JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARC KRASNER

Une généralisation de la notion de corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 367-385.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_367_0>

Une généralisation de la notion de corps;

PAR MARC **KRASNER**.

Le but du présent travail est une très large généralisation abstraite de la notion du corps et la construction de la théorie de Galois pour les corps ainsi généralisés. Par son caractère ce travail tient à la fois de la théorie des ensembles et de l'algèbre. Ne disposant que d'une place très limitée, je me borne à démontrer un petit nombre des théorèmes fondamentaux. Je compte publier plus tard un exposé plus détaillé.

Je suis heureux de pouvoir faire hommage de ce travail à M. Hadamard à l'occasion de son jubilé scientifique : M. Hadamard s'était, en effet, toujours intéressé aux questions de fondements des mathématiques, comme le témoigne son échange de lettres sur les fondements de la théorie des ensembles avec MM. Borel et Lebesgue. Et il a bien voulu accorder un grand intérêt au présent travail.

1. REMARQUES ET CONVENTIONS PRÉLIMINAIRES. — Au cours de ce travail la puissance d'un ensemble U sera notée pU; on emploiera l'abréviation *dim.* pour dire *dimension*; P étant une transformation, le transformé par P d'un objet u sera noté Pu; a accompagné des signes (par exemple $\bar{a}$, $a^\star$, λa, ...) désignant un objet défini d'une certaine manière à partir d'un objet a, et A étant un ensemble d'objets a pour lesquels cette définition a un sens, A accompagné de mêmes signes (c'est-à-dire, resp. $\bar{A}$, $A^\star$, λA) désignera l'ensemble de tous les resp. $\bar{a}$, $a^\star$, λa, ... distincts pour $a \in A$. On admettra l'axiome de libre choix de Zermelo.

Faisons correspondre une fois pour toutes :

a. A chaque nombre cardinal Ω (¹) un ensemble U_Ω de puissance Ω;

b. A chaque sous-ensemble W de tout U_Ω une équivalence ε_W de W à U_{pW} (²);

c. A chaque relation classifiante Γ dans un U_Ω quelconque une équivalence $\mathcal{E}_\Gamma$ de l'ensemble ζ_Γ de classes suivant Γ dans U_Ω à $U_{p\zeta_\Gamma}$ (³).

2. Points. Relations. Opérations fondamentales. — Considérons un ensemble E. Toute correspondance univoque $P = \{u \to e_u\}_{u \in U_\Omega}$ des $u \in U_\Omega$ aux $e_u \in E$, c'est-à-dire toute fonction définie dans U_Ω dont les valeurs sont dans E, s'appellera *point de dim.* Ω *engendré par* E. Quand on parlera de points, il sera sous-entendu, sauf mention expresse, qu'ils sont engendrés par E.

Le point P sera dit *semi-normal* s'il est une correspondance *biunivoque* entre U_Ω et $E_P = \{Pu\}_{u \in U_\Omega}$. Il sera dit *normal* si, de plus, $E_P = E$.

Une proposition logique r concernant les points de dim. Ω (engendrés par E) s'appellera *relation de dim.* Ω *dans* E. $r(P) = o^*$ ou $r(P) \neq o^*$ signifieront que resp. r est vraie ou fausse pour P(⁴). L'ensemble de tous les points pour lesquels r est vraie sera noté $\mathcal{D}(r)$.

Soient E_Ω l'ensemble de tous les points de dim. Ω et O l'ensemble vide. I_Ω et O_Ω seront des relations telles que $\mathcal{D}(I_\Omega) = E_\Omega$, $\mathcal{D}(O_\Omega) = O$.

La relation $\bar{r}$ telle que $\mathcal{D}(\bar{r}) \cap \mathcal{D}(r) = O$, $\mathcal{D}(\bar{r}) \cup \mathcal{D}(r) = E_\Omega$ (où $\Omega = \text{dim. } r$) s'appelle *anti-r*. $\mathcal{R}$ étant un ensemble des relations d'une même dim., relation $[\mathcal{R}]$ telle que $\mathcal{D}([\mathcal{R}]) = \bigcap_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{D}(r)$ s'appelle *le plus grand commun diviseur* (p. g. c. d.) des $r \in \mathcal{R}$. La relation $(\mathcal{R})$ telle que $\mathcal{D}((\mathcal{R})) = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{D}(r)$ s'appelle *le plus petit commun multiple* (p. p. c. m.) des $r \in \mathcal{R}$. On a $(\mathcal{R}) = \overline{[\overline{\mathcal{R}}]}$.

(¹) Au sens de Georg Cantor.

(²) Si $W = U_\Omega$, on prendra pour ε_W l'identité.

(³) Si toute classe suivant Γ contient un seul élément on prendra pour $\mathcal{E}_\Gamma$ l'identité.

(⁴) On écrit $r(P) = o^*$ et non $r(P) = o$ pour ne pas exclure les cas où le nombre o est élément de E.

Si $[r_1, r_2] = O_\Omega$, r_1, r_2 seront dites *premières entre elles*. Si toutes les $r \in \mathcal{R}$ sont premières entre elles deux à deux, $(\mathcal{R})$ s'appelle encore *produit* des $r \in \mathcal{R}$ et se note $\prod_{r \in \mathcal{R}} (r)$.

Soit λ une permutation de U_Ω. (Le groupe de toutes les permutations de U_Ω sera noté Λ_Ω. Λ'_Ω notera le même ensemble sans la permutation identique.) P étant un point de dim. Ω, λP désignera le point $\{\lambda u \to P u\}_{u \in U_\Omega}$. r étant une relation de dim. Ω, λr sera la relation telle que $\mathcal{D}(\lambda r) = \lambda \mathcal{D}(r)$. λP, λr s'appelleront *transformés de* resp. P, r *par* λ.

$\lambda^\star$ notera la relation telle que $\lambda^\star(P) = o^\star$ équivaut à $\lambda P = P$.

Soient P un point de dim. Ω et $W \subseteq U_\Omega$. On pose

$$P_W = \{\varepsilon_W u \to P u\}_{u \in W}.$$

r étant une relation de dim. Ω, r_W sera définie par la condition $\mathcal{D}(r_W) = (\mathcal{D}(r))_W$. P_W, r_W s'appelleront *projections de* resp. P, r *par* W.

Soit P un point de dim. pW, $W \subseteq U_\Omega$. L'ensemble de tous les P' tels que $P'_W = P$ sera noté $P^{(W)}$. r étant une relation de dim. pW, $r^{(W)}$ sera la relation telle que $\mathcal{D}(r^{(W)}) = (\mathcal{D}(r))^{(W)}$. $P^{(W)}$, $r^{(W)}$ seront appelés *prolongement de* resp. P, r *par* W. Si $r = (r_W)^{(W)}$, r sera dite *identique* par rapport à $U_\Omega - W$ ($\Omega = \dim. r$).

Les opérations $^-$, $[\ \ ]$, λ, $_W$, $^{(W)}$ seront appelées *opérations fondamentales*.

3. Réduites d'une relation. — Soit Γ la relation classifiante dans U_Ω telle que $u_1 \equiv u_2(\Gamma)$ si, et seulement si pour tout $P \in \mathcal{D}(r)$ on a $P u_1 = P u_2$. C étant la classe suivant Γ d'un $u \in U_\Omega$, posons pour tout $P \in \mathcal{D}(r)$, $P_* C = P u$. Posons $P_\Gamma = \{\mathcal{E}_\Gamma C \to P_* C\}_{C \in \zeta_\Gamma}$. La relation $r^\cdot$ telle que $\mathcal{D}(r^\cdot) = (\mathcal{D}(r))_\Gamma$ s'appellera *la première réduite de r*.

Si $W \subseteq U_\Omega$ a un et un seul élément commun u_C avec chaque $C \in \zeta_\Gamma$, et si $\lambda = \{\varepsilon_W u_C \to \mathcal{E}_\Gamma C\}_{C \in \zeta_\Gamma}$ (donc $\lambda \in \Lambda_{p\zeta_\Gamma} = \Lambda_{pW}$), on a $r^\cdot = \lambda r_W$. Si L est un sous-groupe de Λ_Ω dont les systèmes d'intransitivité sont les classes suivant Γ, on a $r = [(\lambda^{-1} r^\cdot)^{(W)}, [L^\star]]$.

On notera r^+ et l'on appellera *la deuxième réduite de r* la relation telle que $\mathcal{O}(r^+)$ soit l'ensemble de tous les $P \in \mathcal{O}(r^\cdot)$ semi-normaux. On a $r^+ = \left[r, [\overline{\Lambda'^\star}]\right]$ et $r^\cdot = \left(r^+, \left(\{[r^\cdot, \lambda^\star]\}_{\lambda \in \Lambda'_\Omega}\right)\right)$, où $\Omega = \dim. r^\cdot$.

