

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RADU ROSCA

**Transformations asymptotiques des courbes de l'espace
elliptique. Courbes de Bertrand**

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 18 (1939), p. 167-215.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__167_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Transformations asymptotiques des courbes de l'espace
elliptique. Courbes de Bertrand;*

PAR RADU ROSCA.

INTRODUCTION.

Il me sera permis, dès le début de mon travail, d'adresser l'hommage de ma reconnaissance à la mémoire de notre géomètre roumain, Georges Tsitseica, qui a bien voulu s'intéresser à mes premières recherches et les a guidées en me faisant lire l'ouvrage de M. Gambier (Gauthier-Villars, Paris) sur les courbes de Bertrand et m'engageant à essayer d'obtenir des résultats analogues dans l'espace elliptique.

Au premier chapitre j'étudie les transformations asymptotiques des courbes de l'espace elliptique. La définition est celle que Bianchi a déjà donnée dans l'espace euclidien; mais, ici, se place une circonstance spéciale à l'espace elliptique : il y a lieu d'étudier, en même temps que la courbe (x) , la courbe (λ) décrite par le point λ situé sur la binormale en x à la distance $\frac{\pi}{2}$ du point x ; ces deux courbes sont réciproques vis-à-vis de l'absolu et le tétraèdre de Serret-Frenet $(x\alpha\xi\lambda)$ de la première est remplacé par le tétraèdre $(\lambda\xi\alpha x)$ de la seconde; (x) , $(\bar{x})$ étant transformées asymptotiques l'une de l'autre, (λ) , $(\bar{\lambda})$ sont aussi courbes transformées asymptotiques. On obtient les transformées asymptotiques de (x) en déterminant les coordonnées non plus absolues de $(\bar{x})$, mais les coordonnées relatives

du point x par rapport au tétraèdre mobile $(x\alpha\xi\lambda)$. On pose donc

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \cos d + \sin d (\alpha \cos u + \xi \sin u), \\ \bar{\lambda} &= \lambda \cos \theta + \sin \theta (\xi \cos u - \alpha \sin u).\end{aligned}$$

La variable indépendante est s arc de (x) ; φ , T sont les rayons de courbure et torsion de (x) ; $\bar{s}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{T}$ sont les éléments analogues pour $(\bar{x})$. Il suffit d'écrire $S\bar{\lambda}\bar{x}' = 0$, $S\bar{\lambda}\bar{x}'' = 0$ pour obtenir les deux conditions nécessaires et suffisantes permettant de déterminer les trois fonctions inconnues u , d , θ de s ; d est la distance $(x\bar{x})$, θ la distance $(\lambda\bar{\lambda})$ ou, si l'on préfère, l'angle des plans osculateurs de x et $\bar{x}$; la fonction u sert à caractériser la surface réglée R issue de (x) et la courbe $(\bar{x})$ est l'une quelconque des asymptotiques de R . Le calcul se fait très simplement en ayant l'idée d'introduire la fonction nouvelle $\bar{u}$, telle que l'on ait

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} \cos d + \sin d (\bar{\alpha} \cos \bar{u} + \bar{\xi} \sin \bar{u}), \\ \lambda &= \bar{\lambda} \cos \theta + \sin \theta (\bar{\xi} \cos \bar{u} - \bar{\alpha} \sin \bar{u}),\end{aligned}$$

et le fait remarquable est que les distances *orientées* d , θ , qui auraient pu être remplacées *a priori* par $\pm d$ ou $\pm \theta$, se conservent toutes deux avec leur signe quand on considère (x) comme dérivant de $(\bar{x})$. Cette méthode permet d'obtenir explicitement $\bar{\alpha}$, $\bar{\xi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{T}$, $\bar{s}$ en fonction des éléments de la courbe primitive.

Cette recherche conduit naturellement à chercher si d , θ peuvent être constantes toutes deux. On obtient effectivement trois cas : celui des courbes de Bertrand, celui des courbes à torsion constante, différente (au signe près) de la courbure de l'espace envisagé (pour simplifier, une homothétie préalable réduit cette courbure à l'unité et cette simplification a été adoptée dans tout le cours du travail), celui des courbes dont la torsion est égale, au signe près, à la courbure de l'espace elliptique.

Les courbes dont la torsion est constante, et égale à ± 1 , conduisent à l'étude d'un déplacement remarquable d'un corps solide, où toutes les trajectoires sont des courbes de cette espèce et où les courbes décrites par les points de deux droites réciproques vis-à-vis

de l'absolu offrent la configuration du théorème de permutabilité de Bianchi (tout en étant congruentes les unes aux autres). Chaque droite de l'espace engendre une surface de Clifford; de plus nous avons ainsi mis en évidence ce fait qui ne semble pas avoir été remarqué jusqu'ici : sur toute surface de Clifford il existe ∞^1 familles de courbes, où les courbes d'une même famille ont leur torsion constante (égale à $+1$ ou -1 suivant qu'il s'agit d'une surface dextrosum ou sinistrosum), sont congruentes entre elles et sont telles que leurs plans osculateurs rencontrent la génératrice correspondante sous angle constant; jusqu'ici on n'avait signalé que les deux cas où l'angle est nul ou égal à $\frac{\pi}{2}$ (asymptotiques; trajectoires orthogonales des génératrices). Nous avons ainsi réalisé un lien continu entre ces deux familles restées isolées jusqu'ici. Ces courbes jouent un rôle spécial parmi celles qui ont une torsion constante et elles échappent complètement à l'étude des deux chapitres suivants.

La détermination de la courbe de Bertrand générale est un problème intéressant qui a déjà attiré l'attention de Darboux et les recherches de M. Cartan. Leurs transformations spéciales ont été l'objet des recherches de Sophus Lie d'abord, puis de Demartres, Bianchi, Razzaboni. Mais il restait un moyen simple à découvrir pour obtenir, avec le minimum de calculs, le moyen d'en faire l'exposé. On sait que M. Gambier y est arrivé, en appliquant la transformation asymptotique de Bianchi, aux courbes minima de l'espace euclidien, avec cette condition expresse que la transformée asymptotique doit elle aussi être minima. Ce procédé réussit, même dans l'espace elliptique. Une courbe minima peut être transformée en une autre courbe minima, avec deux constantes arbitraires qui sont : d'abord la distance constante (orientée) $2l$ séparant le point y du point z , puis la constante d'intégration intervenant dans une équation de Riccati (dont la formation exige la connaissance de la constante l); on répète cette opération avec une valeur $\bar{l}$ différente de l et l'on obtient une nouvelle transformée $\bar{z}$; les trois plans isotropes : osculateur à z , osculateur à $\bar{z}$, mené par $z\bar{z}$ et différent du plan $y\bar{z}$, se coupent en un point $\bar{y}$; la courbe $(\bar{y})$ est minima, et transformée asymptotique simultanément de (z) et $(\bar{z})$; les milieux de $y\bar{y}$ et $z\bar{z}$ décrivent deux

courbes de Bertrand associées B, B_1 , les milieux des côtés du parallélogramme gauche $yz\bar{y}\bar{z}$ décrivent des courbes de torsion constante (différente de ± 1); les réciproques sont vraies. Au moyen d'une nouvelle transformée asymptotique de γ (avec un module l' différent de l et $\bar{l}$) on arrive à trouver deux courbes β, β_1 transformées de B, B_1 exactement dans les mêmes conditions que dans l'espace euclidien, et ainsi de suite.

Dans l'espace elliptique un segment tel que (yz) , dont les extrémités ne sont pas orientées, a deux milieux; ici deux milieux convenablement associés de $\gamma\bar{y}$ et $z\bar{z}$ ont donné deux courbes de Bertrand B, B_1 associées; or le second milieu de $\gamma\bar{y}$ décrit la courbe $\bar{B}_1$ réciproque de B_1 et de même le second milieu de $z\bar{z}$ décrit la courbe $\bar{B}$ réciproque de B . Ces propriétés importantes sont développées au Chapitre II (courbes minima, transformations asymptotiques), au Chapitre III (courbes de Bertrand).

Je termine en exprimant ma gratitude à M. Cartan qui a accueilli ma première Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 27 février 1939) et M. Gambier qui m'a prodigué ses conseils et m'a fait successivement perfectionner toutes mes démonstrations dans le but d'arriver au maximum d'élégance.

CHAPITRE I.

TRANSFORMATIONS ASYMPTOTIQUES.

1. DÉFINITIONS. RAPPEL DE RÉSULTATS ANTÉRIEURS. — Nous étudions un espace elliptique dont la courbure a été ramenée par une homothétie préalable à l'unité. Bianchi appelle *transformées asymptotiques* deux courbes $M(x_0, x_1, x_2, x_3), \bar{M}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ se correspondant ponctuellement, de sorte que la droite $M\bar{M}$ joignant les points homologues soit l'intersection des plans osculateurs correspondants; ces deux courbes sont donc deux lignes asymptotiques d'une même surface réglée et réciproquement.

Les lignes du tableau orthogonal direct

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

désignent respectivement pour la courbe lieu de M : les coordonnées *normalisées* de M , les cosinus directeurs de la tangente, ceux de la normale principale, ceux de la binormale. Sauf avis contraire, nous considérons les points (x) et $(-x)$ comme coïncidant. Quand cela ne produit aucune confusion, nous parlons du point x , de la tangente α , ... sans employer d'indices. On a

$$Sx^2 = S\alpha^2 = S\xi^2 = S\lambda^2 = 1, \quad S\alpha x = 0, \quad \dots, \quad S\xi\lambda = 0,$$

$$x_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad x_1 = - \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \xi_0 & \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda_0 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \lambda_1 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

$$|x \ \alpha \ \xi \ \lambda| = 1.$$

Le point λ ou N a pour plan polaire relativement à l'absolu (quadrique $SX^2 = 0$) le plan $(x\alpha\xi)$ qui reste osculateur à la courbe x , de sorte que les courbes x, λ peuvent être considérées comme réciproques vis-à-vis de l'absolu, chacune se transformant en la développable dont l'autre est l'arête de rebroussement.

Les formules de Serret-Frenet montrent que la droite $(\lambda\xi)$ est la tangente à la courbe λ , que la droite $(\lambda\alpha)$ est la normale principale à cette courbe au point λ , la droite (λx) la binormale commune aux deux courbes x, λ .

Nous avons besoin, pour ce qui suit, d'indiquer comment calculer en fonction de s, ρ, T (arc de x , rayon de courbure, rayon de torsion) les éléments analogues s_1, ρ_1, T_1 pour la courbe λ . Les deux déterminants $|x\alpha\xi\lambda|$ et $|\lambda\xi\alpha x|$ sont orthogonaux directs (on passe du premier au second en échangeant les colonnes extrêmes, puis les colonnes

médianes). Les échanges

$$\begin{array}{ccccccc} x & \alpha & \xi & \lambda & s & \rho & T \\ \lambda & \xi & \alpha & x & s_1 & \rho_1 & T_1 \end{array}$$

remplacent $\frac{dx}{ds} = \alpha$ par $\frac{d\lambda}{ds_1} = \xi (R=1)$, d'où l'on déduit $d\lambda = \frac{\xi ds}{T} = \xi ds_1$;

on en conclut $\frac{ds}{T} = ds_1$, puis par réciprocity $\frac{ds_1}{T_1} = ds$, d'où

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{T} = T_1;$$

de plus, $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho} - x$ devient $\frac{d\xi}{ds_1} = \frac{\alpha}{\rho_1} - \lambda$, d'où

$$d\xi = \alpha \frac{ds_1}{\rho_1} - \lambda ds_1 = -\alpha \frac{ds}{\rho} - \lambda \frac{ds}{T}.$$

On obtient donc les formules définitives

$$\boxed{\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{T} = T_1 = -\frac{\rho_1}{\rho}.}$$

Rappelons, quand on écrit

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\alpha}{R}, \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\xi}{\rho} - \frac{x}{R}, \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{-\alpha}{\rho} - \frac{\lambda}{T}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\xi}{T},$$

que l'on peut, sans modifier s, x, α, T remplacer ξ, λ, ρ par $-\xi, -\lambda, -\rho$, de sorte qu'en remplaçant $|x\alpha\xi\lambda|$ par $|\lambda, \xi, -\alpha, -x|$, comme le fait Bianchi, on trouverait

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{T} = T_1 = \frac{\rho_1}{\rho},$$

en passant d'une courbe x à sa réciproque λ ; nous préférons remplacer $|x\alpha\xi\lambda|$ par $|\lambda\xi\alpha x|$; en tous cas, nous nous rappellerons que deux courbes $s, \rho(s), T(s)$ et $s, -\rho(s), T(s)$ sont congruentes et ne diffèrent que par la *normalisation* du tétraèdre de Serret-Frenet. On remarquera aussi que l'on peut changer de signe simultanément les quatre quantités s, ρ, α, ξ ; par suite, chacune des deux variables s, ρ peut être changée de signe indépendamment de l'autre. On remar-

quera le résultat $TT_1 = 1$, ($TT_1 = R^2$ si l'on n'avait pas l'homothétie annoncée) qui prouve que *les torsions des deux courbes réciproques sont de même signe*; en particulier si $T = +1$ ou -1 , T_1 et T sont égaux, $\rho_1 = -\varepsilon\rho$, $s_1 = \varepsilon s$, et cela prouve que *ces courbes spéciales, dont la torsion égale l'une des racines carrées de la courbure de l'espace elliptique, sont congruentes à leur réciproque*. Nous verrons l'intérêt spécial de ces courbes.

2. TRANSFORMATION ASYMPTOTIQUE. — Si les courbes $x, \bar{x}$ se correspondent asymptotiquement, les deux courbes $\lambda, \bar{\lambda}$ sont aussi en correspondance asymptotique.

En effet, les conditions nécessaires et suffisantes pour que $x, \bar{x}$ se correspondent asymptotiquement sont

$$(1) \quad S\bar{x}\lambda = 0, \quad Sx\bar{\lambda} = 0,$$

qui expriment que si $x, \bar{x}$ sont des *coordonnées-points* et $\lambda, \bar{\lambda}$ des *coordonnées-plans*, le plan osculateur de x (ou $\bar{x}$) contient l'autre point $\bar{x}$ (ou x). Il suffit maintenant de regarder $\lambda, \bar{\lambda}$ comme des coordonnées-points et $x, \bar{x}$ comme des coordonnées-plans, pour obtenir une nouvelle interprétation de (1) et la proposition annoncée. La droite $x\bar{x}$ qui joint les deux points $x, \bar{x}$ a pour réciproque, vis-à-vis de l'absolu, la droite $\lambda\bar{\lambda}$ qui réunit les deux points $\lambda, \bar{\lambda}$ (bien entendu si $x, \bar{x}$ sont regardées comme coordonnées-plans, la droite $x\bar{x}$ est la réciproque de celle que l'on obtient en réunissant le point x au point $\bar{x}$). Nous pouvons écrire les équations où d, u, θ, v sont certains angles auxiliaires

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x} = x \cos d + \sin d (\alpha \cos u + \xi \sin u), \\ \lambda = \bar{\lambda} \cos \theta + \sin \theta (\xi \cos v + \alpha \sin v), \end{cases}$$

qui remplacent (1), mais il y aura à exprimer que l'on a

$$(3) \quad S\bar{\lambda}\bar{x} = 0, \quad S\bar{\lambda}\bar{x}' = 0, \quad S\bar{\lambda}\bar{x}'' = 0,$$

où les accents désignent des dérivations par rapport à l'arc s de la courbe x .

