

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

BERTRAND GAMBIER

**Tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont  
les arêtes touchent une autre quadrique. Tétraèdres dont  
les arêtes touchent deux quadriques**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 17, n° 1-4 (1938), p. 291-326.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1938\\_9\\_17\\_1-4\\_291\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_291_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique et dont les arêtes touchent une autre quadrique. Tétraèdres dont les arêtes touchent deux quadriques;*

PAR BERTRAND GAMBIER.

I. INTRODUCTION. — Le premier des deux problèmes annoncés par le titre a été traité par H. Vogt (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, XII, 1895, p. 363-389). Jusqu'alors les diverses méthodes proposées pour établir que la condition *nécessaire*  $(\sum \lambda_i \lambda_j = 0$  que l'on trouvera plus loin) se trouve être en même temps *suffisante* étaient très critiquables; Vogt a donné le premier cette démonstration; je me suis aperçu que les calculs donnés à cet effet par Vogt peuvent être remplacés par une démonstration géométrique, basée sur l'étude du système remarquable de trois coniques  $s, s_1, s_2$  d'un même plan admettant un triangle inscrit dans  $s$ , circonscrit à  $s_1$ , conjugué à  $s_2$ . J'ai cru que le meilleur hommage à rendre au Mémoire élégant et puissant de Vogt était de fournir cette nouvelle méthode, reproduisant rapidement, avec les notations de Vogt, les premiers calculs servant à obtenir cette condition nécessaire. Après avoir démontré que cette condition est suffisante, je reproduis à quelques modifications près, la méthode dont Vogt se sert pour étudier la courbe gauche de degré 8, lieu des sommets des tétraèdres. Cela me permet de signaler les cas de dégénérescence, fort curieux, mais négligés par Vogt, où cette courbe se décompose, en particulier le cas où elle dégénère en 8 droites. Et alors cette étude montre clairement que le second problème : tétraèdres dont les arêtes touchent simultanément deux quadriques est, en réalité, identique (*en général*) au précédent,

tandis que pour les cas de dégénérescence que j'ai indiqués pour le premier problème, il s'en éloigne beaucoup; ces progrès, dans la question, n'ont pu être réalisés que grâce aux résultats obtenus par Vogt, à la mémoire duquel je dédie ce travail en hommage.

2. ÉTUDE DU SYSTÈME  $s, s_1, s_2$ . — Je pose ( $i = 0, 1, 2; j \neq i, j = 0, 1, 2$ )

$$\begin{aligned} s_i &\equiv A_i x^2 + A'_i y^2 + A''_i z^2 + 2 B_i yz + 2 B'_i zx + 2 B''_i xy, \\ a_i &= A'_i A''_i - B_i^2, & a'_i &= A''_i A_i - B_i'^2, & a''_i &= A_i A'_i - B_i''^2, \\ b_i &= B'_i B''_i - A_i B_i, & b'_i &= B_i'' B_i - A'_i B_i', & b''_i &= B_i B'_i - A''_i B_i'', \\ \Theta_{ij} &= a_i A_j + a'_i A'_j + a''_i A''_j + 2 b_i B_j + 2 b'_i B'_j + 2 b''_i B''_j, \end{aligned}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} A_i & B_i'' & B_i' \\ B_i'' & A'_i & B_i \\ B_i' & B_i & A''_i \end{vmatrix}.$$

L'équation en  $\lambda$ , exprimant que la conique  $s_i + \lambda s_j = 0$  se décompose en deux droites est

$$\Delta_i + \lambda \Theta_{ij} + \lambda^2 \Theta_{ji} + \lambda^3 \Delta_j = 0.$$

Il existe  $\infty^1$  triangles  $t$  inscrits dans  $s$ , circonscrits à  $s_1$ , si l'on a  $\Theta_{10}^2 - 4\Theta_{01}\Delta_1 = 0$ ; les racines de l'équation en  $\lambda$  relative au faisceau  $s + \lambda s_1 = 0$  vérifient la relation

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2) = 0.$$

De la sorte, au cas où  $s$  dégénère en deux droites ( $\lambda_3 = 0$ ), on a  $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ , ce qui entraîne que l'une des deux droites est tangente à  $s_1$  (corrélativement, si  $s_1$  dégénère en deux points, l'un est sur  $s$ ; il faudrait alors partir directement des équations tangentielles).

Il existe  $\infty^1$  triangles  $t$  inscrits dans  $s$ , conjugués à  $s_2$ , si l'on a  $\Theta_{20} = 0$  (ou  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  pour l'équation en  $\lambda$  relative au faisceau  $s + \lambda s_2 = 0$ ). Si  $s$  dégénère en deux droites, elles sont conjuguées par rapport à  $s_2$ ; la relation exprime d'ailleurs aussi qu'il y a  $\infty^1$  triangles circonscrits à  $s_2$ , conjugués à  $s$ , de sorte que si  $s_2$  dégénère en deux points, ces deux points sont conjugués par rapport à  $s$ .

Il existe  $\infty^1$  triangles circonscrits à  $s_1$ , conjugués à  $s_2$ , si l'on a  $\Theta_{12} = 0$ .

Cela posé, donnons-nous un triangle  $t$ , une conique  $s$  circonscrite, une conique  $s_1$  inscrite, une conique  $s_2$  conjuguée : nous avons ainsi

disposé de  $6 + 2 + 2 + 2$  ou 12 paramètres manifestement indépendants et irréductibles pour ce système  $(t, s, s_1, s_2)$ . Prenons un point A arbitraire sur  $s$  et menons de A les tangentes à  $s_1$  qui recoupent  $s$  en B et C : la droite BC a ses coefficients exprimés rationnellement au moyen du paramètre unicursal  $\lambda$  qui fixe A sur  $s$ ; elle est tangente à  $s_1$ , quel que soit  $\lambda$ , et est la polaire de A relativement à une conique fixe nouvelle  $s'_2$ , conjuguée par rapport à tout triangle ABC, donc à  $t$ . On peut donc, si l'on préfère, partir de  $t, s, s'_2$ , ce qui définit  $s_1$ , parfaitement, comme réciproque de  $s$  vis-à-vis de  $s'_2$ ; le système  $t, s, s'_2, s_1$  dépend ainsi de  $6 + 2 + 2$  ou 10 paramètres; si  $s_2$  coïncide avec  $s'_2$ , le système  $(s, s_1, s'_2)$  admet  $\infty^1$  triangles  $t$  de l'espèce indiquée, inscrits dans  $s$ , circonscrits à  $s_1$ , conjugués à  $s'_2$ ; donc, puisque  $(t, s, s'_2, s_1)$  dépend de 10 paramètres, le système  $(s, s_1, s'_2)$  ne dépend que de neuf paramètres. Écartons ce cas et choisissons, quand on a fixé  $(t, s, s'_2, s_1)$  la conique  $s_2$  distincte de  $s'_2$ , de sorte que  $(t, s, s_1, s_2)$  dépend effectivement de 12 paramètres; si  $s_2$  et  $s'_2$  ont quatre points distincts, elles ont un seul triangle conjugué commun, à savoir  $t$ , de sorte que  $(s, s_1, s_2)$  ne peuvent admettre un autre triangle  $t'$  de l'espèce indiquée, distinct de  $t$ ; nous avons donc démontré que le système  $(s, s_1, s_2)$ , obtenu en effaçant  $t$  dans  $(t, s, s_1, s_2)$  dépend lui aussi de 12 paramètres et n'admet que le triangle  $t$  unique. On voit aisément que la conique  $s_2$ , tout en étant distincte de  $s'_2$ , peut lui être bitangente, aux points  $\beta, \gamma$  où  $s'_2$  coupe l'un des côtés de  $t$ , à savoir le côté BC, mais alors bien que  $s_2$  et  $s'_2$  aient une infinité de triangles conjugués communs, ayant le sommet A fixe et les sommets B', C' variables sur la droite  $\beta, \gamma$ , il n'y a parmi les  $\infty^1$  triangles AB'C' que le triangle ABC qui soit inscrit dans  $s$  : ici encore on a donc un unique triangle, et la configuration obtenue est comprise dans la famille à 12 paramètres (on a dû ajouter une condition complémentaire).