4. Fermeture logique. — Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de relations et soit Ω_0 un nombre cardinal $\geqq pE$ et $\geqq$ borne sup. dim. r (ce borne sup. sera $r \in \mathcal{R}$ appelé dim. $\mathcal{R}$). $\mathcal{R}$ sera dit *logiquement fermé au-dessous de* Ω_0, s'il satisfait aux conditions suivantes :

a. Si $r \in \mathcal{R}(\dim. r = \Omega)$, $\bar{r}$, tous les $\lambda r (\lambda \in \Lambda_\Omega)$, tous les $r^{\mathrm{w}}(\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}_\Omega)$ sont $\in \mathcal{R}$;

b. Si ρ est un ensemble de $r \in \mathcal{R}$ d'une même dimension, $[\rho] \in \mathcal{R}$;

c. $\Lambda^\star_\Omega \subset \mathcal{R}$ pour tout $\Omega \leqq \Omega_0$;

d. Si $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{U}_\Omega$, où $\Omega \leqq \Omega_0$, et si $r \in \mathcal{R}$ est de dim. $p\mathrm{W}$, $r^{(\mathrm{W})} \in \mathcal{R}$.

On voit que si $\mathcal{R}$ est logiquement fermé au-dessous de Ω_0 : *a*. ρ étant un ensemble de $r \in \mathcal{R}$ d'une même dimension, $(\rho) \in \mathcal{R}$; *b*. si $r \in \mathcal{R}$, aussi $r^\cdot \in \mathcal{R}$ et $r^+ \in \mathcal{R}$; si $r^\cdot \in \mathcal{R}$, aussi $r \in \mathcal{R}$. L'intersection des ensembles logiquement fermés au-dessous de Ω_0 l'est elle-même.

Quel que soit $\mathcal{R}(\dim. \mathcal{R} \leqq \Omega_0)$, il existe des surensembles de $\mathcal{R}$ logiquement fermés au-dessous de Ω_0, par exemple l'ensemble $\mathrm{E}^\star_{\Omega_0}$ de toutes les relations dans E de dimension $\leqq \Omega_0$ (¹). L'intersection $\mathcal{R}_{f\downarrow\Omega_0}$ de tous ces surensembles de $\mathcal{R}$, qui est le moindre surensemble de $\mathcal{R}$ logiquement fermé au-dessous de Ω_0, s'appelera *fermeture logique de $\mathcal{R}$ au-dessous de* Ω_0.

5. Structures. Structures équivalentes. — Un ensemble E organisé par un ensemble $\mathcal{R}$ de relations dans E s'appellera *structure* $\mathrm{S} = (\mathcal{R}, \mathrm{E})$ *dans* E. dim. $\mathcal{R}$ sera encore appelée dim. S. On dira que S *est au-dessous d'un* Ω_0 ($\mathrm{S} \downarrow \Omega_0$), si dim. $\mathrm{S} \leqq \Omega_0$.

$\mathrm{S}' = (\mathcal{R}', \mathrm{E}) \downarrow \Omega_0$ et $\mathrm{S}'' = (\mathcal{R}'', \mathrm{E}) \downarrow \Omega_0 (\Omega_0 \geqq p\mathrm{E})$ seront dites Ω_0-*équivalentes* ($\mathrm{S}' \sim \mathrm{S}'' \downarrow \Omega_0$), si $\mathcal{R}'_{f\downarrow\Omega_0} = \mathcal{R}''_{f\downarrow\Omega_0}$.

On dira que S′ est plus Ω_0-*forte* resp. Ω_0-*faible* que S″ ($\mathrm{S}' >$ resp. $< \mathrm{S}'' \downarrow \Omega_0$), si $\mathcal{R}'_{f\downarrow\Omega_0} \supset$ resp. $\subset \mathcal{R}''_{f\downarrow\Omega_0}$.

(¹) Mais il n'existe pas de surensemble de $\mathcal{R}$ logiquement fermé au-dessous de *tout* Ω_0, car la puissance d'un tel ensemble devrait dépasser tout nombre cardinal (en vertu de la condition *c*). Ceci est en rapport direct avec les paradoxes de la théorie des ensembles.

6. Définitions des σP et des σr. Groupe d'une structure. — Soit σ une permutation de E. P étant un point de dim. Ω, on notera σP le point $\{u \to \sigma P u\}_{u \in U_\Omega}$. r étant une relation de E, σr sera la relation telle que $\mathcal{D}(\sigma r) = \sigma \mathcal{D}(r)$. σP, σr seront appelés *transformés de* resp. P, r *par* σ. Si $\sigma r = r$, on dira que σ *conserve* r.

Le groupe de toutes les permutations de E sera noté $g(E)$. La permutation identique de E sera notée 1_E.

On vérifie que : *a*. $\sigma \bar{r} = \overline{\sigma r}$; *b*. $\sigma \lambda r = \lambda \sigma r$; *c*. $\sigma r_W = (\sigma r)_W$; *d*. $\sigma r^{(W)} = (\sigma r)^{(W)}$; *e*. $\sigma[\mathcal{R}] = [\sigma \mathcal{R}]$(1); *f*. $\sigma \lambda^\star = \lambda^\star$. Il en résulte que : *a*. si $\sigma r = r$, aussi $\sigma \bar{r} = \bar{r}$, $\sigma \lambda r = \lambda r$, $\sigma r_W = r_W$, $\sigma r^{(W)} = r^{(W)}$; si $\sigma \bar{r} = \bar{r}$, ou si $\sigma \lambda r = \lambda r$, ou si $\sigma r^{(W)} = r^{(W)}$, aussi $\sigma r = r$; *b*. si σ conserve tous les $r \in \mathcal{R}$ (1), on a $\sigma[\mathcal{R}] = [\mathcal{R}]$ et $\sigma(\mathcal{R}) = (\mathcal{R})$; *c*. σ conserve tous les $\lambda^\star$. Ceci entraîne que si $\sigma r = r$, aussi $\sigma r^\cdot = r^\cdot$ et $\sigma r^+ = r^+$, et que si $\sigma r^\cdot = r^\cdot$, aussi $\sigma r = r$.

g étant un groupe de permutations de E, on appellera *système d'intransitivité* d'un point P par rapport à g l'ensemble $A_P^{(g)} = gP$. On notera $r_P^{(g)}$ la relation telle que $\mathcal{D}(r_P^{(g)}) = A_P^{(g)}$. On a $\lambda g P = g \lambda P$ et $\{gP\}_W = g P_W$. D'où $(r_P^{(g)})^\cdot = (r_P^{(g)})^+$.

Soit $S = (\mathcal{R}, E)$. Soit $g_{E/S}$ l'ensemble de toutes les permutations de E qui conservent tous les $r \in \mathcal{R}$. $g_{E/S}$ *est un groupe*. En effet, si $\sigma_1, \sigma_2 \in g_{E/S}$, on a, pour tout $r \in \mathcal{R}$, $\sigma_1 r = r$ et $\sigma_2 r = r$; d'où $\sigma_1 \sigma_2 r = \sigma_1(\sigma_2 r) = \sigma_1 r = r$, et $\sigma_1 \sigma_2 \in g_{E/S}$. Et si $\sigma \in g_{E/S}$, on a, pour tout $r \in \mathcal{R}$, $r = \sigma r$; d'où $\sigma^{-1} r = \sigma^{-1}(\sigma r) = r$, et $\sigma^{-1} \in g_{E/S}$.

$g_{E/S}$ s'appellera *groupe de la structure* S.

7. Lois d'existence et d'équivalence. — Il s'agit de démontrer deux théorèmes jouant un rôle fondamental.

Loi d'existence. — Quels que soient $\Omega_0 \geqq pE$ et le sous-groupe g de $g(E)$, il existe des structures $S \downarrow \Omega_0$ dans E telles que $g_{E/S} = g$.

Démonstration. — Considérons la structure $S_{g,\Omega_0} = (\mathcal{R}_{g,\Omega_0}, E)$ suivante : $r \in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$ si, et seulement si $\mathcal{D}(r)$ est une réunion des systèmes d'intransitivité suivant g des points d'une même dim. $\Omega \leqq \Omega_0$.

(1) On suppose que tous les $r \in \mathcal{R}$ ont une même dimension.

$S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0$ et tout $\sigma \in g$ conserve tout $r \in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$. Soit σ non $\in g$, et soit P un point normal. On n'a $\sigma_1 P = \sigma_2 P$ que si $\sigma_1 = \sigma_2$. On a

$$\mathcal{D}(\sigma r_P^{(g)}) = \sigma \mathcal{D}(r_P^{(g)}) = \sigma g P.$$

Or $\sigma g \neq g$; donc $\sigma r_P^{(g)} \neq r_P^{(g)}$. Et comme $r_P^{(g)} \in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$, σ n'est pas dans le groupe de S_{g,Ω_0}. Donc ce groupe est g. C. Q. F. D.

