou non, et si $s(u) = a$, $(U\ W) - aW$ est une combinaison des opérateurs appartenant à $s(e)$ et précédant W. Si T est une combinaison d'opérateurs de la base, et si $(U\ T) - aT$ est une combinaison des opérateurs appartenant à $s(e)$, il en est de même de T.

c. Cette propriété subsiste si l'on remplace U par une combinaison d'opérateurs appartenant à la racine nulle (³).

(¹) *C.*, p. 53.
(²) *C.*, p. 51.
(³) *C.*, p. 49.

d. Si W et W′ sont deux opérateurs appartenant respectivement à $s(e)$ et $s'(e)$, pouvant être nulles, quand aucune racine n'est égale à $s(e)+s'(e)$, l'alterné (W W′) est nul; quand $s(e)+s'(e)=s''(e)$, (W W′) est une combinaison d'opérateurs appartenant à $s''(e)$.

e. Si $s(e)+s'(e)=0$, et si (W W′), combinaison d'opérateurs appartenant à la racine nulle, s'exprime, en fonction de l'ancienne base, par $\Sigma f^h X_h + \ldots$, toute racine de $D\Delta(s, f)$ est produit de $s(f)$ par un nombre rationnel (1).

8. Dans le cas d'un groupe semi-simple, ce qui s'applique à G | H, deux opérateurs appartenant à la racine nulle sont toujours échangeables; les racines non nulles de $D(s, e)$ sont simples et opposées deux à deux; si W et W′ appartiennent à deux racines opposées, l'alterné (W W′), les alternés [(W W′) W] et [(W W′) W′] ne sont jamais nuls; tout opérateur appartenant à la racine nulle est combinaison d'alternés tels que (WW′) (2).

9. Dans une base réduite du groupe G, de structure (1), je désignerai les opérateurs combinaisons des seuls Y (opérateurs de H) par « opérateurs V », et les autres par « opérateurs Z ». Tout opérateur Z peut être considéré comme opérateur de G | H (n° **1**). Il est alors noté $\underline{Z}$.

Aux résultats de M. Cartan j'ajouterai les suivants, qui nous seront utiles.

A une racine $s_\alpha(e)$ de $\Delta(s, e)$ qui n'est pas en même temps racine de $D(s, e)$ *ne peut appartenir aucun opérateur* Z. *On peut choisir les opérateurs de la base réduite de manière que, si l est le rang de* G | H, *il y ait exactement l opérateurs* Z *appartenant à la racine nulle, et exactement un opérateur* Z *appartenant à chaque racine* $\neq 0$ *de* $D(s, e)$ (3).

(1) *C.*, nos 7-10, p. 32-39.

(2) *C.*, p. 55.

(3) Les racines de $D(s, e)$ sont les racines principales; celles de $\Delta(s, e)$ seul sont racines secondaires (*C.*, p. 99).

Si, en effet, Z est le premier des opérateurs hors de H appartenant à une racine $s_\alpha(e)\,[s_\alpha(u)=a_\alpha]$ pour laquelle on a $D(a_\alpha, u)\neq 0$, l'expression $(U\,Z)-a_\alpha Z$ désigne une combinaison d'opérateurs V, ceux de la racine s_α qui précèdent Z. Considérant ces opérateurs comme de G | H, on aura $(\underline{U}\,\underline{Z})=a_\alpha\underline{Z}$, sans que $D(a_\alpha, u)$ soit nul.

Supposons que, pour la racine nulle, les opérateurs Z occupent les rangs $h_1=1$, h_2, ..., les autres étant des opérateurs V; soit Z_j, de rang h_j, le premier tel que la différence $Z_j-c^1Z_1-\ldots-c^{j-1}Z_{j-1}$ soit un opérateur W de H, nécessairement indépendant des opérateurs V qui précèdent Z_j. On a, pour $i=2, \ldots, j-1$.

$$(19') \qquad (U\,Z_i)=d_i^1 Z_1+\ldots+d_i^{i-1}Z_{i-1}+\ldots,$$

les opérateurs non écrits étant les opérateurs V précédant Z_i. On en déduit que $(U\,W)$, nécessairement dans H, est combinaison des opérateurs V de rang $<h_j$. On peut donc le prendre comme opérateur de rang h_j.

Si, en opérant toujours ainsi, il restait finalement plus de l opérateurs Z, on aurait (19′) pour $i=2, \ldots, l+1$. Considérés comme opérateurs de G | H, ils donneraient plus de l opérateurs indépendants appartenant à la racine O, ce qui est impossible. Ainsi le nombre des opérateurs Z appartenant à la racine nulle est $\leqq l$.

Supposons que, pour une racine $s(e)\,[s(u)=a\neq 0]$, il y ait un premier opérateur Z au rang i, et un second Z′ au rang j. Les différences $(U\,Z)-aZ$ et $(U\,Z')-aZ'-cZ$ seront des combinaisons d'opérateurs V appartenant à la racine et précédant respectivement Z et Z′. Dans le groupe G | H, on aura donc $(\underline{U}\,\underline{Z})=a\underline{Z}$ et $(\underline{U}\,\underline{Z}')=a\underline{Z}'+c\underline{Z}$, donc $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ appartiennent à la même racine simple $s(e)$. Ils ne peuvent être distincts, et il faut $Z'-Z=W$ dans H. Mais on voit que $(U\,W)-a\,W$, nécessairement dans H, sera combinaison d'opérateurs V appartenant à la racine et de rang $<j$. On peut donc prendre W comme opérateur V de rang j.