Remarquons, avant d'écrire le détail des équations (3), que l'on a

$$(4) \quad Sx\bar{x} = \cos d, \quad S\lambda\bar{\lambda} = \cos \theta,$$

de sorte que, si les courbes $x, \bar{x}$ sont *données*, $\cos d$ s'exprime sans radical, et que d (que nous pouvons supposer compris entre $-\pi$ et $+\pi$) est connu au signe près; d est la distance elliptique $x\bar{x}$; on remarque que (d, u) et $(-d, u + \pi)$ peuvent s'échanger; par conséquent nous pourrions orienter la distance d , en choisissant arbitrairement pour $\sin d$ l'une ou l'autre détermination du radical $\sin d = \sqrt{1 - (Sx\bar{x})^2}$, et ce choix fixera les valeurs précises de $\cos u$, $\sin u$; de même pour θ et ν ; l'angle θ est l'angle des plans osculateurs en $x, \bar{x}$ ou la distance elliptique $\lambda\bar{\lambda}$.

La première équation (3) entraîne

$$\cos u \sin \nu + \sin u \cos \nu = \sin(u + \nu) = 0.$$

Nous pouvons donc choisir $\nu = -u$ ou $\nu = \pi - u$; mais usons de la faculté qui vient d'être signalée, pour prendre $\nu = -u$, ce qui fixe l'orientation de θ . On a donc désormais

$$(2') \quad \begin{cases} \bar{x} = x \cos d + \sin d (\alpha \cos u + \xi \sin u), \\ \bar{\lambda} = \lambda \cos \theta + \sin \theta (\xi \cos u - \alpha \sin u), \end{cases}$$

et il n'y a plus qu'à écrire les deux équations $S\bar{\lambda}\bar{x}' = 0$, $S\bar{\lambda}\bar{x}'' = 0$ pour obtenir les deux équations différentielles nécessaires et suffisantes pour définir d, θ en fonction de s et u .

Pour pouvoir faire les calculs élégamment, il est nécessaire de les remplacer autant que possible par des raisonnements géométriques. Nous avons d'abord

$$(5) \quad \begin{cases} Sx\bar{x} = \cos d, & S\alpha\bar{x} = \sin d \cos u, & S\xi\bar{x} = \sin d \sin u, & S\lambda\bar{x} = 0; \\ Sx\bar{\lambda} = 0, & S\alpha\bar{\lambda} = -\sin \theta \sin u, & S\xi\bar{\lambda} = \sin \theta \cos u, & S\lambda\bar{\lambda} = \cos \theta. \end{cases}$$

On remarquera les relations

$$(6) \quad \frac{S\xi\bar{\lambda}}{S\alpha\bar{x}} = \frac{-S\xi\bar{x}}{S\alpha\bar{\lambda}} = \frac{\sin d}{\sin \theta}, \quad \text{tang } u = \frac{S\xi\bar{x}}{S\alpha\bar{x}} = \frac{-S\alpha\bar{\lambda}}{S\xi\bar{\lambda}}.$$

On peut écrire, par analogie avec (2'),

$$(7) \quad \begin{cases} x = \bar{x} \cos d + \sin d (\bar{\alpha} \cos \bar{u} + \bar{\xi} \sin \bar{u}), \\ \lambda = \bar{\lambda} \cos \theta + \varepsilon \sin \theta (\bar{\xi} \cos \bar{u} - \bar{\alpha} \sin \bar{u}) \end{cases} \quad (\varepsilon = +1 \text{ ou } -1),$$

car d est la distance $\bar{x}\bar{x}$ et l'angle $\bar{u}$ est une quantité analogue à u ; l'orientation déjà fixée de d a fixé d'une façon précise non seulement $\tan \bar{u}$, mais aussi $\sin \bar{u}$, $\cos \bar{u}$; l'orientation de θ a déjà été faite, de sorte que, θ , $\bar{u}$ étant déjà connus, la seconde formule (7) exige, *a priori*, que l'on introduise la quantité ε ; nous allons prouver l'égalité $\varepsilon = +1$. Nous allons, dans ce but, former le produit

$$|x \ \alpha \ \xi \ \lambda|, \quad |\bar{x} \ \bar{\alpha} \ \bar{\xi} \ \bar{\lambda}|$$

qui est lui-même un *déterminant orthogonal direct*. Par analogie avec (5), on a

$$(5') \quad \begin{cases} S\bar{x}x = \cos d, & S\bar{\alpha}x = \sin d \cos \bar{u}, & S\bar{\xi}x = \sin d \sin \bar{u}, & S\bar{\lambda}x = 0; \\ S\bar{x}\lambda = 0, & S\bar{\alpha}\lambda = -\varepsilon \sin \theta \sin \bar{u}, & S\bar{\xi}\lambda = \varepsilon \sin \theta \cos \bar{u}, & S\bar{\lambda}\lambda = \cos \theta. \end{cases}$$

Le produit annoncé est

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \cos d & \sin d \cos \bar{u} & \sin d \sin \bar{u} & 0 \\ \sin d \cos u & S\bar{\alpha}\bar{\alpha} & S\bar{\alpha}\bar{\xi} & -\sin \theta \sin u \\ \sin d \sin u & S\bar{\xi}\bar{\alpha} & S\bar{\xi}\bar{\xi} & \sin \theta \cos u \\ 0 & -\varepsilon \sin \theta \sin \bar{u} & \varepsilon \sin \theta \cos \bar{u} & \cos \theta \end{vmatrix}.$$

Les mineurs

$$\begin{vmatrix} \sin d \cos \bar{u} & \sin d \sin \bar{u} \\ -\varepsilon \sin \theta \sin \bar{u} & \varepsilon \sin \theta \cos \bar{u} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \sin d \cos u & -\sin \theta \sin u \\ \sin d \sin u & \sin \theta \cos u \end{vmatrix}$$

sont égaux, donc $\varepsilon = +1$. On remarquera les égalités

$$(6') \quad \frac{\sin d}{\sin \theta} = \frac{S\bar{\xi}\bar{\lambda}}{S\bar{\alpha}x} = \frac{S\bar{\xi}\bar{\lambda}}{S\bar{\alpha}x} = \frac{-S\bar{\alpha}\bar{\lambda}}{S\bar{\xi}x} = \frac{-S\bar{\alpha}\bar{\lambda}}{S\bar{\xi}x}.$$

Dans le déterminant (8), écrivons que le produit de la seconde ligne par la première, ou par la dernière, est nul : nous avons deux équations linéaires qui donnent $S\bar{\alpha}\bar{\alpha}$, $S\bar{\alpha}\bar{\xi}$; le calcul analogue fait sur la

troisième ligne donne $S\xi\bar{\alpha}$, $S\xi\bar{\xi}$. On a ainsi

$$(9) \quad \begin{cases} S\alpha\bar{\alpha} = -\cos d \cos u \cos \bar{u} - \cos \theta \sin u \sin \bar{u}, \\ S\alpha\bar{\xi} = -\cos d \cos u \sin \bar{u} + \cos \theta \sin u \cos \bar{u}, \\ S\xi\bar{\alpha} = -\cos d \cos \bar{u} \sin u + \cos \theta \sin \bar{u} \cos u, \\ S\xi\bar{\xi} = -\cos d \sin u \sin \bar{u} - \cos \theta \cos u \cos \bar{u}. \end{cases}$$

Les formules 5, (5'), (9) sont parfaitement symétriques par rapport aux courbes (x) , $(\bar{x})$ et les équations qui donnent $Sx\bar{\alpha}$, $S\alpha\bar{\alpha}$, $S\xi\bar{\alpha}$, $S\bar{\lambda}\bar{\alpha}$ permettent de calculer $\bar{\alpha}$; de même pour $\bar{\xi}$. On a ainsi

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha = x \sin d \cos \bar{u} - \alpha (\cos d \cos u \cos \bar{u} + \cos \theta \sin u \sin \bar{u}) \\ \quad + \xi (-\cos d \cos \bar{u} \sin u + \cos \theta \sin \bar{u} \cos u) - \lambda \sin \theta \sin \bar{u}, \\ \bar{\xi} = x \sin d \sin \bar{u} + \alpha (-\cos d \cos u \sin \bar{u} + \cos \theta \sin u \cos \bar{u}) \\ \quad - \xi (\cos d \sin u \sin \bar{u} + \cos \theta \cos u \cos \bar{u}) + \lambda \sin \theta \cos \bar{u}. \end{cases}$$

Ces préliminaires nous permettent d'obtenir les deux équations différentielles annoncées, car on peut écrire

$$(11) \quad \frac{d\bar{x}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = \bar{\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{d\bar{x}}{ds}}{\bar{\alpha}} = \frac{d\bar{s}}{ds}.$$

En exprimant que, dans $\frac{d\bar{x}}{ds}$ et $\bar{\alpha}$, qui sont tous deux des expressions linéaires en x , α , ξ , λ , les rapports des coefficients de x , ou α , ou ξ , ou λ sont les mêmes, on a trois équations équivalentes à

$$Sx \frac{d\bar{x}}{ds} = 0, \quad S\xi \frac{d\bar{x}}{ds} = 0, \quad S\bar{\lambda} \frac{d\bar{x}}{ds} = 0.$$

Or la première est une identité, puisque $Sx\bar{x} = 1$, donc les 3 équations en question se réduisent à deux; et en effet on trouve

$$\begin{aligned} \frac{-(d' + \cos u)}{\cos \bar{u}} &= \frac{\cos d - \left(u' + \frac{1}{\rho}\right) \sin d \sin u + d' \cos u \cos d}{-\cos d \cos u \cos \bar{u} - \cos \theta \sin u \sin \bar{u}} \\ &= \frac{\sin d \cos u \left(u' + \frac{1}{\rho}\right) + d' \cos d \sin u}{-\cos d \cos \bar{u} \sin u + \cos \theta \sin \bar{u} \cos u} = \frac{\sin u \sin d}{T \sin \theta \sin \bar{u}}. \end{aligned}$$

On forme un rapport égal au précédent en multipliant les deux termes du second par $\cos u$, ceux du troisième par $\sin u$ et ajoutant les produits correspondants; on reproduit ainsi le premier rapport; on emploie ensuite pour les deux mêmes rapports les multiplicateurs $(-\sin u, \cos u)$ de façon à avoir un rapport plus simple et l'on a ainsi, en écrivant le rapport égal $\frac{d\bar{s}}{ds}$, les équations distinctes au nombre de trois

$$(12) \quad \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{-(d' + \cos u)}{\cos \bar{u}} = \frac{\sin u \sin d}{T \sin \theta \sin \bar{u}} = \frac{\sin d \left(u' + \frac{1}{\rho}\right) - \cos d \sin u}{\cos \theta \sin \bar{u}}.$$

Si l'on pose

$$(13) \quad \cot \theta = \Theta, \quad \cot d = D,$$

ces équations (12) peuvent s'écrire

$$(12') \quad \begin{cases} \Theta = T \left(\frac{u' + \frac{1}{\rho}}{\sin u} - D \right), & \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\sin u \sin d}{T \sin \theta \sin \bar{u}}, \\ \text{tang } \bar{u} = \frac{-\sin d \sin u}{T \sin \theta (\cos u + d')}. \end{cases}$$

Écrivons de même

$$\frac{d\bar{\lambda}}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} = \frac{\bar{\xi}}{T} \quad \text{ou} \quad \frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{s}} = \frac{1}{T} \frac{ds}{d\bar{s}}.$$

Cela nous fait quatre équations dont trois sont équivalentes à

$$S\bar{x} \frac{d\bar{\lambda}}{ds} = 0, \quad S\bar{\alpha} \frac{d\bar{\lambda}}{ds} = 0, \quad S\bar{\lambda} \frac{d\bar{\lambda}}{ds} = 0.$$

Or la dernière en vertu de $S\bar{\lambda}^2 = 1$ est une identité; en vertu de $S\bar{x}\bar{\lambda} = 0$, on a

$$S\bar{x} \frac{d\bar{\lambda}}{ds} + S\bar{\lambda} \frac{d\bar{x}}{ds} \equiv 0;$$

or, l'équation $S\bar{\lambda} \frac{d\bar{x}}{ds} = 0$ a déjà été formée; donc sur les trois équations annoncées, il y en a deux qui disparaissent; l'ensemble des quatre

équations nouvelles se réduit donc à deux; le calcul se fait suivant les mêmes procédés que précédemment et l'on trouve les deux équations distinctes des précédentes

$$(14) \quad \frac{ds}{ds} \frac{1}{\bar{T}} = \frac{\sin u \sin \theta}{\sin d \sin \bar{u}} = \frac{-(\theta' + \frac{\cos u}{T})}{\cos \bar{u}}.$$

Nous avons donc un système (E) de cinq équations pour calculer d , θ , $\bar{u}$, $\bar{T}$, s en fonction de s et u : nous récapitulons (¹)

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = T \left(\frac{u' + \frac{1}{\rho}}{\sin u} - D \right), \\ \tan \bar{u} = \frac{-\sin d \sin u}{T \sin \theta (\cos u + d')} = \frac{-\sin \theta \sin u}{\sin d \left(\theta' + \frac{\cos u}{T} \right)}, \\ \frac{ds}{ds} = \frac{\sin u \sin d}{T \sin \theta \sin \bar{u}} = \frac{\bar{T} \sin u \sin \theta}{\sin d \sin \bar{u}}. \end{array} \right.$$

Nous apercevons la relation très simple

$$(15) \quad T\bar{T} = \frac{\sin^2 d}{\sin^2 \theta},$$

qui prouve que T et $\bar{T}$ sont de même signe. L'élimination de s , $\bar{T}$, $\bar{u}$ entre les équations (E) laisse simplement les deux équations annoncées plus

(¹) Quand d est obtenu, $\cot \theta$ seul est connue; or on s'aperçoit aisément que les échanges suivants :

$\bar{s}$	$\bar{x}$	$\bar{\alpha}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\rho}$	θ	$\bar{u}$	d
s	x	α	$-\gamma$	$-\lambda$	$-\rho$	$\theta + \pi$	$-\bar{u}$	d

sont possibles et cela explique pourquoi, seul, θ est connu quand d est obtenu; ces échanges ne modifient pas la courbe transformée, mais en donnent une normalisation différente. Mêmes remarques si l'on remplace $\bar{s}$ par $-s$ et $\bar{u}$ par $\bar{u} + \pi$.

haut, devant définir θ , d en fonction de s et u

$$(E_4) \quad \begin{cases} \Theta = T \left(\frac{u' + \frac{1}{\rho}}{\sin u} - D \right), \\ \frac{\theta'}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos u}{T \sin^2 \theta} = T \left(\frac{d'}{\sin^2 d} + \frac{\cos u}{\sin^2 d} \right). \end{cases}$$

On remarque que l'on a

$$\frac{\theta'}{\sin^2 \theta} = -\Theta', \quad \frac{d'}{\sin^2 d} = -D', \quad \frac{1}{\sin^2 \theta} = \Theta^2 + 1, \quad \frac{1}{\sin^2 d} = D^2 + 1,$$

de sorte que la seconde équation (E_4) s'écrit

$$\Theta' - \frac{\cos u}{T} (1 + \Theta^2) = T [D' - \cos u (1 + D^2)].$$

L'élimination de Θ est facile et conduit à l'équation

$$(16) \quad \begin{aligned} & 2D' \sin^2 u + D \left[\sin^2 u \frac{T'}{T} - 2 \sin u \cos u \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \right] \\ & + \cos u \left\{ \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \left(2u' + \frac{1}{\rho} \right) + \sin^2 u \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) \right\} \\ & - \sin u \left\{ \frac{T'}{T} \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) + u'' - \frac{\rho'}{\rho^2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Quand cette équation est intégrée, la première équation (E_4) fournit θ en termes finis. Si l'on préfère calculer directement Θ , au lieu de D , l'élimination de D par le calcul analogue donne

$$(16') \quad \begin{aligned} & 2\Theta' \sin^2 u - \Theta \left[\sin^2 u \frac{T'}{T} + 2 \sin u \cos u \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \right] \\ & + T \left[\cos u \left\{ \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \left(2u' + \frac{1}{\rho} \right) + \sin^2 u \left(1 - \frac{1}{T^2} \right) \right\} - \sin u \left(u'' - \frac{\rho'}{\rho^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

et Θ ainsi calculé, D s'obtient en termes finis. Il n'est pas sans intérêt de constater que, pour $T = \pm 1$, c'est-à-dire si la courbe x a son rayon de torsion égal ou opposé au rayon de courbure de notre espace elliptique, les équations (16) , $(16')$ coïncident.