Le raisonnement précédent montre que g est aussi le groupe de toute structure $S_P^{(g)} = (\{r_P^{(g)}\}, E)$, où P est un point normal.

Loi d'équivalence. — $S' \sim S'' \downarrow \Omega_0$ si, et seulement si $g_{E/S'} = g_{E/S''}$.

Démonstration. — *a*. Soit $S = (\mathcal{R}, E) \downarrow \Omega_0$ et soit $g_{E/S} = g$. Je dis *que* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$. En effet, soit qu'il n'en est pas ainsi. Alors il existe un $r \in \mathcal{R}$, mais non $\in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$. $\mathcal{D}(r)$ n'est pas une réunion des systèmes d'intransitivité par rapport à g. Donc, il y a un $P \in \mathcal{D}(r)$ tel que

$$P \in \mathcal{D}(r) \cap gP = U \neq gP.$$

Mais $\mathcal{D}(r) \cap gP = \mathcal{D}([r, r_P^{(g)}])$ est conservé par g. Donc

$$gP \subseteq gU = U \subsetneq gP,$$

ce qui est absurde.

b. *$\mathcal{R}_{g,\Omega_0}$ est logiquement fermé au-dessous de Ω_0*. En effet si $r \in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$, g conserve $\bar{r}$, les λr, les r_W, les $r^{(W)}$, et si ρ est un ensemble de $r \in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$ d'une même dimension, g conserve $[\rho]$. Donc, toutes ces relations, ainsi que les $\lambda^\star$, tant que leur dimension est $\leqq \Omega_0$, font partie de $\mathcal{R}_{g,\Omega_0}$, ce qui prouve l'affirmation.

Il en résulte *que si* $g_{E/S} = g(S = (\mathcal{R}, E) \uparrow \Omega_0)$, $\mathcal{R}^{f \uparrow \Omega_0} \subseteq \mathcal{R}^{g,\Omega_0}$.

Donc *le groupe de la structure* $S_{f\downarrow\Omega_0} = (\mathcal{R}_{f\downarrow\Omega_0}, E)$ *est* g. D'où, *si* $S' \sim S'' \downarrow \Omega_0$, $g_{E/S'} = g_{E/S''}$.

c. *Si* P *est normal*, $S_P^{(g)} \sim S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0$. En effet, P′ étant un point semi-normal arbitraire, il peut être mis sous la forme λP_W, où $W \subseteq U_{PE}$ et $\lambda \in \Lambda_{PW}$. Donc $r_{P'}^{(g)} = \lambda(r_P^{(g)})_W$. P″ étant un point quelconque, $(r_{P''}^{(g)})^{\cdot} = (r_{P''}^{(g)})^{+}$ est de la forme $r_{P'}^{(g)}$, où P′ est semi-normal. Et tout $r \in \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$ est un produit des $r_{P''}^{(g)}$. Donc $\mathcal{R}_{g,\Omega_0} \subseteq \{r_P^{(g)}\}_{f\downarrow\Omega_0}$; et comme $\{r_P^{(g)}\}_{f\downarrow\Omega_0} \subseteq \mathcal{R}_{g,\Omega_0}$ (en vertu de *b*), on a $S_P^{(g)} \sim S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0$.

Il est à remarquer qu'un $r_{P''}^{(g)}$ s'obtient à partir du $r_P^{(g)}$ (P normal) et des $\lambda^\star$ par des opérations $[\quad]$, λ, ${}_{\mathrm{W}}$, ${}^{(\mathrm{W})}$, sans avoir à appliquer l'opération fondamentale $\overline{}$.

d. Soient $\mathrm{S} = (\mathcal{R}, \mathrm{E}) \downarrow \Omega_0$ et $g_{\mathrm{E/S}} = g$. Soit $\mathcal{R}_\Omega$ l'ensemble de toutes les $r \in \mathcal{R}$ de dim. $\Omega (\Omega \leqq \Omega_0)$. Notons M_Ω l'ensemble de toutes les décompositions (A, B) de Λ_Ω en deux classes A, B. Soit que $o_\Omega \neq r_1 = \left[r, [\mathrm{A}^\star], [\overline{\mathrm{B}^\star}]\right]$, où $r \in \mathcal{R}_\Omega$ et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{M}_\Omega$. Soit $r_1(\mathrm{P}) = \mathrm{o}^\star$. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{A}$, on a $\lambda_1 \mathrm{P} = \mathrm{P}$ et $\lambda_2 \mathrm{P} = \mathrm{P}$; d'où $\lambda_1 \lambda_2 . \mathrm{P} = \mathrm{P}$ et $\overline{(\lambda_1 \lambda_2)^\star}(\mathrm{P}) \neq \mathrm{o}^\star$. Donc $\lambda_1 \lambda_2$ non $\in \mathrm{B}$, c'est-à-dire $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathrm{A}$. Si $\lambda \in \mathrm{A}$, on a $\mathrm{P} = \lambda \mathrm{P}$; d'où $\lambda^{-1} \mathrm{P} = \mathrm{P}$ et, encore, $\lambda^{-1} \in \mathrm{A}$. A est un groupe. Si u_1 et u_2 sont dans un même système d'intransitivité suivant A, on doit avoir $\mathrm{P} u_1 = \mathrm{P} u_2$. Si $\mathrm{P} u_1 = \mathrm{P} u_2$, la transposition (u_1, u_2) conserve P, donc $\overline{(u_1, u_2)^\star}(\mathrm{P}) \neq \mathrm{o}^\star$, et (u_1, u_2) non $\in \mathrm{B}$, c'est-à-dire $(u_1, u_2) \in \mathrm{A}$. Donc u_1 et u_2 sont dans un même système d'intransitivité suivant A. Il en résulte que, Γ désignant (pour r_1) la même chose que dans **3**, P_Γ est semi-normal quel que soit $\mathrm{P} \in \mathcal{D}(r_1)$, c'est-à-dire $r^+ = r^\cdot$. Soit

$$\mathcal{R}'_\Omega = \left\{\left[r, [\mathrm{A}^\star], [\overline{\mathrm{B}^\star}]\right]\right\}_{r \in \mathcal{R}_\Omega, (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{M}_\Omega},$$

et soit $\mathcal{R}' = \bigcup_{\Omega \leqq \Omega_0} \mathcal{R}'_\Omega$. Comme $r = \left(\left\{\left[r, [\mathrm{A}^\star], [\overline{\mathrm{B}^\star}]\right]\right\}_{(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{M}_{\mathrm{dim.}\, r}}\right)$, on a $(\mathcal{R}', \mathrm{E}) \sim (\mathcal{R}, \mathrm{E})$. D'autre part $(\mathcal{R}', \mathrm{E}) \sim (\mathcal{R}'^{\cdot}, \mathrm{E}) = (\mathcal{R}'^{+}, \mathrm{E})$.

P' étant un point semi-normal de dim. Ω, P étant un point normal fixe, et $\mathrm{W}_{\mathrm{P}'} \subseteq \mathrm{U}_{p\mathrm{E}}$ étant tel que $\mathrm{P} \mathrm{W}_{\mathrm{P}'} = \mathrm{E}_{\mathrm{P}'}$, il existe un $\lambda_{\mathrm{P}'} \in \Lambda_\Omega$ tel que $(\lambda_{\mathrm{P}'} \mathrm{P}')^{(\mathrm{W}_{\mathrm{P}'})} \ni \mathrm{P}$. Soient $r \in \mathcal{R}'^{+}$ et $\mathrm{P}' \in \mathcal{D}(r)$. Comme P' est semi-normal, $r_{\mathrm{P}'} = (\lambda_{\mathrm{P}'} r)^{(\mathrm{W}_{\mathrm{P}'})}$ existe, dim. $r_{\mathrm{P}'} = p\mathrm{E}$, et $r_{\mathrm{P}'}(\mathrm{P}) = \mathrm{o}^\star$. Posons $\mathcal{R}_* = \{r_{\mathrm{P}'}\}_{r \in \mathcal{R}'^{+}, \mathrm{P}' \in \mathcal{D}(r)}$. Comme $r = \lambda_{\mathrm{P}'}^{-1} (r_{\mathrm{P}'})_{\mathrm{W}_{\mathrm{P}'}}$, on a

$$\mathrm{S}_* = (\mathcal{R}_*, \mathrm{E}) \sim (\mathcal{R}'^{+}, \mathrm{E}) \sim (\mathcal{R}, \mathrm{E}) = \mathrm{S} \downarrow \Omega_0.$$

En vertu de *b*, $g_{\mathrm{E/S}} = g_{\mathrm{E/S}_*} = g$.