En opérant ainsi, le nombre des opérateurs Z appartenant aux $p-l$ racines $\neq 0$ sera $\leqq p-l$, et le nombre total des opérateurs Z sera $\leqq p$. Mais le nombre total des opérateurs de la base doit être $m+p$, et il ne peut y avoir plus de m opérateurs V indépendants. Il faut donc qu'il y ait exactement l opérateurs Z pour la racine nulle et exactement un pour chacune des $p-l$ racines $\neq 0$.

Je désignerai par $Z_1^0 = U, Z_2^0, \ldots, Z_l^0$ les opérateurs Z de la racine nulle, par Z_i et Z_{-i} les opérateurs respectifs des racines $s_i(e)$ et $-s_i(e)$, par $Z_{0i} = \Sigma f_i^h X_h + \ldots$ l'alterné $(Z_i\, Z_{-i})$. D'après le nº **3**, les f_i^h ne sont pas tous nuls, on a $s_i(f_i) = a_{ii} \neq 0$, et

$$(20) \qquad (Z_{0i}\, Z_i) = a_{ii} Z_i + \ldots, \qquad Z_j^0 = \Sigma \lambda_j^i Z_{0i} + \ldots.$$

D'après le nº **7**, toute racine de $D(s, f_i)\,\Delta(s, f_i)$ est produit de $a_{ii} \neq 0$ par un nombre rationnel.

10. Établissons maintenant le théorème : *Si* H *n'est pas le central de* G, c'est-à-dire, si tout opérateur V n'est pas échangeable avec tout opérateur Z, *il est impossible que tous les opérateurs* V *appartiennent à la racine nulle*. Supposons, en effet, que tout opérateur V appartienne à la racine nulle. Il faut que tout V soit échangeable avec tout Z_i ou Z_{-i}, car l'alterné $(V\, Z_i)$, s'il n'était pas zéro, serait combinaison d'opérateurs V appartenant à la racine $s_i(e)$. Alors l'identité de Jacobi

$$[V\,(Z_i\, Z_{-i})] + [Z_i\,(Z_{-i}\, V)] + [Z_{-i}\,(V\, Z_i)] = 0$$

donne $(V\, Z_{0i}) = 0$, et, d'après (20), $(V\, Z_j^0) = 0$ $(j = 1, \ldots, l)$, en sorte que tout opérateur V est échangeable avec tout opérateur Z.

Si donc H n'est pas le central de G, il existe au moins une racine $s_\alpha(e)\,[s_\alpha(u) = a_\alpha \neq 0]$ à laquelle appartient, en même temps que son opérateur Z, au moins un opérateur V. Cette racine est donc multiple, et par suite racine de $\Delta(s, e)$ en même temps que de $D(s, e)$. Si V_α est le premier opérateur V de cette racine, on a $(U\, V_\alpha) = a_\alpha V_\alpha$, $(Z_{0i}\, V_\alpha) = a_{\alpha i} V_\alpha$, $a_{\alpha i} = s_\alpha(f_i)$, et, d'après (20), $a_\alpha = \Sigma \lambda_1^i a_{\alpha i}$; par suite, les $a_{\alpha i}$ ne sont pas tous nuls. De là le résultat : *Si* H *n'est pas le central de* G, *il existe une racine* $s_\alpha(e) \neq 0$ *commune à* $D(s, e)$ *et* $\Delta(s, e)$, *ainsi qu'un alterné* Z_{0i} *non échangeable avec le premier opérateur* V *de cette racine. Parmi les racines de* $\Delta(s, f_i)$, *déterminant relatif à* Z_{0i}, *figure* $s_\alpha(f_i) = a_{\alpha i} \neq 0$. On supposera $s_\alpha(f_1) = a_\alpha \neq 0$.

D'après ce résultat et la fin du nº **9**, on aura, pour les sommes des carrés des racines de $D(s, f_1)$ et $\Delta(s, f_1)$,

$$(21) \quad \Sigma[s_i(f_1)]^2 = (a_{11})^2 \Sigma(m_i)^2, \qquad \Sigma[s_\lambda(f_1)]^2 = \Sigma(a_{\lambda 1})^2 = (a_{11})^2 \Sigma(\mu_\lambda)^2.$$

Comme $m_1 = 1$ et $\mu_\alpha \neq 0$ à cause de $\mu_\alpha a_{11} = a_{\alpha 1} \neq 0$, comme d'autre part a_{11} est $\neq 0$ (n° 8), on conclut de (21) le résultat : *Si* H *n'est pas le central de* G, *et si* f_1 *est le point de l'espace des paramètres canoniques défini par un alterné convenablement choisi* $Z_{01} = \Sigma f_1^h X_h + \ldots$, *les sommes des carrés des racines de* $\Delta(s, f_1)$ *et de* $D(s, f_1)$ *sont liées par une relation*

$$\Sigma(f_1) = c_1 S(f_1), \tag{22}$$

c_1 *étant un nombre rationnel positif, pouvant dépendre du point* f_1.