Une fois d, θ obtenus, on calcule $\bar{s}$ en prenant la dernière équation (E)

$$(17) \quad \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = \frac{\sin^2 u \sin^2 d}{T^2 \sin^2 \theta} \frac{1 + \tan^2 \bar{u}}{\tan^2 u} = (\cos u + d')^2 + \frac{\sin^2 d \sin^2 u}{T^2 \sin^2 \theta}$$

et, une fois la détermination de $\frac{d\bar{s}}{ds}$ choisie (*ad libitum*), on a $\sin \bar{u}, \cos \bar{u}$

$$(18) \quad \sin \bar{u} = \frac{\sin u \sin d}{T \sin \theta \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)}, \quad \cos \bar{u} = \frac{-(\cos u + d')}{\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)}.$$

Enfin, pour calculer $\bar{\rho}$ d'une façon symétrique, écrivons

$$Sx\bar{\alpha} = \sin d \cos \bar{u}$$

et dérivons, d'où

$$S\alpha\bar{\alpha} + Sx\left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{\rho}} - \bar{x}\right)\frac{d\bar{s}}{ds} = \cos d \cos \bar{u} d' - \sin d \sin \bar{u} \frac{d\bar{u}}{ds}.$$

En remplaçant $S\alpha\bar{\alpha}, Sx\bar{\xi}, Sx\bar{x}$ par les valeurs déjà obtenues, on trouve

$$\sin d \sin \bar{u} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{s}}{ds} + \frac{d\bar{u}}{ds} \right) = \cos d \left[\cos \bar{u} (d' + \cos u) + \frac{d\bar{s}}{ds} \right] + \cos \theta \sin u \sin \bar{u}.$$

On multiplie par $\frac{d\bar{s}}{ds}$, on remplace $\sin \bar{u} \frac{d\bar{s}}{ds}, \cos \bar{u} \frac{d\bar{s}}{ds}$ par les valeurs tirées de (18) et l'on trouve finalement

$$(19) \quad \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{s}}{ds} + \frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{\cos d \sin u}{T \sin \theta} + \frac{\sin u \cos \theta}{\sin d},$$

équation où $\frac{d\bar{u}}{ds}$ est remplacée par la valeur déduite de

$$\tan \bar{u} = \frac{-\sin d \sin u}{T \sin \theta (\cos u + d')}.$$

Nous aurons ainsi calculé tous les éléments $\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\xi}, \bar{\lambda}, \bar{s}, \bar{\rho}, \bar{T}$ de la courbe $(\bar{x})$.

Nous devons donner quelques mots d'explication : quand on a écrit les deux équations (2'), nous avons dit qu'il n'y avait plus qu'à

écrire $S\bar{\lambda}\bar{x}' = 0$, $S\bar{\lambda}\bar{x}'' = 0$. Or, en différentiant la première équation (2') on a

$$\bar{x}' = B_0x + B_1\alpha + B_2\xi + B_3\lambda,$$

et de même

$$\bar{x}'' = C_0x + C_1\alpha + C_2\xi + C_3\lambda,$$

où les coefficients B_i, C_j ne dépendent pas de θ ; les équations $S\bar{\lambda}\bar{x}' = 0$, $S\bar{\lambda}\bar{x}'' = 0$ reviennent à

$$\sin\theta(B_2\cos u - B_1\sin u) + B_3\cos\theta = 0,$$

$$\sin\theta(C_2\cos u - C_1\sin u) + C_3\cos\theta = 0.$$

L'élimination de θ fournit bien les deux équations annoncées

$$\begin{vmatrix} B_2\cos u - B_1\sin u & B_3 \\ C_2\cos u - C_1\sin u & C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \tan\theta = \frac{B_3}{B_1\sin u - B_2\cos u}.$$

Cette dernière équation n'est autre que la première équation (E₁) et elle est fournie, par ce procédé, sans plus de difficulté que par la méthode suivie antérieurement; mais la première équation est pénible à former, en raison de la complication des coefficients C_1, C_2, C_3 : toute vérification faite, elle coïncide avec (16) (nous avons effectivement opéré aussi par cette méthode de façon à avoir une vérification des résultats et ne pas traîner dans ce qui suit une faute de calcul éventuelle); au contraire, le procédé suivi antérieurement n'a donné que des calculs fort simples, et, de plus, a fourni les expressions de $\bar{s}, \bar{T}, \bar{\rho}$, que l'on obtiendrait avec des calculs assez lourds si l'on se bornait à cette seconde méthode que nous venons d'analyser; aussi nous n'avons qu'à nous féliciter d'avoir adopté la méthode qui consiste à introduire délibérément l'inconnue nouvelle $\bar{u}$ d'abord, puis $\bar{s}, \bar{\rho}, \bar{T}$.

Nous voyons maintenant clairement *comment s'obtiennent toutes les transformées asymptotiques d'une courbe x* : le choix de la fonction u fixe une surface réglée R dont (x) est une asymptotique; sur R , les asymptotiques s'obtiennent par une équation du premier ordre, réductible au type de Riccati et ayant une solution connue: l'équation en jeu se ramène donc à une équation linéaire; précisément le choix de l'inconnue D réalise cette équation linéaire (16).

Les diverses questions que l'on peut se poser maintenant reviennent

à essayer, par exemple, de choisir u de façon que (16) s'intègre aisément, ou, d'une façon plus générale, à établir entre u , d une relation nouvelle (relation en termes finis ou relation différentielle), de façon à avoir deux équations reliant u , d à s ; il revient au même d'ailleurs d'établir *a priori* une relation entre d , θ , ρ , T .

3. APPLICATIONS. COURBES DE BERTRAND. — Choisissons par exemple $u = \frac{\pi}{2}$; la surface réglée R annoncée est donc engendrée par les normales principales de (x) . L'équation (16) du paragraphe précédent devient

$$(1) \quad 2D' + D \frac{T'}{T} + \frac{T'}{T\rho} + \frac{\rho'}{\rho^2} = 0.$$

Elle s'intègre au moyen d'une seule quadrature; on a, pour intégrale générale,

$$(2) \quad D = \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{4\sqrt{T}} \int \frac{dT}{\rho\sqrt{T}}.$$

Nous pouvons chercher *les courbes pour lesquelles l'équation (1) admet une intégrale particulière égale à une constante D_0* ; l'équation (1), en remplaçant D par D_0 , devient

$$(3) \quad \frac{T'}{T} + \frac{\rho'}{\rho^2} : \left(D_0 - \frac{1}{\rho} \right) = 0.$$

Cette équation (3) s'intègre et donne $T \left(D_0 - \frac{1}{\rho} \right) = -\Theta_0$, où Θ_0 est une certaine constante; si l'on se reporte à la première équation (E₁) du paragraphe précédent on voit que Θ est, pour l'intégrale particulière $D = D_0$, égal à la constante Θ_0 . Nous avons donc montré que la courbure $\frac{1}{\rho}$, la torsion $\frac{1}{T}$ sont liées par la relation linéaire

$$(4) \quad D_0 = \frac{1}{\rho} - \frac{\Theta_0}{T},$$

de sorte que la courbe en jeu est une courbe de Bertrand B ; de plus, nous avons donné l'interprétation géométrique des coefficients qui figurent dans la relation linéaire caractéristique; pour cette transformée parti-

culière, on a $u = \frac{\pi}{2}$, $D = D_0$, $\Theta = \Theta_0$; les résultats du paragraphe précédent donnent le droit d'écrire

$$(5) \quad \frac{ds}{ds} = \frac{\sin d_0}{T \sin \theta_0}, \quad \sin \bar{u} = 1, \quad \cos \bar{u} = 0, \quad \bar{u} = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent la courbe transformée ($\bar{B}$) est elle-même une courbe de Bertrand, puisque, d'une courbe (x) à une courbe transformée ($\bar{x}$), d et θ se conservent (ou du moins d et θ sont remplacés par ηd , $\eta \theta$ où η signifie $+1$ ou -1 , l'introduction de η revient à ce fait que $\bar{u}$ pourrait être remplacé par $\bar{u} + \frac{\pi}{2}$). Ici puisque $\bar{u}$ est choisi égal à $\frac{\pi}{2}$, comme u (et non égal à $-\frac{\pi}{2}$), d , θ se conservent avec leur signe et $\bar{B}$ satisfait à la même relation caractéristique B.

Le calcul du paragraphe précédent nous donne

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{x} = x \cos d_0 + \xi \sin d_0, & \bar{\alpha} = -\alpha \cos \theta_0 - \lambda \sin \theta_0, \\ \bar{\xi} = x \sin d_0 - \xi \cos d_0, & \bar{\lambda} = \lambda \cos \theta_0 - \alpha \sin \theta_0, \\ \frac{1}{\bar{\rho}} = D_0 + \frac{T \sin \theta_0 \cos \theta_0}{\sin^2 d_0}, & \frac{1}{\bar{T}} = \frac{T \sin^2 \theta_0}{\sin^2 d_0}, \end{cases}$$

et, suivant les prévisions, on trouve

$$(4') \quad D_0 = \frac{1}{\rho} - \frac{\Theta_0}{T}.$$

D'autre part, en passant des courbes (x), ($\bar{x}$) à leurs réciproques (λ), ($\bar{\lambda}$), d et θ s'échangent et u est remplacé par $-u$: les courbes réciproques forment donc elles aussi un couple de deux courbes de Bertrand associées; nous n'avons qu'à rappeler les résultats

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{1}{T} = T_1 = -\frac{\rho_1}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{T_1}{\rho_1}, \quad \frac{1}{T} = T_1,$$

pour changer la relation (4) en

$$(7) \quad -\Theta_0 = \frac{1}{\rho_1} + \frac{D_0}{T_1}.$$

La nouvelle relation s'obtient en remplaçant D_0 par $(-\Theta_0)$ et Θ_0 .

par $(-D_0)$: ce changement de signe provient de ce que u égal à $\frac{\pi}{2}$ a été remplacé par $u_1 = -\frac{\pi}{2}$ (si nous augmentons u_1 de $\frac{\pi}{2}$, les quantités D, Θ changeraient de signe). La simplicité des résultats légitime la méthode explicitée au numéro précédent.

4. TRANSFORMATIONS OÙ d, θ RESTENT CONSTANTS L'UN ET L'AUTRE. — Si l'on égale D à une constante D_0 , l'équation (16) du paragraphe 2 devient une équation différentielle de second ordre en u ; si, au contraire, l'on égale Θ à une constante Θ_0 , on trouve une autre équation différentielle du second ordre en u ; ces deux équations sont de même nature, car elles expriment la même propriété, l'une pour la courbe (x) , l'autre pour la courbe réciproque (λ) .

Nous allons envisager les deux équations simultanées que l'on a en écrivant $D = D_0, \Theta = \Theta_0$ où D_0 et Θ_0 sont deux constantes données. Il y a une condition de compatibilité à écrire; les courbes correspondantes sont ou bien les courbes de Bertrand ou bien des courbes à torsion constante. Le cas des courbes à torsion constante va se scinder en trois cas particuliers, dont le premier correspond à un rayon de torsion constant, mais quelconque, tandis que les deux autres cas correspondent à un rayon de torsion égal ou opposé à la courbure de l'espace elliptique étudié.

Nous avons en effet à résoudre le système E_1 du paragraphe 2 où l'on remplace d par d_0 et θ par θ_0 (ou du moins D par D_0, Θ par Θ_0), ce qui donne

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} = T \left(\frac{u' + \frac{1}{\rho}}{\sin u} - \frac{\cos d_0}{\sin d_0} \right), \\ \cos u \left(\frac{1}{T \sin^2 \theta_0} - \frac{T}{\sin^2 d_0} \right) = 0. \end{cases}$$

Une première solution $\cos u = 0, u = \frac{\pi}{2}, \sin u = 1$ donne

$$\frac{1}{\rho} - \frac{\Theta_0}{T} = D_0.$$

C'est la relation caractéristique des courbes de Bertrand; écartons

cette solution déjà connue; il reste donc alors

$$T^2 = \frac{\sin^2 d_0}{\sin^2 \theta_0} = T\bar{T}.$$

Les deux courbes transformées l'une de l'autre ont donc la même torsion constante

$$T = \bar{T} = \frac{\varepsilon \sin d_0}{\sin \theta_0}$$

et u est fourni par l'équation différentielle ($\varepsilon = +1$)

$$(2) \quad u' + \frac{1}{\rho} = \frac{\sin u (\cos d_0 + \varepsilon \cos \theta_0)}{\sin d_0}.$$

Il s'agit de bien comprendre que toute courbe à torsion constante fournit par ce procédé ∞^2 transformées de même torsion.

Pour cela, supposons donnée une courbe de torsion constante, (x) , dont nous appelons T_0 le rayon de torsion; choisissons un nombre d_0 arbitraire et déterminons un nombre θ_0 par la condition

$$T_0 = \frac{\varepsilon \sin d_0}{\sin \theta_0} \quad (\text{où } \varepsilon = \pm 1);$$

nous avons fait remarquer déjà que, sans modifier la courbe (x) ni la normalisation de son tétraèdre de Serret-Frenet, on peut obtenir la même transformée en remplaçant θ par $\theta + \pi$; de la sorte le choix de ε est indifférent, puisque remplacer ε par $-\varepsilon$ revient à remplacer θ_0 par $\theta_0 + \pi$; mais pour des raisons d'élégance dans nos formules, laissons provisoirement ε indéterminé ($\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$).

