

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

JEAN LERAY

**Discussion d'un problème de Dirichlet**

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 9<sup>e</sup> série, tome 18 (1939), p. 249-284.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1939\\_9\\_18\\_249\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18_249_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Discussion d'un problème de Dirichlet* <sup>(1)</sup>;

PAR JEAN LERAY.

## I. — Introduction.

1. Nous nous proposons d'étudier les solutions d'une équation aux dérivées partielles du type elliptique <sup>(2)</sup>

$$(1) \quad \begin{cases} f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 & (4f'_r f'_t > f_s'^2, f'_r > 0, f'_t > 0 \text{ quand } f = 0) \\ (r = z''_{xx}(x, y), s = z''_{yy}, t = z''_{zz}, p = z'_{xz}, q = z'_{yz}). \end{cases}$$

Notre étude sera le développement de la théorie dont M. S. Bernstein a exposé en 1910-1912 divers cas très importants, d'une assez grande généralité : elle consistera à chercher quand les solutions de (1) vérifient certains *théorèmes de compacité et d'existence*. Nos conclusions sont énoncées aux paragraphes 17 (p. 266) et 25 (p. 278).

Nous utiliserons les méthodes de majoration *a priori* que

(<sup>1</sup>) L'essentiel de nos conclusions a été résumé aux *Comptes rendus*, t. 205, 1937, p. 268 et 784.

(<sup>2</sup>) Les travaux fondamentaux sur ce sujet sont ceux de MM. É. Picard et S. Bernstein :

E. PICARD, *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, 1890; *Journal de Mathématiques*, 1900; *Acta mathematica*, 1902; *Annales de l'École Normale*, 1906; *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, rédigées par M. BRELOT, *Cahiers scientifiques de M. Julia*. Gauthier-Villars, 1930.

S. BERNSTEIN, *Math. Annalen*, t. 69, 1910; *Annales de l'École Normale*, t. 27 et 29, 1910 et 1912; *C. R. Acad. Sc.*, t. 151, 10 octobre 1910; *Math. Annalen*, t. 95 et 96, 1927.

M. S. Bernstein a créées, mais dont il ne s'est pas donné la peine de tirer des conclusions complètes, ayant un sens géométrique. Nos théorèmes d'existence résulteront de *la théorie topologique des équations fonctionnelles* <sup>(3)</sup>.

**2. CONVENTIONS DIVERSES.** — Nous supposons  $f$  trois fois dérivable. Nous supposons que, quelles que soient les valeurs arbitraires données à  $p, q, x, y, z$ , la surface  $f=0$  décompose l'espace  $(r, s, t)$  en deux domaines.

Nous désignons par « valeur de  $f$  sur une surface  $z_i(x, y)$  » la valeur  $f_i$ , que prend  $f$  quand on y remplace  $z, p, q, r, s, t$  par  $z_i(x, y)$ , ses dérivées premières et secondes.

Nous nommons  $\gamma$  tout contour, d'un ou plusieurs tenants, de l'espace  $(x, y, z)$  qui est frontière de surfaces régulières  $z(x, y)$ ; nous supposons que  $\gamma$  est défini par des fonctions  $y(x), z(x)$  qui sont cinq fois dérivables quand  $y'_x$  est fini.

Nous supposons que *toutes les hypothèses faites restent vérifiées quand on permute les rôles de  $y$  et  $x$ .*

Nous nommons  $\varepsilon$  un signe, variable le long de  $\gamma$ , qui est  $+$  ou  $-$ , suivant que les surfaces  $z(x, y)$  qui ont  $\gamma$  pour frontière sont, par rapport à  $\gamma$ , du côté  $y=+\infty$  ou  $y=-\infty$ .

Nous disons que  $\gamma$  est compris entre deux surfaces  $z_1(x, y)$  et  $z_2(x, y)$  [ $z_1(x, y) < z_2(x, y)$ ] quand  $\gamma$  est frontière de surfaces  $z(x, y)$  qui vérifient l'inégalité  $z_1(x, y) \leq z(x, y) \leq z_2(x, y)$ .

$\gamma$  étant compris entre  $z_1(x, y)$  et  $z_2(x, y)$ , nous nommons « problème de Dirichlet de données  $[(1), \gamma, z_1, z_2]$  » le problème qui consiste à trouver les surfaces  $z(x, y)$  qui satisfont à (1), qui ont  $\gamma$  pour frontière et qui sont comprises entre  $z_1$  et  $z_2$ .

**3. RAPPEL DE RÉSULTATS.** — *Théorème 1.* — Considérons un ensemble de problèmes de Dirichlet dont les données  $[(1), \gamma, z_1, z_2]$  constituent un ensemble compact en soi. Supposons que *les dérivées secondes* des solutions de ces problèmes aient des valeurs absolues bornées dans

---

<sup>(3)</sup> LERAY-SCHAUDER, *Annales de l'École Normale*, t. 51, 1934.

leur ensemble. Alors l'ensemble de ces solutions, s'il n'est pas vide, est compact en soi dans l'espace des fonctions trois fois dérivables.

*Théorème 2.* — Supposons en outre ceci :

l'un de ces problèmes de Dirichlet possède une seule solution qui est simple <sup>(\*)</sup>;

l'ensemble des données  $[(1), \gamma, z_1, z_2]$  constitue un continu;

$(z_1 - z_2)f_1 \leq 0$ , l'égalité ne devant être atteinte que si  $\gamma$  est étranger à  $z_1$ ;

$(z_2 - z_1)f_2 \leq 0$ , l'égalité ne devant être atteinte que si  $\gamma$  est étranger à  $z_2$ .

Alors chacun de ces problèmes de Dirichlet possède au moins une solution.

Le théorème 1 est dû à M. S. Bernstein; ce raisonnement de M. S. Bernstein a été amélioré par M. J. Schauder <sup>(\*)</sup>.

M. S. Bernstein a établi le théorème 2, par la méthode des approximations successives de M. É. Picard, dans le cas où l'unicité de la solution est assurée ( $f' \leq 0$  quand  $f = 0$ ); l'énoncé ci-dessus se déduit du Chapitre V du *loc. cit.* <sup>(3)</sup> au moyen du lemme 1, que nous énoncerons au paragraphe 5.

Pour appliquer les théorèmes 1 et 2, il est nécessaire de savoir majorer les dérivées secondes des solutions de (1); or nous avons établi le théorème suivant <sup>(6)</sup>.

*Théorème 3.* — Supposons que dans l'espace  $(r, s, t)$  la conique à l'infini  $rt = s^2$  et la surface  $f = 0$  n'aient pas de tangente commune. Il est alors possible de majorer  $r^2 + s^2 + t^2$  sur une solution arbitraire de (1) en fonction des données suivantes : (1),  $\gamma$ , une borne supérieure de  $p^2 + q^2$  dans  $\Gamma$ .

<sup>(\*)</sup> Une solution est simple quand son équation aux variations possède une solution unique.

<sup>(2)</sup> J. SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, p. 37, 1933.

<sup>(6)</sup> Majoration des dérivées secondes des solutions d'un problème de Dirichlet (*Journal de Mathématiques*, t. 17, p. 89, 1938); voir p. 91 les inégalités (2) et (3) qui expriment les conditions de régularité imposées à  $f$  quand  $r^2 + s^2 + t^2$  est grand.

4. **SOMMAIRE.** — Nous nous contenterons d'envisager deux types généraux d'équations  $f=0$ . Les équations du premier type (Chap. III et V), satisferont aux hypothèses du théorème 3; leur étude consistera essentiellement à chercher quand il est possible de majorer les dérivées premières de leurs solutions. Au contraire, les équations du second type seront caractérisées par la propriété suivante : dans l'espace  $(r, s, t)$ , la surface  $f=0$  a pour courbe à l'infini la conique  $rt=s^2$ ; l'étude des équations de ce second type consistera à chercher quand il est possible de majorer les dérivées premières et secondes de leurs solutions.

## II. — Lemmes fondamentaux.

Au cours de ce Chapitre II, nous envisageons une équation du type elliptico-parabolique

$$(2.1) \quad \begin{cases} f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 \\ (4f_r f_t' \geq f_s'^2, f_r' \geq 0, f_t' \geq 0, f_r'^2 + f_t'^2 \neq 0 \text{ quand } f=0). \end{cases}$$

5. **LEMME 1.** — Supposons que, quels que soient  $p, q, x, y, z$ , la surface  $f=0$  de l'espace  $(r, s, t)$  décompose cet espace en deux domaines. Supposons que deux fonctions  $z(x, y)$  et  $z_\lambda(x, y)$  soient définies sur un domaine  $\Delta_\lambda$  et possèdent les propriétés que voici :  $f \geq 0$  sur  $z$ ;  $\Delta_\lambda$  et  $z_\lambda$  dépendent continûment de  $\lambda$ ; pour au moins une valeur de  $\lambda$ , on a  $z < z_\lambda$  sur tout le domaine  $\Delta_\lambda$  et sur sa frontière  $\Delta'_\lambda$ ; pour les autres valeurs de  $\lambda$ ,  $f_\lambda < 0$ ; en chaque point de  $\Delta'_\lambda$ , ou bien l'inégalité  $z < z_\lambda$  a lieu, ou bien il existe une direction, extérieure à  $\Delta_\lambda$ , suivant laquelle les dérivées  $z'$  et  $z'_\lambda$  de  $z$  et  $z_\lambda$  vérifient l'inégalité  $z' < z'_\lambda$ .

Je dis que  $z(x, y) < z_\lambda(x, y)$ .

*Démonstration.* — Supposons que l'inégalité  $z(x, y) < z_\lambda(x, y)$  soit vérifiée pour  $\lambda=0$  et ne le soit pas quel que soit  $\lambda$ ; envisageons la valeur de  $\lambda$  la plus proche de zéro telle qu'il existe un point de  $\Delta_\lambda + \Delta'_\lambda$  où  $z = z_\lambda$ ; soit  $m$  ce point. Nous avons  $z \leq z_\lambda$  sur  $\Delta_\lambda + \Delta'_\lambda$ .

Si  $m$  appartenait à  $\Delta'_\lambda$ , nous aurions en  $m$ ,  $z = z_\lambda$ ,  $z' < z'_\lambda$ ; il existerait donc un point de  $\Delta_\lambda$ , voisin de  $m$ , en lequel  $z > z_\lambda$ ; or l'inégalité

contraire a lieu dans  $\Delta_k$ . Si  $m$  était intérieur à  $\Delta_k$ , nous aurions en  $m$ ,

$$z = z_k, \quad p = p_k, \quad q = q_k, \quad r_k - r \geq 0, \quad (r_k - r)(t_k - t) \geq (s_k - s)^2;$$

or, ces relations sont incompatibles avec les inégalités  $f \geq 0$ ,  $f_k < 0$ .

Ces contradictions établissent le lemme 1.