11. Les coefficients de $D(s, e)$, déterminant caractéristique d'un groupe K isomorphe à G | H, sont invariants de son groupe adjoint (¹), groupe AK, dont les opérateurs, d'après (15), (16) sont :

$$\underline{E}_i = \Sigma C_i^j(e) \frac{\partial}{\partial e^j}, \qquad C_i^j(e) = \Sigma c_{hi}^j e^h. \tag{23}$$

Les coefficients du déterminant caractéristique de G sont invariants du groupe AG, d'opérateurs E_i. Mais, comme ces coefficients ne dépendent que de e, ils sont invariants des opérateurs $\underline{E}_i$, c'est-à-dire du groupe AK. Ainsi l'on a

$$\underline{E}_i \psi_2(e) = \underline{E}_i S(e) = 0, \qquad \underline{E}_i \varphi_1(e) = \underline{E}_i \varphi_2(e) = \underline{E}_i \Sigma(e) = 0. \tag{24}$$

Si les deux formes quadriques S et Σ sont distinctes, et si λ est un zéro du discriminant de $S(e) + \lambda\Sigma(e)$, le système linéaire

$$\frac{\partial}{\partial e^h}[S(e) + \lambda\Sigma(e)] = 0 \qquad (h = 1, \ldots, p), \tag{25}$$

de rang $< p$, définit une variété linéaire de l'espace des paramètres canoniques du groupe K. On sait que cette variété est stabilisée par le groupe AK (²).

Si K est un groupe simple, une telle variété ne peut exister, car il lui correspondrait un sous-groupe normal de K. Les deux formes quadratiques ne sont donc pas distinctes, donc

$$\Sigma(e) = cS(e) \quad \text{quel que soit } e, \text{ ou} \quad \gamma_{hk} = c g_{hk}. \tag{26}$$

(¹) *C.*, p. 27.
(²) *C.*, p. 48.

Si l'on fait $e = f_1$, la formule (22) montre que *si* $G \mid H$ *est simple, et si* H *n'est pas le central de* G, *le nombre* c, *indépendant de* e, *de la formule* (26) *est un nombre rationnel positif* (¹).

12. Si K, semi-simple, n'est pas simple, c'est un produit direct de groupes simples. Soit, par exemple, $K = K_1 K_2$, K_1 et K_2 étant simples. Supposons que $X_1, \ldots, X_q$ soient opérateurs de K_1 et $X_{q+1}, \ldots, X_m$ opérateurs de K_2. Les $c_{ik}{}^j$ ne sont $\neq 0$ que si leurs indices sont tous trois $\leqq q$ ou tous trois $> q$. Les $C_i{}^j(e)$ ne sont $\neq 0$ que si leurs indices sont tous deux $\leqq q$ ou tous deux $> q$. Ainsi chaque $\underline{E}_i$ se décompose en deux opérateurs, dont l'un, $\underline{E}_i{}^1$, ne dépend que de $e_1, \ldots, e_q$ et n'agit que sur ces variables, l'autre, $\underline{E}_i{}^2$, ne dépend que de $e_{q+1}, \ldots, e_m$ et n'agit que sur ces variables; ce sont d'ailleurs les opérateurs des deux groupes adjoints AK_1 et AK_2, dont AK est produit direct. Il résulte aussi de (18) que g_{hk} n'est $\neq 0$ que si ses indices sont tous deux $\leqq q$ ou tous deux $> q$. Il en résulte la décomposition

$$S(e) = S_1(e_1, \ldots, e_q) + S_2(e_{q+1}, \ldots, e_m).$$

La variété stabilisée par AK, définie par (25), ne peut être que celle de K_1, soit $e_{q+1} = \ldots = 0$, ou celle de K_2, soit $e_1 = \ldots = e_q = 0$. Le système (25) doit donc être équivalent à l'un de ces deux systèmes. Il doit donc être vérifié pour $e_{q+1} = \ldots = e_m = 0$ quels que soient $e_1, \ldots, e_q$, ou par $e_1 = \ldots = e_q = 0$ quels que soient $e_{q+1}, \ldots, e_m$. Or, dans le premier cas, (25) se réduit à

$$\Sigma_1^q (g_{hi} + \lambda\gamma_{hi}) e^i = 0, \qquad \Sigma_1^q \gamma_{ki} e^i = 0 \qquad (h = 1, \ldots, q;\ k = q+1, \ldots, m);$$

il faut donc

$$(27) \quad g_{hi} + \lambda\gamma_{hi} = 0, \qquad \gamma_{ki} = 0 \qquad (h, i = 1, \ldots, q;\ k = q+1, \ldots, p).$$

Dans le second cas, il faut de même

$$(28) \quad \gamma_{hj} = 0, \qquad g_{kj} + \lambda\gamma_{kj} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, q;\ k, j = q+1, \ldots, p).$$

Ainsi, dans les deux cas, il en résulte la décomposition

$$\Sigma(e) = \Sigma_1(e^1, \ldots, e^q) + \Sigma_2(e^{q+1}, \ldots, e^p).$$

(¹) Cf. *W.*, p. 237.