Le système E_1 s'écrit, si u est intégrale de (2),

$$(3) \quad \begin{cases} \Theta - \Theta_0 = T_0(D_0 - D), \\ D' - (D - D_0) \cos u \frac{\cos d_0 + \varepsilon \cos \theta_0}{\sin d_0} = 0. \end{cases}$$

[Pour faire le calcul, il est avantageux de remplacer la seconde équation (E_1) par (16). Si $\cos d_0 + \varepsilon \cos \theta_0$ est nul, $|T_0| = 1$, nous traiterons ce cas à part : il entraînerait que D reste constant (et par suite aussi Θ).]

Donc, $|T_0|$ est supposé différent de 1 et la seconde équation (3) a une seule intégrale constante, $D = D_0$, sur laquelle nous allons raisonner

exclusivement; nous prenons $d = d_0$ ($d = d_0 + \pi$ ne donne qu'une normalisation différente de la transformée); alors Θ est égal à Θ_0 et nous pouvons nous borner à prendre θ égal à la constante θ_0 déjà calculée; la courbe transformée $(\bar{x})$ a elle aussi sa torsion égale à T_0 , en vertu de la relation fondamentale $T\bar{T} = \frac{\sin^2 d}{\sin^2 \theta}$; nous appliquons pour calculer $\bar{s}$, $\bar{\rho}$, $\bar{u}$ les résultats du paragraphe 2; la formule (17) donne $\frac{d\bar{s}}{ds} = \eta$ où η signifie $+1$ ou -1 ; ensuite les formules (18) donnent

$$\sin \bar{u} = \varepsilon \eta \sin u, \quad \cos \bar{u} = -\eta \cos u.$$

Si nous dérivons, nous avons

$$\cos \bar{u} \frac{d\bar{u}}{ds} = \varepsilon \eta \cos u \frac{du}{ds} \quad \text{ou} \quad \frac{d\bar{u}}{ds} = -\varepsilon \frac{du}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{\sin u (\cos \theta_0 + \varepsilon \cos d_0)}{\sin d_0}.$$

Mais alors la formule (19) donne

$$\eta \frac{1}{\rho} = \frac{\sin u (\cos \theta_0 + \varepsilon \cos d_0)}{\sin d_0} - \frac{d\bar{u}}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{2 \sin u (\cos \theta_0 + \varepsilon \cos d_0)}{\sin d_0}.$$

Nous nous apercevons ainsi que les déterminations de ε , η ne jouent aucun rôle fondamental, puisque ρ et $\bar{\rho}$ sont des quantités à signe essentiellement indéterminé : nous pouvons prendre

$$(4) \quad \begin{cases} \eta = 1, & \varepsilon = -1, & \bar{s} = s, & \bar{u} = u + \pi, \\ \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{2 \sin u (\cos \theta_0 - \cos d_0)}{\sin d_0}, & T = -\frac{\sin d_0}{\sin \theta_0}. \end{cases}$$

Ces formules sont symétriques par rapport aux deux courbes, car en passant de (x) à $(\bar{x})$ avec les normalisations telles que nous les avons adoptées, puis en revenant de $(\bar{x})$ à (x) , u est remplacé par $-u$, $\bar{u}$ par $-u$, ρ par $\bar{\rho}$, et d_0 , θ_0 restent inaltérées. C'est le premier des trois cas annoncés, distincts des courbes de Bertrand; nous avons ainsi pour la courbe $(x) \propto^2$ transformées de même torsion constante; car T_0 connu, on prend d_0 arbitraire et l'équation $T_0 \sin \theta_0 + \sin d_0 = 0$ détermine deux nombres distincts θ_0 , $\pi - \theta_0$ et pour chacun d'eux l'équation (2) fournit ∞^1 solutions u .

Les deux équations obtenues pour u

$$u' + \frac{1}{\rho} = \frac{\sin u (\cos d_0 - \cos \theta_0)}{\sin d_0}, \quad u' + \frac{1}{\rho} = \frac{\sin u (\cos d_0 + \cos \theta_0)}{\sin d_0},$$

donnent effectivement deux séries ∞^1 distinctes de surfaces réglées; à condition de changer θ_0 en $\pi - \theta_0$ la seconde équation revient à la première; nos calculs se rapportent à la première équation. Une vérification de nos résultats revient à écrire

$$\bar{u}' + \frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{\sin \bar{u} (\cos d_0 - \cos \theta_0)}{\sin d_0}, \quad u' + \frac{1}{\rho} = \frac{\sin u (\cos d_0 - \cos \theta_0)}{\sin d_0},$$

et à retrancher; puisque $\sin \bar{u} = -\sin u$, on retrouve la valeur obtenue pour $\frac{1}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{\rho}$.

Les second et troisième cas correspondent à $T = \pm 1$; une symétrie plane permet de n'envisager que le cas $T = 1$. Comme plus haut nous écrivons $T_1 = -\frac{\sin d_0}{\sin \theta_0}$ et l'on a $\sin \theta_0 = -\sin d_0$; la valeur de $\cos \theta_0$ peut être égale à $\cos d_0$ et cela suppose $\theta_0 = -d_0$, elle peut être égale à $-\cos d_0$ et cela entraîne $\theta_0 = \pi - d_0$. Le cas $\theta_0 = \pi - d_0$ donne pour u l'équation différentielle

$$(5) \quad u' + \frac{1}{\rho} = \frac{2 \sin u \cos d_0}{\sin d_0},$$

et les résultats que nous obtenons ne diffèrent pas de ceux relatifs au cas précédent: ce n'est que plus tard, en étudiant les courbes minima, que nous apercevrons une distinction entre le cas $T \neq \pm 1$ et $T = \pm 1$. On a alors

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{s} = s, & \bar{u} = u + \pi, & \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{-4 \sin u \cos d_0}{\sin d_0}, \\ d = d_0, & \theta_0 = \pi - d_0, & u' + \frac{1}{\rho} = \frac{2 \sin u \cos d_0}{\sin d_0}. \end{cases}$$

C'est le second cas annoncé; le troisième correspond à $\theta_0 = -d_0$; en raison de son importance nous allons l'étudier directement.

5. TRANSFORMATION ASYMPTOTIQUE D'UNE COURBE DE TORSION CONSTANTE ÉGALE À L'UNITÉ ($R = 1$). — Nous allons étudier d'abord l'ensemble des

transformées d'une courbe pour laquelle $T = \pm R$; une homothétie préalable a réduit R à l'unité; une symétrie plane ramènerait le cas $T = -1$ au cas $T = 1$. Les équations fournissant D et Θ sont identiques : D est solution de l'équation

$$(1) \quad 2D' \sin^2 u - 2D \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \sin u \cos u \\ + \cos u \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \left(2u' + \frac{1}{\rho} \right) - \left(u'' - \frac{\rho'}{\rho^2} \right) \sin u = 0,$$

et Θ est une autre solution de cette même équation, liée à D par la relation

$$(2) \quad \Theta + D = \frac{u' + \frac{1}{\rho}}{\sin u}.$$

Cette propriété que toute intégrale de (1) soit accompagnée de la nouvelle intégrale donnée par (2) entraîne que $\frac{u' + \frac{1}{\rho}}{2 \sin u}$ soit solution de (1) : c'est ce qu'un calcul simple vérifie. L'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(3) \quad \left(D - \frac{u' + \frac{1}{\rho}}{2 \sin u} \right)' = \left(D - \frac{u' + \frac{1}{\rho}}{2 \sin u} \right) \left(u' + \frac{1}{\rho} \right) \cotg u.$$

Autrement dit, sur toute surface réglée issue d'une courbe de torsion constante égale à l'unité ($R = +1$) on connaît sans quadratures une asymptotique particulière.

Le fait que toute intégrale de l'équation (1) en fait connaître une seconde est lié à la propriété rappelée dès le début de ce travail que la courbe (x) et la courbe (λ) sont congruentes : par conséquent, la courbe $(\bar{\lambda})$, par un déplacement convenable fournit une nouvelle transformée asymptotique de (x) .

Si $\frac{u' + \frac{1}{\rho}}{2 \sin u}$ est une constante non nulle, que nous égalons à D_0 ou $\cotg d_0$, l'équation (3) admet l'unique solution constante, $D = D_0$, ou $d = d_0$, et nous retombons sur le deuxième cas qui a été étudié au numéro précédent.

Si $u' + \frac{1}{\rho}$ est nul, nous avons le troisième cas annoncé : la surface réglée R est une surface de Clifford; toutes les intégrales de (3) sont des constantes; si nous appelons d_0 la valeur constante de d , pour pouvoir écrire

$$\Theta_0 = -D_0, (\cot \theta_0 = -\cot d_0) \quad \text{et} \quad T_0 = 1 = -\frac{\sin d_0}{\sin \theta_0},$$

conformément aux notations du paragraphe précédent, nous posons $\theta_0 = -d_0$. La formule (17) du paragraphe 2 permet de prendre $\bar{s} = s$; on a ensuite par les formules (18), $\sin \bar{u} = -\sin u$, $\cos \bar{u} = -\cos u$, d'où $\bar{u} = \pi + u$; la formule (19) donne

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\bar{u}}{ds} = -\frac{du}{ds} = \frac{1}{\rho};$$

on voit donc que les deux courbes $x, \bar{x}$ sont congruentes (et ont la même normalisation : c'est dans ce but que nous avons écrit $T_0 = -\frac{\sin d_0}{\sin \theta_0}$ et non $T_0 = \frac{\sin d_0}{\sin \theta_0}$, écriture qui aurait pu sembler plus naturelle).

Nous avons retrouvé les résultats bien connus relatifs aux surfaces réglées de Clifford et à leurs asymptotiques, qui dérivent toutes les unes des autres par un glissement de la surface sur elle-même.

Nous pouvons maintenant développer quelques propriétés géométriques; nous allons montrer que nous avons défini un mouvement d'un corps solide où chaque point décrit une courbe de torsion constante unité, toutes les trajectoires étant congruentes deux à deux; chaque droite engendre une surface réglée de Clifford; de plus, toute surface réglée de Clifford possède ∞^2 courbes de torsion constante unité ($R=1$); ces courbes sont réparties en ∞^1 familles, telles que, dans chaque famille, le plan osculateur fasse un angle constant avec la génératrice issue du point d'osculution; cet angle varie d'une famille à l'autre; sur une même surface de Clifford, les courbes d'une même famille sont congruentes. Jusqu'ici, on n'a signalé que les deux familles correspondant à la valeur zéro (asymptotiques) ou $\frac{\pi}{2}$ (trajectoires orthogonales de génératrices) : nous avons réuni ces deux familles isolées par une série continue de ∞^1 familles.

Considérons, en effet, le point courant M de la courbe (x) supposée de torsion constante ($T = 1$), et deux transformées $(u_1, d_1), (u_2, d_2)$: ces symboles signifient que nous avons choisi une intégrale u_i de l'équation $u' + \frac{1}{\rho} = 0$ et ensuite choisi la distance constante d_i , $MM_i = d_i$ ($i = 1$ ou 2). Le triangle MM_1M_2 est de grandeur invariable quand M décrit la courbe (x) , car les côtés MM_1, MM_2 restent égaux à d_1, d_2 respectivement, et l'angle (MM_1, MM_2) est égal à $u_2 - u_1$; on peut donc dire que, si M_1 est le point qui engendre une première transformée de (x) , on obtient la transformée générale en faisant en M_1 un angle constant arbitraire avec M, M et portant sur le rayon, issu de M_1 , ainsi obtenu une longueur constante; il résulte de là que tout point du plan MM_1M_2 , invariablement lié à ce triangle, décrit une transformée de la courbe x . Il s'agit d'obtenir ce même résultat pour un point invariablement lié à MM_1M_2 , sans être situé dans le plan MM_1M_2 ; en effet, si un point décrit le rayon MM_1 , les diverses positions de ce point fournissent ∞' transformées de x , les plans osculateurs de ces courbes passant tous par le rayon MM_1 et correspondant d'une façon biunivoque au point variable en jeu, car $\theta = -d$; si donc, nous considérons un point M_3 invariablement lié à MM_1M_2 , le plan MM_1M_3 définit sur MM_1 un point M'_1 , tel que M'_1 décrive une transformée (u_1, d'_1) de x : comme MM_3 est constant et fait un angle fixe avec M'_1M , il résulte, d'une remarque faite plus haut, que M_3 décrit une transformée asymptotique de la courbe M'_1 , donc une courbe congruente encore à x . Nous pouvons envisager le point M'_2 , analogue à M'_1 , défini par M_3 sur MM_2 , et le même raisonnement prouve que M_3 décrit une transformée asymptotique de M'_2 ; nous avons ainsi obtenu, directement, *le théorème de permutabilité de Bianchi* sans avoir eu besoin des résultats démontrés par Bianchi; tout point de MM_3 décrit une courbe qui peut être regardée comme transformée asymptotique de la courbe décrite par un point quelconque de $M'_1M'_2$; nous pouvons remarquer que les deux droites $MM_3, M'_1M'_2$ sont réciproques par rapport à l'absolu; MM_3 est finalement une droite *quelconque* issue de M ; comme on peut répéter le même raisonnement à partir d'un point quelconque M' et de la courbe décrite par M' , on voit que deux droites fixes quelconques, réciproques par rapport à l'absolu, donnent pour trajectoires de leurs

points deux séries ∞^1 de courbes de torsion constante unité, les courbes relatives à l'une des droites admettant comme transformées asymptotiques communes à elles toutes les trajectoires des points de l'autre droite.

Démontrons maintenant que la droite $M_1 M_2$, par exemple, engendre une surface réglée de Clifford; pour cela, remarquons que les diverses positions $MM_1, \overline{MM}_1, \dots$ de la droite MM_1 quand M prend les positions $M, \overline{M}, \dots$ sur la courbe x sont parallèles au sens de Clifford (dextrorsum pour faire un choix); les positions de MM_2 , au cours du déplacement de M , sont parallèles aussi, dextrorsum, car, par continuité, on passe de la surface $MM_1, \overline{MM}_1, \dots$ à la surface $MM_2, \overline{MM}_2, \dots$, avec toujours parallélisme des génératrices, de sorte que le sens du parallélisme, ne pouvant pas varier brusquement, reste le même; or, $M_1 M_2$ rencontre MM_1 et MM_2 , $\overline{M}_1 \overline{M}_2$ rencontre $\overline{MM}_1, \overline{MM}_2$, et l'angle $(MM_1, M_1 M_2)$ est égal à l'angle $(\overline{MM}_1, \overline{M}_1 \overline{M}_2)$: du parallélisme de MM_1 et $\overline{MM}_1$, de celui de MM_2 et $\overline{MM}_2$, résulte celui de $M_1 M_2$ et $\overline{M}_1 \overline{M}_2$, le sens du parallélisme étant le même pour $(MM_2, \overline{MM}_2)$ ou $(M_1 M_2, \overline{M}_1 \overline{M}_2)$.

On voit que sur la surface de Clifford, lieu de $M_1 M_2$, les deux courbes M_1, M_2 dérivent l'une de l'autre par un glissement de la surface sur elle-même, de sorte que les plans osculateurs de la courbe lieu de M_1 ou de la courbe lieu de M_2 font le même angle avec la génératrice $M_1 M_2$; autrement dit, *sur une surface réglée de Clifford, les courbes dont le plan osculateur fait un angle constant avec les génératrices sont des courbes de torsion constante unité*; pour chaque valeur de l'angle constant, on a ∞^1 courbes; en faisant varier ensuite l'angle on a ∞^1 familles de ∞^1 courbes; pour l'angle zéro, on a les asymptotiques, pour l'angle droit, on a les trajectoires orthogonales des génératrices; les courbes d'une même famille sont congruentes entre elles; mais la congruence n'a pas lieu entre deux courbes de famille différente. Jusqu'ici, les géomètres n'avaient songé qu'aux asymptotiques et aux trajectoires orthogonales.