**6. DÉFINITIONS.** — Introduisons quatre variables nouvelles  $k, l, m, n$  et les opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= k \frac{\partial}{\partial r} + l \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial p} + s \frac{\partial}{\partial q} + p \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathfrak{Y} &= l \frac{\partial}{\partial r} + m \frac{\partial}{\partial s} + n \frac{\partial}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial p} + t \frac{\partial}{\partial q} + q \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Définissons comme suit le produit de deux opérateurs différentiels de ce type

$$\mathfrak{U} = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \mathfrak{V} = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\mathfrak{U} = \sum_{i,j} u_i v_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

$\omega$  étant une fonction de  $(r, s, t, p, q, x, y, z)$ , posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\omega) &= \\ &f'_r \mathfrak{X}^2 \omega + f'_s \mathfrak{X} \mathfrak{Y} \omega + f'_t \mathfrak{Y}^2 \omega + (r f'_r + s f'_s + t f'_t + p f'_p + q f'_q) \omega'_z + f'_p \omega'_x + f'_q \omega'_y \\ &- \omega'_r \mathfrak{X}^2 f - \omega'_s \mathfrak{X} \mathfrak{Y} f - \omega'_t \mathfrak{Y}^2 f - (r \omega'_r + s \omega'_s + t \omega'_t + p \omega'_p + q \omega'_q) f'_z - \omega'_p f'_x - \omega'_q f'_y. \end{aligned}$$

Désignons par  $\frac{d}{dx}$ ,  $\frac{d}{dy}$ ,  $\frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2}{dx dy}$ ,  $\frac{d^2}{dy^2}$  les dérivées des deux premiers ordres d'une fonction  $(r, s, t, p, q, x, y, z)$  dans laquelle on a substitué à  $z, p, q, r, s, t$  une fonction  $z(x, y)$  et ses dérivées des deux premiers ordres. Nommons  $k, l, m, n$  les dérivées d'ordre trois de  $z(x, y)$ . Nous avons les identités

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} &= \mathfrak{X}\omega, \quad \frac{d\omega}{dy} = \mathfrak{Y}\omega, \quad \frac{df}{dx} = \mathfrak{X}f, \quad \frac{df}{dy} = \mathfrak{Y}f, \\ f'_r \frac{d^2\omega}{dx^2} + f'_s \frac{d^2\omega}{dx dy} + f'_t \frac{d^2\omega}{dy^2} + f'_p \frac{d\omega}{dx} + f'_q \frac{d\omega}{dy} \\ &- \omega'_r \frac{d^2f}{dx^2} - \omega'_s \frac{d^2f}{dx dy} - \omega'_t \frac{d^2f}{dy^2} - \omega'_p \frac{df}{dx} - \omega'_q \frac{df}{dy} = \mathfrak{B}(\omega). \end{aligned}$$

Sur toute solution de (2.1), nous avons donc

$$(2.3) \quad \frac{dw}{dx} = xw, \quad \frac{dw}{dy} = yw, \quad xf = yf = f = 0;$$

$$(2.4) \quad f_r \frac{d^2 w}{dx^2} + f_s \frac{d^2 w}{dx dy} + f_t \frac{d^2 w}{dy^2} + f_p \frac{dw}{dx} + f_q \frac{dw}{dy} = \mathfrak{B}(w).$$

On constate aisément que, sur les solutions de (2.1),  $\frac{dw}{dx}$ ,  $\frac{dw}{dy}$ ,  $\frac{d^2 w}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2 w}{dx dy}$ ,  $\frac{d^2 w}{dy^2}$  sont liées par les seules relations (2.3) et (2.4) lorsque, comme nous le supposons,  $w$  satisfait aux conditions suivantes :

ou bien  $w$  dépend seulement de  $p, q, x, y, z$  et  $w_p^2 + w_q^2 \neq 0$ ;

ou bien  $w_r^2 + w_s^2 + w_t^2 \neq 0$ , les droites de coordonnées  $(f'_r, f'_s, f'_t)$  et  $(w'_r, w'_s, w'_t)$  sont distinctes, et leur point d'intersection  $(\varphi, \sigma, \tau)$  est étranger à la conique  $(^1) \varphi\tau = \sigma^2$ .

**7. LEMME PRÉLIMINAIRE.** — Soit  $(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x_0, y_0, z_0)$  un système de valeurs de  $(r, s, t, p, q, x, y, z)$  en lequel les relations

$$xw = yw = xf = yf = f = w = 0, \quad \mathfrak{B}(w) < 0$$

soient compatibles. Je dis qu'on peut construire, au voisinage du point  $(x_0, y_0)$ , une solution analytique de (2.1),  $z(x, y)$ , sur laquelle on ait  $w < 0$ , sauf au point  $(x_0, y_0)$  où  $w = 0$ .

*Démonstration.* — D'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, l'équation (2.1) possède une solution qui est analytique au voisinage du point  $(x_0, y_0)$  et qui présente en ce point les caractères suivants :

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0, \quad \mathfrak{B}(w) < 0;$$

$\frac{d^2 w}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2 w}{dx dy}$ ,  $\frac{d^2 w}{dy^2}$  ont des valeurs arbitraires vérifiant (2.4). Choisissons ces valeurs telles que la forme de coefficients  $\left(\frac{dx^2}{d^2 w}, \frac{d^2 w}{dx dy}, \frac{d^2 w}{dy^2}\right)$  soit définie; elle est négative d'après (2.4), ce qui prouve le lemme.

**LEMME 2.** — Soit une fonction positive  $u(r, s, t, p, q, x, y, z)$ , qui

---

(<sup>1</sup>) Par hypothèse, la première de ces droites est extérieure ou tangente à cette conique.

est indépendante de  $(r, s, t)$  lorsque  $w$  l'est; soit un paramètre  $\lambda$ , positif ou nul, voisin de zéro. Soient  $k_\lambda, l_\lambda, m_\lambda, n_\lambda, r_\lambda, s_\lambda, t_\lambda, p_\lambda, q_\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$  des fonctions analytiques de  $\lambda$  vérifiant les relations

$$\mathfrak{X}(w + \lambda u) = \mathfrak{Y}(w + \lambda u) = \mathfrak{X}f = \mathfrak{Y}f = w + \lambda u = f = 0, \quad \mathfrak{B}(w) < 0;$$

$f, w$  et  $u$  sont supposés analytiques au voisinage de

$$(r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, x_0, y_0, z_0).$$

Je dis qu'on peut construire, au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , une solution de (2. 1),  $z_\lambda(x, y)$ , qui dépende analytiquement de  $(x, y, \lambda)$  et sur laquelle on ait  $w < 0$ , sauf pour les valeurs  $(x_0, y_0, 0)$  de  $(x, y, \lambda)$ ; pour ces valeurs,  $w = 0$ .

*Démonstration.* — Pour chaque valeur de  $\lambda$ , le lemme précédent permet de construire, au voisinage de  $(x_0, y_0)$  une solution analytique de (2. 1),  $z_\lambda(x, y)$ , sur laquelle  $w + \lambda u < 0$ , sauf au point  $(x_\lambda, y_\lambda)$  où  $w + \lambda u = 0$ . On peut faire en sorte que  $z_\lambda(x, y)$  dépende analytiquement de  $\lambda$ .

**8. LEMME 3.** —  $w$  n'a de point stationnaire sur aucune solution de (2. 1) si les relations  $\mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = \mathfrak{X}f = \mathfrak{Y}f = f = 0$  sont incompatibles.

*Démonstration.* — D'après (2. 3), l'incompatibilité de ces relations entraîne, sur toute solution de (2. 1), l'incompatibilité des relations  $\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} = 0$ .

**LEMME DE M. S. BERNSTEIN** (\*). — Une fonction  $w$  n'a de maximum relatif nul sur aucune solution de (2. 1) si les relations

$$\mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = \mathfrak{X}f = \mathfrak{Y}f = f = w = 0$$

entraînent  $\mathfrak{B}(w) > 0$ .

*Démonstration.* — En vertu de cette hypothèse, de (2. 3) et

(\*) Nous avons déjà énoncé ce lemme [*loc. cit.* (\*), p. 96], dont M. S. Bernstein avait énoncé et utilisé d'importants cas particuliers.



de (2.4), nous aurions en un tel maximum

$$f'_r \frac{d^2 w}{dx^2} + f'_s \frac{d^2 w}{dx dy} + f'_t \frac{d^2 w}{dy^2} > 0$$

ce qui est absurde.

**LEMME 4.** — Soit une fonction  $v(r, s, t, p, q, x, y, z)$  définie au voisinage d'un morceau de surface d'équation  $w(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0$ ;  $v$  est supposé indépendant de  $(r, s, t)$  quand  $w$  l'est. Supposons qu'au voisinage de  $w = 0$ , les conditions

$$\mathcal{X}f = \mathcal{Y}f = f = 0; \quad w < 0; \quad w, \mathcal{X}w \text{ et } \mathcal{Y}w \text{ voisins de } 0$$

entraînent les inégalités

$$\mathcal{B}(w) > -A_0[|w| + |\mathcal{X}w| + |\mathcal{Y}w|], \quad A_0|\mathcal{X}v| + A_0|\mathcal{Y}v| + |\mathcal{B}(v)| \leq A_1, \\ f'_r(\mathcal{X}v)^2 + f'_s \mathcal{X}v \mathcal{Y}v + f'_t(\mathcal{Y}v)^2 \geq A_2,$$

$A_0, A_1, A_2$  étant des constantes positives.

Soit une fonction positive  $u(v)$  vérifiant l'inégalité

$$(2.5) \quad A_2 u''_{v^2} > A_1 |u'_v| + A_0 u.$$

Je dis qu'au voisinage du morceau de surface  $w = 0$ , la fonction  $\frac{w}{u(v)}$  ne possède de maximum relatif négatif sur aucune solution de (2.1).

*Démonstration.* — Il suffit d'établir que la fonction  $w + \lambda u(v)$  ne possède aucun maximum relatif nul,  $\lambda$  étant une constante arbitraire, positive et voisine de zéro. D'après le lemme précédent, il suffit donc d'établir que  $\mathcal{B}(w + \lambda u) > 0$  quand

$$\mathcal{X}(w + \lambda u) = \mathcal{Y}(w + \lambda u) = \mathcal{X}f = \mathcal{Y}f = f = w + \lambda u = 0.$$

Or, quand ces égalités ont lieu,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w + \lambda u) &= \mathcal{B}(w) + \lambda \mathcal{B}(u) \geq -A_0[|w| + |\mathcal{X}w| + |\mathcal{Y}w|] + \lambda \mathcal{B}(u) \\ &= \lambda \{ -A_0 u - A_0 |\mathcal{X}u| - A_0 |\mathcal{Y}u| + \mathcal{B}(u) \} \\ &\geq \lambda \{ -A_0 u - [A_0 |\mathcal{X}v| + A_0 |\mathcal{Y}v| + |\mathcal{B}(v)|] |u'_v| \\ &\quad + [f'_r(\mathcal{X}v)^2 + f'_s \mathcal{X}v \mathcal{Y}v + f'_t(\mathcal{Y}v)^2] u''_{v^2} \} \\ &\geq \lambda \{ -A_0 u - A_1 |u'_v| + A_2 u''_{v^2} \} > 0. \end{aligned}$$

**9.** Au cours de ce paragraphe, les opérateurs différentiels  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  ne seront appliqués qu'à des fonctions de  $(p, q, x, y, z)$ ; nous

aurons donc

$$\mathfrak{X} = r \frac{\partial}{\partial p} + s \frac{\partial}{\partial q} + p \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} = s \frac{\partial}{\partial p} + t \frac{\partial}{\partial q} + q \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}.$$

LEMME 5. — Soit une fonction  $w(p, q, x, y, z)$ . Supposons

$$w'_p{}^2 + w'_q{}^2 \neq 0.$$

Supposons que le système d'équations

$$\mathfrak{X}w = \mathfrak{Y}w = f = 0$$

possède une solution unique  $r(p, q, x, y, z)$ ,  $s(p, q, x, y, z)$ ,  $t(p, q, x, y, z)$ . Les inégalités

$$\frac{\mathfrak{Y}r - \mathfrak{X}s}{w'_q} > 0, \quad \frac{\mathfrak{X}t - \mathfrak{Y}s}{w'_p} > 0$$

sont équivalentes. Si elles sont vérifiées,  $w$  ne possède de maximum relatif sur aucune solution de (1).