Posons $r_\cdot = [\mathcal{R}_*]$. On a $r_*(\mathrm{P}) = \mathrm{o}^\star$. Puisque g conserve tout $r \in \mathcal{R}_*$, il conserve $r_\cdot$. Donc si $\sigma \in g$, on a $r_\cdot(\sigma \mathrm{P}) = \mathrm{o}^\star$. Si σ non $\in g$, il existe un $r \in \mathcal{R}'^{+}$ tel que $\sigma r \neq r$. Donc, il existe un $\mathrm{P}' \in \mathcal{D}(r)$ tel que $r(\sigma \mathrm{P}') \neq \dot{\mathrm{o}}$. D'où $r_{\mathrm{P}'}(\sigma \mathrm{P}) = r_{\mathrm{P}'}(\lambda_{\mathrm{P}'}(\sigma \mathrm{P}')^{(\mathrm{W}_{\mathrm{P}'})}) \neq \mathrm{o}^\star$. Comme $r_{\mathrm{P}'} \in \mathcal{R}_*$, On a $\mathcal{D}(r_\cdot) \subseteq \mathcal{D}(r_{\mathrm{P}'})$, et $\mathcal{D}(r_\cdot)$ ne contient pas de $\sigma \mathrm{P}$. Donc, l'ensemble de tous les points normaux de $\mathcal{D}(r_\cdot)$ est $g\mathrm{P}$. Celui des points normaux de $\mathcal{D}(r_\cdot^+)$ est le même.

Soit que $P' \in \mathcal{D}(r_{\cdot}^{+})$ n'est pas normal. Comme P' est semi-normal, on a $P' = \lambda_{P'}^{-1} P_{W_{P'}}$, et $W_{P'} \subsetneqq \mathfrak{U}_{pE}$. $\lambda_{P'}^{-1}(r_0^{+})_{W_{P'}}(P') = 0^{\star}$. D'autre part, P'' étant un point quelconque de dim. pE, on a

$$E_{\lambda_{P'}^{-1} P^{\bullet}_{W_{P'}}} = E_{P^{\bullet}_{W_{P'}}} = P'' W_{P'}.$$

Si P'' est semi-normal, on a $P'' W_{P'} \subsetneqq P'' U_{pE} \subseteq E$, donc $\mathcal{D}(\lambda_{P'}^{-1}(r_{\cdot}^{+})_{W_{P'}})$ ne contient pas de points normaux. Donc, si l'on pose

$$r_{+} = \left[r_{\cdot}^{+}, \left[\overline{\lambda_{P'}^{-1}(r_{\cdot}^{+})_{W_{P'}}} \right]_{P' \in \mathcal{D}(r_{\cdot}^{+}) - gP} \right],$$

$\mathcal{D}(r_{+}) \subseteq \mathcal{D}(r_{\cdot}^{+})$ contient tous les points normaux de $\mathcal{D}(r_{\cdot}^{+})$ et ne contient aucun autre point semi-normal. Tous les points de $\mathcal{D}(r_{\cdot}^{+})$ étant semi-normaux, on a $\mathcal{D}(r_{+}) = gP$, c'est-à-dire $r_{+} = r_{P}^{(g)}$. Donc

$$S \sim S' \gtrsim (\{r.\}, E) \gtrsim (\{r_{\cdot}^{+}\}, E) \gtrsim (\{r_{+}\}, E) = S_{P}^{(g)} \sim S_{g.\Omega_0} \downarrow \Omega_0.$$

Donc $S \gtrsim S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0$. Mais $S_{g,\Omega_0} \gtrsim S \downarrow \Omega_0(a)$. Donc

$$S \sim S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0.$$

Si $g_{E/S'} = g_{E/S''} = g(S', S'' \downarrow \Omega_0)$, on a $S' \sim S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0$ et $S'' \sim S_{g,\Omega_0} \downarrow \Omega_0$; d'où $S' \sim S'' \downarrow \Omega_0$ et tout est prouvé.

Conséquence 1. — La condition de l'Ω_0-équivalence est indépendante de Ω_0. Pour cette cause on appellera deux structures S' et S'' *équivalentes* ($S' \sim S''$) s'il existe un Ω_0 tel que $S' \sim S'' \downarrow \Omega_0$. Alors, quel que soit $\Omega_0' \geqq \text{dim. } S'$, $\Omega_0' \geqq \text{dim. } S''$, on a $S' \sim S'' \downarrow \Omega_0'$.

Conséquence 2. — Quelle que soit la structure S, il existe une relation r' telle que $\mathcal{D}(r')$ ne contienne que des points normaux et que $S \sim (\{r'\}, E)$.

D'ailleurs, voici une autre méthode pour former une r' telle que $S = (\mathcal{R}, E) \sim (\{r'\}, E)$. Soit $\Omega' = \sum_{r \in \mathcal{R}} \text{dim. } r$. On peut subdiviser $U_{\Omega'}$ en classes $W(r)(r \in \mathcal{R})$ tels que $pW(r) = \text{dim. } r$. Posons $r' = \left[\{r^{(W(r))'}\}_{r \in \mathcal{R}} \right]$. On a, si $r \in \mathcal{R}$, $r = r'_{W(r)}$. Donc r' a la propriété voulue.

Théorème. — $S' > S'' \downarrow \Omega_0$ *si, et seulement si* $g_{E/S'} \subset g_{E/S''}$.

Démonstration. — On a

$$S' \sim S_{g_{E/S'},\Omega_0} \downarrow \Omega_0, \ S'' \sim S_{g_{E/S''},\Omega_0} \downarrow \Omega_0,$$

et pour ces dernières structures le théorème est évident.

C. Q. F. D.

Conséquence. — La condition pour que $S' > S'' \downarrow \Omega_0$ ne dépend pas de Ω_0, Pour cette cause on dit que S' est *plus forte* (*faible*) que S'' ($S' >$ (resp. $<$) S'') s'il existe un Ω_0 tel que $S' >$ (resp. $<$) $S'' \downarrow \Omega_0$. Alors, quel que soit $\Omega'_0 \geqq$ dim. S' et dim. S'', on a $S' >$ (resp. $<$) $S'' \downarrow \Omega'_0$.

8. Corps. Groupe auquel appartient un corps. Loi de dualité. Sous-corps, surcorps, corps intersections, corps composés. Relations du corps. Fonctions logiques. Adjonctions. Relations et corps primitifs. — On fera correspondre à toute structure $S = (\mathcal{R}, E)$ un objet $K(S)$, dit *corps dans* E *défini par* S, tel que $K(S') = K(S'')$ si, et seulement si $S' \sim S''$. Si $S' > S''$, $K(S')$ sera dit un *surcorps* de $K(S'')$, et $K(S'')$ sera dit un *sous-corps* de $K(S')$ $(K(S') > K(S''), K(S'') < K(S'))$. K étant un surcorps d'un corps k, au lieu de dire d'un objet (d'une propriété) qu'il (elle) est de (dans) K par rapport à k, on dira qu'il (elle) est de (dans) K/k.

Toutes les structures S qui définissent un même corps K ont le même groupe. On notera ce groupe $g_{E/K}$, et l'on dira que K *appartient à* $g_{E/K}$ *dans* E. Les lois d'existence et d'équivalence se traduisent par la

Loi de dualité. — La correspondance $K \to g_{E/K}$ est une correspondance biunivoque de l'ensemble de tous les corps dans E avec l'ensemble de tous les sous-groupes de $g(E)$. $K' \geqq K''$ si, et seulement si $g_{E/K'} \subseteq g_{E/K''}$.

On notera E le corps tel que $g_{E/K} = \{1_E\}$.

Q étant un ensemble de corps dans E, le plus grand sous-corps de tous les $K \in Q$ s'appelle leur *intersection* $\left(\bigcap_{K \in Q} K\right)$, et le moindre surcorps de tous les $K \in Q$ s'appelle leur *corps composé* $\left(\bigcup_{K \in Q} K\right)$. On a $g_{E/\bigcap_{K \in Q} K} = (g_{E/K})_{K \in Q}$, où $(g)_{g \in y}$ désigne le groupe composé de groupes $g \in y$, et $g_{E/\bigcup_{K \in Q} K} = \bigcap_{K \in Q} g_{E/K}$.

Une relation r sera dite *relation du corps* K ($r \in K$), s'il existe une structure $S = (\mathcal{R}, E)$ telle que $r \in \mathcal{R}$ et $K(S) = K$. $r \in K$ si, et seulement si $g_{E/K}$ conserve r. $\mathcal{R}_{g, \Omega_0}(\Omega_0 \geqq pE)$ est l'ensemble de toutes les $r \in K$ de dimension $\leqq \Omega_0$. Il n'existe pas de l'ensemble de *toutes* les relations de K. Si $k < K$, $r \in k$ entraîne $r \in K$. $r \in K' \cap K''$ a lieu si, et seulement si à la fois $r \in K'$ et $r \in K''$.