Faisons une remarque à propos du procédé employé pour démontrer le parallélisme de $M_1 M_2$ et de ses diverses positions. On peut assimiler les droites de la géométrie elliptique aux cercles de l'espace

euclidien orthogonaux à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$; deux droites sécantes ont pour homologues deux cercles sécants et deux droites parallèles dextrorsum ou sinistrorsum deux cercles paratactiques dextrorsum ou sinistrorsum.

Rappelons que chacun des ∞^4 cycles en jeu peut être représenté par un point a du feuillet dextrorsum sphérique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et un point α du feuillet sinistrorsum sphérique de même équation; deux cycles (a, α) , (b, β) sont sécants si la distance sphérique ab est égale à la distance sphérique $\alpha\beta$, et la valeur commune de cette distance est l'angle de deux cycles; deux cycles (a, α) , $(a, \bar{\alpha})$ sont paratactiques dextrorsum, l'image dextrorsum étant commune aux deux cycles; pour deux cycles paratactiques sinistrorsum, c'est l'image sinistrorsum qui est la même. Imaginons maintenant une surface cerclée de Clifford, c'est-à-dire engendrée par des cercles (a, α) , $(a, \bar{\alpha})$, ... en nombre ∞^1 , donnant la même image dextrorsum a , tandis que les images $\alpha, \bar{\alpha}, \dots$ décrivent une certaine courbe sphérique; imaginons maintenant ∞^1 autres cercles (b, β) , $(b, \bar{\beta})$, ..., encore paratactiques dextrorsum, correspondant un à un aux cercles précédents par la condition $(\alpha\bar{\beta}) = ab$: il s'agit des distances sphériques; on a ainsi deux surfaces de Clifford dextrorsum (analogues aux surfaces réglées, lieu de $\overline{MM}_1, \overline{MM}_2$); imaginons un cercle mobile $(\bar{c}, \bar{\gamma})$ toujours sécant au cercle $(a, \bar{\alpha})$ et au cercle $(b, \bar{\beta})$, l'angle de $(\bar{c}, \bar{\gamma})$ avec $(a, \bar{\alpha})$ étant fixe, et l'angle de $(\bar{c}, \bar{\gamma})$ avec $(b, \bar{\beta})$ étant fixe aussi: les distances sphériques $(a\bar{c})$, $(b\bar{c})$ restent constantes, donc $\bar{c}$ est fixe, et le cercle $(\bar{c}, \bar{\gamma})$ décrit une surface dextrorsum de Clifford: c'est ce qui explique que $\overline{M}, \overline{M}_2$ engendre une surface réglée de Clifford, de même sens que les surfaces $\overline{MM}_1, \overline{MM}_2$. Nous avons emprunté ce mode de démonstration à M. Gambier (d'après son Mémoire du *Journal de Liouville*, 9^e série, t. IX, 1930, p. 179-199, *Sur les Cycles orthogonaux à une même sphère*).

Nous reviendrons plus tard sur les configurations de Möbius obtenues par composition des transformations asymptotiques effectuées sur les courbes à torsion constante.

CHAPITRE II.

COURBES MINIMA EN CORRESPONDANCE ASYMPTOTIQUE.

1. COURBES MINIMA. — Les courbes minima sont caractérisées par ce fait que *leurs tangentes sont tangentes à l'absolu*; autrement dit ces courbes sont les arêtes de rebroussement des développables circonscrites à l'absolu.

L'élément linéaire de l'espace étant $ds^2 = \Sigma dx^2$ (une homothétie préalable a réduit R à l'unité), l'équation différentielle des courbes minima est

$$(1) \quad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = 0.$$

La binormale coïncide avec la tangente, et il n'y a plus de tétraèdre de Serret.

On peut obtenir l'équation des courbes minima de l'espace elliptique en effectuant une projection stéréographique de l'espace euclidien à 3 dimensions sur une hypersphère [on considère alors comme coïncidant les points $(-x)$ et (x) de façon à réaliser l'identité de la géométrie hypersphérique et de la géométrie de l'espace elliptique]. A toute génératrice rectiligne de l'hypersphère correspond une direction isotrope de l'espace elliptique. Les formules de transformation sont

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, & X_2 = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, \\ X_3 = \frac{2x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, & X_4 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1}, \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées du point qui décrit la courbe minima de l'espace euclidien et X_1, X_2, X_3, X_4 les coordonnées normalisées du point qui décrit dans l'espace elliptique ($R=1$) la courbe minima annoncée. On vérifie aisément $\Sigma X^2 = 1, \Sigma dX^2 = 0$; on peut prendre pour x_1, x_2, x_3 les expressions indiquées par Weierstrass

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = (1 - u^2)f'' + 2uf' - 2f, \\ x_2 = i[(1 + u^2)f'' - 2uf' + 2f], & x_3 = 2uf'' - 2f'. \end{cases}$$

On a alors

$$(4) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 4(f'^2 - 2ff'') + 1.$$

Mais nous pouvons obtenir, par un autre procédé, des formules au moins aussi simples. En effet, la courbe que nous cherchons est l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à la sphère $\Sigma x^2 = 0$; sur cette sphère, on peut exprimer les coordonnées d'un point courant par les formules

$$(5) \quad \alpha_1 = 1 - uv, \quad \alpha_2 = i(1 + uv), \quad \alpha_3 = u + v, \quad \alpha_4 = i(u - v).$$

Le plan tangent au point (u, v) est déterminé par les deux génératrices qui en sont issues; le point

$$(6) \quad b_1 = u, \quad b_2 = -iu, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = i \quad \left(b = -\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)$$

est un point de la génératrice $u = \text{const.}$ Dans les formules (5) supposons v remplacé par une fonction $f(u)$, de façon à avoir une courbe tracée sur la sphère en jeu, le point (x) décrivant l'arête de rebroussement de la développable correspondante, nous remplaçons les coordonnées homogènes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ par $a_i = C\alpha_i$ avec $\Sigma a'^2 = 1$; il suffit de prendre $C = \frac{1}{2\sqrt{f'}}$, où f' signifie $\frac{df}{du}$. Le plan tangent est donc déterminé par les trois points (a) , (a') , (b) et nous pouvons écrire

$$(7) \quad x_i = \lambda a_i + \mu a'_i + \nu b_i$$

(ou plus simplement $x = \lambda a + \mu a' + \nu b$); λ, μ, ν sont des fonctions qui ne dépendent pas de l'indice i . Nous devons écrire

$$(8) \quad \Sigma \alpha_i x_i = 0, \quad \Sigma \alpha'_i x_i = 0, \quad \Sigma \alpha''_i x_i = 0, \quad \Sigma x_i^2 = 1$$

pour exprimer que le point (x) décrit l'arête de rebroussement de la développable circonscrite à l'absolu le long de la courbe (α) et aussi que les coordonnées (x) sont normalisées. La première équation est automatiquement vérifiée; les autres sont

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda C \Sigma \alpha \alpha' + \mu (C' \Sigma \alpha \alpha' + C \Sigma \alpha'^2) + \nu \Sigma b \alpha' = 0, \\ \lambda C \Sigma \alpha \alpha'' + \mu (C' \Sigma \alpha \alpha'' + C \Sigma \alpha' \alpha'') + \nu \Sigma b \alpha'' = 0, \\ \lambda^2 \Sigma a^2 + \mu^2 \Sigma a'^2 + \nu^2 \Sigma b^2 + 2\lambda\mu \Sigma aa' + 2\lambda\nu \Sigma ab + 2\mu\nu \Sigma a'b = 1. \end{cases}$$

Rappelons les formules utiles pour ce calcul

$$\begin{aligned}\Sigma \alpha^2 &= 0, & \Sigma \alpha'^2 &= 4f', & \Sigma \alpha \alpha' &= 0, & \Sigma \alpha \alpha'' + \Sigma \alpha' \alpha'' &= 0, & \Sigma \alpha \alpha'' &= -4f'; \\ & & \Sigma \alpha' \alpha'' &= 2f'', & \Sigma b \alpha' &= -2, & \Sigma b \alpha'' &= 0; \\ \Sigma a^2 &= 0, & \Sigma a'^2 &= 1, & \Sigma b^2 &= 0, & \Sigma a a' &= 0, & \Sigma a b &= 0, \\ & & \Sigma a' b &= C' \Sigma a b + C \Sigma \alpha' b &= -2C.\end{aligned}$$

Les équations (9) se réduisent donc aux formes très simples

$$(10) \quad \nu = \mu \sqrt{f'}, \quad \lambda = \mu \frac{f''}{f'}, \quad \mu^2 = -1.$$

En prenant $\mu = -i$ nous avons les formules définitives

$$(11) \quad \begin{cases} x_1 = -i \left[\frac{f''}{f'} a_1 + a'_1 + u \sqrt{f'} \right] = -i [2g' a_1 + a'_1 + u e^g], \\ x_2 = -i \left[\frac{f''}{f'} a_2 + a'_2 - i u \sqrt{f'} \right] = -i [2g' a_2 + a'_2 - i u e^g], \\ x_3 = -i \left[\frac{f''}{f'} a_3 + a'_3 - \sqrt{f'} \right] = -i [2g' a_3 + a'_3 - e^g], \\ x_4 = -i \left[\frac{f''}{f'} a_4 + a'_4 + i \sqrt{f'} \right] = -i [2g' a_4 + a'_4 + i e^g]. \end{cases}$$

On a posé

$$(12) \quad f' = e^{2g} u, \quad a_1 = \frac{1 - u f}{2 \sqrt{f'}}, \quad a_2 = i \frac{1 + u f}{2 \sqrt{f'}}, \quad a_3 = \frac{u + f}{2 \sqrt{f'}}, \quad a_4 = \frac{i(u - f)}{2 \sqrt{f'}}.$$

Il sera commode d'écrire

$$x = -i [2g' u + a' + b e^g], \quad b_1 = u, \quad b_2 = -i u, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = i.$$

Puisque la tangente en (x) passe en (a) , on peut écrire

$$x' = L a + M x, \quad \Sigma x x' = 0 = L \Sigma a x + M \Sigma x^2 = M;$$

par conséquent on a

$$x' = L a.$$

Le facteur de proportionnalité $\frac{x'_i}{a_i}$ s'obtient aisément en prenant $x'_3 : a_3$.

On a

$$x'_3 = -i [2g'' a_3 + 2g' a'_3 + a''_3 - e^g g']; \quad \text{or} \quad a_3 = \frac{\alpha_3}{2} e^{-g}.$$

En remplaçant a_3, a'_3, a''_3 par leurs expressions au moyen de g et $\alpha_3, \alpha'_3, \alpha''_3$, on trouve le résultat

$$(13) \quad x'_3 = ie^{-s} \frac{g'^2 - g''}{2} \alpha_3 = i(g'^2 - g'') \alpha_3, \quad L = i(g'^2 - g'').$$

Les formules (11) ont l'avantage de contenir un dénominateur plus simple que les formules (2), mais elles contiennent le radical $\sqrt{f'}$; il est souvent commode de conserver l'expression g .

2. COURBES MINIMA EN CORRESPONDANCE ASYMPTOTIQUE. — Pour que deux courbes minima $(x), (y)$ soient en correspondance asymptotique, on doit avoir, puisque les coefficients du plan osculateur sont les dérivées des coordonnées x, y ,

$$(1) \quad \Sigma x'y = 0, \quad \Sigma xy' = 0.$$

Puisque $\Sigma xy = \cos d$, les formules (1) prouvent que la distance d des deux points x, y est constante. On peut écrire, avec la constante d et deux fonctions t, ρ inconnues,

$$(2) \quad y = x \cos d + (\rho a' - 2ta) \sin d,$$

puisque $(x), (a), (a')$ sont trois points du plan osculateur de la courbe (x) . Rappelons les résultats

$$\Sigma a^2 = 0, \quad \Sigma aa' = 0, \quad \Sigma a'^2 = 1, \quad \Sigma ax = 0, \quad \Sigma a'x = 0.$$

On a donc $\Sigma y^2 = \cos^2 d + \rho^2 \sin^2 d = 1$ et par suite $\rho^2 = 1$; en changeant au besoin d de signe, on peut supposer $\rho = 1$, ce qui fixe d en grandeur et signe. Nous écrivons donc

$$(2') \quad y = x \cos d + (a' - 2ta) \sin d.$$

La relation, $\Sigma x'y = 0$ ou $\Sigma ay = 0$, se trouve satisfaite automatiquement; puisque Σxy est constant et que l'on a $\Sigma x'y = 0$, la relation $\Sigma xy' = 0$ est aussi satisfaite automatiquement si y est donné par (2'); alors il ne reste plus à exprimer que la relation $\Sigma y'^2 = 0$. Or on a

$$(3) \quad y' = x' \cos d + (a'' - 2ta' - 2t'a) \sin d,$$

$$(4) \quad \Sigma y'^2 = 2 \sin d \cos d \Sigma x'a'' + \sin^2 d (\Sigma a''^2 + 4t^2 - 4t' \Sigma aa'') = 0.$$

Rappelons encore les résultats qui doivent servir au cours de ce calcul

$$(5) \quad \begin{cases} \Sigma ax = 0, & \Sigma a'x = 0, & \Sigma a''x = 0, & \Sigma ax' = 0, & \Sigma a'x' = 0, \\ \Sigma a^2 = 0, & \Sigma aa' = 0, & \Sigma a'^2 = 1, & \Sigma aa'' + \Sigma a'^2 = 0, & \Sigma aa'' = -1, & \Sigma a'a'' = 0. \end{cases}$$

On a donc

$$\Sigma x'a'' = i(g'^2 - g'')\Sigma aa'' = i(g'' - g'^2).$$

Il reste à calculer $\Sigma a''^2$; or

$$a = \frac{\alpha e^{-g}}{2}, \quad a' = \frac{e^{-g}}{2}(\alpha' - g'\alpha), \quad a'' = \frac{e^{-g}}{2}[\alpha'' - 2g'\alpha' + (g'^2 - g'')\alpha].$$

D'autre part

$$(6) \quad \begin{cases} \Sigma \alpha^2 = 0, & \Sigma \alpha'^2 = 4f' = 4e^{2g}, & \Sigma \alpha''^2 = 0, \\ \Sigma \alpha\alpha' = 0, & \Sigma \alpha'\alpha'' = 4e^{2g}g', & \Sigma \alpha\alpha'' + \Sigma \alpha'^2 = 0, & \Sigma \alpha\alpha'' = -4e^{2g}. \end{cases}$$

On a donc

$$(7) \quad \Sigma \alpha''^2 = 2(g'' - g'^2)$$

et l'équation différentielle (4) s'écrit

$$(8) \quad t' + t^2 = (g'^2 - g'') \frac{\sin d + i \cos d}{2 \sin d}.$$

La forme simple de ce résultat justifie l'emploi de la fonction g (au lieu de f); on remarquera toutefois que l'on a

$$(9) \quad \begin{cases} f' = e^{2g}, & g' = \frac{f''}{2f'}, & g'' = \frac{f'''}{2f'} - \frac{f''^2}{2f'^2}, \\ g'' - g'^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{f''^2}{f'^2} \right). \end{cases}$$

On reconnaît l'invariant de Schwarz : si l'on remplace f par $\frac{\lambda f + \mu}{\nu f + \rho}$, où λ, μ, ν, ρ sont des constantes arbitraires, l'expression $\frac{f''}{f'} - \frac{3}{2} \frac{f''^2}{f'^2}$ reste inaltérée; ce phénomène est assez facile à prévoir puisque nous avons pris le point $1 + u\nu, i(1 + u\nu), u + \nu, i(u - \nu)$ et que, remplacer ν par $\frac{\lambda\nu + \mu}{\nu\nu + \rho}$ revient à opérer un glissement de la sphère $\Sigma x^2 = 0$ sur elle-même.