Or les trois équations

$$\Theta_{10}^2 - 4\Theta_{01}\Delta_1 = 0, \quad \Theta_{20} = 0, \quad \Theta_{12} = 0$$

réduisent le nombre de paramètres entrant dans les équations de  $s, s_1, s_2$  à 12 : l'ensemble des résultats indiqués montre que cet ensemble de conditions est nécessaire et suffisant pour obtenir un

triangle  $t$  (en général unique) inscrit dans  $s$ , circonscrit à  $s_1$ , conjugué à  $s_2$ . Grâce à  $\Theta_{10}^2 - 4\Theta_0\Delta_1 = 0$ , on peut partir d'un point A quelconque de  $s$ , obtenir la droite BC indiquée plus haut, donc  $s_2$  rationnellement <sup>(1)</sup> (au moyen des coefficients de  $s$  et  $s_1$ ) : le triangle  $t$  est le triangle conjugué commun à  $s_2$  et  $s_2$ .

J'indique un cas curieux de dégénérescence qui conduit à un triangle  $t$  dont les trois côtés sont nuls, les trois sommets étant confondus :  $s$  réduite à deux droites,  $D_1$  et  $D_2$ , et les deux coniques  $s_1$ ,  $s_2$  tangentes à  $D_1$  au point  $(D_1, D_2)$  : l'ensemble des conditions déjà imposées n'a besoin que d'être complété par la relation  $\Theta_{12} = 0$  pour  $s_1$  et  $s_2$ .

**3. PROBLÈME PRÉLIMINAIRE.** — Soient deux quadriques  $Q, Q_1$  rapportées à leur tétraèdre conjugué commun :

$$(Q) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0,$$

$$(Q_1) \quad A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + D_1t^2 = 0.$$

Nous avons besoin de l'équation en  $\lambda$  relative au faisceau de coniques, sections par le plan  $(u, v, w, h)$  des quadriques du faisceau  $Q + \lambda Q_1 = 0$ ; elle est manifestement donnée par l'équation

$$\frac{u^2}{A + \lambda A_1} + \frac{v^2}{B + \lambda B_1} + \frac{w^2}{C + \lambda C_1} + \frac{h^2}{D + \lambda D_1} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u^2}{A} + \frac{v^2}{B} + \frac{w^2}{C} + \frac{h^2}{D} \right) ABCD \\ & + \left[ \frac{u^2}{A} \left( \frac{B_1}{B} + \frac{C_1}{C} + \frac{D_1}{D} \right) + \frac{v^2}{B} \left( \frac{A_1}{A} + \frac{C_1}{C} + \frac{D_1}{D} \right) + \dots \right] ABCD \lambda \\ & + \left[ \frac{u^2}{A_1} \left( \frac{B}{B_1} + \frac{C}{C_1} + \frac{D}{D_1} \right) + \dots \right] A_1 B_1 C_1 D_1 \lambda^2 \\ & + \left( \frac{u^2}{A_1} + \frac{v^2}{B_1} + \frac{w^2}{C_1} + \frac{h^2}{D_1} \right) A_1 B_1 C_1 D_1 \lambda^3 = 0. \end{aligned}$$

En particulier, la condition pour que le plan  $(u, v, w, h)$  donne  $\infty^1$  triangles inscrits dans la section de  $Q$  et conjugués à la section

---

<sup>(1)</sup> Il existe quatre coniques  $S$  telles que par polarité relative à  $S$  la conique  $s$  s'échange avec  $s_1$  : ici l'équation de degré 4 dont dépend la recherche de  $S$  a une racine qui s'obtient rationnellement et conduit à  $s_2$ .

de  $Q$ , est

$$\frac{u^2}{A_1} \left( \frac{B}{B_1} + \frac{C}{C_1} + \frac{D}{D_1} \right) + \dots = 0.$$

Les raisonnements corrélatifs fournissent la condition pour que le point  $(x, y, z, t)$  donne un cône circonscrit à  $Q$ , capable d'une infinité de trièdres conjugués au cône circonscrit à  $Q$ ,

$$A x^2 \left( \frac{B}{B_1} + \frac{C}{C_1} + \frac{D}{D_1} \right) + \dots = 0.$$

**4. RECHERCHE DES TÉTRAÈDRES.** — Nous avons deux quadriques d'équations

$$(\Sigma) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$(S) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

(cela écarte le cas de deux quadriques ayant en commun une cubique gauche, ou encore dont l'intersection est formée d'une conique et de deux droites). Nous cherchons s'il existe un tétraèdre  $t, A_1 A_2 A_3 A_4$ , conjugué à  $\Sigma$ , d'arêtes tangentes à  $S$ ; par polarité relative à  $\Sigma$ ,  $S$  devient

$$(S') \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0,$$

et l'arête  $A_1 A_2$  devient  $A_3 A_4$  tangente à  $S'$  et aussi à  $S$  par hypothèse. Le cône  $C$  de sommet  $A_1$ , circonscrit à  $S$ , est harmoniquement circonscrit au cône de même sommet circonscrit à  $\Sigma$ ; d'après le calcul précédent, on a donc un premier lien de  $A_1$

$$T' \equiv ax^2(b+c+d) + by^2(a+c+d) + cz^2(a+b+d) + dt^2(a+b+c) = 0.$$

En remplaçant  $S$  par  $S'$  nous avons une équation nouvelle  $T'' = 0$  vérifiée par  $A_1$ ,

$$T'' \equiv (bc + cd + db)x^2 + \dots = 0.$$

Si nous posons

$$\Delta' \equiv abcd, \quad \Theta \equiv a + b + c + d,$$

$$\Phi \equiv ab + ac + ad + bc + cd + db, \quad \Theta' \equiv bcd + cda + dab + abc,$$