*Démonstration.* — Explicitons les équations qui définissent  $r, s, t$  en fonction de  $p, q, x, y, z$

$$f = 0, \quad rw'_p + sw'_q + pw'_z + w'_x = 0, \quad sw'_p + tw'_q + qw'_z + w'_y = 0.$$

Appliquons les opérateurs  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  à ces équations; il vient

$$\begin{aligned} f'_r \mathfrak{X}r + f'_s \mathfrak{X}s + f'_t \mathfrak{X}t + rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x &= 0, \\ w'_p \mathfrak{X}r + w'_q \mathfrak{X}s + rw'_z + \mathfrak{X}^2 w &= 0, \\ w'_p \mathfrak{X}s + w'_q \mathfrak{X}t + sw'_z + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}w &= 0, \\ f'_r \mathfrak{Y}r + f'_s \mathfrak{Y}s + f'_t \mathfrak{Y}t + sf'_p + tf'_q + qf'_z + f'_y &= 0, \\ w'_p \mathfrak{Y}r + w'_q \mathfrak{Y}s + sw'_z + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}w &= 0, \\ w'_p \mathfrak{Y}s + w'_q \mathfrak{Y}t + tw'_z + \mathfrak{Y}^2 w &= 0. \end{aligned}$$

En ajoutant membres à membres ces équations multipliées respectivement par les coefficients  $(0, 0, -1, 0, 1, 0)$  et

$$(-w'_p w'_q, f'_r w'_q, f'_t w'_p, -w'^2_q, f'_s w'_q - f'_t w'_p, f'_t w'^2_q),$$

nous obtenons les relations

$$\frac{\mathfrak{Y}r - \mathfrak{X}s}{w'_q} = \frac{\mathfrak{X}t - \mathfrak{Y}s}{w'_p} = \frac{\mathcal{B}(w)}{f'_r w'^2_q - f'_s w'_p w'_q + f'_t w'^2_p}.$$

Ces relations montrent que le lemme 5 ne diffère pas du lemme de de M. S. Bernstein (§ 8).

### III. — Un premier type d'équations.

Au cours de ce chapitre, nous nommons *notion géométrique* toute notion invariante par rapport au groupe des transformations ponctuelles

$$(3.1) \quad x_1(x, y), \quad y_1(x, y), \quad z_1(x, y, z),$$

qui transforment entre elles les droites parallèles à l'axe des  $z$  ( $\frac{\partial z_1}{\partial z}$  peut être positif ou négatif).

Soit un contour  $\gamma$ ; nous nommons  $\Gamma'$  le cylindre parallèle à  $Oz$  qui contient  $\gamma$ ;  $\Gamma$  désigne l'intérieur de  $\Gamma'$  ( $\Gamma$  ne s'étend à l'infini que dans la direction de l'axe des  $z$ ); rappelons que  $\varepsilon$  désigne le signe  $+$  ou le signe  $-$  suivant que  $\Gamma$  est, par rapport à  $\Gamma'$ , du côté  $y = +\infty$  ou  $y = -\infty$ .

**10. ALLURE DE L'ÉQUATION (1) SUR LES CYLINDRES VERTICAUX.** — Faisons subir à l'espace  $(x, y, z)$  le changement de coordonnées

$$X = x, \quad Y = z, \quad Z = y;$$

les nouvelles coordonnées

$$(R = Z''_{X^2}, \quad S = Z''_{XY}, \quad T = Z''_{YZ}, \quad P = Z'_X, \quad Q = Z'_Y, \quad X, Y, Z)$$

de l'élément de contact  $(r, s, t, p, q, x, y, z)$  existent pour  $q \neq 0$  et sont définies par les formules

$$(3.2) \quad \begin{cases} r = -(R + 2Sp + Tp^2)q, & s = -(S + Tp)q^2, & t = -Tq^3, \\ p = -PQ^{-1}, & q = Q^{-1}, & x = X, & y = Z, & z = Y. \end{cases}$$

L'équation étudiée

$$(1) \quad f(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0 \quad (4f'_r f'_t > f'^2_s, f'_r > 0, f'_t > 0 \text{ quand } f = 0)$$

équivalent à une équation

$$(3.3) \quad \begin{aligned} &F(R, S, T, P, Q, x, y, z) = 0 \\ &(4F'_R F'_T > F'^2_S, F'_R > 0, F'_T > 0 \text{ quand } F = 0 \text{ et que } Q \neq 0). \end{aligned}$$

Je dis que la condition suivante a un sens géométrique

$$(3.4) \quad \begin{cases} \text{les relations } Q = F = 0, & 4F'_R F'_T = F'^2_S \\ \text{entraînent } F'_R = F'_S = 0, & F'_T > 0. \end{cases}$$

Cette condition exprime, en effet, que, sur les cylindres verticaux, les caractéristiques de l'équation  $F = 0$  sont verticales quand elles sont réelles. Cette condition entraîne en particulier l'inégalité

$$(3.5) \quad F'_T > 0 \quad \text{quand } F = 0.$$

L'inégalité

$$(z_1 - z_2)f(r_1, s_1, t_1, p_1, q_1, x, y, z_1) \leq 0,$$

qui a un sens géométrique, équivaut à l'inégalité

$$q_1(z_1 - z_2)F(R_1, S_1, T_1, P_1, Q_1, x, y, z_1) \geq 0;$$

la condition suivante a donc un sens géométrique

$$(3.6) \quad \begin{cases} \pm(z_1 - z_2)F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z_1) \geq 0, \\ \text{quand } [x, y(x), z_1] \text{ décrit } \Gamma' \text{ et que } [x, y(x), z_2] \text{ décrit } \gamma. \end{cases}$$

Toute surface  $z_1(x, y)$ , intérieure à  $\Gamma$ , voisine de  $\Gamma'$  et ayant  $\gamma$  pour frontière, vérifie l'inégalité  $q_1(z_1 - z_2)\varepsilon > 0$ . Restreindre la condition (3, 6) par le choix suivant du signe  $\pm$  :  $\pm(z_1 - z_2)\varepsilon > 0$  a donc un sens géométrique. Par suite, les conditions suivantes ont des sens géométriques

$$(3.7) \quad \begin{cases} \varepsilon F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z_1) \geq 0, \text{ quand } [x, y(x), z_1] \text{ décrit } \Gamma', \\ \text{que } [x, y(x), z_2(x)] \text{ décrit } \gamma \text{ et que } \pm(z_1 - z_2)\varepsilon > 0; \end{cases}$$

$$(3.8) \quad \varepsilon F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \geq 0 \quad \text{quand } [x, y(x), z(x)] \text{ décrit } \gamma.$$

Le sens géométrique de (3.6) a, d'autre part, pour corollaire immédiat, le sens géométrique de la condition suivante :

$$(3.9) \quad \begin{cases} \pm F'_z(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) \geq 0, \\ \text{au voisinage des points de } \Gamma' \text{ où } F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_x, \pm 0, x, y, z) = 0. \end{cases}$$

*Remarque.* — (3.7) a nécessairement lieu quand  $\gamma$  vérifie (3.8) et que  $\Gamma'$  vérifie (3.9).

#### 11. CAS D'IMPOSSIBILITÉ DU PROBLÈME DE DIRICHLET. — LEMME 6. —

Supposons qu'on puisse choisir  $(y''_{x^2}, y'_{x^2}, \pm 0, x, y, z)$ , en sorte que  $F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_{x^2}, \pm 0, x, y, z) \neq 0$ . Alors le problème de Dirichlet est impossible pour certaines données présentant les caractères suivants :  $\Gamma'$  contient l'élément de contact  $(y''_{x^2}, y'_{x^2}, x, y)$ ;  $\gamma$  contient le point  $(x, y, z)$ ; en ce point, l'inégalité (3.8) n'est pas vérifiée.

S'il est possible de choisir  $(y'_{x^2}, \pm 0, x, y, z)$  tels que

$$F(R, 0, 0, y'_{x^2}, \pm 0, x, y, z)$$

garde un signe constant quand  $R$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , alors le problème de Dirichlet est impossible pour certaines données de la nature suivante :  $\Gamma'$  est d'un seul tenant, est convexe et a une courbure arbitrairement grande.

*Démonstration.* — L'hypothèse  $F(y''_{x^2}, 0, 0, y'_{x^2}, \pm 0, x, y, z) \neq 0$  a un sens géométrique. Une transformation du groupe (3.1) permet donc de la réduire, à l'hypothèse  $F(0, 0, 0, 0, -0, 0, 0, 0) < 0$ , qui a la signification suivante : une surface  $z(x, y)$  vérifie l'inégalité  $f < 0$  au voisinage du point  $(x=0, y=0, z=0)$  lorsque ses éléments de contact du second ordre sont suffisamment voisins de ceux du plan  $y=0$ ,  $q$  étant négatif. Les cylindres  $z_\lambda(y) = \lambda - \sqrt{y}$  vérifient donc l'inégalité  $f < 0$  quand  $\lambda, x$  et  $y$  sont suffisamment voisins de zéro.

Soit un contour régulier  $\gamma$ , qui contienne le point

$$(x=0, y=0, z=0),$$

et sur lequel on ait  $z \leq z_0, y > 0$ . Soit une valeur positive de  $\lambda$ . Je dis qu'il n'existe pas de solution  $z(x, y)$  de (1) qui ait  $\gamma$  pour frontière et qui satisfasse à l'inégalité  $z(x, y) < z_\lambda(y)$ . En effet, nous aurions, d'après le lemme 1,  $z(x, y) \leq z_0(y)$ ; or, cette inégalité est incompatible avec les relations

$$z(0, 0) = z_0(0), \quad q_0(0) = -\infty, \quad y > 0,$$

puisque  $q(0, 0)$  est fini.

On peut tracer un tel contour  $\gamma$  sur tout cylindre  $\Gamma'$  satisfaisant aux conditions suivantes : les points de  $\Gamma$  sont voisins de l'axe  $Oz$ ; le long de cet axe,  $\Gamma'$  a un contact d'ordre 3 avec le plan  $y=0$ ; dans  $\Gamma$ ,  $y > 0$ . Cette latitude du choix de  $\Gamma'$  prouve le lemme 6.

**12. MAJORATION FRONTIÈRE DES DÉRIVÉES PREMIÈRES. — LEMME 7. —** Soit un contour  $\gamma$ , frontière d'une solution  $z(x, y)$  de (1). Soit une surface  $z_2(x, y)$  telle que  $z_2(x, y) - z(x, y)$  ait un signe constant,  $\pm$ . Il est possible de majorer  $\pm \varepsilon q$  sur  $\gamma$ , en fonction de (1), de  $\gamma$  et de  $z_2$ , lorsqu'on a

$$\varepsilon F(y''_{xx}, 0, 0, y'_x, \pm \varepsilon 0, x, y, z) \geq 0$$

sur la partie de  $\Gamma'$  qui est comprise entre  $\gamma$  et  $z_2$ .

*N. B.* — Nous supposons que chacun des éléments de contact d'ordre 2 de la partie de  $\Gamma'$  comprise entre  $\gamma$  et  $z_2$  possède un voisinage sur lequel, ou bien  $F$  a un signe constant, ou bien  $F$  a des dérivées premières continues vérifiant (3.4).

*Démonstration.* — Il nous suffira d'étudier le voisinage de l'une des composantes de  $\Gamma'$ . Une transformation du groupe (3.1) réduit les hypothèses énoncées aux suivantes :

$\gamma$  est l'axe des  $x$ ;  $z(x, 0) = 0$ ;  $z$  est une fonction périodique de  $x$  définie pour  $0 \leq x \leq 1$ ;  $z(x, y) < 1$ ;  $F(0, 0, 0, 0, +0, x, 0, z) \geq 0$  pour  $0 \leq z \leq 1$ . Il s'agit de majorer  $q(x, 0)$ .

Il existe des constantes positives  $A_0, A_1, A_2$  telles que la surface  $Z(Y)$  vérifie l'inégalité  $F(0, 0, Z''_y, 0, Z'_y, X, Z, Y) > 0$  si les conditions suivantes sont remplies :  $Z, Z'_y, Z''_y$  sont voisins de 0,  $Z > 0, Z'_y > 0, 0 \leq Y \leq 1, A_2 Z''_y > A_1 Z'_y + A_0 Z$ .