On a

$$u = \frac{\alpha_3 - i\alpha_4}{\alpha_1 - i\alpha_2} = \frac{dx_3 - i dx_4}{dx_1 - i dx_2};$$

donc, pour la courbe (γ) , le paramètre $\bar{u}$ jouant le même rôle que u pour (x) est

$$\bar{u} = \frac{dy_3 - i dy_4}{dy_1 - i dy_2}.$$

On a, d'après les résultats obtenus [formule (31)],

$$\begin{aligned} y' &= i(g'^2 - g'')a \cos d + a[2t^2 \sin d + (g'' - g'^2)(\sin d + i \cos d)] + (a'' - 2ta') \sin d \\ &= \sin d [a(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2ta' + a''] \end{aligned}$$

$$\bar{u} = \frac{(a_3 - ia_4)(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2t(a'_3 - ia'_4) + a''_3 - ia''_4}{(a_1 - ia_2)(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2t(a'_1 - ia'_2) + a''_1 - ia''_2}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \alpha_3 - i\alpha_4 &= 2u, & a_3 - ia_4 &= 2Cu = ue^{-g}, \\ \alpha_1 - ia_2 &= 2, & a_1 - ia_2 &= 2C = e^{-g}. \end{aligned}$$

Le calcul s'achève donc sans difficulté et l'on trouve

$$(10) \quad \bar{u} = u - \frac{1}{t}.$$

Or, on peut écrire

$$t = \frac{1}{u - \bar{u}}, \quad t' = \frac{\bar{u}' - 1}{(u - \bar{u})^2}, \quad t' + t^2 = \frac{u'}{(u - \bar{u})^2}.$$

On en déduit donc

$$(11) \quad \frac{d\bar{u}}{du} = (\bar{u} - u)^2 (g'^2 - g'') \frac{\sin d + i \cos d}{\sin d}.$$

On peut écrire, en introduisant les quantités $\bar{a}$, $\bar{g}$ qui jouent pour (γ) le même rôle que a , g pour x ,

$$(12) \quad \frac{dy}{du} = \sin d [a(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2ta' + a''] = \frac{dy}{d\bar{u}} \frac{d\bar{u}}{du} = i(\bar{g}'^2 - \bar{g}'')\bar{a} \frac{d\bar{u}}{du}.$$

En passant de (x) à (γ) , $\Sigma xy = \cos d = \cos \bar{d}$ entraîne soit $d = \bar{d}$, soit $d = -\bar{d}$. Écrivons

$$\Sigma ay = 0, \quad \Sigma \bar{a}x = 0.$$

Différentions

$$\bar{a}' = \frac{d\bar{a}}{du}, \quad \bar{g}' = \frac{d\bar{g}}{du}, \quad \bar{g}'' = \frac{d^2\bar{g}}{du^2},$$

$$(13) \quad \begin{cases} du \Sigma a' y + i(\bar{g}'^2 - \bar{g}'') \Sigma a \bar{a} d\bar{u} = 0, \\ d\bar{u} \Sigma \bar{a}' x + i(g'^2 - g'') \Sigma a \bar{a} du = 0. \end{cases}$$

Or

$$\Sigma a' y = \sin d, \quad \Sigma \bar{a}' x = \sin \bar{d}$$

et la comparaison des égalités (13) entraîne

$$(14) \quad (g'^2 - g'') du^2 \sin d = (\bar{g}'^2 - \bar{g}'') d\bar{u}^2 \sin \bar{d}.$$

D'autre part (11) entraîne

$$(11') \quad \frac{du}{d\bar{u}} = (u - \bar{u})^2 (\bar{g}'^2 - \bar{g}'') \frac{\sin \bar{d} + i \cos \bar{d}}{\sin \bar{d}}.$$

La comparaison de (11) et (11') entraîne

$$\left(\frac{d\bar{u}}{du} \right)^2 = \frac{g'^2 - g''}{\bar{g}'^2 - \bar{g}''} \frac{\sin d + i \cos d}{\sin \bar{d} + i \cos \bar{d}} \cdot \frac{\sin \bar{d}}{\sin d}.$$

En comparant avec (14) on a

$$\frac{\sin d}{\sin \bar{d}} = \frac{\sin d + i \cos d}{\sin \bar{d} + i \cos \bar{d}} \cdot \frac{\sin \bar{d}}{\sin d},$$

où $\sin d + i \cos d = \sin \bar{d} + i \cos \bar{d}$. On a $\cos d = \cos \bar{d}$, donc $\sin d = \sin \bar{d}$ et par suite $d = \bar{d}$. On peut donc écrire (14) sous la forme

$$(15) \quad (\bar{g}'^2 - \bar{g}'') d\bar{u}^2 = (g'^2 - g'') du^2.$$

L'équation (12) devient, en écrivant

$$(\bar{g}'^2 - \bar{g}'') \frac{d\bar{u}}{du} = (g'^2 - g'') \frac{du}{d\bar{u}} = \frac{t^2 \sin d}{\sin d + i \cos d},$$

$$(16) \quad i\bar{a} = (\sin d + i \cos d) \left[a \left(\frac{g'' - g'^2}{t^2} + 2 \right) - \frac{2a'}{t} + \frac{a''}{t^2} \right],$$

on a aussi

$$a_1 + ia_2 = \frac{-uf}{\sqrt{f'}}, \quad a_1 - ia_2 = \frac{1}{\sqrt{f'}}, \quad a_3 + ia_4 = \frac{f}{\sqrt{f'}}, \quad a_3 - ia_4 = \frac{u}{\sqrt{f'}},$$

$$f = \frac{a_3 + ia_4}{a_1 - ia_2}, \quad \bar{f} = \frac{\bar{a}_3 + i\bar{a}_4}{a_1 - ia_2}.$$

On a donc

$$\bar{f} = \frac{(a_3 + ia_4)(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2t(a'_3 + ia'_4) + a''_3 + ia''_4}{(a_1 - ia_2)(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2t(a'_1 - ia'_2) + a'' - ia''_2}$$

$$= f - \frac{e^{2g}}{t + g'} = f - \frac{2f'^2}{2tf' + f''}.$$

(Comme vérification si $f = u$, on retrouve le calcul qui a donné $\bar{u} = u - \frac{1}{t}$.)

Nous récapitulons par les formules F

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} g' = \frac{1}{2} \log f', \quad t' + t^2 = (g'^2 - g'') \frac{\sin d + i \cos d}{2 \sin d}; \\ y = x \cos d + (a' - 2ta) \sin d, \quad \frac{dy}{du} = \sin d [a(g'' - g'^2 + 2t^2) - 2ta' + a'']; \\ \bar{u} = u - \frac{1}{t}, \quad \bar{f} = f - \frac{e^{2g}}{t + g'} = f - \frac{2tf'^2}{2tf' + f''}; \\ \bar{g}'^2 - \bar{g}'' = \frac{t_1 \sin^2 d}{(g'^2 - g'')(\sin d + i \cos d)^2}, \\ \frac{d\bar{u}}{du} = (\bar{u} - u)(g'^2 - g'') \frac{\sin d + i \cos d}{\sin d}; \\ i\bar{a} = \left[a \left(\frac{g'' - g'^2}{t^2} + 2 \right) - \frac{2a'}{t} + \frac{a''}{t} \right] (\sin d + i \cos d). \end{array} \right.$$

3. COURBES A TORSION CONSTANCE. — Il s'agit d'abord de montrer que, (x) et (y) étant deux courbes minima en correspondance asymptotique, le milieu de (xy) , soit z , décrit une courbe à torsion constante, non égale à ± 1 .

Le milieu z est donné par $z = \frac{x+y}{2 \cos \frac{d}{2}}$; soit $C_1 x + C_2 y$ son conjugué;

on a $S(C_1 x + C_2 y)^2 = 1$ et $Sz(C_1 x + C_1 y) = 0$, d'où

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2 \sin \frac{d}{2}}.$$

Le conjugué est donc $\lambda = \frac{x-y}{2 \sin \frac{d}{2}}$; il s'agit de montrer que le *conjugué* λ est le pôle du plan osculateur de la courbe z ; on a d'abord $S\lambda z = 0$; ensuite $S\lambda z'$ est, au facteur $4 \sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2}$ près,

$$S(x-y)(x'+y') = Sxy' - Sx'y = 0;$$

ensuite $S\lambda z''$, au même facteur près, est

$$S(x-y)(x''+y'') = Sxx'' - Sy'y'' + Sxy'' - Syx''.$$

Or, on a $Sx^2 = 1$, $Sxx' = 0$, $Sxx'' + Sx'^2 = 0$, or $Sx'^2 = 0$, donc $Sxx'' = 0$; de même $Syy'' = 0$; d'autre part $Sx'y = 0$, $Sxy' = 0$, donc $Sx''y + Sx'y' = 0$, $Sx'y' + Sxy'' = 0$ et par comparaison $Sx''y - Sxy'' = 0$, ce qui prouve bien que l'on a $S\lambda z'' = 0$.

Il s'agit maintenant de calculer la torsion de la courbe z : le carré de cette torsion se calcule d'abord sans difficulté: en effet, si s est l'arc de (z) , s_1 celui de (λ) , on a

$$S\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{1}{T^2}, \quad S\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \quad \frac{1}{T^2} = \frac{S(d\lambda)^2}{S(dz)^2} = \frac{S(x'-y')^2 \cos^2 \frac{d}{2}}{S(x'+y')^2 \sin^2 \frac{d}{2}}.$$

Or

$$Sx'^2 = Sy'^2 = 0, \quad Sx'y' \neq 0,$$

$$\frac{1}{T^2} = -\cot^2 \frac{d}{2}.$$

Cette formule n'est pas assez précise, puisqu'elle laisse l'ambiguïté entre les deux valeurs $i \cot \frac{d}{2}$ ou $-i \cot \frac{d}{2}$ pour $\frac{1}{T}$; mais il y a déjà un résultat important: *le procédé ne donne jamais une courbe de torsion constante égale à ± 1 (c'est-à-dire $\pm R$); il faudrait en effet écrire $\cot^2 \frac{d}{2} = -1$ et par suite $\cos d$, $\sin d$ seraient infinis.*

Liquidons le choix du signe: nous allons former le déterminant $z \alpha \xi \lambda$ où $\alpha = \frac{dz}{ds}$, $\xi = \frac{d\lambda}{ds_1}$; il faudra choisir les déterminations de α , ξ (ou de ds et ds_1), de sorte que le déterminant soit égal à $+1$ et non -1 .

On a, en utilisant les résultats de ce paragraphe et ceux du précédent

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 &= \frac{1}{4 \cos^2 \frac{d}{2}} S(x' + y')^2 = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{d}{2}} Sx'y' = \frac{\sin d}{2 \cos^2 \frac{d}{2}} \Sigma a'' x' \\ &= i \operatorname{tang} \frac{d}{2} (g'^2 - g''^2) Saa'' = i \operatorname{tang} \frac{d}{2} (g'' - g'^2), \\ \left(\frac{ds_1}{du}\right)^2 &= \frac{1}{4 \sin^2 \frac{d}{2}} S(x' - y')^2 = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{d}{2}} Sx'y' = -i \cot \frac{d}{2} (g'' - g'^2), \\ \alpha = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{du} \frac{du}{ds} &= \frac{x' + y'}{2 \cos \frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{i \operatorname{tang} \frac{d}{2} (g'' - g'^2)}} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2i \sin d (g'' - g'^2)}}, \\ \xi = \frac{d\lambda}{ds_1} = \frac{d\lambda}{du} \frac{du}{ds_1} &= \frac{x' - y'}{2 \sin \frac{d}{2}} \frac{1}{\sqrt{-i \cot \frac{d}{2} (g'' - g'^2)}} = \frac{x' - y'}{\sqrt{-2i \sin d (g'' - g'^2)}},\end{aligned}$$

Nous devons maintenant spécifier, non pas le sens séparé de chaque radical $\sqrt{2i \sin d (g'' - g'^2)}$, $\sqrt{-2i \sin d (g'' - g'^2)}$, mais la détermination du produit qui est $2\varepsilon \sin d (g'' - g'^2)$, où ε est soit $+1$ soit -1 (on sait qu'en effet on peut faire les échanges

$$\begin{array}{ccccc} s & s_1 & \alpha & \xi & \rho \\ -s & -s_1 & -\alpha & -\xi & -\rho. \end{array}$$

Notre question revient à trouver la valeur exacte de ε . On a

$$\begin{aligned}1 &= \left| \frac{x+y}{2 \cos \frac{d}{2}} \frac{x'+y'}{\sqrt{2i \sin d (g'' - g'^2)}} \frac{x'-y'}{\sqrt{2i \sin d (g'' - g'^2)}} \frac{x-y}{2 \sin \frac{d}{2}} \right| \\ &= \frac{1}{4\varepsilon \sin^2 d (g'' - g'^2)} |x+y, x'+y', x'-y', x-y|.\end{aligned}$$

On a évidemment

$$\begin{aligned}|x+y, x'+y', x'-y', x-y| &= |2x, 2x', -y', -y| = 4|x, x', y', y|, \\ |x, x', y', y| &= |x, i(g'^2 - g''^2)a, \sin d(a'' - 2ta'), a' \sin d| \\ &= i \sin^2 d (g'^2 - g''^2) |x, a, a'', a'|, \\ 1 &= -\varepsilon i |x, a, a'', a'|.\end{aligned}$$

Or

$$x = -i(2g'a + a' + be^g), \quad b_1 = u, \quad b_2 = -iu, \quad b_3 = -1, \quad b_4 = i,$$

donc on a

$$1 = -\varepsilon |b \ u \ u'' \ u'| e^g = -\frac{\varepsilon}{8} e^{-2g} |b \ \alpha \ \alpha'' \ \alpha'| = -\frac{\varepsilon}{8} e^{-2g} |\alpha \ \alpha' \ \alpha'' \ b|.$$