Remarquons maintenant que le groupe G contient le groupe $G_1 = \{X_1, \ldots, X_q, H\}$. Si l'on pose $\Delta(s, e^1, \ldots, e^q, 0, \ldots, 0) = \Delta_1(s, e)$ et $D(s, e^1, \ldots, e^q, 0, \ldots, 0) = D_1(s, e)$, le déterminant caractéristique de G_1 sera $D_1(s, e)\Delta_1(s, e)$. Le groupe K_1 étant simple, on établira, comme au n° **11**, une formule, analogue à (26), entre les sommes des carrés des racines

$$(29)\quad \Sigma_1(e) = c_1 S_1(e) \quad \text{quel que soit } e, \quad \gamma_{hk} = c_1 g_{hk} \quad (h, k = 1, \ldots, q).$$

Partant du groupe $G_2 = \{X_{q+1}, \ldots, X_p\}$, on établira de même

$$(30)\quad \Sigma_2(e) = c_2 S_2(e) \quad \text{quel que soit } e, \quad \gamma_{hk} = c_2 g_{hk} \quad (h, k = q+1, \ldots, p).$$

Si H est le central de G_1, on a $\Delta_1(s, e) = (-s)^m$, donc $\Sigma_1(e) = 0$. De même pour G_2. Comme $S_1(e)S_2(e)$ est en général $\neq 0$, il faut, dans ce cas, c_1 ou $c_2 = 0$. En dehors de ces cas, ce sont des nombres rationnels positifs. Mais si H n'est pas le central de G, il n'est pas le central de G_1 et de G_2. D'où le résultat : *Si le groupe* K *isomorphe à* $G \mid H$ *est produit direct de deux groupes simples* $K_1 K_2$, *les sommes des carrés des racines des déterminants caractéristiques vérifient les relations* (29) *et* (30), *où* c_1 *et* c_2 *sont deux nombres rationnels* $\geqq 0$, *et, si* H *n'est pas le central de* G, *non tous deux nuls.*

13. Si $K = G \mid H$ est simple, en rapprochant les formules (14) et (26), on a, pour la trace de la matrice $\widetilde{D}$,

$$(31)\qquad T = c\Sigma g^{hk} g_{hk} = cp.$$

Si K est produit direct de groupes simples, par exemple $K = K_1 K_2$, on voit que, les opérateurs étant choisis comme au n° **11**, g^{hk} n'est $\neq 0$ que si ses indices sont tous deux $\leqq q$ ou tous deux $> q$. La formule (14) donne alors

$$(32)\qquad T = T_1 + T_2, \qquad T_1 = \Sigma_1^q \Sigma_1^q g^{hk}\gamma_{hk}, \qquad T_2 = \Sigma_{q+1}^p \Sigma_{q+1}^p g_{hk}\gamma_{hk}.$$

En rapprochant les formules (29) et (30) de la formule (32), on a

$$(33)\qquad T = c_1 \Sigma_1^q \Sigma_1^q g^{hk} g_{hk} + c_2 \Sigma_{q+1}^p \Sigma_{q+1}^p g_{hk} g^{hk} = c_1 q + c_2(p - q).$$

Le nombre c étant rationnel > 0 (n° **11**), les nombres c_1 et c_2 étant rationnels $\geqq 0$ et non tous deux nuls (n° **12**) si H n'est pas le central de G, les formules (31) et (33) montrent que, dans cette hypothèse, et par suite dans les cas 2° et 3°, la trace T de la matrice $\widetilde{\mathrm{D}}$ est un nombre rationnel positif (¹).

14. Pour déduire de ces résultats l'invertibilité de la matrice $\widetilde{\mathrm{D}}$, il faut en étudier la forme, d'abord dans le cas 2°, où, quelle que soit d'ailleurs la structure de G, il n'existe aucun sous-groupe normal dans G dont les opérateurs soient combinaisons, à coefficients réels ou complexes, des opérateurs de H.

Comme les matrices $\widetilde{\mathrm{D}}$ (n° **4**) et $\widetilde{\mathrm{U}}$, la matrice $\widetilde{\mathrm{D}} - s\widetilde{\mathrm{U}}$ est évidemment, quel que soit s, échangeable avec toute matrice $\tilde{c}_i$.