Considérons un ensemble X de signes x, à chacun desquels correspond un nombre cardinal dim. x. Soit $\mathfrak{X}$ une famille de sous-ensembles X' de X tels que tous les x éléments d'un même X' aient une même dimension, notée dim. X' (on ne suppose pas que tous les $X' \in \mathfrak{X}$ sont *distincts*). A chaque $X' \in \mathfrak{X}$ on fera correspondre une opération fondamentale $F_{X'}$ applicable aux relations de dimension dim. X'. On considérera des nouveaux signes $y = F_{X'}x$, $x \in X'$ quand $F_{X'}$ est une des opérations $^{-}$, λ, $_{(v)}$, $^{(v')}$, ou $y = F_{X'}X'$, quand $F_{X'}$ est [ ]. On fera correspondre à chaque signe $y = F_{X'}x$ ou $F_{X'}X'$ le nombre cardinal dim. y égal à la dimension de la relation qu'on obtient en appliquant $F_{X'}$ a une relation r ou à un ensemble $\mathcal{R}$ de relations de dimension dim. X' (dim. y ne dépend pas du choix de r ou de $\mathcal{R}$, mais seulement de $F_{X'}$ et de dim. X').

Soit X_1 l'ensemble de tous les y *distincts* ainsi obtenus. On pourra procéder avec X_1 comme on a procédé avec X et ainsi de suite. Soit φ un signe qui est l'élément d'un ensemble pouvant être obtenu à partir de X en appliquant un nombre fini de fois le procédé de nature indiquée.

Soit $\mathcal{R}_X = \{r_x\}_{x \in X}$ un ensemble de relations r_x tels que dim. $r_x =$ dim. x. Faisons correspondre à chaque $y = F_{X'}x$ ou $F_{X'}X'$ la relation $r_y = F_{X'}r_x$ ou resp., $F_{X'}\{r_x\}_{x \in X'}$. On a dim. $r_y =$ dim. y. Donc $\mathcal{R}_{X_1} = \{r_y\}_{y \in X_1}$ est encore un ensemble de nature indiquée. Procédant de la même façon on fera correspondre, en particulier, à φ une relation r_φ de dimension dim. φ. r_φ est une fonction définie pour tous les $\mathcal{R}_X = \{r_x\}_{x \in X}$ tels que dim. $r_x =$ dim. x. Cette fonction sera identifiée avec le signe φ, et sera dite *fonction logique* des variables $x \in X$ (1) (2). On écrira $r_\varphi = \varphi(\mathcal{R}_X)$.

---

(1) Une même fonction logique peut se représenter par plusieurs signes φ.

(2) Il existe une définition axiomatique des fonctions logiques, donton peut démontrer l'équivalence avec la précédente. Je la donnerai dans un travail ultérieur.

Si φ peut être obtenu à partir de X par le procédé indiqué, mais en prenant pour les $F_{X'}$ les opérations [ ], λ, $_w$, $^{(w)}$, φ sera dite *fonction logique directe* des $x \in X$. Si $E_r = \bigcup_{P \in D(r)} E_P$ et si r' est une fonction logique directe des éléments d'un ensemble $\mathcal{R} \ni r$, dépendant effectivement de r, on a manifestement $E_{r'} \subseteq E_r$. Il en est de même si r' est un produit de relations de cette nature.

Les démonstrations et les résultats du 7 montrent que :

a. Si K est défini par la structure $s = \mathcal{R}(E)$, $r \in K$ si, et seulement si r est une fonction logique des éléments de $\mathcal{R}$ et des λ^*. *b*. Si P est normal, P' quelconque, $r_{P'}^{(g)}$ est une fonction logique directe de $r_P^{(g)}$.

$r \in K$ s'appellera *relation irréductible* de K si, r' étant une relation arbitraire de K_p de même dim., on a ou bien $[r, r'] = r$ ou bien $[r, r'] = O_{\text{dim.}\, r}$. Si $g = g_{E/K}$, il est évident que les seules relations irréductibles de K sont celles de la forme $r_P^{(g)}$. Toute $r \in K$ se met, et d'une seule manière, sous la forme de produit de relations irréductibles.

Si $S_0 = (\mathcal{R}_0, E)$ définit $k < K$, et si $S = (\mathcal{R}_0 \bigcup \mathcal{R}', E)$ définit K, on écrira $K = k(\mathcal{R}')$ [si $\mathcal{R}' = \{r\}$, on écrira $K = k(r)$] et l'on dira que K est obtenu par *adjonction* à k de toutes les $r \in \mathcal{R}'$. Deux adjonctions s'appellent équivalentes, si elles conduisent au même corps. Si $K = k(r)$, on dira encore que r *définit* K/k ou est *primitive dans* K/k. 7 montre que dans tout K/k il y a des relations primitives : ce sont celles qu'un $\sigma \in g_{E/k}$ conserve si, et seulement si $\sigma \in g_{E/K}$.

Soient X_0 et X deux ensembles disjoints de variables x. $\varphi(X_0 \bigcup X)$ étant une fonction logique des $x \in X_0 \bigcup X$, substituons au lieu des $x \in X_0$ des relations fixes r_x d'un corps k telles que dim. r_x = dim. x. Soit $\mathcal{R}_{X_0} = \{r_x\}_{x \in X_0}$. Posons $\Phi(X) = \varphi(\mathcal{R}_{X_0} \bigcup X)$. $\Phi(X)$ est une fonction définie pour tout $\mathcal{R}_X = \{r_x\}_{x \in X}$ tel que dim. r_x = dim. x. Les $\Phi(X)$ de cette nature s'appelleront *fonctions logiques dans k des variables* $x \in X$.

Si $K = k(\mathcal{R})$ $r \in K$, si, et seulement si r est fonction logique dans k des éléments de $\mathcal{R}$; en particulier toute $r' \in K$ est fonction logique dans k de toute $r \in K$ primitive dans K/k. r, r' étant deux relations, r' est fonction logique dans k de r si, et seulement si $\sigma \in g_{E/k}$ et $\sigma r = r$ entraînent $\sigma r' = r'$.

K/k s'appelle *primitif* s'il n'existe aucun corps K tel que $\bar{K} > K > k$.

K/k est primitif si, et seulement si toute $r \in K$ non primitive est relation de k.

9. Corps isomorphes. Loi d'isomorphisme. Loi de prolongabilité. — Deux corps K, K′ dans deux ensembles resp. E, E′ s'appellent *isomorphes* ($K \simeq K'$), s'il existe une correspondance biunivoque ε de tous les $r \in K$ à tous les $r' \in K'$ telle que pour tout $r \in K$ on ait : *a*. $\dim.(\varepsilon r) = \dim. r$; *b*. $\varepsilon.\bar{r} = \overline{\varepsilon r}$; *c*. si $W \subset U_{\dim. r}$, $\varepsilon. r_W = (\varepsilon r)_W$; *d*. si $\Omega' \geqq \dim. r$, si $W \subseteq U_{\Omega'}$ et si $pW = \dim. r$, $\varepsilon r^{(W)} = (\varepsilon r)^{(W)}$; *e*. si $\lambda \in \Lambda_{\dim. r}$, $\varepsilon \lambda r = \lambda.\varepsilon r$; *f*. pour tout λ, $\varepsilon \lambda^{\star} = \lambda^{\star}$; *g*. si ρ est un ensemble de $r \in K$ d'une même dimension, $\varepsilon[\rho] = [\varepsilon \rho]$.

La correspondance ε s'appelle un *isomorphisme* de K à K′ (si $K' = K$, ε s'appelle un *automorphisme* de K). Deux isomorphismes ε_1, ε_2 de K seront considérés comme différents s'il existe, et seulement s'il existe une $r \in K$ telle que $\varepsilon_1 r \neq \varepsilon_2 r$. ε_2 étant un isomorphisme de K à K′, et ε_1 étant un isomorphisme de K′ à K″, on notera $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, et on l'appellera *composé de* ε_2 *par* ε_1, l'isomorphisme de K (à K″) tel que pour toute $r \in K$ on ait $\varepsilon_1 \varepsilon_2 r = \varepsilon_1(\varepsilon_2 r)$. On notera 1_K l'isomorphisme identique de K. On notera ε^{-1} l'isomorphisme tel que $\varepsilon^{-1}\varepsilon = 1_K$. Un ensemble d'isomorphismes fermé par rapport à la composition et contenant l'inverse de tout son élément est un groupoïde.

On emploiera la locution (incorrecte) « corps εK ». On dira que $\varepsilon_1 K$ et $\varepsilon_2 K$ sont *égaux* ($\varepsilon_1 K = \varepsilon_2 K$), si ε_1 et ε_2 sont isomorphismes de K à un même corps. On dira que $\varepsilon_1 K$ et $\varepsilon_2 K$ *coïncident* ($\varepsilon_1 K \equiv \varepsilon_2 K$), si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Les corps K et εK seront dits *transjugués* l'un de l'autre. Si K et εK sont corps dans un même ensemble E, ils seront dits *conjugués* l'un de l'autre. Deux corps transjugués (ou conjugués) d'un corps K seront considérés comme différents quand ils ne coïncident pas. φ étant une fonction logique resp. fonction logique dans un corps k, les faits $\varphi(\mathcal{R}) = O_{\dim. \varphi}$, $\varphi(\mathcal{R}) \neq O_{\dim. \varphi}$ s'appelleront *identité*, *inidentité logiques* resp. *logiques dans k entre les $r \in \mathcal{R}$*. T étant un système de relations (pouvant, en particulier, être le système de toutes les relations d'un corps), une transmutation $\mathcal{J}$ de T telle que toute identité ou inidentité entre les r de T et les $\lambda^{\star}$, reste vraie quand on y laisse les $\lambda^{\star}$ inchangés et quand on y remplace chaque r de T par $\mathcal{J} r$, s'appellera une transmutation *conservative* de T. Une transmutation conservative d'une seule relation r s'appellera *substitution conservative de r*.