D'après les définitions de α et b l'on a

$$\begin{aligned} \alpha \ \alpha' \ \alpha'' \ b &= \begin{vmatrix} 1-uf & -f-ue^{2g} & -2e^{2g}-2ue^{2g}g' & u \\ i(1+uf) & i(f+ue^{2g}) & i(2e^{2g}+2ue^{2g}g') & -iu \\ u+f & 1+e^{2g} & 2e^{2g}g' & -1 \\ i(u-f) & i(1-e^{2g}) & -2ie^{2g}g' & i \end{vmatrix} \\ &= 2e^{2g} \begin{vmatrix} 1 & -f & -1 & u \\ i & if & i & -iu \\ u & 1 & 0 & -1 \\ iu & i & 0 & i \end{vmatrix} \\ &= 2e^{2g} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & i & 0 \\ iu & 1 & 0 & -1 \\ u & i & 0 & i \end{vmatrix} = 2e^{2g} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ i & 0 & i & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ iu & i & 0 & 2i \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant $|\alpha \alpha' \alpha'' b|$ est donc égal à $8e^{2g}$ et par conséquent l'on a $\varepsilon = -1$. (C'est d'ailleurs une vérification des calculs faits antérieurement, puisque ε ne peut valoir que $+1$ ou -1 .) On peut donc écrire

$$\begin{aligned} z &= \frac{x+y}{2 \cos \frac{d}{2}}, & \alpha &= \frac{x'+y'}{\sqrt{2i \sin d (g''-g'^2)}}, \\ \xi &= \frac{(x'-y') \sqrt{2i \sin d (g''-g'^2)}}{-2 \sin d (g''-g'^2)}, & \lambda &= \frac{x-y}{2 \sin \frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

On a

$$d\lambda = \xi ds_1 = \xi \frac{ds}{T}, \quad T = \frac{ds}{ds_1}.$$

On a calculé

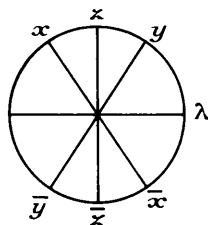
$$\begin{aligned} ds &= \frac{dz}{\alpha} = \frac{\sqrt{2i \sin d (g''-g'^2)}}{2 \cos \frac{d}{2}} du, \\ ds_1 &= \frac{d\lambda}{\xi} = \frac{-\sin d (g''-g'^2)}{\sin \frac{d}{2} \sqrt{2i \sin d (g''-g'^2)}} du, \end{aligned}$$

par suite,

$$T = \frac{ds}{ds_1} = -i \operatorname{tang} \frac{d}{2}.$$

Nous avons ainsi levé l'ambiguïté du signe, d'autre part nous constatons bien la symétrie qui doit exister entre (z) et (λ) ; la distance $(z\lambda)$ vaut $\frac{\pi}{2}$; $(zx) = (zy) = \frac{d}{2}$; $(\lambda y) = \frac{\pi}{2} - \frac{d}{2}$; si l'on prend $\bar{x} = -(x)$, la distance $(\lambda \bar{x})$ est égale à $\frac{\pi}{2} - \frac{d}{2}$, de sorte que λ est le milieu de la distance $(y\bar{x})$: ici nous avons considéré comme distinctes deux courbes x et $\bar{x}$, ou y et $\bar{y}$, z et $\bar{z}$.

Fig. 1.



D'autre part, si nous prenons des courbes minima (y) transformées d'une même courbe minima (x) avec le même module d , toutes les courbes à torsion constante $\left(\frac{x+y}{2 \cos \frac{d}{2}}\right)$ ont même longueur d'arc

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = i \operatorname{tang} \frac{d}{2} (g'' - g'^2);$$

toutes les courbes à torsion constante $\left(\frac{x-y}{2 \sin \frac{d}{2}}\right)$ ont la même longueur d'arc $\left(\frac{ds_1}{du}\right)^2 = -i \cot g \frac{d}{2} (g'' - g'^2).$

CHAPITRE III.

COURBES DE BERTRAND ET COURBES MINIMA.

1. COURBES MINIMA ATTACHÉES AUX COURBES DE BERTRAND. — Rappelons la relation caractéristique d'une courbe de Bertrand B : d et θ sont des angles constants, $\Theta = \cot \theta$, $D = \cot d$

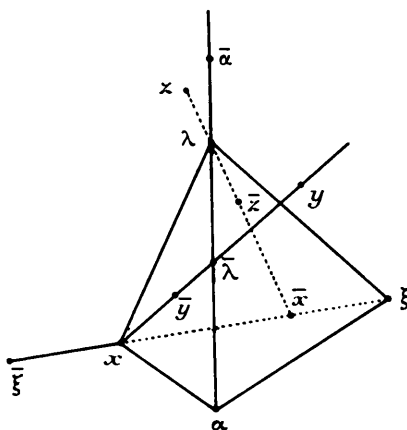
$$(1) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{\Theta}{T} = D.$$

On a pour la courbe de Bertrand $\bar{B}$ associée

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x} = x \cos d + \xi \sin d, & \bar{\xi} = x \sin d - \xi \cos d, \\ \bar{\alpha} = -\alpha \cos \theta - \lambda \sin \theta, & \bar{\lambda} = \lambda \cos \theta - \alpha \sin \theta. \end{cases}$$

(La figure 2 est schématique.)

Fig. 2.



Sur la droite $x\bar{\lambda}$ nous prenons un point caractérisé par la cons-

tante δ

$$(3) \quad \begin{cases} y = x \operatorname{ch} \delta + i \bar{\lambda} \operatorname{sh} \delta = x \operatorname{ch} \delta + i(-\alpha \sin \theta + \lambda \cos \theta) \operatorname{sh} \delta, \\ \bar{y} = x \operatorname{ch} \delta - i \bar{\lambda} \operatorname{sh} \delta = x \operatorname{ch} \delta - i(-\alpha \sin \theta + \lambda \cos \theta) \operatorname{sh} \delta. \end{cases}$$

Le point x est le milieu de la distance, $y, \bar{y}$; la distance (xy) ou $(x\bar{y})$ est égale à $i\delta$. On calcule aisément y' ou $\bar{y}'$ (dérivées prises par rapport à l'arc s) en tenant compte de la relation (1) on a ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} y' = \alpha \operatorname{ch} \delta + i \operatorname{sh} \delta \left[x \sin \theta - \zeta \sin \theta \frac{\cos d}{\sin d} \right], \\ S y'^2 = \operatorname{ch}^2 \delta - \frac{\operatorname{sh}^2 \delta \sin^2 \theta}{\sin^2 d} = S \bar{y}'^2. \end{cases}$$

Prenons

$$(5) \quad \operatorname{th} \delta = \frac{\sin d}{\sin \theta}.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que y et $\bar{y}$ décrivent deux courbes minima. La droite $x\bar{\lambda}$ est la perpendiculaire, au sens elliptique, abaissée de x sur le plan osculateur de $\bar{B}$. On a, pour la même raison, les deux courbes minima

$$(6) \quad z = \bar{x} \operatorname{ch} \delta + i \bar{\lambda} \operatorname{sh} \delta, \quad \bar{z} = \bar{x} \operatorname{ch} \delta - i \bar{\lambda} \operatorname{sh} \delta.$$

Nous posons

$$(7) \quad \begin{cases} a = \frac{y'}{\operatorname{ch} \delta} = \alpha + i(x \sin d - \zeta \cos d) = \alpha + i \bar{\zeta}, \\ \bar{a} = \frac{\bar{y}'}{\operatorname{ch} \delta} = \alpha - i(x \sin d - \zeta \cos d) = \alpha - i \bar{\zeta}. \end{cases}$$

On a

$$(8) \quad S a \bar{x} = 0, \quad S a \bar{\lambda} = 0, \quad S \bar{a} x = 0, \quad S \bar{a} \lambda = 0,$$

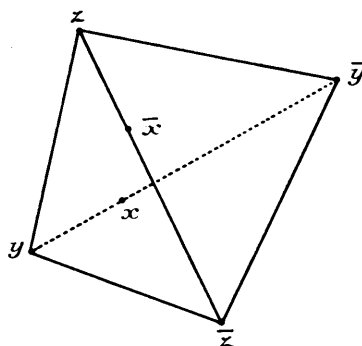
car cela revient à écrire

$$S \alpha \bar{x} = 0, \quad S \bar{x} \bar{\zeta} = 0, \quad S \alpha \bar{\lambda} = 0, \quad S \bar{\zeta} \bar{\lambda} = 0;$$

donc le plan osculateur de y ou $\bar{y}$ contient la droite $\lambda \bar{x}$ et par suite les points z et $\bar{z}$; on voit que dans le parallélogramme gauche $yz\bar{y}\bar{z}$

(fig. 3) chaque sommet décrit une courbe minima transformée asymptotique de celles qui sont décrites par les sommets contigus; ce

Fig. 3.



parallélogramme gauche reste indéformable quand la valeur de S varie. On a, en effet,

$$(9) \quad \begin{cases} S_{yz} = S_{\bar{y}\bar{z}} = \cos d \operatorname{ch}^2 \delta - \cos \theta \operatorname{sh}^2 \delta, \\ S_{y\bar{z}} = S_{\bar{y}z} = \cos d \operatorname{ch}^2 \delta + \cos \theta \operatorname{sh}^2 \delta. \end{cases}$$

En tenant compte des relations

$$(10) \quad \frac{\operatorname{ch}^2 \delta}{\sin^2 \theta} = \frac{\operatorname{sh}^2 \delta}{\sin^2 d} = \frac{1}{\sin^2 \theta - \sin^2 d}$$

(qui supposent $\sin \theta \pm \sin d \neq 0$), on peut écrire

$$(11) \quad \begin{cases} S_{yz} = S_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{\cos d \sin^2 \theta - \cos \theta \sin^2 d}{\sin^2 \theta - \sin^2 d} = \frac{1 + \cos d \cos \theta}{\cos d + \cos \theta} = \cos 2l, \\ S_{y\bar{z}} = S_{\bar{y}z} = \frac{\cos d \sin^2 \theta + \cos \theta \sin^2 d}{\sin^2 \theta - \sin^2 d} = \frac{1 - \cos d \cos \theta}{\cos d - \cos \theta} = \cos 2\bar{l}, \\ S_{y\bar{y}} = \operatorname{ch} 2\delta = \frac{\sin^2 \theta + \sin^2 d}{\sin^2 \theta - \sin^2 d} = S_{z\bar{z}}. \end{cases}$$

Ces formules suggèrent aussitôt de calculer $1 + \cos 2l$, $1 - \cos 2l$ et $1 + \cos 2\bar{l}$, $1 - \cos 2\bar{l}$, on trouve ainsi les résultats simples

$$(12) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}^2 l = -\operatorname{tang}^2 \frac{d}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2}, \\ \operatorname{tang}^2 \bar{l} = -\operatorname{tang}^2 \frac{d}{2} \cot^2 \frac{\theta}{2}. \end{cases}$$

Le milieu de (yz) ou $(\bar{y}\bar{z})$ décrit une courbe à torsion constante, d'après ce qui a été expliqué au chapitre précédent, et les deux courbes ainsi obtenues ont la même torsion; d'ailleurs, prenons sur la droite réunissant le milieu $\left(\frac{y+z}{2\cos l}\right)$ de (y, z) au milieu $\left(\frac{\bar{y}+\bar{z}}{2\cos \bar{l}}\right)$ de $(\bar{y}, \bar{z})$ un point $h(y+z) + k(\bar{y}+\bar{z})$ et exprimons qu'il est à la distance $\frac{\pi}{2}$ de y : on trouve $h(1 + Syz) + k(Sy\bar{y} + Sy\bar{z}) = 0$; si l'on avait exprimé qu'il est à la distance $\frac{\pi}{2}$ de z , on aurait trouvé

$$h(Syz + 1) + k(S\bar{y}z + S\bar{z}z) = 0,$$

ce qui est l'équation déjà obtenue : par conséquent la droite joignant les deux milieux est perpendiculaire à (yz) et aussi à $\bar{y}\bar{z}$, et les deux courbes de torsion constante en jeu sont en transformation asymptotique (car la droite yz est binormale de la première, la droite $\bar{y}\bar{z}$ binormale de la seconde). Calculons maintenant la distance $2d$, des deux points $\frac{y+z}{2\cos l}$ et $\frac{\bar{y}+\bar{z}}{2\cos \bar{l}}$; on a

$$\begin{aligned} \cos 2d_1 &= \frac{(Sy\bar{y} + S\bar{z}z) + (S\bar{y}z + Sy\bar{z})}{4\cos^2 l} \\ &= \frac{\cos 2\theta + \cos 2l}{1 + \cos 2l} = \frac{\sin^2 \theta + \sin^2 d + \cos d \sin^2 \theta + \cos \theta \sin^2 d}{\sin^2 \theta (1 + \cos d) - \sin^2 d (1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin^2 d}{1 + \cos d}}{\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin^2 d}{1 + \cos d}} = \frac{2 - \cos d - \cos \theta}{\cos d - \cos \theta}. \end{aligned}$$

On calcule de même la distance $2\bar{d}_1$ des milieux $\frac{y+z}{2\cos l}$ et $\frac{\bar{y}+\bar{z}}{2\cos \bar{l}}$; le calcul est le même que précédemment : on s'aperçoit qu'il suffit de remplacer partout $\cos \theta$ par $(-\cos \theta)$; on a ainsi

$$\cos 2\bar{d}_1 = \frac{2 - \cos d + \cos \theta}{\cos d + \cos \theta}.$$

Les résultats trouvés suggèrent de former les expressions $1 \pm \cos 2d_1$

et $1 \pm \cos 2\bar{l}$; on trouve ainsi

$$(13) \quad \operatorname{tang}^2 d_1 = \frac{-\sin^2 \frac{d}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \operatorname{tang}^2 \bar{d}_1 = \frac{-\sin^2 \frac{d}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Nous voyons que les quantités $\operatorname{tang} d_1$, $\operatorname{tang} \bar{d}_1$, $\operatorname{tang} l$, $\operatorname{tang} \bar{l}$ l'obtiennent *rationnellement* et qu'une question délicate est de préciser le signe à prendre : nous devons d'ailleurs remarquer que, jusqu'ici, les quantités d_1 , $\bar{d}_1$, l , $\bar{l}$ n'ont été introduites que par leur cosinus et par suite *définies au signe près* : choisir le signe de leur tangente revient à *orienter ces quantités*; or les deux courbes minima (γ) , (z) sont telles que la distance constante γz est égale à $\pm 2l$; si nous nous reportons à la fin du Chapitre II, on voit que le rayon de torsion de la courbe décrite par le milieu du segment γz doit être égal, avec l'orientation adoptée au Chapitre II, à $-i \operatorname{tang} l$, et cette remarque permettrait de fixer la détermination précise de $\operatorname{tang} l$ puisque $i \operatorname{tang} l$ ne peut avoir que l'une des deux valeurs $\pm \operatorname{tang} \frac{d}{2} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$; comme on a supposé $\sin d \pm \sin \theta \neq 0$, on voit que ce nombre ne peut être égal à ± 1 , en tout cas que ce nombre est *réel* : cela tient à ce que les deux courbes, de torsion constante, engendrées par le milieu de γz et le milieu de $\bar{\gamma} \bar{z}$ sont imaginaires conjuguées d'une part et de l'autre qu'elles sont à même torsion et transformées asymptotiques l'une de l'autre; même remarque pour la quantité $\bar{l}$; les deux courbes engendrées par le milieu de $\gamma \bar{z}$ ou de $\bar{\gamma} z$ ont leur rayon de torsion égal à $-i \operatorname{tang} \bar{l}$, ou $\pm \operatorname{tang} \frac{d}{2} \cot \frac{\theta}{2}$; on remarquera que, le signe de l ayant été fixé, comme $\bar{l}$ n'est déterminé qu'à π près; le signe de $\cos l$ reste indéterminé et, en effet, les coordonnées $\frac{\gamma + z}{2 \cos l}$ du milieu du segment (γz) peuvent être changées de signe : ces coordonnées sont égales à

$$\left[\frac{x \operatorname{ch} \delta (1 + \cos d) - i \alpha \sin \theta \operatorname{sh} \delta + \zeta \sin d \operatorname{ch} \delta + i \operatorname{sh} \delta (1 + \cos \theta) \operatorname{sh} \delta}{2} \right] \\ \times \sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{d}{2} \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2}}.$$

On voit ainsi que le calcul du rayon de torsion précis implique un calcul assez long, que nous ne ferons pas.