nous avons l'identité

$$T' + T'' \equiv \Phi \Sigma.$$

de sorte que  $A_1$ , ne devant pas être constamment sur  $\Sigma$ , nous avons

une condition *nécessaire*

$$\Phi = 0.$$

Cette condition entraîne que  $T'$  (coïncidant avec  $T''$ ) est harmoniquement circonscrite à  $\Sigma$  : de la sorte le plan polaire  $\alpha_1$  de  $A_1$  vis-à-vis de  $\Sigma$  coupe  $T'$  suivant une conique harmoniquement circonscrite à la section de  $\Sigma$ ; on constate aussi que le plan polaire de  $A_1$  coupe  $S$  suivant une conique harmoniquement inscrite à la section de  $\Sigma$ , toujours comme conséquence de  $\Phi = 0$  et  $T' = 0$ . Il reste donc une seule condition à écrire, à savoir que le plan  $\alpha_1$  coupe  $T'$  suivant une conique circonscrite à  $\infty^1$  triangles circonscrits à la section de  $S$ ; nous appliquons le calcul indiqué pour obtenir l'équation en  $\lambda$  relative aux sections par  $\alpha_1$  des quadriques  $T' + \lambda S = 0$ ; nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{x^2}{a} (3a + 2b + 2c + 2d) + \dots \right]^2 abcd - 4 \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} \right) \\ & \times \left\{ bcd[(a+b+d)(a+b+c) \right. \\ & \quad \left. + (a+b+c)(a+c+d) + (a+c+d)(a+b+d)]x^2 + \dots \right\} = 0. \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned} & (a+b+d)(a+b+c) \\ & = a^2 + (2b+c+d)a + b^2 + bc + cd + db = a^2 + ab + b^2 \end{aligned}$$

en tenant compte de  $\Phi = 0$ ; puis, toujours à cause de  $\Phi = 0$ ,

$$\begin{aligned} & (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \\ & (a^2 + ab + b^2) + (a^2 + ac + c^2) + (a^2 + ad + d^2) \\ & = 2a^2 + (a+b+c+d)^2 + ab + ac + ad \\ & = a^2 + a(a+b+c+d) + (a+b+c+d)^2. \end{aligned}$$

L'équation peut donc s'écrire, en divisant par  $abcd$ ,

$$\begin{aligned} & \left[ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(a+b+c+d) \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} \right) \right]^2 \\ & - 4 \left[ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} \right] \left[ (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(a+b+c+d) \right. \\ & \quad \left. + (a+b+c+d)^2 \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} \right) \right. \\ & \quad \left. + (ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2) \right] = 0, \end{aligned}$$

ce qui se réduit finalement à

$$W \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4 \left[ \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} \right] [ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2] \equiv \Sigma^2 - 4SS' = 0.$$

Chaque sommet  $A_1, A_2, A_3, A_4$  doit donc se trouver sur la courbe gauche  $\Gamma$  de degré 8 définie par la quadrique  $T'$  et la surface  $W$ .

La question n'est pas terminée : nous avons pris un sommet  $A_1$  sur  $\Gamma$  : comment avoir les autres ? Si l'on appelle  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  les coordonnées de  $A_1$ , son plan polaire  $\alpha_1, x_1x + y_1y + z_1z + t_1t = 0$  coupe  $T', S, \Sigma$  suivant 3 coniques formant la configuration étudiée au n° 2. La conique  $(S, \alpha_1)$  admet pour réciproque vis-à-vis de  $\Sigma$ , le cône  $(S', A_1)$  ou  $C'$ , de sorte que, *vis-à-vis de la section  $(\Sigma, \alpha_1)$ , la conique  $(S, \alpha_1)$  admet pour polaire réciproque la conique  $(C', \alpha_1)$  qui est distincte de  $(T', \alpha_1)$ ; donc les trois coniques  $(T', \alpha_1), (S, \alpha_1), (\Sigma, \alpha_1)$  admettent un triangle et un seul  $A_2A_3A_4$  inscrit dans la première, circonscrit à la seconde, conjugué à la troisième;  $A_2$ , pôle de  $A_3A_4$  par rapport à  $(\Sigma, \alpha_1)$  est donc sur la conique  $(C', \alpha_1)$  en même temps que sur  $(T', \alpha_1)$ ; nous allons montrer qu'il est aussi sur la section  $(C, \alpha_1)$  du cône  $(S, A_1)$  ou  $C$  par le plan  $\alpha_1$ . Admettons ce résultat : le tétraèdre  $A_1A_2A_3A_4$  est conjugué par rapport à  $\Sigma$ ; les arêtes  $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4$  sont tangentes à  $S$  et  $S'$ , de sorte que leurs conjuguées  $A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3$  sont tangentes à  $S'$  et  $S$ . Le problème est donc résolu; nous avons  $\infty^1$  tétraèdres, chaque point de  $\Gamma$  étant sommet d'un seul tétraèdre, (pourvu que  $\Phi$  soit nul, condition nécessaire et suffisante).*

Il reste à justifier du résultat réservé;  $C''$  étant le cône de sommet  $A_1$ , dont la base est la conique  $(T', \alpha_1)$ , les trois cônes  $C, C', C''$  appartiennent à un même faisceau linéaire, pourvu que  $A_1$  appartienne à  $T'$  (sans qu'il soit nécessaire de mettre en outre  $A_1$  sur  $\Gamma$ ); je reprends le calcul de Vogt : on a

$$C \equiv (aS_1 - a^2x_1^2)x^2 + \dots - 2abx_1y_1xy \dots,$$

$$C' \equiv \left( \frac{S_1'}{a} - \frac{x_1^2}{a^2} \right) x^2 + \dots - 2 \frac{x_1y_1}{ab} xy \dots,$$

$$C'' \equiv [a(b+c+d)\Sigma_1 - 2a(b+c+d)x_1^2]x^2 + \dots - 2[a(b+c+d) + b(a+c+d)]x_1y_1xy \dots$$

On vérifie aisément, tenant compte de  $\Phi = T'_1 = 0$ , la relation

$$C - abcd C' - C'' \equiv 0.$$

**5. RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES.** — En principe, la question est résolue, en esquivant les calculs de Vogt. Signalons néanmoins divers résultats de Vogt, en suivant une méthode légèrement différente.

$A_1$  est choisi arbitrairement sur  $\Gamma$ ; les points  $A_2, A_3, A_4$  s'obtiennent en cherchant les points communs aux surfaces

$$\begin{aligned} (1) \quad & C = 0, \quad C' = 0, \quad P \equiv x_1 x + y_1 y + z_1 z + t_1 t = 0, \quad T' = 0, \\ (2) \quad & W = 0. \end{aligned}$$

Les quatre équations de la première ligne se réduisent à trois distinctes, mais elles ont l'inconvénient de donner un quatrième point parasite; l'équation  $W = 0$  est nécessaire pour un sommet quelconque : elle permet donc de ne conserver que les trois points  $A_2, A_3, A_4$ . Vogt indique que l'on peut remplacer la surface  $W$ , de degré 4, par une quadrique. En effet, nous avons

$$(3) \quad \begin{cases} C \equiv SS_1 - Q^2 = 0, & Q = ax_1 x + by_1 y + cz_1 z + dt_1 t, \\ C' \equiv S'S'_1 - Q'^2 = 0, & Q' \equiv \frac{x_1 x}{a} + \frac{y_1 y}{b} + \frac{z_1 z}{c} + \frac{t_1 t}{d}, \\ W \equiv \Sigma^2 - 4SS' = 0, & \Sigma_1^2 - 4S_1 S'_1 = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\Sigma^2 \Sigma_1^2 = 16(SS_1)(S'S'_1) = 16Q^2 Q'^2,$$

et par conséquent

$$(4) \quad \Sigma \Sigma_1 = 4\varepsilon QQ' \quad (\varepsilon = +1 \text{ ou } -1).$$