Il est visible que, T étant un système de relations d'un corps K, la transmutation $\mathcal{J}$ de T telle que pour tout r de T on ait $\mathcal{J}r = \varepsilon r$, où ε est un isomorphisme de K, est conservative. On notera cette transmutation $\mathrm{corr.}_{\mathrm{T}}\,\varepsilon$ et l'on dira que ε la *prolonge* dans K. Inversement, $\mathcal{J}$ étant une transmutation conservative d'un système T et K étant le moindre corps tel que tous les r de T soient relations de K, il existe un et un seul isomorphisme de K, qui prolonge $\mathcal{J}$, à savoir celui qu'on obtient en faisant correspondre à chaque fonction logique φ des λ^* et des r de T la même fonction logique des mêmes λ^* et des $\mathcal{J}r$ correspondants. On identifiera $\mathcal{J}$ avec cet isomorphisme. Ainsi, si r définit K, un isomorphisme ε de K sera identifié avec la substitution $r \to \varepsilon r$. εr sera dite *tranjuguée* (*conjuguée*) de r.

Plus généralement, θ étant un ensemble de systèmes T de relations et K étant le moindre corps dont le système de relations contient tous ces systèmes, à chaque configuration des transmutations conservatives $\mathcal{J}_{\mathrm{T}}$ des $\mathrm{T} \in \theta$ correspond au plus un isomorphisme ε de K tel que $\mathcal{J}_{\mathrm{T}} = \mathrm{corr.}_{\mathrm{T}}\,\varepsilon$. Si un tel ε existe, il sera identifié avec la configuration en question.

Soit μ une transmutation de E en E′. P étant un point engendré par E, μP désignera le point $\{u \to \mu.\mathrm{P}u\}_{u \in \mathrm{U}_{\mathrm{dim.P}}}$. r étant une relation de E, on notera μr la relation de E′ telle que $\mathcal{D}(\mu r) = \mu\mathcal{D}(r)$. $\mathrm{S} = (\mathcal{R}, \mathrm{E})$ étant une structure dans E, on notera μS la structure $(\mu\mathcal{R}, \mu\mathrm{E}) = (\mu\mathcal{R}, \mathrm{E}')$ dans E′.

Loi d'isomorphisme : *a*. μ étant une transmutation de E, tous les μS des S définissant un même corps K dans E définissent un même corps isomorphe à K qui sera noté μK. La correspondance $r \to \mu r$ est un isomorphisme de K à μK, qui sera noté μ_{K}. *b*. Si ε est un isomorphisme de K, il existe des transmutations μ de E telles que $\varepsilon = \mu_{\mathrm{K}}$.

Démonstration. — *a*. $\mu\mathcal{R}$ est logiquement fermé $\downarrow \Omega_0$ si, et seulement si $\mathcal{R}$ l'est; d'où résulte l'existence de μK. $\mu\mathcal{R}_{g_{\mathrm{E/K}},\,\Omega_0}(\Omega_0 \geqq p\mathrm{E})$ est logiquement fermé jusqu'à Ω_0. Donc il coïncide avec $\mathcal{R}_{g_{\mu\mathrm{E}/\mu\mathrm{K}},\,\Omega_0}$. Par conséquent, $r \to \mu r$ est une correspondance de toutes les $r \in$ K à toutes les $r' \in \mu K$. Comme cette correspondance est biunivoque et satisfait aux conditions a, b, c, d, e, f, elle est un isomorphisme de K à μK. b. Soit $g_{E/K} = g$ et soit P un point normal engendré par E. Toute $r \in K$ est un produit des fonctions logiques directes de $r_P^{(g)}$ et des λ^*, dépendant effectivement de $r_P^{(g)}$. ε étant un isomorphisme de K, $r_P^{(g)} \to \varepsilon r_P^{(g)}$ est une substitution conservative. Donc tout $r' \in \varepsilon K$ est un produit des fonctions logiques directes de $\varepsilon r_P^{(g)}$ et des λ^* dépendant effectivement de $\varepsilon r_P^{(g)}$. Donc $E'_{r'} \subseteq E'_{\varepsilon r_P^{(g)}}$. Comme, d'autre part, il existe des $r' \in \varepsilon K$ tels que $E_{r'} = E'$, par exemple $r' = I_1$, on doit avoir $E' = E'_{\varepsilon r_P^{(g)}}$.

On a $(r_P^{(g)})^+ = r_P^{(g)}$. Donc $(\varepsilon r_P^{(g)})^+ = \varepsilon (r_P^{(g)})^+ = \varepsilon r_P^{(g)}$. De plus, si $W \subsetneqq U_{pE}$, $(r_P^{(g)})_W$ est première à $r_P^{(g)}$; donc $(\varepsilon r_P^{(g)})_W = \varepsilon (r_P^{(g)})_W$ est première à $\varepsilon r_P^{(g)}$. Donc tout $P' \in \mathcal{D}(\varepsilon r_P^{(g)})$ est normal; d'où $pE' = pE$. Et puisque $\varepsilon r_P^{(g)}$ définit $\varepsilon K = K'$, on a, si $P' \in \mathcal{D}(\varepsilon r_P^{(g)})$, $\varepsilon r_P^{(g)} = r_{P'}^{(g')}$, où $g' = g_{E'/K'}$. $\mu = \{ Pu \to P'u \}_{u \in U_{pE}} = P'P^{-1}$ est une transmutation de E en E'. $\lambda \in \Lambda_{pE}$ et $\sigma \in g(E)$ étant tels que $\lambda \sigma P = P$, on désignera λ par $\lambda_\sigma^{(P)}$, et σ par $\sigma_\lambda^{(P)}$. On a $\lambda_{\sigma_1 \sigma_2}^{(P)} = \lambda_{\sigma_1}^{(P)} \lambda_{\sigma_2}^{(P)}$ et $\lambda_{\sigma^{-1}}^{(P)} = (\lambda_\sigma^{P})^{-1}$. Donc $\lambda_g^{(P)}$ est un groupe. Pour que $[r_P^{(g)}, \lambda r_P^{(g)}] \neq O_{pE}$, c'est-à-dire que $gP \cap \lambda g P \neq 0$, il faut et il suffit qu'il existe $\sigma_1, \sigma_2 \in g$ tels que $\sigma_1 P = \lambda \sigma_2 P$. Ceci équivaut à $P = \sigma_1^{-1} . \lambda \sigma_2 P = \lambda . \sigma_1^{-1} \sigma_2 P$, c'est-à-dire à $\lambda = \lambda_{\sigma_1^{-1}\sigma_2}^{(P)} \in \lambda_g^{(P)}$. Il en résulte que $[r_{P'}^{(g')}, \lambda r_{P'}^{(g')}] = [\varepsilon r_P^{(g)}, \lambda \varepsilon r_P^{(g)}] = \varepsilon [r_P^{(g)}, \lambda r_P^{(g)}]$ n'est pas $= O_{pE}$ si, et seulement si $\lambda \in \lambda_g^{(P)}$. Mais aussi cela a lieu si, et seulement si $\lambda \in \lambda_{g'}^{(P')}$. Donc $g' = \sigma^{(P')}_{\lambda_{g'}^{(P')}} = \sigma^{(P')}_{\lambda_g^{(P)}} = \{ \sigma^{(P')}_{\lambda_\sigma^{(P)}} \}_{\sigma \in g}$. On a $\lambda_\sigma^{(P)} \sigma P = \{ \lambda_\sigma^{(P)} u \to \sigma P u \}_{u \in U_{pE}} = P = \{ P^{-1} \sigma P u \to \sigma P u \}_{u \in U_{pE}}$; d'où $\lambda_\sigma^{(P)} = \{ u \to P^{-1} \sigma P u \}_{u \in U_{pE}}$. De même $\sigma_\lambda^{(P')} \lambda P' =_{e' \in E'} \{ \lambda P'^{-1} e' \to P' \lambda P'^{-1} e' \}_{e' \in E'}$; d'où, $\sigma_\lambda^{(P')} = \{ e' \to P' \lambda P'^{-1} e' \}_{e' \in E'}$. Donc $\sigma^{(P')}_{\lambda_\sigma^{(P)}} = \{ e' \to P' \lambda_\sigma^{(P)} P'^{-1} e' \}_{e' \in E'}$ $= \{ e' \to P' P^{-1} \sigma P P'^{-1} e' \}_{e' \in E} = \{ e' \to \mu \sigma \mu^{-1} e' \}_{e' \in E'} = \mu \sigma \mu^{-1}$. Donc $g' = \mu g \mu^{-1}$ et $\varepsilon r_P^{(g)} = r_{\mu P}^{(\mu g \mu^{-1})}$. D'où $\mathcal{D}(\varepsilon r_P^{(g)}) = \mu g \mu^{-1} \mu P = \mu g P = \mu \mathcal{D}(r_P^{(g)})$, c'est-à-dire $\varepsilon r_P^{(g)} = \mu_K r_P^{(g)}$. Comme $r_P^{(g)}$ définit K, ceci entraîne $\varepsilon = \mu_K$.