Or, si une matrice $\widetilde{\mathrm{M}}$ de type (m, m) et de rang $q \leqq m - 1$, est échangeable avec toute matrice $\tilde{c}_i$, la variété linéaire définie par $\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{\eta} = 0$, dont le nombre de dimensions est $m - q \geqq 1$, est stabilisée par AG. Il en résulte en effet des formules (15), (16) du n° **6** que l'action $\overline{\mathrm{AG}}$ de AG dans la variété $(e = 0)$ du groupe H a les opérateurs

$$\overline{\mathrm{E}}_i = \Sigma \mathrm{C}_i^\beta(0, \eta)\frac{\partial}{\partial \eta^\beta}, \qquad \mathrm{C}_i^\beta(0, \eta) = \Sigma c_{\lambda i}^\beta \eta^\lambda.$$

Si donc $\tilde{\eta}$ désigne la matrice de type $(m, 1)$, d'éléments η^λ, on a

$$\overline{\mathrm{E}}_i\tilde{\eta} = -\tilde{c}_i\tilde{\eta}, \qquad \widetilde{\mathrm{M}}\overline{\mathrm{E}}_i\tilde{\eta} = -\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{c}_i\tilde{\eta}, \qquad \overline{\mathrm{E}}_i\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{\eta} = -c_i\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{\eta}.$$

Le système $\overline{\mathrm{E}}_i\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{\eta} = 0$ résulte donc du système $\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{\eta} = 0$. C'est la condition nécessaire et suffisante pour que la variété $\widetilde{\mathrm{M}}\tilde{\eta} = 0$ soit stabilisée par le groupe $\overline{\mathrm{AG}}$.

Si donc d désigne un zéro de $|\widetilde{\mathrm{D}} - s\widetilde{\mathrm{U}}|$, le rang de $|\widetilde{\mathrm{D}} - d\widetilde{\mathrm{U}}|$ sera $q \leqq m - 1$; le système $(\widetilde{\mathrm{D}} - d\widetilde{\mathrm{U}})\tilde{\eta} = 0$ définira une variété, stabilisée par AG, dont le nombre de dimensions sera $m - q \geqq 1$. Mais, par hypothèse, AG ne peut stabiliser aucune variété linéaire à moins de m dimensions. Il faut donc $q = 0$; les éléments de $\widetilde{\mathrm{D}} - d\widetilde{\mathrm{U}}$ sont tous nuls; donc $\widetilde{\mathrm{D}} = d\widetilde{\mathrm{U}}$ (²).

(¹) Cf. *W.*, p. 238.
(²) Cf. *W.*, p. 234-235.

15. *Si la structure de* G *est réelle, et si* H *ne contient aucun sous-groupe réel normal dans* G, *mais contient un sous-groupe imaginaire normal dans* G, *alors* m *est pair* ($m = 2q$); *le sous-groupe normal dans* G *est engendré par* q *opérateurs imaginaires* $Y'_\alpha = \Sigma f_\alpha{}^\beta Y_\beta$; *ces* q *opérateurs, avec les* q *opérateurs conjugués* $\dot{Y}'_\alpha = \Sigma \dot{f}_\alpha{}^\beta Y_\beta$, *forment une base de* H.

Si un q-sous-groupe H_1 de H est normal dans G, on peut faire un changement d'opérateurs et de paramètres, à coefficients complexes,

$$(33') \qquad Y'_\rho = \Sigma_1^m k_\rho{}^\sigma Y_\sigma, \qquad \eta^\sigma = \Sigma_1^m k_\rho{}^\sigma \eta'^\rho, \qquad \eta'^\rho = \Sigma_1^m K_\sigma{}^\rho \eta^\sigma,$$

tel que l'on ait

$$(X_i\, Y'_\alpha) = \Sigma_1^q c'_{i\alpha}{}^\lambda Y'_\lambda \qquad (= 1, \ldots, q).$$

Les opérateurs conjugués $\dot{Y}'_\alpha = \Sigma_1^m \dot{k}_\rho{}^\sigma Y_\sigma$ engendrent évidemment un q-sous-groupe $\dot{H}_1$ normal dans G.

Le groupe AG stabilise donc deux variétés conjuguées V_1 et $\dot{V}_1$, représentées par les équations

$$(34) \qquad \Sigma_1^m K_\sigma{}^\beta \eta^\sigma = 0, \qquad \Sigma_1^m \dot{K}_\sigma{}^\beta \eta^\sigma = 0 \qquad (\beta = q+1, \ldots, m).$$

Ce système de $2(m-q)$ équations est évidemment équivalent à un système de $2(m-q)$ équations à coefficients réels. Les deux variétés n'ont donc en commun aucun point autre que zéro ($\eta = 0$), sans quoi elles auraient en commun une sous-variété réelle, stabilisée par AG, à laquelle correspondrait un sous-groupe réel de H normal dans G. En conséquence le système (34) est de rang m, ce qui exige $2(m-q) \geqq m$, ou $2q \leqq m$, et les deux groupes H_1 et $\dot{H}_1$ n'ont aucun opérateur commun, en sorte que les $2q$ opérateurs Y'_α et $\dot{Y}'_\alpha$ sont indépendants.