Réciproquement, soit un point vérifiant les équations

$$(5) \quad C = 0, \quad C' = 0, \quad \Sigma \Sigma_1 = 4\varepsilon QQ'.$$

On a alors

$$0 = \Sigma^2 \Sigma_1^2 - 16Q^2 Q'^2 = \Sigma^2 \Sigma_1^2 - 16(SS')(S_1 S'_1) = \Sigma_1^2 (\Sigma^2 - 4SS'),$$

et de la sorte, si  $A_1$  n'est pas un point commun à  $\Gamma$  et  $\Sigma$ , on a

$$\Sigma^2 - 4SS' = 0;$$

le système (3) peut donc être remplacé par le système (5), ce qui revient à remplacer  $W$  par la quadrique  $W' \equiv \Sigma \Sigma_1 - 4QQ' = 0$  ou par la quadrique  $W'_1 \equiv \Sigma \Sigma_1 + 4QQ' = 0$ . La quadrique  $W'$  contient  $A_1$ , car la substitution de  $x_1, y_1, z_1, t_1$  à  $x, y, z, t$  dans  $W'$  donne  $\Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0$ ; d'autre part il suffit de faire *une expérience* pour reconnaître si les points  $A_2, A_3, A_4$  sont sur  $W'$  ou  $W'_1$ ; pour cela, utilisons le cas, que Vogt a négligé, des quadriques  $\Sigma, S$  ayant une conique de raccord; un tétraèdre régulier  $A, B, C, D$ , étant construit, le centre de gravité  $O$  est centre d'une sphère  $S$  tangente aux six arêtes et le centre d'une sphère  $\Sigma$  de rayon  $\frac{OA_1}{\sqrt{3}}$  conjuguée au tétraèdre; un déplacement arbitraire, autour de  $O$ , du tétraèdre donne ici  $\infty^3$  tétraèdres, et non seulement  $\infty^1$ . Par une transformation homographique, ce cas spécial revient à supposer

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \quad S \equiv S' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2, \quad T' \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 3t^2; \\ W \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2 - t^2)^2 \equiv -T'(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - t^2).$$

L'équation  $W = 0$  disparaît ici comme conséquence de  $T' = 0$ .

On a ici, pour déterminer  $A_2$ ,

$$(6) \quad SS_1 - Q^2 = 0, \quad \Sigma - 2S = 0, \quad \Sigma_1 - 2S_1 = 0;$$

ces équations entraînent  $\Sigma \Sigma_1 = 4SS_1 = 4Q^2$ ; or l'équation  $W' = 0$  se réduit ici à  $\Sigma \Sigma_1 - 4Q^2 = 0$  : c'est donc la quadrique  $W' = 0$  qu'il faut conserver.

Nous avons donc, pour déterminer  $A_2, A_3, A_4$  à résoudre le système surabondant

$$(E) \quad SS_1 - Q^2 = 0, \quad S'S'_1 - Q'^2 = 0, \quad P = 0, \quad \Sigma \Sigma_1 - 4QQ' = 0,$$

où l'on doit tenir compte des équations

$$(E') \quad T'_1 = 0, \quad \Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0.$$

Les équations (E) représentent dans le plan  $P = 0$  trois coniques qui ont trois points communs à elles trois; leur jacobienne se réduit aux côtés du triangle de ces trois points; elle est évidemment la section, par le plan  $P$ , de la surface lieu du point dont les plans polaires par rap-

port à C, C', W concourent en un point de P; l'équation de cette surface est

$$(7) \quad \begin{vmatrix} axS_1 - ax_1Q & \frac{x}{a}S'_1 - \frac{x_1}{a}Q' & x\Sigma_1 - 2ax_1Q' - \frac{2x_1}{a}Q & x_1 \\ byS_1 - by_1Q & \frac{y}{b}S'_1 - \frac{y_1}{b}Q' & y\Sigma_1 - 2by_1Q' - \frac{2y_1}{b}Q & y_1 \\ czS_1 - cz_1Q & \frac{z}{c}S'_1 - \frac{z_1}{c}Q' & z\Sigma_1 - 2cz_1Q' - \frac{2z_1}{c}Q & z_1 \\ dtS_1 - dt_1Q & \frac{t}{d}S'_1 - \frac{t_1}{d}Q' & t\Sigma_1 - 2dt_1Q' - \frac{2t_1}{d}Q & t_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les variables

$$P \equiv xx_1 + \dots, \quad Q \equiv axx_1 + \dots, \quad Q' \equiv \frac{xx_1}{a} + \dots, \quad R \equiv a(b+c+d)xx_1 + \dots$$

s'imposent évidemment; les plans obtenus en égalant à zéro P ou Q, ou Q', ou R forment bien un tétraèdre, car le déterminant

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x_1 & ax_1 & \frac{x_1}{a} & a(b+c+d)x_1 \end{vmatrix}$$

est identique à

$$x_1y_1z_1t_1 \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{a} & a(b+c+d) \end{vmatrix}.$$

En multipliant la seconde colonne de ce nouveau déterminant par  $(a+b+c+d)$  et la retranchant de la dernière on obtient

$$x_1y_1z_1t_1 \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{1}{a} & -a^2 \end{vmatrix},$$

qui n'est pas nul, *si les quantités a, b, c, d sont toutes distinctes*. Multiplions donc les déterminants (7) et (8) colonnes par colonnes; nous aurons des calculs tels que les suivants :

$$\begin{aligned} a^2x_1^2 + \dots &= (a+b+c+d)[ax_1^2 + \dots] - [a(b+c+d)x_1^2 + \dots] \\ &= \Theta S_1, \\ a^2(b+c+d)x_1^2 + \dots &= -[a(bc+cd+da)x_1^2 + \dots] \\ &= [bc dx_1^2 + \dots] - \Theta'[x_1^2 + \dots] \\ &= \Delta' S'_1 - \Theta' \Sigma_1. \end{aligned}$$

Le produit s'écrit donc

$$(9) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \Sigma_1 P - 2S_1 Q' - 2S'_1 Q & \Sigma_1 \\ -S_1 R & S'_1 P - \Sigma_1 Q' & -\Sigma_1 Q - 2\Theta S_1 Q' & S_1 \\ S_1 P - \Sigma_1 Q & \frac{S'_1 R}{\Delta'} & -\Sigma_1 Q' - 2\frac{\Theta'}{\Delta'} S'_1 Q & S'_1 \\ H & K & L & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

où l'on a posé pour abréger l'écriture

$$(10) \quad \begin{cases} \Theta = a + b + c + d, & \Theta' = bcd + cda + dab + abc, & \Delta' = abcd, \\ H = -\Theta'(S_1 P - \Sigma_1 Q) + \Delta'(S_1 Q' - S'_1 Q), \\ K \equiv \Theta(S'_1 P - \Sigma_1 Q') + S_1 Q' - S'_1 Q, \\ L \equiv \Sigma_1 R + 2\Theta' \Sigma_1 Q' - 2\Delta' S'_1 Q' - 2\Theta \Sigma_1 Q + 2S_1 Q. \end{cases}$$