C. Q. F. D.

Conséquence. — $g_{\mu E/\mu K} = \mu g_{E/K} \mu^{-1}$.

Un groupe g' sera dit *transjugué* d'un groupe $g \subseteq g(E)$ s'il existe une transmutation μ de E telle que $g' = \mu g \mu^{-1}$. Si $\mu \in g(E)$, g et g' seront dits *conjugués*.

THÉORÈME. — $K \simeq K'$ *si, et seulement si* $g_{E'/K'}$ *est transjugué de* $g_{E/K}$.

Démonstration. — Si $K \simeq K'$, il existe une transmutation μ de E telle que $K' = \mu K$; d'où $g_{E'/K'} = g_{\mu E/\mu K} = \mu g_{E/K} \mu^{-1}$. Si $g_{E'/K'} = \mu g_{E/K} \mu^{-1}$, on a $g_{E'/K'} = g_{E'/\mu K}$; d'où $K' = \mu K \simeq K$. C. Q. F. D.

Loi de prolongabilité. — Si $k < K$, tout isomorphisme ε de k est prolongeable dans K.

Démonstration. — Il existe des transmutations μ de E telles que $\varepsilon = \mu_k$. μ_K prolonge $\mu_k = \varepsilon$ dans K. C. Q. F. D.

On identifiera un isomorphisme ε de K avec l'ensemble de toutes les μ telles que $\mu_K = \varepsilon$. $\mu_K = \mu'_K$ équivaut à $(\mu^{-1}\mu')_K = 1_K$, c'est-à-dire à $\mu^{-1}\mu' \in g_{E/K}$, et à $\mu' \in \mu g_{E/K}$. Donc ε est une classe à droite suivant $g_{E/K}$ dans le groupoïde des transmutations. Si $\mu \in g(E)$, $\mu g_{E/K}$ est une classe à droite suivant $g_{E/K}$ dans $g(E)$.

10. ISOMORPHISMES RELATIFS. HYPERGROUPE DE GALOIS. THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DE GALOIS. — Un isomorphisme (automorphisme) ε de K conservant $k < K$ (c'est-à-dire tel que $\mathrm{corr.}_k \varepsilon = 1_k$) s'appelle *isomorphisme* (*automorphisme*) *de* K/k. L'ensemble de tous les isomorphismes de K/k sera noté $g_{K/k}$. $pg_{K/k}$ s'appellera degré de K/k et sera notée $(K : k)$. Si $\varepsilon \in g_{K/k}$, K et εK seront dits conjugués par rapport à k. On a $\mu_K \in g_{K/k}$ si, et seulement si $\mu \in g_{E/k}$. Les éléments de $g_{K/k}$ sont des classes à droite suivant $g_{E/K}$ dans $g_{E/k}$. K/k et K'/k sont conjugués si, et seulement si $g_{E/K'}$ et $g_{E/K}$ sont sous-groupes conjugués de $g_{E/k}$.

THÉORÈME. — L'ensemble de tous les isomorphismes ε_1 de K tels que $\mathrm{corr.}_k \varepsilon_1^* = \mathrm{corr.}_k \varepsilon (k < K)$ est $g_{\varepsilon K/\varepsilon k}\varepsilon$.

Démonstration. — Soit $\varepsilon' = \varepsilon_1 \varepsilon^{-1}$. ε' est un isomorphisme de εK, et l'on a $\varepsilon'(\varepsilon k) \equiv \varepsilon_1 \varepsilon^{-1}(\varepsilon k) \equiv \varepsilon_1 k$. Donc $\varepsilon_1 k = \varepsilon k$ si, et seulement si $\varepsilon' \in g_{\varepsilon K/\varepsilon k}$; d'où le théorème.

Soient G et $g \subseteq G$ deux groupes. A étant une réunion des classes à droite suivant g dans G, $(A/g)_D$ notera l'ensemble de ces classes $\subseteq A$. On définira une loi de composition $\star$ dans $(G/g)_D$ par la formule $(A/g)_D \star (B/g)_D = (AB/g)_D$ (ce qui est possible, car si $Bg = B$, aussi $ABg = AB$). $(G/g)_D$ ainsi organisé est un *hypergroupe* au sens de

M. Marty ([1]) et s'appelle *hypergroupe de classes à droite de* G *suivant* g. J'ai montré ([2]) que $h=(\mathrm{A}/g)_{\mathrm{D}}$ est un sous-hypergroupe de $\mathrm{H}=(\mathrm{G}/g)_{\mathrm{D}}$ si, et seulement si A est un sous-groupe de G, cela étant, si $\alpha \in \mathrm{G}$, $(\alpha g/g)_{\mathrm{D}} \star h=(\alpha \mathrm{A}/g)_{\mathrm{D}}$ s'appelle *la classe de* $(\alpha g/g)_{\mathrm{D}}$ *suivant* $h=(\mathrm{A}/g)_{\mathrm{D}}$. Ces classes sont classes dans H au sens de la théorie des ensembles, et si l'on définit la loi de composition pour les classes suivant h, comme on l'a fait pour les classes suivant g, on obtient un hypergroupe de classes à droite $(\mathrm{H}/h)_{\mathrm{D}}=(\mathrm{G}/\mathrm{A})_{\mathrm{D}}$. On en déduit que si h_1 et $h_2 \subset h_1$ sont sous-hypergroupes de $\mathrm{H}=(\mathrm{G}/g)_{\mathrm{D}}$, on a $((\mathrm{H}/h_2)_{\mathrm{D}}/(h_1/h_2)_{\mathrm{D}})_{\mathrm{D}}=(\mathrm{H}/h_1)_{\mathrm{D}}$. $(\mathrm{G}/g)_{\mathrm{D}}$ est groupe si, et seulement si g est invariant dans G.

Ceci posé, soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in g_{\mathrm{K}/k}$. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ sont des classes à droite suivant $g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}}$ dans $g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}}$, soient $\varepsilon_1=(g_1/g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}})_{\mathrm{D}}$, $\varepsilon_2=(g_2/g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}})_{\mathrm{D}}$. Si l'on pose $\varepsilon_1 \star \varepsilon_2 =(g_1 g_2/g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}})$, on organise $g_{\mathrm{K}/k}$ en un hypergroupe de classes à droite qui s'appellera *hypergroupe de Galois de* K/k.

La loi de dualité donne naissance au

Théorème fondamental de la théorie de Galois. — *Si* $\overline{\mathrm{K}}/k \leqq \mathrm{K}/k$, $g_{\mathrm{K}/\overline{\mathrm{K}}}$ *est sous-hypergroupe de* $g_{\mathrm{K}/k}$ (*on dira que* $\overline{\mathrm{K}}/k$ *appartient à* $g_{\mathrm{K}/\overline{\mathrm{K}}}$ *dans* K/k). *Si h est un sous-hypergroupe de* $g_{\mathrm{K}/k}$, *il existe un et un seul* $\overline{\mathrm{K}}/k \leqq \mathrm{K}/k$ *qui lui appartient* $g_{\overline{\mathrm{K}}/k}=(g_{\mathrm{K}/k}/g_{\mathrm{K}/\overline{\mathrm{K}}})_{\mathrm{D}}$. *Si* $\overline{\overline{\mathrm{K}}}/k \leqq \overline{\mathrm{K}}/k \leqq \mathrm{K}/k$, $g_{\mathrm{K}/\overline{\overline{\mathrm{K}}}} \supseteq g_{\mathrm{K}/\overline{\mathrm{K}}}$.

Démonstration. — On n'a qu'à remarquer que $(\mathrm{A}/g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}})_{\mathrm{D}}$ est sous-hypergroupe de $g_{\mathrm{K}/k}=(g_{\mathrm{E}/k}/g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}})_{\mathrm{D}}$ si, et seulement si A est sous-groupe de $g_{\mathrm{E}/k}$ contenant $g_{\mathrm{E}/\mathrm{K}}$.