Soit  $Z(Y - \lambda)$  une famille de surfaces qui vérifient ces conditions, qui soient définies pour  $0 \leq \lambda \leq Y \leq 1$  et qui vérifient, en outre, la condition  $Z(0) = 0$ . Soit  $z_\lambda(y) = z_0(y) + \lambda$  l'équation de ces surfaces dans le système de coordonnées  $(x, y, z)$ . Sur la frontière de ces surfaces  $z(x, y) < z_\lambda(y)$ ; d'autre part,  $f_\lambda < 0, z(x, y) < z_1(y)$ . Donc, d'après le lemme 1,  $z(x, y) \leq z_0(y)$ . Or,  $z(x, 0) = z_0(0)$ . Par suite,

$$q(x, 0) \leq q_0(0).$$

La majoration énoncée est effectuée.

**13. CONVENTIONS NOUVELLES. —** La fonction  $F(R, S, T, P, Q, x, y, z)$  est, en général, discontinue pour  $Q = 0$ . Nous introduirons deux fonctions  $F_+(R, S, T, P, Q, x, y, z)$  et  $F_-(R, S, T, P, Q, x, y, z)$  qui soient régulières quand  $F, S, T, Q$  sont voisins de zéro et qui coïncident avec  $F$ ,

l'une quand  $Q > 0$ , l'autre quand  $Q < 0$ . Nous aurons donc

$$F_{\pm}(R, 0, 0, P, 0, x, y, z) = F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z).$$

Nous supposons désormais que  $F_+$  et  $F_-$  vérifient la condition (3.4).

**CALCUL PRÉLIMINAIRE.** — Supposons que l'équation (2.1) soit l'équation  $F_{\pm} = 0$  et que  $w$  soit égale à  $\mp Q$ , ou plus généralement, au produit de  $\pm Q$  par une fonction négative de  $(P, Q, x, y, z)$ . La condition

$$\mathcal{B}(w) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \mathcal{X}w = \mathcal{Y}w = \mathcal{X}F_{\pm} = \mathcal{Y}F_{\pm} = w = F_{\pm} = 0$$

équivaut à la condition

$$\pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) \geq 0 \quad \text{pour} \quad F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0.$$

**14. CAS OÙ LA MAJORATION INTÉRIEURE DES DÉRIVÉES PREMIÈRES EST IMPOSSIBLE.** — **LEMME 8.** — Supposons qu'on puisse choisir  $R, P, \pm, x, y, z$  tels qu'on ait

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0, \quad \pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) < 0$$

et que  $F$  soit analytique au voisinage de ce système d'arguments<sup>(\*)</sup>.

La majoration intérieure des dérivées premières est alors impossible.

*Démonstration.* — L'hypothèse énoncée permet d'appliquer le lemme 2 à l'équation  $F_{\pm} = 0$  et à la fonction  $w = \mp Q$ . L'équation  $F_{\pm} = 0$  possède donc une solution  $Z_{\lambda}(X, Y)$  ayant les caractères suivants :  $Z$  est une fonction analytique de  $(X, Y, \lambda)$ , définie au voisinage d'un point  $(X_0, Y_0)$  pour  $\lambda \geq 0$ ;  $\pm Q_{\lambda}(X, Y) > 0$  quand  $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + \lambda^2 \neq 0$ ;  $Q_0(X_0, Y_0) = 0$ .

Soit  $z_{\lambda}(x, y)$  l'équation des surfaces  $Z_{\lambda}(X, Y)$  dans le système de coordonnées  $(x, y, z)$ ;  $z_{\lambda}(x, y)$  est une solution de (1), définie pour  $\lambda \geq 0$  au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ ;  $z$  dépend analytiquement de  $(x, y, \lambda)$ , sauf au point  $x = x_0, y = y_0, \lambda = 0$ ;  $z_{\lambda}(x, y)$  est

---

(\*) Autrement dit, que  $F_{\pm}$  soit analytique au voisinage du système d'arguments  $(R, 0, 0, P, 0, x, y, z)$ .

continue même en ce point;

$$q_\lambda(x, y) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda^2 \rightarrow 0.$$

Ces propriétés de  $z_\lambda(x, y)$  justifient le lemme 8.

**15. PREMIER PROCÉDÉ DE MAJORATION INTÉRIEURE DES DÉRIVÉES PREMIÈRES. —**

**LEMME 9.** — Supposons vérifiées les trois hypothèses suivantes :

$$1^\circ \quad \pm F_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) \geq 0 \quad \text{quand} \quad F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$$

est voisin de zéro ;

2°  $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$  a le signe de  $R$ , quand  $|R|$  est supérieur à une borne qui dépend continûment de  $P, x, y, z$  ;

3° Les dérivées secondes de  $F(R, S, T, P, Q, x, y, z)$  sont bornées, quand  $P, x, y, z$  étant bornés,  $F, S, T$  et  $Q$  sont simultanément voisins de zéro.

Je dis qu'il est alors possible de majorer  $p^2 + q^2$  sur une solution arbitraire de (1) en fonction des données suivantes : (1),  $\gamma$ , une borne supérieure de  $|z|$  dans  $\Gamma$ , une borne supérieure de  $p^2 + q^2$  le long de  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à  $x, y, z$  ; au cours de la démonstration, ces variables seront supposées comprises entre ces bornes.

Appliquons le lemme 4 à l'équation  $F_+(R, S, T, P, Q, X, Y, Z) = 0$  et aux fonctions  $w = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} = -\frac{Q}{\sqrt{1 + P^2}}$ ,  $v = z$ ,  $Q$  étant supposé positif et  $|P|$  inférieur à 2. Les hypothèses de ce lemme sont vérifiées. Sur aucune solution de (1),  $\sqrt{p^2 + q^2}u(z)$  ne possède donc de maximum relatif en lequel  $q$  est grand, et  $\left|\frac{p}{q}\right| < 2$ , si la fonction positive  $u$  vérifie une certaine inégalité

$$A_2 u''_z > A_1 |u'_z| + A_0 u \quad (A_i = \text{constantes positives}).$$

Cette conclusion subsiste si l'on change  $q$  en  $-q$ , si l'on permute les rôles de  $p$  et  $q$ . Il est donc possible de choisir la fonction positive  $u$  telle que le maximum de  $\sqrt{p^2 + q^2}u(z)$  sur une solution de (1) soit réalisée sur  $\gamma$ , s'il est supérieur à une borne connue ; ceci établit le lemme 9.



**16. SECOND PROCÉDÉ DE MAJORATION INTÉRIEURE DES DÉRIVÉES PREMIÈRES. —**  
**LEMME 10.** — Supposons qu'à tout élément de contact du premier ordre d'un cylindre vertical, on puisse attacher deux éléments de contact du second ordre de cylindres verticaux satisfaisant aux conditions suivantes : soient  $[y''_x = R(P, \pm 0, x, y, z), y'_x = P, x, y, z]$  les éléments du second ordre attachés à l'élément du premier ordre

$$[y'_x = P, x, y, z];$$

$$1^\circ \quad F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = F'_R(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0,$$

quand  $R = R(P, \pm 0, x, y, z); \pm R'_\pm(P, \pm 0, x, y, z) > 0;$

$2^\circ$   $R(P, \pm 0, x, y, z)$  est une fonction trois fois dérivable de  $(P, x, y, z);$

$3^\circ$  Les dérivées troisièmes de  $F$  sont bornées quand  $P, x, y, z$  étant bornés,  $S, T, Q$  étant voisins de zéro,  $R$  est voisin de  $R(P, \pm 0, x, y, z).$

Je dis qu'il est possible de majorer  $p^2 + q^2$  sur une solution arbitraire de (1) en fonction des données suivantes : (1),  $\gamma$ , une borne supérieure de  $|z|$  dans  $\Gamma$ , une borne supérieure de  $p^2 + q^2$  le long de  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à  $x, y, z$ ; au cours de la démonstration, nous supposons que ces variables restent comprises entre ces bornes.

Définissons, pour  $Q$  positif et voisin de zéro, une fonction

$$R(P, Q, x, y, z)$$

qui se réduise à  $R(P, +0, x, y, z)$  quand  $Q = 0,$

Soit une fonction  $w(P, Q, x, y, z)$ . La condition que le système

$$xw = R\omega'_P + S\omega'_Q + P\omega'_y + \omega'_x = 0,$$

$$yw = S\omega'_P + T\omega'_Q + Q\omega'_y + \omega'_z = 0, \quad F_+(R, S, T, P, Q, x, y, z) = 0$$

admette pour solution la fonction  $R(P, Q, x, y, z)$  est que  $w$  satisfasse à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(3.10) \quad F_+\left(R, -\frac{R\omega'_P + P\omega'_y + \omega'_x}{\omega'_Q}, \frac{R\omega'^2_P + P\omega'_P\omega'_y + \omega'_P\omega'_x - Q\omega'_y\omega'_Q - \omega'_z\omega'_Q}{\omega'^2_Q}, P, Q, x, y, z\right) = 0.$$

Nous avons

$$F = F'_R = F'_S = F'_P = F'_x = F'_y = F'_z = 0, \quad F'_T > 0,$$

quand les arguments sont  $[R(P, +0, x, y, z), 0, 0, P, +0, x, y, z]$ . L'équation aux dérivées partielles (3. 10) possède donc les caractéristiques que définissent les relations

$$\begin{aligned} dP = dx = dy = 0, \quad Q = 0, \quad w'_P = w'_x = w'_y = w'_z = 0, \\ \frac{dw'_0}{dz} = w'_0 \frac{F'_0}{F'_T}, \quad w = 0. \end{aligned}$$

Des caractéristiques voisines de celles-ci engendrent des solutions  $w$  de (3. 10) qui ont les propriétés suivantes;  $w$  est défini quand  $Q$  est voisin de zéro et que  $Q \geq 0$ ;  $w = 0$  quand  $Q = 0$ ;  $w'_0 < 0$ ; donc  $w < 0$  quand  $Q > 0$ ; les dérivées premières et secondes de  $w$  par rapport à  $P, x, y, z$  sont voisines de zéro. Par suite,

$$\begin{aligned} yR = SR'_P + TR'_Q + QR'_y + R'_z \quad \text{est voisin de } R'_z < 0; \\ xS = SR'_P + TS'_Q + PS'_y + S'_x \quad \text{est voisin de zéro.} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{yR - xS}{w'_0} > 0;$$

le lemme 5 s'applique donc à ces fonctions  $w$ .

Plus généralement, posons

$$\varpi = (p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \theta = \arctan \frac{p}{q};$$

soit une fonction  $w(\varpi, \theta, x, y, z)$ ; la condition pour que les solutions  $r, s, t$  du système  $f = \mathcal{E}w = \mathcal{Y}w = 0$  vérifient l'équation

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = -Q^{-2}R(P, Q, x, y, z)$$

est que  $w$  satisfasse à une équation aux dérivées partielles du premier ordre, dont (3. 10) est l'un des aspects. Cette équation possède des caractéristiques sur lesquelles  $\theta, x, y$  sont des constantes arbitraires,  $\varpi = 0, w'_0 = w'_x = w'_y = w'_z = 0, \frac{1}{w'_0} \frac{dw'_0}{dz}$  est borné,  $w = 0$ . Des caractéristiques voisines de celles-ci permettent de construire une fonction  $w$  ayant les propriétés suivantes:  $w$  est une fonction uniforme de  $(p, q, x, y, z)$  définie quand  $\varpi$  est voisin de 0 ( $\varpi \geq 0$ );  $w = 0$  quand

$\varpi = 0$ ;  $\varpi < 0$  quand  $\varpi > 0$ ; le lemme 5 s'applique à cette fonction  $\varpi$ , qui ne possède donc de maximum sur aucune solution de (1). Ceci établit le lemme 10.