Soit $W = \Sigma(\lambda^\alpha Y'_\alpha + \mu^\alpha \dot{Y}'_\alpha)$ un opérateur de leur $2q$-famille. Si l'on pose

$$(35) \qquad Y'_\alpha = U_\alpha + i V_\alpha, \qquad \dot{Y}'_\alpha = U_\alpha - i V_\alpha,$$

on aura

$$(36) \qquad W = \Sigma \nu^\alpha U_\alpha + \Sigma \rho^\alpha V_\alpha \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \nu^\alpha = \lambda^\alpha + \mu^\alpha, & 2\lambda^\alpha = \nu^\alpha - i\rho^\alpha, \\ \rho^\alpha = i(\lambda^\alpha - \mu^\alpha), & 2\mu^\alpha = \nu^\alpha + i\rho^\alpha. \end{array} \right.$$

Les $2q$ paramètres ν^α et ρ^α peuvent parcourir, de façon indépendante, l'ensemble des nombres réels. W parcourt alors une $2q$-famille d'opérateurs réels, deux à deux échangeables, soit $W_\gamma = \Sigma\lambda_\gamma{}^\alpha Y'_\alpha + \Sigma\dot{\lambda}_\gamma{}^\alpha \dot{Y}'_\alpha$; et l'on voit que tout alterné $(X_i\, W_\gamma)$ appartient à la $2q$-famille. On a donc un $2q$-sous-groupe de H normal dans G. L'hypothèse exige donc $2q = m$ (1).

16. *Si la matrice* $\widetilde{D}$ *n'est pas* $d\widetilde{U}$, *on peut choisir une base de* H *de manière que* $\widetilde{D} = \begin{matrix} d\tilde{U}_1 & d'\tilde{U}_1 \\ -d'\tilde{U}_1 & d\tilde{U}_1 \end{matrix}$, $\widetilde{U}_1$ *désignant la matrice-unité de degré* q.

Soit en effet s_0 un zéro de $|\widetilde{D} - s\widetilde{U}|$. Le déterminant $|\widetilde{D} - s_0\widetilde{U}|$, ne pouvant être de rang zéro, devra être de rang $\frac{m}{2} = q$, et le système $(\widetilde{D} - s_0\widetilde{U})\tilde{\eta} = 0$ devra déterminer une de ces q-variétés imaginaires V_1, étudiées au n° **15**, auxquelles répond un sous-groupe imaginaire H_1 normal dans G, ayant pour opérateurs imaginaires les Y'_α. Faisons, dans H, un changement de base, la nouvelle base étant formée des opérateurs U_α et V_α définis par (35). Il est aisé de voir que le système $\widetilde{D}\tilde{\eta} = s\tilde{\eta}$ est invariant dans tout changement simultané d'opérateurs et de paramètres.

Au changement d'opérateurs $Y'_\alpha = \Sigma f_\alpha{}^\lambda Y_\lambda$ répond en effet le changement de paramètres

$$\eta^\lambda = \Sigma f_\alpha{}^\lambda \eta'^\alpha, \qquad \text{ou} \qquad \tilde{\eta} = \tilde{f}\tilde{\eta}'.$$

Entre les anciennes et nouvelles constantes de structure, on a

$$\Sigma c_{i\lambda}{}^\mu f_\alpha{}^\lambda = \Sigma f_\lambda{}^\mu c'_{i\alpha}{}^\lambda, \qquad \text{ou} \qquad \tilde{c}_i\tilde{f} = \tilde{f}\tilde{c}'_i, \qquad \text{ou} \qquad \tilde{c}'_i = \tilde{f}^{-1}\tilde{c}_i\tilde{f}.$$

On en déduit

$$\tilde{c}'^i = \tilde{f}^{-1}\tilde{c}^i\tilde{f}, \qquad \tilde{c}'^i\tilde{c}'_i = \tilde{f}^{-1}\tilde{c}^i\tilde{c}_i\tilde{f}, \qquad \tilde{D}' = \tilde{f}^{-1}\tilde{D}\tilde{f}.$$

Alors de $\widetilde{D}\tilde{\eta} = s\tilde{\eta}$, en multipliant à gauche par $\tilde{f}^{-1}$ et remplaçant $\tilde{\eta}$ par $\tilde{f}\tilde{\eta}'$, on tire $\widetilde{D}'\tilde{\eta}' = s\tilde{\eta}'$. On a d'ailleurs $|D'| = |D|$.

Dans la nouvelle base réelle, les opérateurs V_α seront notés $U_{\alpha+q}$. Les opérateurs imaginaires seront $Y'_\alpha = U_\alpha + iU_{\alpha+q}$, $\dot{Y}'_\alpha = Y'_{\alpha+q} = U_\alpha - U_{\alpha+q}$.

(1) Cf. *W.*, p. 236.

Les paramètres relatifs à la base réelle et ceux relatifs à la base imaginaire seront liés par

$$\eta^{\alpha} = \eta'^{\alpha} + \eta'^{\alpha+q}, \qquad \eta^{\alpha+q} = i(\eta'^{\alpha} - \eta'^{\alpha+q}). \tag{37}$$

Les q-variétés imaginaires conjuguées V_1 et $\bar{V}_1$ seront représentées par

$$\eta^{\alpha} + i\eta^{\alpha+q} = 0, \tag{38}$$

$$\eta^{\alpha} - i\eta^{\alpha+q} = 0. \tag{39}$$

Au système (38), par exemple, doit être équivalent le système $\widetilde{D}\tilde{\eta} = s_0\tilde{\eta}$ ($\widetilde{D}$ nouvelle matrice), qui s'écrit

$$\Sigma_1^m (d_\lambda{}^\mu - s_0 u_\lambda{}^\mu)\eta^\lambda = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{40}$$