Dans le déterminant (9) nous multiplions la seconde ligne par  $4S'_1$  et en retranchons le produit par  $\Sigma_1$  de la première; de même la troisième est multipliée par  $4S_1$  et nous en retranchons le produit de la première par  $\Sigma_1$ ; il reste donc l'équation (où l'on fait  $P=0$ ) jointe à  $P=0$

$$(11) \quad \begin{vmatrix} -\Sigma_1 R & -4S'_1 Q' & -2(\Theta \Sigma_1 - S_1) Q' - 2S'_1 Q \\ -4\Delta' S_1 Q & \Sigma_1 R & -2(\Theta' \Sigma_1 - \Delta' S'_1) Q - 2\Delta' S'_1 Q' \\ (\Theta' \Sigma_1 - \Delta' S'_1) Q + \Delta' S'_1 Q' & -(\Theta \Sigma_1 - S_1) Q' - S'_1 Q & \Sigma_1 R + 2(\Theta' \Sigma_1 - \Delta' S'_1) Q' - 2(\Theta \Sigma_1 - S_1) Q \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation se réduit à trois facteurs linéaires en  $Q$ ,  $Q'$ ,  $R$  dont chacun a la forme

$$(12) \quad \Sigma_1 R - 2\lambda S'_1 Q + 2\mu \Delta' S'_1 Q',$$

où  $\lambda$ ,  $\mu$  sont des constantes; si donc on fait  $Q'=0$ , on a

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \Sigma_1 R & 0 & -2S'_1 Q \\ 4\Delta' S_1 Q & \Sigma_1 R & -2(\Theta' \Sigma_1 - \Delta' S'_1) Q \\ (\Delta' S'_1 - \Theta' \Sigma_1) Q & -S'_1 Q & \Sigma_1 R - 2(\Theta \Sigma_1 - S_1) Q \end{vmatrix} \\ \equiv (\Sigma_1 R - 2\lambda_2 S'_1 Q)(\Sigma_1 R - 2\lambda_3 S'_1 Q)(\Sigma_1 R - 2\lambda_4 S'_1 Q).$$

Donc  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  sont les racines de l'équation de degré 3 obtenue en remplaçant au premier membre de (13) l'expression  $\Sigma_1 R$  par  $2\lambda S'_1$  et  $Q$  par 1, et égalant le résultat à zéro. On obtient ainsi

$$(14) \quad \varphi(\lambda) \equiv S'_1 \lambda^3 - (\Theta \Sigma_1 - S_1) \lambda^2 - (\Theta' \Sigma_1 - \Delta' S'_1) \lambda + \Delta' S'_1 = 0.$$

On doit maintenant opérer de même pour  $\mu$ , en annulant  $Q$  dans (11) : on arrive à une équation de degré (3) en  $\mu$  dont les racines doivent s'exprimer rationnellement en fonction de  $\lambda$ , et, par suite, puisqu'il s'agit d'équations de degré 3, sous forme homographique en  $\lambda$ ; ici on a la bonne chance que l'équation en  $\mu$  coïncide avec l'équation aux inverses de l'équation (14); on a ainsi décomposé le déterminant (11) en le produit des trois facteurs

$$(15) \quad \Sigma_i R - 2\lambda_i S'_i Q + 2 \frac{\Delta'}{\lambda_i} S_i Q' = 0 \quad (i = 2, 3, 4),$$

les  $\lambda_i$  étant racines de l'équation (14); inutile de faire les calculs de vérification pour les termes contenant en facteur  $Q$  et  $Q'$  simultanément ( $Q^2 Q'$  et  $Q Q'^2$ ); la vérification ne ferait que confirmer la méthode qui a remplacé la surface  $W$  par la quadrique  $W'$ ; en ajoutant un terme en  $P$ ,  $hP$ , au premier membre de (15) on a un nouveau plan passant par la droite  $A_j A_k$ ; on détermine  $h$  par la condition que ce plan contienne  $A_i$ , et l'on a ainsi l'équation du plan  $A_i A_j A_k$

$$(16) \quad 2 \Sigma_i R - 4\lambda_i S'_i Q + 4 \frac{\Delta' S_i}{\lambda_i} Q' + \Sigma_i \left( \lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i} \right) P = 0.$$

Je viens d'exposer cette détermination des points  $A_2, A_3, A_4$  par la méthode de Vogt, en donnant les explications nécessaires pour comprendre les calculs. Je m'écarte maintenant de la méthode de Vogt.

La courbe  $\Gamma$ , lieu des points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  est de degré 8 et admet le groupe constitué par les homologies involutives dont le pôle est un sommet du tétraèdre de référence et dont le plan directeur est la face opposée, puis, par les involutions biaxiales ayant pour axes deux arêtes opposées. On la transforme donc en une conique  $\Gamma'$

$$(17) \quad \begin{cases} a(b+c+d)X + b(c+d+a)Y + c(d+a+b)Z + d(a+b+c)T = 0, \\ (X+Y+Z+T)^2 - 4(aX+bY+cZ+dT)\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} + \frac{T}{d}\right) = 0, \end{cases}$$

en effectuant la transformation

$$(18) \quad x^2 = X, \quad y^2 = Y, \quad z^2 = Z, \quad t^2 = T.$$

On obtient les coordonnées paramétriques de  $\Gamma'$  (ou de  $\Gamma$ ) en intro-

duisant les génératrices rectilignes du cône représenté par la seconde équation (17), ce qui revient à écrire pour  $x^2, y^2, z^2, t^2$  trois équations linéaires

$$(19) \quad \Sigma + 2\rho S' = 0, \quad \Sigma + \frac{2S}{\rho} = 0, \quad T' = 0.$$

En résolvant, on a

$$(20) \quad \begin{cases} x^2 = a(b-c)(c-d)(d-b)[\rho^2 a - 2(bc+cd+db)\rho - bcd], \\ y^2 = -b(c-d)(d-a)(a-c)[\rho^2 b - 2(cd+da+ac)\rho - cda], \\ z^2 = c(d-a)(a-b)(b-d)[\rho^2 c - 2(da+ab+bd)\rho - dab], \\ t^2 = -d(a-b)(b-c)(c-a)[\rho^2 d - 2(ab+bc+ca)\rho - abc]. \end{cases}$$

Les cas particuliers, qui se mettent en évidence dans ce calcul, sont ceux où plusieurs des quantités  $a, b, c, d$  deviennent égales, ou bien encore où l'un des trinomes en  $\rho$  entrant dans  $x^2, y^2, z^2$  où  $t^2$  est carré parfait.

1°  $a = b, c$  et  $d$  étant différents et non égaux à  $a$ ; le plan représenté par la première équation (17) passe au sommet du cône et donne deux génératrices, de sorte que  $\rho$  n'est plus variable, mais a l'une ou l'autre de deux valeurs constantes; ce cas sera étudié plus loin;  $\Gamma$  se réduit à deux coniques et quatre droites.