**17. CONCLUSIONS.** — Nous nommerons  $\Phi$  toute famille de contours  $\gamma$  contenant une sous-famille de la nature suivante :  $\gamma$  appartient à cette sous-famille quand il est d'un seul tenant et que la valeur absolue de la courbure de  $\Gamma'$  est supérieure à une borne, fonction du maximum qu'atteint  $|z|$  sur  $\gamma$ .

Nous dirons que le *problème de Dirichlet est bien posé* <sup>(10)</sup> pour une équation  $f = 0$  et une famille  $\Phi$  de contours  $\gamma$  quand les deux propositions suivantes sont vraies :

1° Soit un ensemble compact en soi de données  $(\gamma, z_1, z_2)$ , dont les contours  $\gamma$  appartiennent à  $\Phi$ ; les solutions des problèmes de Dirichlet correspondants constituent un ensemble *compact en soi* (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables.

2° Le problème de Dirichlet de données  $[(1), \gamma, z_1, z_2]$  possède *au moins une solution* quand les conditions suivantes sont réalisées :  $\gamma$  appartient à  $\Phi$ ;  $\gamma$  est étranger à  $z_1$  et à  $z_2$ ;

$$(3.11) \quad (z_1 - z_2)f_1 \leq 0, \quad (z_2 - z_1)f_2 \leq 0.$$

Nous dirons que le *problème de Dirichlet est mal posé* pour une équation (1), quand il n'existera aucune famille  $\Phi$  telle que ce problème soit bien posé pour (1) et  $\Phi$ .

**THÉORÈME I.** — *Le problème de Dirichlet est bien posé, pour la famille  $\Phi$  des contours  $\gamma$  le long desquels*

$$(3.8) \quad \varepsilon F(y''_{xx}, 0, 0, y'_{xx}, \pm 0, x, y, z) \geq 0,$$

*lorsque l'équation étudiée (1) satisfait à l'ensemble des conditions géométriques que voici :*

a. *Elle est du type elliptique ( $4f'_r f'_t > f''_s$  quand  $f = 0$ ); en outre, (3, 4) est vérifiée.*

---

<sup>(10)</sup> Nous nous permettons d'utiliser cette expression dans un sens différent de celui que lui a donné M. Hadamard.

*b. Dans l'espace  $(r, s, t)$  la conique à l'infini  $rt = s^2$  et la surface  $f = 0$  n'ont pas de tangente commune <sup>(11)</sup>.*

*c. L'une des conditions  $c_1$  ou  $c_2$  est réalisée :*

*( $c_1$ )  $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$  a le signe de  $R$  quand  $|R|$  est supérieur à une borne, qui dépend continûment de  $P, x, y, z$ ;*

*( $c_2$ ) il existe une fonction continue  $R(P, \pm 0, x, y, z)$  telle que  $F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0$  quand  $R$  est voisin de  $R(P, \pm 0, x, y, z)$ .*

*d.  $\pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) \geq 0$  quand*

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$$

*est voisin de zéro;*

*e. Les dérivées secondes (cas  $c_1$ ) ou troisièmes (cas  $c_2$ ) de*

$$F(R, S, T, P, Q, x, y, z)$$

*sont bornées quand  $R, P, x, y, z$  sont bornées et que  $F, S, T, Q$  sont simultanément voisins de zéro.*

*Le problème de Dirichlet est mal posé quand l'une ou l'autre des circonstances suivantes se présente :*

*$\bar{c}$ . Il est possible de choisir  $P, \pm, x, y, z$  tels que*

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z)$$

*garde un signe constant quand  $R$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .*

*$\bar{d}$ . Il est possible de choisir  $R, P, \pm, x, y$  tels que*

$$F(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) = 0, \quad \pm F'_z(R, 0, 0, P, \pm 0, x, y, z) < 0,$$

*que (3.4) soit vérifiée et que  $F$  soit analytique au voisinage de ce système d'arguments.*

**18. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.** — Les lemmes 6 et 8 prouvent que le problème de Dirichlet est mal posé quand l'une des circonstances  $\bar{c}$  et  $\bar{d}$  se présente.

Supposons réalisées les conditions  $a, b, c, d, e$ . Les théorèmes 1 et 3, le lemme 7 (complété par la remarque qui termine le para-

---

<sup>(11)</sup> Et, plus précisément, les inégalités (2), (3), *loc. cit.* <sup>(6)</sup> sont vérifiées.

graphe 10), le lemme 9 (si  $c_1$  est vérifié), le lemme 10 (si  $c_2$  est vérifié), démontrent alors la proposition suivante :

« Soit un ensemble compact en soi de données  $(\gamma, z_1, z_2)$ , dont les contours  $\gamma$  vérifient (3. 8); les solutions des problèmes de Dirichlet correspondants constituent un ensemble *compact en soi*, (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables. »

Pour déduire de cette proposition le théorème I, il suffit, d'après le théorème II, d'établir le lemme suivant :

« Soit un système de données (1),  $\gamma, z_1, z_2$  vérifiant les conditions suivantes : (1) satisfait à  $a, b, c, d, e$ ;  $\gamma$  satisfait à (3. 8);  $\gamma$  est étranger à  $z_1$  et à  $z_2$ ;  $z_1 < z_2$ ;  $f_1 \geq 0$ ;  $f_2 \leq 0$ . Soit  $z_0$  une surface comprise entre  $z_1$  et  $z_2$  et ayant  $\gamma$  pour frontière. Je dis qu'on peut modifier continûment (1), en respectant les conditions précédentes, de manière à réaliser en outre les suivantes :  $f_0 = 0, f'_z = 0$ , en sorte que le nouveau problème de Dirichlet ainsi obtenu possède une solution unique et simple,  $z_0$ . »

Il est aisé d'opérer cette modification continue de  $f$ ; on le constate en faisant les remarques suivantes :

On peut supposer  $z_0 = 0, z_1 = -1, z_2 = +1$ ;

Les conditions  $f_0 = 0, f_1 \geq 0, f_2 \leq 0$  concernent donc l'allure de  $f$  pour  $p = q = 0$ ;

Au contraire, les conditions (3. 4), (3. 8),  $c, d, e$  concernent l'allure de  $f$  quand  $p^2 + q^2$  est infiniment grand;

Les conditions (3. 8)  $a, b, c, d, e$  ne sont pas altérées quand on remplace, dans  $f, z$  par  $\lambda z, \lambda$  étant un paramètre variant de 1 à 0.

#### IV. — Un second type d'équations.

19. L'équation aux dérivées partielles qu'étudie ce chapitre est représentée dans l'espace  $(r, s, t)$  par une surface qui décompose cet espace en deux domaines et qui a pour courbe à l'infini la conique  $rt = s^2$ .

Cette équation est définie par le système de relations

$$(4.1) \quad \begin{cases} rt - s^2 + g(r, s, t, p, q, x, y, z) + h(r, s, t, p, q, x, y, z) = 0, \\ t + g'_r + h'_r > 0, \quad r + g'_t + h'_t > 0, \end{cases}$$

$g$  étant homogène et de degré 1 en  $(r, s, t)$  et  $|h|$  étant borné par une fonction continue de  $(p, q, x, y, z)$ .

Nous introduirons une fonction continue  $f(r, s, t, p, q, x, y, z)$  qui diffère de zéro hors de la surface (4.1) et qui satisfasse sur cette surface aux relations  $f = 0, f'_r > 0, f'_t > 0$ .

Au cours de ce chapitre, nous nommons *notion géométrique* toute notion invariante par rapport au groupe des transformations ponctuelles

$$(4.2) \quad x_1(x, y), \quad y_1(x, y), \quad z_1(x, y, z) \quad \left( \frac{\partial z_1}{\partial z} > 0 \right),$$

qui transforment entre eux les axes parallèles à l'axe des  $z$ .

L'hypothèse que (4.1) est du type elliptique s'exprime par l'inégalité

$$(g'_r + h'_r)(g'_t + h'_t) - \frac{1}{4}(g'_s + h'_s)^2 - h + rh'_r + sh'_s + th'_t > 0;$$

nous ferons l'hypothèse plus stricte

$$(4.3) \quad \begin{cases} (g'_r + h'_r)(g'_t + h'_t) - \frac{1}{4}(g'_s + h'_s)^2 - h + rh'_r + sh'_s + th'_t > A, \\ A \text{ étant une fonction positive et continue de } (p, q, x, y, z). \end{cases}$$

*Remarque 1.* — Puisque (4.1) est du type elliptique, la surface qu'elle définit dans l'espace  $(r, s, t)$  n'est traversée par aucun de ses plans tangents; exprimons cette propriété du plan qui la touche au point à l'infini dans la direction  $(\beta^2, -\alpha\beta, \alpha^2)$ ; nous obtenons l'inégalité

$$(4.4) \quad r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 + g(\beta^2, -\alpha\beta, \alpha^2, p, q, x, y, z) > 0,$$

*Remarque 2.* — Une courbe tracée sur une solution de (4.1) vérifie l'identité

$$z''_{x^2} = r + 2sy'_x + ty'^2_{x^2} + qy''_{x^2};$$

d'après (4.4), nous avons donc sur une telle courbe

$$(4.5) \quad z''_{x^1} - qy''_{x^1} + g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) > 0.$$

**20. ALLURE DE L'ÉQUATION (4.1) SUR UNE COURBE <sup>(12)</sup>.** — Faisons subir à l'espace  $(x, y, z)$  la transformation de contact d'Ampère; les nouvelles coordonnées

$$(\rho = \zeta''_{\xi}, \sigma = \zeta''_{\xi\eta}, \tau = \zeta''_{\eta^2}, \pi = \zeta'_\xi, \chi = \zeta'_\eta)$$

de l'élément de contact  $(r, s, t, p, q, x, y, z)$  existent pour  $t \neq 0$  et sont définies par les formules

$$(4.6) \quad \begin{cases} r = \frac{\sigma^2 - \rho\tau}{\tau}, & s = -\frac{\sigma}{\tau}, & t = \frac{1}{\tau}, \\ p = -\pi, & q = \eta, & x = \xi, & y = \chi, & z = \chi\eta - \xi. \end{cases}$$

(4.1) prend la forme

$$(4.7) \quad \varphi(\rho, \sigma, \tau, p, q, x, y, z) = \rho - g(\sigma^2 - \rho\tau, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \\ - \tau h\left(\frac{\sigma^2 - \rho\tau}{\tau}, -\frac{\sigma}{\tau}, \frac{1}{\tau}, p, q, x, y, z\right) = 0.$$

Nous supposons que les dérivées troisièmes de  $\varphi$  restent bornées quand  $\tau$  s'annule.

L'hypothèse (4.3) fait que nous avons, même pour  $\tau = 0$ ,

$$(4.8) \quad 4\varphi'_\rho\varphi'_\tau > \varphi'^2_\sigma \quad (\text{quand } \varphi = 0).$$

La transformation d'Ampère (4.6) transforme la courbe  $y(x)$ ,  $z(x)$  en la surface

$$\zeta(\xi, \eta) = \eta y'(\xi) - z(\xi);$$

cette surface satisfait à (4.7) si

$$(4.9) \quad z''_{x^1} - qy''_{x^1} + g(y'^2_x, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) = 0 \quad (\text{quand } z'_x = p + qy'_x).$$

Imposer à une courbe  $y(x)$ ,  $z(x)$ , et à l'un de ses plans tangents  $(p, q)$  la relation (4.9) ou (4.5), a donc un sens géométrique.