Chacune des m formes linéaires (40) doit être combinaison linéaire des q formes linéaires (38), soit

$$d_\alpha{}^\mu - s_0 u_\alpha{}^\mu = k_\alpha{}^\mu, \qquad d_{\alpha+q}^\mu - s_0 u_{\alpha+q}^\mu = ik_\alpha{}^\mu. \tag{41}$$

Pour $\mu \leqq q$, on en déduit $s_0 u_\alpha{}^\mu = d_\alpha^\mu + i d_{\alpha+q}^\mu$; la matrice $\widetilde{D}$ étant réelle, on en tire, $d_\alpha{}^\mu = d_{\alpha+q}^\mu = 0$ ($\mu \neq \alpha$), et si $s_0 = d + id'$, $d_\alpha{}^\alpha = d$, $d_{\alpha+q}^\alpha = d'$. Pour $\mu > q$, on en déduit $s_0 u_{\alpha+q}^\mu = d_{\alpha+q}^\mu - i d_\alpha{}^\mu$. On en tire de même $d_{\alpha+q}^\mu = d_\alpha{}^\mu = 0$ ($\mu \neq \alpha + q$), $d_{\alpha+q}^{\alpha+q} = d$, $d_\alpha{}^{\alpha+q} = -d'$. Ainsi la matrice $\widetilde{D}$ relative à la nouvelle base réelle a bien la forme énoncée.

17. Il en résulte que *le déterminant* $|\widetilde{D}|$ *ne peut pas être nul.* Dans les deux cas, en effet, on a $T = md$, donc (n° **13**) d est un nombre rationnel positif. Dans le cas 2° (n° **14**), on a $|\widetilde{D}| = d^m$. Dans le cas 3°, si $|\widetilde{D}|$ était nul, il existerait, entre les éléments de toutes ses colonnes, une même relation linéaire à coefficients non tous nuls, soit

$$\Sigma_1^m \lambda_\mu d_\alpha{}^\mu = 0, \qquad \Sigma_1^m \lambda_\mu d_{\alpha+q}{}^\mu = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, q).$$

D'après la forme de $\widetilde{D}$ (n° **16**), ces relations se réduisent à

$$\lambda_\alpha d - \lambda_{\alpha+q} d' = 0, \qquad \lambda_\alpha d' + \lambda_{\alpha+q} d = 0.$$

Il faudrait donc $d^2 + d'^2 = 0$, donc, d et d' étant réels, $d = d' = 0$.

18. Le théorème s'étend au cas général par un procédé de double récurrence ([1]) reposant sur deux théorèmes. *a. Si le sous-groupe invariant intégrable principal (sgiip)* H *d'un groupe* G *contient un sous-groupe* H_1 *normal dans* G, $H|H_1$ *est sgiip de* $G|H_1$. *b. Si* G' *est un sous-groupe de* G, *le pgcd* H' *de* G' *et* H *est sgiip de* G'.

Le procédé de double récurrence apparaîtra plus clair si l'on commence par étendre le théorème au cas où le sgiip est abélien et où il existe une suite de groupes $H_0 = H, H_1, H_2, \ldots$, dont chacun est normal dans G et maximum de cette sorte dans le précédent (ceci ayant éventuellement lieu au point de vue réel). On prendra une base de H dans laquelle $Y_{h_j+1}, \ldots, Y_m$ sera une base de $H_j (j = 0, 1, 2, \ldots, h_0 = 1)$. La structure de G sera

$$(42) \qquad (X_i\, Y_\alpha) = \Sigma_{h_j+1}^{m} c_{i\alpha}{}^{\lambda} Y_\lambda \qquad (\alpha = h_j + 1, \ldots, h_{j+1};\ j = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(43) \qquad (X_i\, X_k) = \Sigma_1^{p} c_{ik}{}^{j} X_j + \Sigma_1^{m} c_{ik}{}^{\mu} Y_\mu \qquad (i, k = 1, \ldots, p).$$

Le groupe $G|H_1$ a pour structure

$$(X_i\, Y_\alpha) = \Sigma_1^{h_1} c_{i\alpha}{}^{\lambda} Y_\lambda \qquad (\alpha = 1, \ldots, h_1),$$
$$(X_i\, X_k) = \Sigma c_{ik}{}^{j} X_j + \Sigma_1^{h_1} c_{ik}{}^{\lambda} Y_\lambda.$$

Son sgiip $H|H_1$ est abélien et n'a aucun sous-groupe normal dans $G|H_1$, sans quoi G en contiendrait un entre H et H_1. On peut donc remplacer X_i par $X_i + \Sigma_1^{h_1} f_i^{\lambda} Y_\lambda$, de manière à annuler les constantes $c_{ik}{}^{\lambda}$ $(\lambda = 1, \ldots, h_1)$, les f étant éventuellement réels. Comme les Y sont deux à deux échangeables, aucune autre constante de G ne sera changée.