2°  $a = b, c = d, c \neq a$ . L'intersection de  $S$  et  $\Sigma$  se compose de quatre droites; la courbe  $\Gamma$  se réduit aussi à ces quatre droites comptées chacune deux fois; si l'on prend un point  $A$ , arbitraire sur l'une  $\Delta$  de ces droites, chaque droite  $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$  doit être tangente à la fois à  $S$  et  $S'$  et par suite se réduit à  $\Delta$ ; on n'obtient donc rien d'intéressant; il est impossible ici que  $W$  comprenne  $T'$  comme morceau de décomposition.

3°  $a = b = c \neq d$ . C'est le cas signalé, où  $d$  est égal à  $(-a)$  et où la surface  $W$  contient  $T'$  comme morceau de décomposition: on a  $\infty^3$  tétraèdres.

4° La condition pour que  $x^2$  devienne carré parfait s'écrit

$$(bc + cd + db)^2 + abcd = 0,$$

ou encore

$$abcd - a(b + c + d)(bc + cd + db) = 0.$$

Sous cette forme, en supprimant le facteur  $a$ , on trouve

$$(b+c)(c+d)(d+b)=0,$$

de sorte que si l'on prend  $c+d=0$ ,  $x^2$  et  $y^2$  deviennent carrés parfaits simultanément. Ce cas sera retrouvé plus bas par un autre procédé; nous l'étudierons plus loin.

Nous bornant donc au cas général, sur la conique  $\Gamma'$  les points  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  sont tels qu'à un point  $\rho_i$  correspondent trois points  $\rho_i$ , la relation entre  $\rho_i$  et  $\rho_i$  étant symétrique et du troisième degré en  $\rho_i$ , ou en  $\rho_i$ ; il est connu que, dans ce cas, les quatre  $\rho$  du groupe  $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$  sont fournis par une relation

$$(21) \quad A\rho^4 + B\rho^3 + C\rho^2 + D\rho + E + \mu(A_1\rho^4 + B_1\rho^3 + C_1\rho^2 + D_1\rho + E_1) = 0,$$

où  $A, B, \dots, E_i$  sont des constantes et  $\mu$  un paramètre *arbitraire* dont la variation fournit tous les tétraèdres. Pour chaque groupe  $A'_1 A'_2 A'_3 A'_4$  on trouve huit tétraèdres,  $A_1 A_2, A_3 A_4$  se correspondant deux à deux dans les homographies et involutions déjà signalées. On passe de  $A'_i$  à  $A_i$  en prenant arbitrairement pour chaque radical  $\sqrt{X_i}, \sqrt{Y_i}, \sqrt{Z_i}, \sqrt{T_i}$  l'une ou l'autre des deux déterminations; une fois ce choix fait, nous allons voir que chaque point  $A_2, A_3, A_4$  s'obtient d'une façon unique. D'abord l'équation (16), en remplaçant  $2S_i$  par  $-\rho_i \Sigma_i$  et  $2S'_i$  par  $\frac{-\Sigma_i}{\rho_i}$ , peut s'écrire

$$(16') \quad 2R + 2\lambda_i \frac{Q}{\rho_i} - \frac{2\Delta' \rho_i}{\lambda_i} Q' + \left( \lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i} \right) P = 0.$$

Le point  $A_i$  est le pôle de ce plan, de sorte que l'on a

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{x_i}{x_1} = 2a(b+c+d) + 2a \frac{\lambda_i}{\rho_i} - \frac{2\Delta' \rho_i}{a\lambda_i} + \lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i}, \\ \frac{y_i}{y_1} = \dots, \quad \frac{z_i}{z_1} = \dots, \quad \frac{t_i}{t_1} = \dots \quad (i=2, 3, 4). \end{cases}$$

Donc le point  $A_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$  étant déterminé, on résout l'équation (14), qui d'ailleurs peut s'écrire

$$(14') \quad \lambda^2 + \rho_i(2\Theta + \rho_i)\lambda^2 + (2\Theta'\rho_i + \Delta')\lambda + \Delta'\rho_i^2 = 0,$$

et donne  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  : les formules (22) donnent  $A_2, A_3, A_4$ ; mais

alors  $\rho_i$  se calcule rationnellement au moyen de  $\rho_1$  et de  $\lambda_i$ ; Vogt suggère de calculer  $\rho_i$  par la formule  $\rho_i = \frac{-2S_i}{\Sigma_i}$ , en utilisant les relations (22) qui donnent

$$\begin{aligned}\Sigma_i &= x_i^2 [4a^2(b+c+d)^2 + \dots] + \dots, \\ S_i &= ax_i^2 [4a^2(b+c+d)^2 + \dots] + \dots\end{aligned}$$

Nous avons déjà montré comment un tel calcul se fait et n'introduit que les quantités  $S_i, S'_i, \Sigma_i$  : par exemple

$$\begin{aligned}a^2(b+c+d)^2 &= -a(b+c+d)(bc+cd+db) = -(\Theta - a)(\Theta' - bcd) \\ &= -\Theta\Theta' + a\Theta' + bcd\Theta - abcd, \\ a^2(b+c+d)^2x_i^2 + \dots &= -\Theta\Theta'\Sigma_i + \Theta S_i + \Delta' S'_i - \Delta' \Sigma_i.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve  $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\rho_1}$ , mais on abrège beaucoup les calculs en écrivant les relations

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{lll} S_i S_1 - Q_i^2 = 0, & S'_i S'_1 - Q_i'^2 = 0, & \Sigma_i \Sigma_1 - 4Q_i Q'_i = 0, \\ \Sigma_i + 2\rho_i S'_i = 0, & \Sigma_1 + 2\rho_1 S'_1 = 0, & \\ \Sigma_i + \frac{2}{\rho_i} S_i = 0, & \Sigma_1 + 2\frac{S_1}{\rho_1} = 0. & \end{array} \right.$$

On en déduit

$$(24) \quad \begin{aligned}\Sigma_i \Sigma_1 &= 4\rho_i \rho_1 S'_i S'_1 = 4\rho_i \rho_1 Q_i'^2 = 4Q_i Q'_i, \\ \rho_i \rho_1 &= \frac{Q_i}{Q'_i}.\end{aligned}$$

Or, d'après les formules (22)

$$Q_i = 2a^2(b+c+d)x_i^2 + \frac{2\lambda_i}{\rho_1}a^2x_i^2 - \frac{2\Delta'\rho_1}{\lambda_i}x_i^2 + \left(\lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i}\right)ax_i^2 + \dots,$$

et, d'après le calcul qui a été expliqué, on trouve

$$Q_i = 2\Delta' S'_i - 2\Theta' \Sigma_i + \frac{2\lambda_i}{\rho_1} \Theta S_1 - \frac{2\Delta'\rho_1}{\lambda_i} \Sigma_1 + \left(\lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i}\right) S_1.$$