Soit un contour  $\gamma$ ; exprimons que la condition géométrique (4.5)

<sup>(12)</sup> Cf. E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, § 27 et 28.

est satisfaite par ceux de ses plans tangents qui sont voisins de plans verticaux et qui vérifient l'inégalité  $\varepsilon q < 0$ ; nous obtenons la condition géométrique

$$(4.10) \quad \begin{cases} \varepsilon \{ y''_{x^2} - \lim q^{-1} g(y'^2_x, -y'_{x, 1}, p, q, x, y, z) \} > 0 \\ \text{pour } q \rightarrow -\varepsilon\infty \text{ et } p = z'_x - qy'_x. \end{cases}$$

Soit  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$ ,  $z(\lambda)$  une représentation paramétrique de la courbe  $y(x)$ ,  $z(x)$ ; (4.9) équivaut à

$$z''_{\lambda} - px''_{\lambda} - qy''_{\lambda} + g(y'^2_{\lambda}, -x'_{\lambda}, y'_{\lambda}, x'^2_{\lambda}, p, q, x, y, z) = 0 \quad (z'_{\lambda} = px'_{\lambda} + qy'_{\lambda}).$$

Posons

$$\lambda = z, \quad p = -PQ^{-1}, \quad q = Q^{-1};$$

il vient

$$Px''_{z^2} - y''_{z^2} + (y'_x - P)^{-2} q^{-2} g(y'^2_x, -y'_{x, 1}, p, q, x, y, z) = 0.$$

Appliquons cette condition aux courbes qui sont voisines des parallèles à l'axe des  $z$  et à ceux de leurs plans tangents qui ne sont pas verticaux; exprimons que cette condition puisse être vérifiée et soit continue, nous obtenons la condition

$$\lim q^{-2} g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) = 0 \text{ pour } |q| \rightarrow \infty \text{ et } \sigma \neq P = -pq^{-1}.$$

Du caractère géométrique de cette dernière condition résulte le caractère géométrique de la suivante :

$$(4.11) \quad \begin{cases} (p^2 + q^2 + 1)^{-1} |g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z)| \text{ reste inférieur} \\ \text{à une borne indépendante de } p^2 + q^2 \text{ tant que } \sigma, p, q, x, y, z \\ \text{restent bornés et que } pq^{-1} \neq \sigma. \end{cases}$$

D'autre part, en dérivant (4.9), nous constatons qu'imposer à une courbe  $\gamma$  l'une ou l'autre des conditions suivantes à un sens géométrique

$$(4.12) \quad \begin{cases} \text{borne inf. } \varepsilon \left\{ y''_{x^2} + \left( y'_x \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) g(y'^2_x, -y'_{x, 1}, p, q, x, y, z) \right\} > 0 \\ \text{pour } q \text{ arbitraire et } p = z'_x - qy'_x; \end{cases}$$

$$(4.13) \quad \begin{cases} \left( y'^2_x \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2y'_x \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) g(y'^2_x, -y'_{x, 1}, p, q, x, y, z) \leq 0 \\ \text{pour } q \text{ arbitraire et } p = z'_x - qy'_x. \end{cases}$$



*Remarque.* — Lorsque  $\gamma$  vérifie (4.13), les conditions (4.10) et (4.12) sont équivalentes.

**21. MAJORATION FRONTIÈRE DE  $\varepsilon q$ .** — LEMME 11. — Soit un contour  $\gamma$ , frontière d'une solution  $z(x, y)$  de (4.1). Lorsque  $\gamma$  satisfait à (4.12), il est possible de majorer le long de  $\gamma$  la dérivée intérieure,  $\varepsilon q$ , en fonction de  $\gamma$  et de (4.1).

*Démonstration.* —  $q$  vérifie l'inégalité (4.5), où  $z''_{xx}, y''_{xx}, z'_x, y'_x, x, y, z$  sont donnés et où  $p = z'_x - qy'_x$ . L'hypothèse (4.12) fait que cette inégalité équivaut à une inégalité  $\varepsilon q < \varepsilon q_0$ , où  $q_0$  est une fonction connue des données.

**22. MAJORATION INTÉRIEURE DE  $p^2 + q^2$ .** — LEMME 12. — Supposons

$$(4.14) \quad (p^2 + q^2 + 1)^{-1} g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leq (\sigma^2 + 1)A,$$

$A$  étant une fonction de  $x, y, z, \sigma, pq^{-1}$  qui reste bornée tant que  $x, y, z$  restent bornés et que  $\sigma \neq -pq^{-1}$ ; cette condition est géométrique, puisque (4.11) l'est. Je dis qu'il est possible de majorer  $p^2 + q^2$  sur une solution arbitraire de (4.1) en fonction des données suivantes :  $A, \gamma$ , une borne supérieure de  $|z|$  sur la solution envisagée et une borne supérieure de  $p^2 + q^2$  sur  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à  $x, y, z$ . Au cours de la démonstration  $x, y, z$  seront supposés compris entre ces bornes,  $\sigma$  sera supposé égal à  $p^{-1}q$  et  $A$  sera supposé constant.

L'inégalité (4.4) a la conséquence suivante : l'équation (4.1) et les équations

$$r\alpha + s\beta + \gamma = 0, \quad s\alpha + t\beta + \delta = 0$$

sont incompatibles si

$$g(\beta^2, -\alpha\beta, \alpha^2, p, q, x, y, z) \leq \alpha\gamma + \beta\delta.$$

En particulier, (4.1) est incompatible avec les équations

$$\mathcal{X}w = rw'_p + sw'_q + pw'_z + w'_x = 0, \quad \mathcal{Y}w = sw'_p + tw'_q + qw'_z + w'_y = 0$$

si

$$(4.15) \quad g(w'^2_a, -w'_a w'_a, w'^2_a, p, q, x, y, z) \leq w'_p(pw'_z + w'_x) + w'_q(qw'_z + w'_y).$$

Donc, d'après le lemme 3, une fonction  $w(p, q, x, y, z)$  qui satisfait à (4. 15) n'a de point stationnaire sur aucune solution de (4. 1).

Or, la relation (4. 14), quand on y choisit  $\sigma = p^{-1}q$ , exprime que la fonction

$$w = Az + \log \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

satisfait à (4. 15). Cette fonction  $w$  atteint donc son maximum, sur une solution de (4. 1), en un point de la frontière de cette solution; ceci établit le lemme 12.

**23. MAJORATION FRONTIÈRE DES DÉRIVÉES SECONDES.** — Soit un contour  $\gamma$ , frontière d'une solution  $z(x, y)$  de (4. 1). Nous nous proposons de majorer  $r, s, t$  sur  $\gamma$ , les données étant les suivantes : (4. 1),  $\gamma$ , des majorantes de  $|p|$  et de  $|q|$ .

Il nous suffit d'étudier l'une des composantes de  $\gamma$ . Une transformation ponctuelle du groupe (4. 2) réduit ce problème au suivant :

$\gamma$  est l'axe des  $x$ ;  $z(x, 0) = 0$ ;  $z$  est une fonction périodique de  $x$  définie pour  $0 \leq y \leq 1$ ;  $|p| < 1$  et  $|q| < 1$  pour  $0 \leq y \leq 1$ .

Nous avons  $r(x, 0) = 0$ ; (4. 4) nous donne l'inégalité

$$t + g(1, 0, 0, p, q, x, y, z) > 0,$$

qui minore  $t$ . Il s'agit donc de majorer  $|s(x, 0)|$  et  $t(x, 0)$ .

*Lemme.* — La majoration de  $|s(x, 0)|$  est possible lorsque l'on a

$$(4. 16) \quad g'_q(0, 0, 1, p, q, x, 0, 0) < 0 \quad \text{pour} \quad |p| < 1, |q| < 1.$$

*Démonstration.* — Posons

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = rt - s^2 + g + h.$$

La dérivation de l'équation  $f = 0$  nous donne

$$(4. 17) \quad f_r p_{x^2}'' + f_s p_{xy}'' + f_t p_{y^2}'' + r f_p' + s f_q' + p f_z' + f_x = 0.$$

Faisons abstraction des relations différentielles qui lient  $z$  et  $q$  à  $p$ ; ne tenons compte que des inégalités  $|z| < \gamma$ ,  $|q| < 1$ ; considérons (4. 17) comme une équation d'inconnue  $p$  et appliquons-lui

le lemme 7, nous avons

$$F(R, S, T, P, Q, x, y, z) = R + \frac{2rf'_r + sf'_s}{f'_r} S + \frac{r^2 f'_r + rsf'_s + s^2 f'_t}{f'_r} T \\ - \frac{rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x}{sf'_r},$$

où

$$r = p'_x = -PQ^{-1}, \quad s = p'_y = Q^{-1}, \quad |p| < 1, \quad |q| < 1, \quad |z| < y.$$

Faisons tendre  $y$ ,  $P$  et  $Q$  vers zéro;

$$|s| \rightarrow +\infty, \quad \frac{r}{s} \rightarrow 0, \quad \frac{s}{t} \rightarrow 0,$$

les coefficients de  $S$  et  $T$  restent bornés, et

$$- \frac{rf'_p + sf'_q + pf'_z + f'_x}{sf'_r} \rightarrow -g'_q(0, 0, 1, p, q, x, 0, 0) > 0.$$

Les hypothèses du lemme 7 sont donc vérifiées; la majoration de  $|p'_y(x, 0)| = |s(x, 0)|$  est donc possible.

*Lemme.* — La majoration de  $t(x, 0)$  est possible lorsqu'on connaît une minorante positive de  $g[0, 0, 1, 0, q(x, 0), x, 0, 0]$  et une majorante de  $|s(x, 0)|$ .

*Démonstration.* — Quand (4.1) est vérifiée, que  $s, p, q, x, y, z$  restent fixes et que  $t$  tend en croissant vers  $+\infty$ , alors  $r$  tend en décroissant vers une limite; d'après (4.1), cette limite est

$$-g(0, 0, 1, p, q, x, y, z).$$

Il est donc possible de majorer  $t$  en fonction de

$$r + g(0, 0, 1, p, q, x, y, z),$$

supposé positif, et de  $s, p, q, x, y, z$ . Le lemme ci-dessus n'est qu'un cas particulier de cette proposition.

*Lemme.* — Supposons que nous ayons

$$(4.18) \quad \text{borne sup. } g'_q(0, 0, 1, 0, q, x, 0, 0) < 0 \quad (q \text{ et } x \text{ variant arbitrairement}).$$

L'équation  $g(0, 0, 1, 0, q_0, x, 0, 0) = 0$  possède donc une solution

unique  $q_0(x)$ ; l'inégalité (4. 5), appliquée à l'axe de  $x$ , nous donne

$$q(x, 0) < q_0(x) \quad (\text{cf. lemme 11}).$$

Je dis qu'il est alors possible de construire une majorante négative de  $q(x, 0) - q_0(x)$ , et par suite, une minorante positive de

$$g[0, 0, 1, 0, q(x, 0), x, 0, 0].$$

*Démonstration.* — Une transformation du groupe (4. 2) nous ramène au cas où  $q_0(x) = 0$ . Nous avons donc

$$\varphi(0, 0, 0, 0, 0, x, 0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_q(0, 0, 0, 0, q, x, 0, 0) > 0$$

quels que soient  $q$  et  $x$ . D'autre part, d'après (4. 8), nous avons

$$\varphi'_x > 0 \quad \text{quand} \quad \varphi = 0.$$

Il existe, par suite des constantes positives  $A_0, A_1, A_2, A_3$  telles que la fonction  $\zeta(\eta)$  vérifie l'inégalité

$$\varphi(0, 0, \zeta''_{\eta}, 0, \eta, x, \zeta'_{\eta}, \eta\zeta'_{\eta} - \zeta) > 0,$$

lorsque les conditions suivantes sont remplies,  $\zeta, \zeta'_{\eta}, \zeta''_{\eta}$  sont voisins de 0 ;

$$\begin{aligned} A_2 \zeta''_{\eta} &> A_1 |\zeta'_{\eta}| + A_0 |\zeta| + A_3 |\eta| & \text{si } \eta < 0; \\ A_2 \zeta''_{\eta} &> A_1 |\zeta'_{\eta}| + A_0 |\zeta| & \text{si } \eta \geq 0. \end{aligned}$$

Soit une constante négative  $a$ , voisine de zéro et un paramètre  $\lambda$  variant de  $a$  à 1. Il existe une famille de surfaces  $\zeta_{\lambda}(\eta)$  qui vérifie les conditions que nous venons d'énoncer et, en outre, les suivantes :

$\zeta_{\lambda}(\eta)$  dépend continûment de  $\lambda$  et est défini pour  $\lambda \leq \eta \leq 1$  ;

$\zeta_{\lambda}(\lambda)$  est nul si  $\lambda = a$ , négatif si  $a < \lambda \leq 1$  ;

$\chi_{\lambda}(\eta) = \frac{d\zeta_{\lambda}(\eta)}{d\eta}$  est nul si  $\eta = \lambda$ , positif si  $\lambda < \eta \leq 1$ .