Si $r \in \mathrm{K}$ et si $\varepsilon \in g_{\mathrm{K}/k}$, r et εr seront dites *conjuguées dans* K/k. On dira que r *appartient* à l'hypergroupe h de $g_{\mathrm{K}/k}$ si h est l'ensemble de tous les $\varepsilon \in g_{\mathrm{K}/k}$ tels que $\varepsilon r=r$. On a $\mathrm{K}=k(r)$ si, et seulement si r appartient à $\{1_{\mathrm{K}}\}$, c'est-à-dire si tous les conjugués de r dans K/k sont distincts.

Un système de relations T étant donné, une transmutation (forcément conservative) $\mathcal{J}$ de T sera dite *conservative dans* un corps k, si

---

([1]) *Ann. de l'Éc. Norm.*, 1936, p. 83-123.

([2]) Pour la démonstration des résultats qui suivent *voir* le Chapitre I de ma Thèse (*Mémoires de l'Académie R. de Belgique*, t. XI, fasc. 4).

elle conserve toutes les identités et inidentités dans k entre les r de T. La transmutation $\mathfrak{J}$ de T est dans corr.$_{\mathrm{T}}$ $g_{K/k}$ si, et seulement si elle est conservative dans k.

11. Corps galoisiens. Autre forme du théorème fondamental. Corps de Galois. Groupe de Galois. Remarques. — Un corps K/k s'appelle *galoisien* si pour tout $\varepsilon \in g_{K/k}$ on a $\varepsilon K = K$, c'est-à-dire si tous ses isomorphismes sont automorphismes.

Théorème. — *K/k est galoisien si, et seulement si $g_{E/K}$ est invariant dans $g_{E/k}$.*

Démonstration. — K/k est galoisien si, et seulement si pour tout $\sigma \in g_{E/k}$ on a $\sigma K = K$, c'est-à-dire $g_{E/\sigma K} = g_{E/K}$. Or $g_{E/\sigma K} = \sigma g_{E/K} \sigma^{-1}$; d'où le théorème.

Conséquence. — K/k est galoisien si, et seulement si $g_{K/k}$ est groupe.

Conséquence. — K/k étant galoisien, $\overline{K}/k \leqq K/k$ l'est aussi si, et seulement si $g_{K/\overline{K}}$ est invariant dans $g_{K/k}$. $\overline{K}/k \leqq K/k$ et $\overline{K}'/k \leqq K/k$ sont conjugués si, et seulement si $g_{E/\overline{K}}$ et $g_{E/\overline{K}'}$ le sont dans $g_{K/k}$.

Soit K^*/k un surcorps galoisien d'un corps K/k. On peut exprimer ainsi le théorème fondamental du **10**.

Si $\overline{K}/k \leq K/k$, $g_{K^*/\overline{K}}$ est un groupe tel que $g_{K^*/k} \supseteq g_{K^*/\overline{K}} \supseteq g_{K^*/K}$, et $g_{\overline{K}/k} = (g_{K^*/k}/g_{K^*/\overline{K}})_{\mathrm{D}}$; si g est un groupe tel que $g_{K^*/k} \supseteq g \supseteq g_{K^*/K}$, il existe un et un seul corps $\overline{K}/k$ appartenant à g dans K^* et $\overline{K} \leqq K$.

$K^0/k \bigcup_{\varepsilon \in g_{K/k}} \varepsilon K$ s'appelle *corps de Galois de* K/k. K^0/k est le moindre surcorps galoisien de K/k, car $g_{E/K^0} = \bigcap^{\varepsilon \in g_{K/k}}_{\sigma \in g_{E/k}} \sigma g_{E/K}\, \sigma - 1$ est le plus grand sous-groupe de $g_{E/K}$ invariant dans $g_{E/k}$. Si $K = k(r)$, on a

$$K^0 = k\left(\{\varepsilon r\}_{\varepsilon \in g_{K/k}}\right).$$

$g_{K^0/k}$ s'appelle *groupe de Galois* de K/k. En vertu de **9**, tout $\varepsilon^0 \in g_{K^0/k}$ est la configuration $\{\varepsilon K/k \rightarrow \mathrm{corr.}_{\varepsilon K}\, \varepsilon^0 . \varepsilon K/k\}_{\varepsilon \in g_{K/k}}$ de transformations des corps conjugués de K/k, ou encore la transmutation

$$\{\varepsilon r \rightarrow \varepsilon^0 \varepsilon r\}_{\varepsilon \in g_{K/k}}$$

de l'ensemble de tous les conjugués dans K/k d'un $r \in K$ définissant K/k. Il est facile de voir que cette configuration ou transmutation est une permutation de l'ensemble des conjugués de resp. K/k, r. $g_{K^0/k}$ est un groupe *transitif* de permutations de cet ensemble, car il y en a un $\varepsilon^0 \in g_{K^0/k}$ qui permute K/k en tout $\varepsilon K/k$ donné, à savoir un de ceux qui prolongent ε dans K^0.

Une permutation ε^0 de l'ensemble des conjugués d'une relation primitive de K/k est dans $g_{K^0/k}$ si, et seulement si ε^0 est conservative dans k.

On démontre comme dans la théorie de Galois ordinaire que K/k est primitif si, et seulement si le groupe de Galois de K/k l'est. On peut développer, comme dans cette dernière théorie, la théorie des corps composés, celle de la réduction du groupe de Galois par adjonctions, etc. Le rôle des irrationnalités naturelles joue les relations de K^0. Toutefois, il y a certaines complications dues à ce que les groupes qui interviennent sont, en général, transfinis. On peut aussi définir ce qu'on doit comprendre par une *équation* dans un corps k. On peut introduire les analogues des équations « numériques » et plus ou moins « littérales » de l'ancienne méthode de Galois-Lagrange. Mais, contrairement à ce qui se passe dans la théorie de Galois ordinaire, on ne peut pas transformer les équations « littérales » en « numériques » par une extension du corps de base. La théorie exposée dans ce travail correspond au cas des équations numériques.

On peut aussi se poser le problème de l'existence d'un corps défini par les « racines » d'une équation donnée, problème qui conduit à ce que j'appelle « théorie de Galois extensive ». J'ai pu résoudre les questions qui se posent à ce propos.

12. Domaine de rationalité d'un corps. Corps additivo-multiplicatifs. Théorie de Galois ordinaire. — Deux éléments e, e' de E seront dits *conjugués* par rapport à un corps K dans E si $g_{E/K}e = g_{E/K}e'$. e sera dit *rationnel* par rapport à K s'il n'a d'autres conjugués par rapport à K que lui-même. Si $U_1 = \{u\}$, e est rationnel par rapport à K si, et seulement s'il existe une $r \in K$ telle que $\mathcal{D}(r) = \{\{u \to e\}\}$. L'ensemble de tous les $e \in E$ rationnels par rapport à K s'appellera *domaine de rationalité de* K. Au lieu de dire qu'on adjoint r telle que $\mathcal{D}(r) = \{\{u \to e\}\}$, on dira qu'on adjoint e.

Soit E un corps commutatif algébriquement fermé au sens ordinaire. Soit $U_3 = \{x, y, z\}$. Appelons $+$, $\times$ les relations de dim. 3 telles que $+(P)$ resp. $\times(P) = o^\star$ si, et seulement si $Px + Py = Pz$ resp. $Px \times Py = Pz$. $K_0 = K(\{+, \times\}, E)$ s'appellera *corps rationnel de* E. $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ étant un polynome à coefficient dans E par rapport à n variables x_i, $[f(x_i)]$ notera une relation de dim. n (dite *polynomiale*) telle que, posant

$$U_n = \{ u_i^{(n)} \}_{i=1,\ldots,n},$$

$[f(x_i)](P) = o$ équivaut à $f(Pu_i^{(n)}) = o$. Un corps obtenu par adjonction à K_0 d'un ensemble de relations polynomiales s'appellera *additivo-multiplicatif*. On montre facilement que l'adjonction à K_0 d'un $[f(x_i)]$ équivaut à l'adjonction à K_0 de tous les quotients des coefficients de $f(x_i)$ par un d'entre eux; k étant un corps additivo-multiplicatif, et K étant obtenu par l'adjonction à k d'un $\eta \subseteq E$, je montre à l'aide d'une généralisation transfinie d'une partie du théorème de l'élimination de Bezout que, quand le domaine de rationalité de k est corps parfait au sens ordinaire, $(x - e) \in K$ si, et seulement si e est fonction rationnelle dans k des éléments de η. E s'appelle *algébrique* par rapport à un corps add.-mult. k, si tout $e \in E$ n'a qu'un nombre fini de conjugués par rapport à k; si E/k est algébrique, on peut montrer que tout surcorps de k est additivo-multiplicatif et que l'adjonction d'un ensemble fini des $e \in E$ à k équivaut à l'adjonction d'un seul élément convenable de E. Tout cela démontre que la théorie de Galois ordinaire est un cas particulier de la théorie des corps généralisés de ce travail.