Nous ferons remarquer d'autre part que, au lieu d'associer les deux points $\frac{\gamma+z}{2 \cos l}, \frac{\bar{\gamma}+\bar{z}}{2 \cos \bar{l}}$, nous aurions pu associer les deux points $\frac{\gamma-z}{2 \sin l}, \frac{\bar{\gamma}-\bar{z}}{2 \sin \bar{l}}$ qui décrivent les courbes réciproques par rapport à l'absolu des courbes à torsion constante précédentes; ces deux courbes sont, elles aussi, transformées asymptotiques l'une de l'autre.

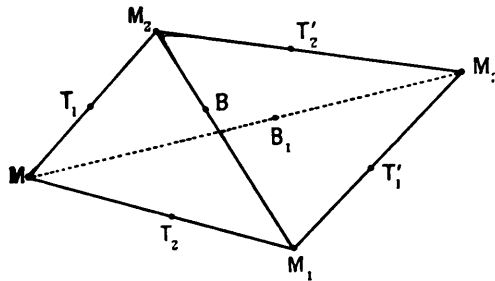
Nous pouvons maintenant faire une remarque : le couple de Bertrand $(x), (\bar{x})$ nous a fait découvrir ce système remarquable de quatre courbes minima $(\gamma), (z), (\bar{\gamma}), (\bar{z})$, qu'aurait donné le couple de Bertrand $(\lambda), (\bar{\lambda})$ formés des réciproques du premier couple par rapport à l'absolu : la droite $(x\bar{\lambda})$ aurait été remplacée par la droite $(\lambda\bar{x})$, et inversement, de sorte que nous retrouvons le même système de courbes minima.

2. CONSTRUCTION DE LA COURBE GÉNÉRALE DE BERTRAND AU MOYEN D'UNE COURBE MINIMA ET DE DEUX TRANSFORMÉES ASYMPTOTIQUES. — La réciproque est facile à démontrer : *donnons-nous une courbe minima (M) , puis deux transformées asymptotiques $(M_1), (M_2)$ de (M) , minima elles aussi : le milieu du segment (M, M_2) décrit une courbe (B) de Bertrand; le théorème de permutabilité de Bianchi permet d'obtenir, rationnellement en tenant compte du fait que M_3 doit être minima elle aussi, une quatrième courbe M_3 , transformée asymptotique simultanément de M_1 et M_2 ; le milieu de MM_3 décrit la courbe de Bertrand (B_1) complétant avec B le couple de deux courbes de Bertrand associées. Les milieux de MM_1, M_2M_3 décrivent deux courbes de torsion constante transformées asymptotiques l'une de l'autre; il en est de même pour les milieux de M_1M_3 et MM_2 .*

On peut démontrer directement ces propositions, en suivant la marche qui a été suivie au chapitre précédent (§ 2 et 3); mais on peut remarquer que ce calcul est inutile; car un couple de Bertrand est parfaitement déterminé d'une façon intrinsèque, par la donnée de ρ en fonction de s pour la première courbe et des constantes d, θ , qui permettent de calculer le rayon de torsion T ; la courbe de Bertrand en jeu fournit alors le système des quatre courbes minima

$MM_1M_2M_3$, et l'on a dû faire intervenir une fonction arbitraire d'un argument [la fonction $\rho(s)$] et deux constantes arbitraires (d, θ). Si nous partons d'une courbe minima (M), nous devons donner la fonction $v=f(u)$, du paragraphe 1 du chapitre précédent, pour obtenir (M); nous choisissons ensuite une constante $2l$ (appelée d au chapitre précédent) qui est la distance constante MM_1 et l'intégration d'une équation de Riccati fournit, $2l$ étant donnée, la courbe (M_1); on choisit de même une constante $2\bar{l}$ (distincte de $2l$) et l'on obtient, par une autre équation de Riccati la courbe (M_2); cela posé le point M_3 s'obtient, *rationnellement*, comme point commun à trois plans isotropes qui sont (*fig. 4*) les plans osculateurs en M ,

Fig. 4.



ou M_2 à (M_1) ou (M_2) et le plan isotrope (autre que M_1M_2M) issu de M_1M_2 ; cette construction a fait intervenir une fonction arbitraire d'un argument [$v=f(u)$], et quatre constantes arbitraires, les constantes $l, \bar{l}$ et les deux constantes introduites par le choix d'une intégrale de chaque équation de Riccati.

Dans les deux méthodes on a donc eu, finalement, à introduire une infinité dénombrable de constantes arbitraires; d'autre part, si l'on opère par l'une des méthodes, elle fournit, une fois la solution trouvée, les constantes initiales nécessaires pour mettre l'autre méthode en route, de sorte que nous arrivons finalement à des résultats identiques en partant par l'une ou l'autre voie, à condition de choisir à bon escient les valeurs initiales.

On peut remarquer que le tétraèdre $MM_1M_2M_3$ reste égal à lui-même au cours du déplacement de l'un des sommets M sur la courbe minima (M) correspondante.

On remarque aussi que le problème de la transformation asymptotique d'une courbe T_1 de torsion constante (différente de l'unité en valeur absolue) est résolu aussi par le même procédé : sur la binormale de T_1 il y a deux points M, M_2 qui décrivent chacun une courbe minima : la distance $T_1 M$ ou $T_1 M_2$ est constante (en effet, si l'on pose $T_1 M = l$, on a $\text{tang} l = \pm i T$ où T est le rayon de torsion de la courbe T_1); il suffit alors de trouver une transformée asymptotique de (M) , soit (M_1) , qui soit minima et corresponde à l'équation de Riccati relative à la constante arbitraire $\bar{l}$ (distincte de l) pour reconstituer la figure 4; comme vérification on a bien deux constantes arbitraires pour passer de T_1 à T'_1 (§ 4 du Chapitre I) : la constante $\bar{l}$, puis la constante d'intégration.

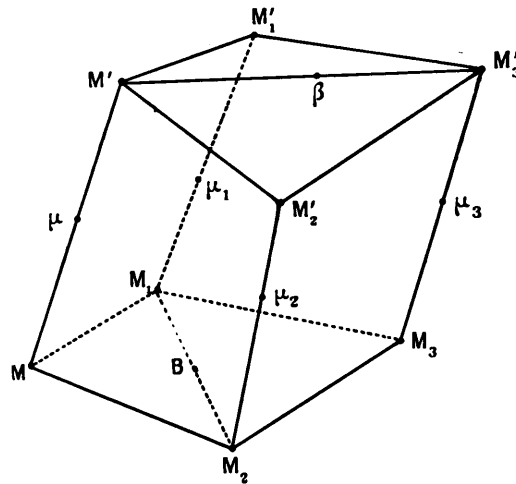
Nous remarquons que ces résultats généralisent scrupuleusement tous ceux que M. Gambier a obtenus dans son traité sur les courbes de Bertrand de l'espace euclidien; il y a simplement cette différence que sur l'arête MM_2 on peut, outre le point T_1 , considérer celui $\bar{T}_1$ qui est à la distance $\frac{\pi}{2}$ de T_1 et engendre la courbe réciproque de $\langle T_1 \rangle$; d'ailleurs, suivant que l'on considère comme distincts ou non deux points (x_1, x_2, x_3, x_4) et $(-x_1, -x_2, -x_3, -x_4)$ dont la distance est π , on peut considérer sur l'arête MM_2 soit deux points seulement T_1 et $\bar{T}_1$, soit quatre points $T_1, \bar{T}_1, -\bar{T}_1, -T_1$ à la distance $\frac{\pi}{2}$ l'un de l'autre. La seule précaution à prendre est de bien associer les points T_1 et $T'_1, \bar{T}_1$ et $\bar{T}'_1$ sur les arêtes opposées $MM_2, M_1 M_3$; on y arrive en remarquant que T_1, T'_1 est perpendiculaire à MM_2 , tandis que $T_1, \bar{T}_1$ ne l'est pas.

3. TRANSFORMATION SPÉCIALE AUX COURBES DE BERTRAND. — Nous avons maintenant le moyen de définir les transformations des courbes de Bertrand de l'espace elliptique, tout comme Sophus Lie l'a fait, dans l'espace euclidien, pour les courbes à torsion constante, puis comme Demartres, Bianchi et Razzaboni l'ont étendu aux courbes de Bertrand de l'espace euclidien.

Nous choisissons une nouvelle constante l' distincte de l et $\bar{l}$ et greffons, sur la figure 4 précédente, reproduite en figure 5, une

nouvelle transformée asymptotique minima (M') de la courbe (M), avec la constante $2l'$. La règle indiquée (au moyen de trois plans isotropes) ferme les parallélogrammes gauches $MM_1M'_1M'_2$; $MM_2M'_2M'_3$; puis $M'M'_1M'_2$ conduisent au parallélogramme $M'M'_1M'_3M'_2$; on a ainsi huit sommets donnant une configuration de Möbius et formant une figure indéformable quand le point M décrit la courbe minima (M);

Fig. 5.



les deux parallélogrammes gauches $MM_1M_3M_2$ et $M'M'_1M'_3M'_2$ relatifs à la combinaison $(l, \bar{l})$ peuvent être dits *opposés*; ils sont égaux d'ailleurs, ainsi que les tétraèdres dont ils sont les sommets : cela résulte des relations

$$\tan^2 l = -\tan^2 \frac{d}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2}, \quad \tan^2 \bar{l} = -\tan^2 \frac{d}{2} \cot^2 \frac{\theta}{2}, \quad \text{Th } \delta = \frac{\sin d}{\sin \theta},$$

que nous avons obtenues entre les distances $MM_1 = 2l$, $MM_2 = 2\bar{l}$, $M_1M_2 = MM_3 = 2i\delta$.

Les points pairs dans la configuration de Möbius que nous étudions sont, par exemple, M, M'_1, M'_2, M_3 et les points impairs M_1, M_2, M', M'_3 . Le tétraèdre $M_1M_2M'M'_3$ est lui aussi invariable et à arêtes opposées égales; les faces sont isotropes (tangentes à l'absolu) : ce sont en effet les plans osculateurs en M, M'_1, M'_2, M_3 sommets pairs; ces

sommets pairs forment un tétraèdre égal au précédent, indéformable aussi, qui lui est à la fois inscrit et circonscrit. La droite $B\beta$, où β est le milieu de $M'M'_3$, est donc de longueur constante et perpendiculaire à la fois sur M_1M_2 et $M'M'_3$; si β_1 est le milieu de $M'_1M'_2$, (β) et (β_1) décrivent deux courbes de Bertrand associées donnant lieu à la même relation caractéristique que (B) et (B_1) : la droite M_1M_2 est parallèle à la binormale de (B_1) et $M'M'_3$ à celle de (β_1) ; donc les plans osculateurs à (B_1) et (β_1) en B_1 et β_1 respectivement se coupent suivant $B\beta$ et forment entre eux un angle constant; pour la même raison les plans osculateurs à (B) et (β) en B et β se coupent suivant $B_1\beta_1$ et forment un angle constant, le même que précédemment. On peut énoncer ainsi la *transformation que nous avons découverte pour les courbes de Bertrand* :

Du point B comme centre, dans le plan osculateur à (B_1) au point B_1 , on trace un cercle de rayon constant, d'ailleurs arbitraire, et, sur la surface cerclée ainsi obtenue, on trouve, par une équation de Riccati, ∞^1 courbes de Bertrand (β) , telles que, inversement, (B) se déduise de β par le même procédé, c'est-à-dire que la droite $B\beta$ soit l'intersection des plans osculateurs en B_1 et β_1 aux courbes associées (B_1) et (β_1) .

De la courbe (B) on déduit ∞^2 courbes de Bertrand contiguës : l'une des constantes arbitraires est l' , l'autre est la constante arbitraire fournie par l'intégration de l'équation de Riccati qui donne (M') une fois l' donnée.

On peut remarquer que la figure 5 a explicité 8 courbes minima, 12 courbes de Bertrand, 12 courbes à torsion constante : les 12 arêtes ont livré chacune une courbe à torsion constante explicitée par nous (mais nous avons fait remarquer que chaque arête livre une nouvelle courbe à torsion constante, qui est la réciproque de la courbe explicitée). De même chaque parallélogramme gauche tel que $MM_2M_3M_1$ (il y en a 6) a livré deux courbes de Bertrand associées B et B_1 ; mais il est facile de voir que ce parallélogramme gauche livre aussi les courbes réciproques de celles-là. Il suffit en effet de se reporter aux formules (3) du paragraphe 1 de ce chapitre : on a

$$x = \frac{\gamma + \bar{\gamma}}{2 \operatorname{ch} \delta}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{2 i \operatorname{sh} \delta},$$

ce qui exprime que, les deux points y et $\bar{y}$ ayant pour distance $2i\delta$ et milieu x , on peut considérer y et $(-\bar{y})$, c'est-à-dire les mêmes points si l'on ne distingue pas $\bar{y}$ et $(-\bar{y})$, comme situés à la distance $\pi - 2i\delta$ et pour milieu $\bar{\lambda}$; ici c'est l'ensemble M_1, M_2 qui remplace $y, \bar{y}$ de sorte que la droite $M_1 M_2$ porte le point B et, à la distance $\pm \pi_2$ de B , le point $\bar{B}$, qui décrit la courbe réciproque de (B_1) . La figure 5 permettrait donc de mettre aussi en évidence les 12 courbes réciproques des courbes de Bertrand déjà explicitées. C'est cette propriété qui est nouvelle par rapport à celles qui ont déjà été données comme généralisant pas à pas celles de l'espace euclidien; cela tient à ce qu'une droite de l'espace elliptique est une courbe fermée, analogue au cercle de l'espace euclidien (sur cette courbe fermée nous n'avons pas distingué l'un de l'autre deux points diamétralement opposés) et qu'un segment a deux milieux (de même qu'en géométrie euclidienne deux droites illimitées sécantes ont deux bissectrices).

La transformation que nous avons ainsi définie pour les courbes de Bertrand permet d'offrir un théorème de permutabilité; cela tient à ce que nous pourrions rattacher cette transformation aux transformations asymptotiques des courbes minima en courbes minima. C'est là le mérite du procédé, découvert par M. Gambier, pour décomposer une telle transformation en une composition de deux transformations essentiellement imaginaires.

Les transformations asymptotiques des courbes à torsion constante se trouvent étudiées par le même procédé.

La seule difficulté qui se présente dans ce procédé est d'étudier les transformées *réelles* des courbes de Bertrand *réelles* ou des courbes à torsion constante *réelles*.