Soit  $\varepsilon_{\lambda}(y)$  l'équation de ces surfaces dans le système de coordonnées  $(x, y, z)$  ;

$\varepsilon_{\lambda}(y)$  est défini pour  $0 \leq y \leq y_{\lambda}$  où  $y_{\lambda} = \chi_{\lambda}(1)$  ( $y_{\lambda}$  est voisin de 0) ;

$\varepsilon_{\lambda}(0) = -\zeta_{\lambda}(\lambda)$  est nul si  $\lambda = a$ , positif si  $a < \lambda \leq 1$  ;

$q_{\lambda}(y_{\lambda}) = 1$  ;  $q_{\lambda}(0) = \lambda$  ;

$y_1 = 0, \varepsilon_1(y) > 0$  ;

enfin, puisque  $\varphi_{\lambda} > 0$ , nous avons  $f_{\lambda} < 0$ .

L'application du lemme 1 à la solution  $z(x, y)$  de (4. 1) que nous étudions et à la fonction  $z_a(y)$ , nous donne

$$z(x, y) < z_a(y);$$

d'où, puisque  $z(x, 0) = z_a(0) = 0$ ,

$$q(x, 0) \leq q_a(0) = a < 0;$$

la majoration annoncée est effectuée.

Cessons de supposer que  $\gamma$  soit l'axe des  $x$ .

LEMME 13. — Soit un contour  $\gamma$ , frontière d'une solution  $z(x, y)$  de (4. 1). Supposons qu'on ait le long de ce contour

$$(4. 19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{borne inf. } \varepsilon \left\{ y''_{x^2} + \left( y'_x \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right) \mathcal{G}(y'^2_{x^2}, -y'_{x^2}, 1, p, q, x, y, z) \right\} > 0 \\ (p \text{ et } q \text{ étant arbitraires}). \end{array} \right.$$

Je dis qu'il est possible de majorer  $r, s, t$  le long de  $\gamma$  en fonction des données suivantes : (4. 1),  $\gamma$  une borne supérieure de  $p^2 + q^2$  sur la solution étudiée.

*Démonstration.* — La condition (4. 19) a un sens géométrique puisque (4. 12) en a un; elle implique (4. 18) et (4. 16) lorsque  $\gamma$  est l'axe des  $x$ ; le lemme 13 est donc une conséquence immédiate des trois lemmes qui le précèdent.

**24. MAJORATION INTÉRIEURE DES DÉRIVÉES SECONDES. CALCUL PRÉLIMINAIRE.** — Supposons que l'équation (2. 1) soit l'équation  $\varphi = 0$  et que  $w$  soit égal à  $-\tau$ , ou plus généralement au produit de  $\tau$  par une fonction négative. La condition

$$\mathcal{B}(w) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \mathcal{X}w = \mathcal{Y}w = \mathcal{X}\varphi = \mathcal{Y}\varphi = w = \varphi = 0$$

équivalait à l'inégalité

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta} + \chi \frac{\partial}{\partial \zeta} + \sigma \frac{\partial}{\partial \pi} \right)^2 \mathcal{G}(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leq 0,$$

c'est-à-dire à l'inégalité

$$\left( \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \mathcal{G}(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leq 0.$$

LEMME 14. — Supposons qu'on puisse choisir  $\sigma, p, q, x, y, z$  tels qu'on ait

$$\left(\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) > 0,$$

et que  $\varphi$  soit analytique au voisinage du système d'arguments

$$[\rho = g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z), \sigma, \tau = 0, p, q, x, y, z].$$

La majoration intérieure des dérivées secondes de (4. 1) est alors impossible.

*Démonstration.* — L'hypothèse énoncée et l'inégalité (4. 8) permettent d'appliquer le lemme 2 à l'équation  $\varphi = 0$  et à la fonction  $\varpi = -\tau$ . L'équation  $\varphi = 0$  possède donc une solution  $\zeta_\lambda(\xi, \eta)$  ayant les caractères que voici :  $\zeta$  est une fonction analytique de  $(\xi, \eta, \lambda)$  définie au voisinage d'un point  $(\xi_0, \eta_0)$  pour  $\lambda \geq 0$ ;  $\tau_\lambda(\xi, \eta) > 0$  quand  $(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \lambda^2 \neq 0$ ;  $\tau_0(\xi_0, \eta_0) = 0$ .

Soit  $z_\lambda(x, y)$  l'équation des surfaces  $\zeta_\lambda(\xi, \eta)$  dans le système de coordonnées  $(x, y, z)$ ;  $z_\lambda(x, y)$  est une solution de (1), définie pour  $\lambda \geq 0$  au voisinage d'un point  $(x_0, y_0)$ ;  $z$  dépend analytiquement de  $(x, y, \lambda)$ , sauf au point  $x = x_0, y = y_0, \lambda = 0$ ;  $z_\lambda(x, y), p_\lambda(x, y), q_\lambda(x, y)$  sont continus même en ce point;  $t_\lambda(x, y) \rightarrow +\infty$  quand  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda^2 \rightarrow 0$ .

Ces propriétés de  $z_\lambda(x, y)$  justifient le lemme 14.

LEMME 15. — Supposons que l'on ait, quels que soient  $\sigma, p, q, x, y, z$ ,

$$\left(\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leq 0.$$

Il est alors possible de majorer  $r^2 + s^2 + t^2$  sur une solution arbitraire de (4. 1) en fonction des données suivantes : (4. 1),  $\gamma$ , une borne supérieure de  $p^2 + q^2$  sur la solution étudiée, une borne supérieure de  $r^2 + s^2 + t^2$  le long de  $\gamma$ .

*Démonstration.* — Ces données assignent des bornes inférieures et supérieures à  $p, q, x, y, z$ ; au cours de la démonstration, ces variables seront supposées comprises entre ces bornes.

Appliquons le lemme 4 à l'équation  $\varphi = 0$  et aux fonctions

$$w = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 + t^2}} = -\frac{\tau}{\sqrt{(\sigma^2 - \rho\tau)^2 + \sigma^2 + 1}}, \quad v = p + \Lambda x = -\pi + \Lambda \xi,$$

$\Lambda$  étant une constante. En tenant compte de l'inégalité (4. 8), nous constatons que les hypothèses de ce lemme 4 sont réalisées pour  $|\sigma| < 2$  et  $\Lambda > g(0, 0, 1, p, q, x, y, z)$ . Sur aucune solution de (4. 1), la fonction  $\sqrt{r^2 + s^2 + t^2} u(v)$  ne possède donc de maximum relatif en lequel  $r^2 + s^2 + t^2$  est grand et  $|st^{-1}| < 2$ , si la fonction positive  $u$  satisfait à une certaine inégalité du type (2. 5).

$$(2.5) \quad \Lambda_2 u'' > \Lambda_1 |u'| + \Lambda_0 u \quad (\Lambda_i, \text{ constantes positives}).$$

En permutant les rôles de  $x$  et  $y$ , on établit de même la proposition suivante : sur aucune solution de (4. 1), la fonction  $\sqrt{r^2 + s^2 + t^2} u(v)$  ne possède de maximum relatif en lequel  $r^2 + s^2 + t^2$  est grand et  $|sr^{-1}| < 2$ , si  $u$  satisfait à une certaine inégalité du type (2. 5).

Or, quand  $r^2 + s^2 + t^2$  est grand, l'une au moins des quantités  $|st^{-1}|$  et  $|sr^{-1}|$  est inférieure à 2.

Il est donc possible de choisir la fonction positive  $u(v)$  telle que le maximum de  $\sqrt{r^2 + s^2 + t^2} u(p + \Lambda x)$  sur une solution de (4. 1) soit réalisé le long de  $\gamma$ , s'il est supérieur à une borne connue ; ceci établit le lemme 15.

**25. CONCLUSIONS.** — Nous dirons que *le problème de Dirichlet est bien posé* pour une équation (4. 1) et une famille de contours  $\gamma$  quand les deux propositions suivantes seront vraies.

1° Soit un ensemble compact en soi de données  $(\gamma, z_1, z_2)$  dont les contours  $\gamma$  appartiennent à la famille de contours envisagée ; supposons que les dérivées intérieures le long de  $\gamma$ ,  $\varepsilon q$ , des solutions des problèmes de Dirichlet correspondants sont bornées inférieurement dans leur ensemble ; ces solutions constituent alors un ensemble *compact en soi* (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables.

2° Le problème de Dirichlet de données  $[(4. 1), \gamma, z_1, z_2]$  possède *au moins une solution* quand les conditions suivantes sont réalisées :

$\gamma$  appartient à la famille de contours envisagée;  $z_1(x, y) < z_2(x, y)$ ;  $\gamma$  est sur  $z_1$ ;  $f_1 > 0$ ;  $f_2 \leq 0$ .

Nous dirons que le problème de Dirichlet est mal posé pour une équation (4. 1), quand il n'existera aucune famille  $\Phi$  de contours  $\gamma$  telle que ce problème soit bien posé pour (4. 1) et  $\Phi$ .

**THÉORÈME II.** — *Le problème est bien posé pour l'équation (4. 1) et pour la famille des contours  $\gamma$  le long desquels*

$$(4.20) \quad \begin{cases} \varepsilon \{ y''_{xx} - \lim q^{-1} g(y'^2_{xx}, -y'_x, 1, p, q, x, y, z) \} > 0 \\ (\text{pour } q \rightarrow -\infty, |p + qy'_x| \text{ restant borné}), \end{cases}$$

*lorsque (4. 1) satisfait à l'ensemble des conditions géométriques que voici :*

a. (4.3) a lieu; les dérivées troisièmes de  $\varphi(\rho, \sigma, \tau, p, q, x, y, z)$  restent bornées quand  $\tau$  s'annule;

$$b. \quad \left( \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) \leq 0,$$

*quels que soient  $\sigma, p, q, x, y, z$ ;*

$$c. \quad (p^2 + q^2 + 1)^{-1} g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) < (\sigma^2 + 1)A,$$

*A étant une fonction de  $x, y, z, \sigma, pq^{-1}$  qui reste bornée tant que  $x, y, z$  restent bornés et que  $\sigma \neq pq^{-1}$ .*

*Le problème de Dirichlet est mal posé lorsque la circonstance suivante se présente :*

*b. On peut choisir  $\sigma, p, q, x, y, z$  tels qu'on ait*

$$\left( \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - 2\sigma \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, q, x, y, z) > 0$$

*et que  $\varphi$  soit analytique au voisinage du système d'arguments*

$$[\rho = g(\sigma^2, -\sigma, 1, p, p, x, y, z), \sigma, \tau = 0, p, q, x, y, z].$$

**26. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME II.** — Le lemme 14 prouve que le problème de Dirichlet est mal posé quand la circonstance  $\bar{b}$  se présente



Supposons réalisées les conditions  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Le théorème I, les lemmes 11, 12, 13, 15 et la remarque qui termine le paragraphe 20 démontrent alors la proposition suivante :