La structure de G, ainsi modifiée, montre que G contient le $(p + m - h_1)$-groupe $G_1 = \{X_1, \ldots, X_p, H_1\}$, dont le sgiip est H_1. Le groupe $G_1|H_2$ a la structure

$$(X_i\, Y_\alpha) = \Sigma_{h_1+1}^{h_2} c_{i\alpha}{}^{\lambda} Y_\lambda \qquad (\alpha = h_1 + 1, \ldots, h_2),$$
$$(X_i\, X_k) = \Sigma c_{hk}{}^{j} X_j + \Sigma_{h_1+1}^{h_2} c_{ik}{}^{\lambda} Y_\lambda,$$

et son sgiip est $H_1|H_2$. On pourra de même remplacer X_i par

([1]) Cf. *W.*, p. 230.

$X_i + \Sigma_{h_1+1}^{h_2} f_i^\lambda Y_\lambda$ de manière à annuler les constantes c_{ik}^λ ($\lambda = h_1 + 1, \ldots, h_2$) sans changer les autres, et ainsi de suite ([1]).

19. Dans le cas général ([2]), la suite des dérivés successifs de H, tous normaux dans G, se termine par un h-groupe J abélien pour $h > 1$. Soit une base de H telle que $J = \{Y_1, \ldots, Y_h\}$, et $H = \{J, Y_{h+1}, \ldots, Y_m\}$. La structure de G sera

$$(44)\quad \left\{ \begin{array}{l} (Y_\alpha\, Y_\delta) = 0, \quad (Y_\beta\, Y_\alpha) = \Sigma_1^h c_{\beta\gamma}^\lambda Y_\lambda, \quad (Y_\beta\, Y_\gamma) = \Sigma_1^h c_{\beta\gamma}^\lambda Y_\lambda + \Sigma_{h+1}^m c_{\beta\gamma}^\mu Y_\mu, \\ \quad (X_i\, Y_\alpha) = \Sigma_1^h c_{i\alpha}^\lambda Y_\lambda, \qquad (X_i\, Y_\beta) = \Sigma_1^h c_{i\beta}^\lambda Y_\lambda + \Sigma_{h+1}^m c_{i\beta}^\mu Y_\mu, \\ \qquad (X_i\, X_k) = \Sigma_1^p c_{ik}^j X_j + \Sigma_1^h c_{ik}^\lambda Y_\lambda + \Sigma_{h+1}^m c_{ik}^\mu Y_\mu \\ \qquad (\alpha = 1, \ldots, h;\ \beta, \gamma = h+1, \ldots, m;\ i, k = 1, \ldots, p). \end{array} \right.$$

Soit $m_1 = m - h < m$. Le $(p + m_1)$-groupe $G_1 = G \mid J$ a pour sgiip le m_1-groupe $H_1 = H \mid J$. La structure de G_1 se déduit de celle de G en supprimant $Y_1, \ldots, Y_h$.

Si le théorème est vrai pour G_1, *il l'est pour* G. Dans cette hypothèse, en effet, on peut remplacer X_i par $X_i + \Sigma_{h+1}^m f_i^\mu Y_\mu$ de manière à annuler les c_{ik}^μ. Sur la structure de G, ainsi modifiée, on voit que G contient le $(p + h)$-groupe $G' = \{X_1, \ldots, X_p, J\}$, dont la structure est

$$(Y_\alpha\, Y_\delta) = 0, \qquad (X_i\, Y_\alpha) = \Sigma_1^h c_{i\alpha}'^\lambda, \qquad (X_i\, X_k) = \Sigma_1^p c_{ik}^j X_j + \Sigma_1^h c_{ik}'^\lambda Y_\lambda.$$

Le sgiip de G' est le h-groupe J abélien pour $h > 1$. Le théorème est donc vrai pour G'. On peut remplacer X_i par $X_i + \Sigma_1^h f_i^\lambda Y_\lambda$ de manière à annuler les $c_{ik}'^\lambda$. Alors G', et par suite G, contient un sous-groupe de structure (c_{ik}^j) isomorphe à $G \mid H$.

Si le m_1-groupe H_1 n'est pas abélien pour $m_1 > 1$, son dernier dérivé est un h_1-groupe J_1 abélien pour $h_1 > 1$. Soit $m_2 = m_1 - h_1 < m_1$. Le $(p + m_2)$-groupe $G_2 = G_1 \mid J_1$ a pour sgiip le m_2-groupe $H_2 = H_1 \mid J_1$; et le théorème est vrai pour G_1 s'il l'est pour G_2.

([1]) Ce raisonnement démontre le théorème dans le cas où H est le central de G. A chaque échelon s'applique le théorème dans le cas 1° (n° 2).

([2]) Cf. *W.*, p. 230.

On formera ainsi une suite de $(p+m_i)$-groupes G_i ayant pour sgiip les m_i-groupes H_i, lesquels ont pour derniers dérivés les h_i-groupes J_i abéliens pour $h_i > 1$. On aura $G_i = G_{i-1} | J_{i-1}$, $H_i = H_{i-1} | J_{i-1}$, $m_i = m_{i-1} - h_{i-1} < m_{i-1}$. Le théorème sera vrai pour G_{i-1} s'il l'est pour G_i. Or, on arrivera nécessairement à un groupe G_k ayant pour sgiip un m_k-groupe H_k abélien pour $m_k > 1$. Le théorème est vrai pour G_k. Il l'est donc successivement pour G_{k-1}, G_{k-2}, ..., G_1, G.