Un calcul analogue donne

$$Q'_i = 2\Theta \Sigma_i - 2S_1 + \frac{2\lambda_i}{\rho_1} \Sigma_1 - \frac{2\rho_1}{\lambda_i} \Theta' S'_1 + \left(\lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i}\right) S'_1.$$

La formule (24) donne donc

$$(25) \quad \rho_i \rho_1 = \frac{\rho_1 \left[ -\frac{\lambda_i}{2} - \frac{3}{2} \frac{\Delta'}{\lambda_i} \right] - \Theta \lambda_i - 2\Theta' - \frac{\Delta'}{\rho_1}}{\rho_1 + 2\Theta + \frac{\Theta'}{\lambda_i} + \frac{1}{\rho_1} \left[ \frac{3}{2} \lambda_i + \frac{\Delta'}{2\lambda_i} \right]} = \lambda_i,$$

en tenant compte de l'équation (14') qui donne  $\lambda$ . En remplaçant dans (14')  $\lambda$  par  $\rho_1 \rho$ , on trouve l'équation symétrique en  $\rho$  et  $\rho_1$

$$(26) \quad \rho_1^2 \rho^2 (\rho_1 + \rho) + 2\Theta \rho_1^2 \rho^2 + 2\Theta' \rho_1 \rho + \Delta' (\rho_1 + \rho) = 0.$$

Le calcul des fonctions symétriques  $\rho_2 + \rho_3 + \rho_4$ ,  $\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4}$ ,  $\rho_2 \rho_3 \rho_4$  des racines  $\rho_2, \rho_3, \rho_4$  de (26) fournit aussitôt

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = -2\Theta, \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} + \frac{1}{\rho_4} = -\frac{2\Theta'}{\Delta'}, \\ \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 = -\Delta', \end{array} \right.$$

de sorte que les quatre  $\rho$  associés sont racines de l'équation, contenant l'indéterminée  $\mu$

$$(28) \quad \rho^4 + 2\Theta \rho^3 - 2\Theta' \rho - \Delta' + \mu \rho^2 = 0.$$

Les équations (14') ou (26) sont équivalentes; (14') a l'avantage, pour une valeur  $\lambda$  donnée, de donner deux valeurs de  $\rho$ , que j'appellerai  $\rho_1, \rho_2$ ; on résout l'équation

$$(29) \quad \rho^2 + \frac{2(\Theta\lambda + \Theta')\lambda}{\lambda^2 + \Delta'} \rho + \lambda = 0,$$

ensuite on remplace  $\lambda$  par la valeur  $\lambda'$  égale à  $-\frac{\Delta'}{\lambda}$  et l'équation (29), formée avec  $\lambda'$ , donne  $\rho_3$  et  $\rho_4$ , on a ainsi l'arête  $A_1 A_2$ , puis l'arête  $A_3 A_4$ . En résolvant (29) on a

$$(30) \quad \rho_1 = \frac{-(\Theta\lambda + \Theta')\lambda + \sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2 + \Delta'}, \quad \rho_2 = \frac{-(\Theta\lambda + \Theta')\lambda - \sqrt{R(\lambda)}}{\lambda^2 + \Delta'},$$

avec

$$(31) \quad \begin{aligned} R(\lambda) &\equiv (\Theta\lambda + \Theta')^2 \lambda^2 - \lambda(\lambda^2 + \Delta')^2 \\ &\equiv -\lambda(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)(\lambda - d^2). \end{aligned}$$

Pour obtenir cette décomposition en facteurs de  $R(\lambda)$ , il suffit de vérifier les égalités

$$\begin{aligned} [(a+b+c+d)a^4 + (bcd+\dots)a^2]^2 &= a^2[a^4 + abcd]^2, \\ (a+b+c+d)a^2 + (bcd+\dots) &= a^2 + bcd. \end{aligned}$$

Cela revient à

$$(b+c+d)a^2 + cda + dab + abc \equiv a\Phi = 0.$$

*La relation entre  $\rho$  et  $\rho_1$ , équivalente à la relation entre  $\rho$  et  $\lambda$ , est donc une relation de genre 2, en général.*

En dehors des cas particuliers déjà cités, où plusieurs des nombres  $a, b, c, d$  sont égaux, elle s'abaisse au genre 1 pour  $b = -a$ , les quantités  $a, c, d$  étant liées par la condition  $a^2 - cd = 0$ , nous avons déjà signalé ce cas par une autre voie. Le cas  $b = -a, c = d$  fait donc retomber sur la conique de raccord pour  $S$  et  $\Sigma$ . Si l'on suppose  $b = -a, d = -c$ , on a  $a^2 + c^2 = 0$  et l'on a une relation unicursale entre  $\rho$  et  $\rho_1$  : ce cas particulier qui a échappé à Vogt, fournit une courbe  $\Gamma$  décomposée en huit droites et sera étudié plus bas.

On peut remarquer que pour  $b = \pm a$ ,  $S$  et  $S'$  sont bitangentes en deux points de l'arête  $y = z = 0$  du tétraèdre de référence conjugué à  $S$  et  $\Sigma$  : pour  $b = a$ , elles sont toutes deux bitangentes à  $\Sigma$  en ces mêmes points; pour  $b = -a$  elles sont bitangentes entre elles, mais non à  $\Sigma$ ; de plus, les points où  $\Sigma$  perce l'arête  $z = t = 0$ , ceux où  $S$  perce cette arête, et les sommets du tétraèdre sur cette arête forment trois couples se divisant deux à deux harmoniquement. Pour  $b = -a, c = -d$ , l'intersection de  $S$  et  $S'$  se réduit à quatre droites et la courbe  $\Gamma$  se décompose en huit droites.

**6. TÉTRAÈDRES SPÉCIAUX, DANS LE CAS GÉNÉRAL.** — Restons dans le cas général où  $a, b, c, d$  sont tous distincts, ainsi que  $a^2, b^2, c^2, d^2$ . L'équation (26) montre que si  $\rho$  et  $\rho_1$  sont égaux sans être nuls ni infinis, leur valeur commune est racine de l'équation

$$\rho^4 + \Theta\rho^2 + \Theta'\rho + \Delta' = 0,$$

qui est l'équation en  $\rho$  relative au faisceau  $\Sigma + \rho S = 0$ ; donc, si nous

prenons  $\rho_1 = \rho_2 = -a$ , les formules (27) donnent

$$\rho_3 + \rho_4 = -2(b + c + d), \quad \rho_3 \rho_4 = \frac{-bcd}{a},$$

de sorte que  $\rho_3$  et  $\rho_4$  sont racines du trinôme

$$\rho^2 a - 2(bc + cd + db)\rho - bcd \equiv \rho^2 a + 2a(b + c + d)\rho - bcd,$$

qui figure dans l'expression de  $x^2$ , formules (20).