« Soit un ensemble compact en soi de données  $(\gamma, z_1, z_2)$ , dont les contours  $\gamma$  vérifient (4. 20); supposons que le long de  $\gamma$ , les dérivées intérieures  $\varepsilon q$  des solutions des problèmes de Dirichlet correspondants soient bornées inférieurement dans leur ensemble; ces solutions constituent un ensemble *compact en soi* (ou vide), dans l'espace des fonctions trois fois dérivables. »

Pour déduire de cette proposition le théorème II, il suffit, d'après le théorème II, d'établir le lemme suivant :

« Soit un système de données (4. 1),  $\gamma, z_1, z_2$  vérifiant les conditions suivantes : (4. 1) satisfait à  $a, b, c$ ;  $\gamma$  satisfait à (4. 20);  $z_1 < z_2$ ;  $\gamma$  est sur  $z_1$ ;  $f_1 > 0$ ;  $f_2 \leq 0$ . Soit  $z_0$  une surface voisine de  $z_1$ , comprise entre  $z_1$  et  $z_2$  et ayant  $\gamma$  pour frontière. Je dis qu'on peut modifier continûment (4. 1), en respectant les conditions précédentes, de manière à réaliser, en outre, les suivantes :  $f_0 = 0, f'_z \leq 0$ , en sorte que le nouveau problème de Dirichlet ainsi obtenu possède une solution unique et simple,  $z_0$ . »

Démontrons ce lemme. Choisissons  $h$  tel que, dans la région  $f \geq 0$ , l'inégalité (4. 3) se trouve vérifiée et que nous puissions y poser

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z) = rt - s^2 + g(r, s, t, p, q, x, y, z) + h(r, s, t, p, q, x, y, z).$$

Supposons  $z_1 = 0, z_2 = 1$ . Envisageons l'équation

$$f(r, s, t, p, q, x, y, z, \lambda) = f(r, s, t, p, q, x, y, \lambda z) + (1 - \lambda)l(p, q, x, y, z) = 0,$$

où  $\lambda$  est un paramètre, qui varie de 0 à 1. Cette équation vérifie les conditions  $a, b, c$ , l'inégalité (4. 20), l'inégalité  $f_1 > 0$  et, quand  $\lambda = 0$ , l'inégalité  $f'_z \leq 0$ , si nous imposons les relations suivantes à la fonction  $l$ :

$$l(p, q, x, y, z) \leq 0, \quad l(0, 0, x, y, 0) = 0, \\ l'_z(p, q, x, y, z) \leq 0 \quad (\text{pour } z \geq 0).$$

Il est aisé de trouver une fonction  $l(p, q, x, y, z)$ , qui satisfait à ces trois relations et qui satisfait, en outre, aux deux conditions suivantes :

$$f_2 \leq 0 \quad \text{quelque soit } \lambda; \quad f_0 = 0 \quad \text{quand } \lambda = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

## V. — Exemples.

Ce chapitre consiste en corollaires du théorème I; M. S. Bernstein, dans la seconde partie de son Mémoire paru au tome 29 des *Annales de l'École Normale*, avait donné des énoncés voisins de nos corollaires I et III et établi des cas particuliers de nos corollaires II et IV.

Nous attribuons à l'expression « problème de Dirichlet bien posé » le sens que définit le paragraphe 17 (p. 266).

## 27. ÉQUATION QUASI LINÉAIRE. — Envisageons l'équation

$$(5.1) \quad ar + 2bs + ct + d = 0,$$

$a, b, c, d$  étant quatre fonctions données de  $(p, q, x, y, z)$ , qui vérifient les inégalités

$$ac > b^2, \quad a > 0, \quad c > 0.$$

Posons

$$E = ap^2 + 2bpq + cq^2.$$

Le théorème I appliqué à (5.1) prend la forme suivante :

COROLLAIRE I. — Supposons que  $\frac{a}{E}$  et  $\frac{c}{E}$  tendent vers zéro quand  $p^2 + q^2$  augmente indéfiniment ( $x, y$  et  $z$  restant bornés); dans ces mêmes conditions,  $\frac{ap + bq}{E}$  et  $\frac{bp + cq}{E}$  tendent nécessairement vers zéro. Supposons que les dérivées troisièmes des fonctions  $\frac{a}{E}, \frac{c}{E}, \frac{ap + bq}{E}, \frac{bp + cq}{E}, \frac{d}{E\sqrt{p^2 + q^2}}$  par rapport aux variables  $\left[ x, y, z, (p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}, \arctan \frac{p}{q} \right]$  restent bornées quand  $p^2 + q^2$  augmente indéfiniment ( $x, y$  et  $z$  restant bornés).

Le problème de Dirichlet est bien posé pour la famille de tous les contours  $\gamma$ , lorsque  $\frac{|d|}{E}$  reste borné quand  $p^2 + q^2$  augmente indéfiniment ( $x, y$  et  $z$  restant bornés).

Lorsque cette condition,  $\frac{|d|}{E}$  borné, n'est pas vérifiée et que les conditions précédentes sont vérifiées, alors le problème de Dirichlet est mal posé.

COROLLAIRE II. — *Supposons que nous ayons, quand  $p^2 + q^2$  est infiniment grand, les développements limités, deux fois dérivables,*

$$\frac{a}{E} = q^2 \eta_{-2} + \alpha_{-1} + \alpha_{-2} + \dots,$$

$$\frac{b}{E} = -pq \eta_{-2} + \beta_{-1} + \beta_{-2} + \dots,$$

$$\frac{c}{E} = p^2 \eta_{-2} + \gamma_{-1} + \gamma_{-2} + \dots,$$

$$\frac{d}{E} = \delta_1 + \dots,$$

où  $\eta_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  sont des fonctions de  $(p, q, x, y, z)$  qui sont par rapport à  $(p, q)$ , positivement homogènes <sup>(13)</sup> et de degrés  $n$ . Nous avons nécessairement

$$\alpha_{-1} p^2 + 2\beta_{-1} pq + \gamma_{-1} q^2 = 0, \quad \alpha_{-2} p^2 + 2\beta_{-2} pq + \gamma_{-2} q^2 = 1.$$

Nous supposons que  $\frac{(ac - b^2)(p^2 + q^2)}{E^2}$  ne peut tendre vers zéro quand  $p^2 + q^2$  augmente indéfiniment ( $x, y$  et  $z$  restant bornés); cette hypothèse équivaut à l'inégalité <sup>(14)</sup>

$$(5.2) \quad \eta_{-2} > \beta_{-1}^2 - \alpha_{-1} \gamma_{-1},$$

dont le second membre ne peut être négatif.

Si nous avons, quels que soient  $p, q, x, y, z$ ,

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\delta_1(p, q, x, y, z)}{\eta_{-2}(p, q, x, y, z)} \right\} \leq 0,$$

alors le problème de Dirichlet est bien posé pour la famille  $\Phi$  des contours  $\gamma$  qui vérifient l'inégalité

$$(5.4) \quad \varepsilon \left\{ y_{x^2}'' \mp \frac{\delta_1(\mp y_{x^2}', \pm 1, x, y, z)}{\eta_{-2}(\mp y_{x^2}', \pm 1, x, y, z)} \right\} \geq 0.$$

<sup>(13)</sup>  $\alpha(p, q)$  est positivement homogène de degré  $n$  lorsque l'on a

$$\alpha_n(tp, tq) = t^n \alpha_n(p, q) \quad \text{quand} \quad t > 0.$$

<sup>(14)</sup> L'hypothèse  $ac > b^2$  entraîne l'inégalité  $\eta_{-2} \geq \beta_{-1}^2 - \alpha_{-1} \gamma_{-1}$ .

Si (5. 2), *a lieu et si*  $\frac{a}{E}, \frac{b}{E}, \frac{c}{E}, \frac{d}{E\sqrt{p^2+q^2}}$  *sont des fonctions analytiques de*  $\left[x, y, z, (p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}, \arctang \frac{p}{q}\right]$ , *au voisinage d'un système de valeurs*  $\left[x, y, z, (p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}=0, \arctang \frac{p}{q}\right]$  *qui ne vérifient pas* (5. 3), *alors le problème de Dirichlet est mal posé.*

**28. EXTRÊMALES D'UNE INTÉGRALE DOUBLE.** — Appliquons les deux corollaires précédents aux extrémales de l'intégrale double

$$\iint g(p, q, x, y, z) dx dy \quad (g''_{p^2}g''_{q^2} > g''_{pq}, g''_{p^2} > 0, g''_{q^2} > 0),$$

c'est-à-dire à l'équation

$$r g''_{p^2} + 2s g''_{pq} + t g''_{q^2} + g''_{p,x} + g''_{q,y} + p g''_{p,z} + q g''_{q,z} - g'_z = 0.$$

Supposons que nous ayons, quand  $p^2 + q^2$  est infiniment grand, un développement limité, cinq fois dérivable

$$g(p, q, x, y, z) = g_n(p, q, x, y, z) + g_{n-1}(p, q, x, y, z) + g_{n-2}(p, q, x, y, z) + \dots,$$

$g_n, g_{n-1}, g_{n-2}$  étant, par rapport à  $(p, q)$ , positivement homogènes et de degrés respectifs  $n, n-1, n-2$ .

Nous obtenons les conclusions suivantes :

**COROLLAIRE III.** — *Supposons*

$$n > 1 \quad \text{et} \quad g_n(p, q, x, y, z) \neq 0 \quad (\text{quand } p^2 + q^2 \neq 0);$$

*le problème de Dirichlet est bien posé pour tous les contours*  $\gamma$ .

**COROLLAIRE IV.** — *Supposons*  $n = 1$ , *c'est-à-dire*

$$g(p, q, x, y, z) = g_1(p, q, x, y, z) + g_0(p, q, x, y, z) + g_{-1}(p, q, x, y, z) + \dots$$

*Nous avons*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_1}{\partial p^2} &= q^2 k_{-3}, & \frac{\partial^2 g_1}{\partial p \partial q} &= -pq k_{-3}, & \frac{\partial^2 g_1}{\partial q^2} &= p^2 k_{-3}, \\ \frac{\partial g_0}{\partial p} &= q k_{-2}, & \frac{\partial g_0}{\partial q} &= -p k_{-2}, \end{aligned}$$

$k_{-3}$  et  $k_{-2}$  étant des fonctions de  $(p, q, x, y, z)$ , qui sont, par rapport

à  $(p, q)$  positivement homogènes et de degrés respectifs  $-3$  et  $-2$ ; il en résulte que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \left( \frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} \right)^2 = 2g_{-1}k_{-3} - (k_{-2})^2 + \dots;$$

nous avons donc nécessairement

$$2g_{-1}k_{-3} \geq (k_{-2})^2.$$

Supposons que

$$(5.5) \quad 2g_{-1}k_{-3} > (k_{-2})^2.$$

Supposons enfin que nous ayons, quels que soient  $x, y, z, y'_x, \pm$ ,

$$(5.6) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\pm \frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y'_x} \pm y'_x \frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial y'_x} \mp \frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_0}{\partial z}}{\frac{\partial^2 g_1}{\partial y'^2_x}} \right\} \geq 0,$$

les arguments de  $g_1$  et  $g_0$  étant  $(\mp y'_x, \pm 1, x, y, z)$ .

Alors le problème de Dirichlet est bien posé pour la famille  $\Phi$  des contours  $\gamma$  dont les équations  $y(x), z(x)$  vérifient l'inégalité différentielle

$$(5.7) \quad \varepsilon \left\{ y''_{x^2} + \frac{\frac{\partial^2 g_1}{\partial x \partial y'_x} + y'_x \frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial y'_x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \pm \frac{\partial g_0}{\partial z}}{\frac{\partial^2 g_1}{\partial y'^2_x}} \right\} \geq 0,$$

où  $g_1$  et  $g_0$  ont pour arguments  $(\mp y'_x, \pm 1, x, y, z)$ .

L'hypothèse (5.6) qui ne diffère pas de (5.3) a le même caractère de nécessité que cette dernière.