On a, d'après les formules (20), dans ce cas,

$$(32) \quad \frac{x_1^2}{(b-c)(c-d)(d-b)} = \frac{y_1^2}{b(c-d)(c+d)} = \frac{z_1^2}{c(d-b)(d+b)} \\ = \frac{t_1^2}{d(b-c)(b+c)},$$

puis,  $\lambda_2$  étant égal à  $a^2$ , d'après les formules (22),

$$(33) \quad \frac{x_2}{-x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Dans la face  $x_1 = 0$  du tétraèdre conjugué commun, la perspective commune des deux sommets  $A_1, A_2$  à partir du point  $(1, 0, 0, 0)$  est l'un des points  $h$  communs aux sections de  $S$  et  $S'$  par cette face; la droite  $A_1 A_2$  est ainsi tangente à  $S$  et  $S'$ , précisément en  $h$  et a pour conjuguée vis-à-vis de  $\Sigma$  une tangente commune aux sections de  $S$  et  $S'$ ; cette tangente porte  $A_3$  et  $A_4$  et, comme vérification,  $x_3, x_4$  sont nuls d'après la remarque faite plus haut; le tétraèdre  $A_1 A_2 A_3 A_4$  considéré s'échange en lui-même dans l'homologie involutive qui a pour plan directeur  $x_1 = 0$  et pour pôle le point  $(1, 0, 0, 0)$ , de sorte que  $\rho_1 = -a$  donne quatre tétraèdres seulement, au lieu des huit tétraèdres que l'on obtient pour  $\rho$  quelconque.

L'équation (28), pour  $\mu = \infty$ , se réduit à  $\rho^2 = 0$ , de sorte qu'elle a alors une racine double nulle, une racine double infinie. Pour  $\rho_1 = \rho_2 = 0$ , les points  $A_1, A_2$  sont confondus en l'un des huit points communs à  $\Sigma, S, T'$  et les points  $A_3, A_4$  en un point, correspondant, commun à  $\Sigma, S', T'$ . La droite  $A_1 A_3$  est génératrice de  $\Sigma$ , tangente à  $S$ , donc aussi à  $S'$ ; les points de contact de cette génératrice sont précisément sur  $\Gamma$ ; la droite  $A_1 A_2$  est la tangente à  $\Gamma$  en  $A_1$ ; de même pour  $A_3 A_4$ ; il y a aussi quatre

arêtes confondues avec  $A_1 A_3$ , et deux autres qui ont une longueur réduite à zéro. Pour ce cas particulier, on a

$$\begin{aligned}\frac{x_1^2}{(b-c)(c-d)(d-b)} &= \frac{-y_1^2}{(a-c)(c-d)(d-a)} \\ &= \frac{z_1^2}{(a-b)(b-d)(d-a)} = \frac{-t_1^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}; \\ x_2 &= x_1, \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = z_1, \quad t_2 = t_1; \\ x_3 &= x_1 = ax_1, \quad y_3 = y_1 = by_1, \quad z_3 = z_1 = cz_1, \quad t_3 = t_1 = dt_1.\end{aligned}$$

**7. CAS PARTICULIER  $a=b$ ; QUADRIQUES  $S, \Sigma$  BITANGENTES.** — On a dans ce cas

$$\Phi = a^2 + 2a(c+d) + cd = 0,$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

$$S \equiv a(x^2 + y^2) + cz^2 + dt^2,$$

$$S' \equiv \frac{x^2 + y^2}{a} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d},$$

$$T' \equiv a(a+c+d)(x^2 + y^2) + c(2a+d)z^2 + d(2a+c)t^2,$$

$$W \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 4 \left[ a(x^2 + y^2) + cz^2 + dt^2 \right] \left[ \frac{x^2 + y^2}{a} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} \right].$$

Le système linéaire en  $x^2, y^2, z^2, t^2$  écrit plus haut [formules (19)]

$$\Sigma + 2\rho S' = 0, \quad \Sigma + \frac{2S}{\rho} = 0, \quad T' = 0,$$

ne peut ici avoir de solution que si  $\rho$  est choisi de sorte que tous les déterminants d'ordre 3 déduits du tableau rectangulaire, à 4 colonnes et 3 lignes, des coefficients soient nuls; or ces déterminants sont les seconds membres des formules (20); les deux derniers le sont, dès que  $a$  et  $b$  sont égaux; on suppose  $c \neq d$ ,  $c$  et  $d$  étant chacun différents de  $a$ , de sorte que  $\rho$  doit être racine de l'équation

$$\rho^2 + 2(a+c+d)\rho + a[a+2(c+d)] = 0.$$

Les racines sont  $-a$  et  $-[a+2(c+d)]$ ; nous supposons  $c+d \neq 0$ , sinon on aurait  $a=b$ ,  $a^2 - c^2 = 0$ ,  $c = -d$  et chaque cas  $a=b=c=-d$ ,  $a=b=-c=d$  conduit aux quadriques  $S$  et  $\Sigma$  à conique de raccord, cas étudié déjà. En posant  $x^2 + y^2 = X$ ,  $z^2 = Z$ ,  $t^2 = T$  la courbe  $\Gamma$  se

détermine par le système

$$(34) \quad \begin{cases} X + Z + T + 2\rho \left( \frac{X}{a} + \frac{Z}{c} + \frac{T}{d} \right) = 0, \\ X + Z + T + \frac{2}{\rho} (aX + cZ + dT) = 0, \\ a(a + c + d)X + c(2a + d)Z + d(2a + c)T = 0, \end{cases}$$

la dernière ligne, en remplaçant  $cd$  par  $-a^2 - 2a(c + d)$ , peut être remplacée par

$$(a + c + d)X - (a + 2d)Z - (a + 2c)T = 0.$$

Remplaçant  $\rho$  par  $-a$ , nous obtenons les deux coniques  $\Gamma_1, \Gamma_2$  définies par le système

$$(35) \quad \frac{x^2 + y^2}{4(c - d)} = \frac{z^2}{-(a + 2d)} = \frac{t^2}{a + 2c}.$$

La valeur  $\rho = -[a + 2(c + d)]$  fournit les quatre droites  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  définies par le système

$$(36) \quad x^2 + y^2 = 0, \quad (a + 2d)z^2 + (a + 2c)t^2 = 0.$$

Nous choisissons les noms  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ , ainsi

$$\begin{aligned} (\Delta_1) \quad & x + iy = 0, & \sqrt{a + 2d}z + i\sqrt{a + 2c}t = 0, \\ (\Delta_2) \quad & x + iy = 0, & \sqrt{a + 2d}z - i\sqrt{a + 2c}t = 0, \\ (\Delta_3) \quad & x - iy = 0, & \sqrt{a + 2d}z - i\sqrt{a + 2c}t = 0, \\ (\Delta_4) \quad & x - iy = 0, & \sqrt{a + 2d}z + i\sqrt{a + 2c}t = 0, \end{aligned}$$

de sorte que, dans cet ordre,  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  sont les côtés d'un quadrilatère gauche; le point  $(\Delta_1, \Delta_2)$ , où  $\delta$  est l'un des points de contact de  $S$  et  $\Sigma$ , le plan  $(\Delta_1, \Delta_2)$  étant le plan tangent commun; mêmes propriétés pour le point  $\delta'$ ,  $(\Delta_3, \Delta_4)$ , ou le plan  $(\Delta_3, \Delta_4)$ . Le point  $(\Delta_2, \Delta_3)$  où  $\gamma$  a pour coordonnées  $(0, 0, \sqrt{a + 2c}, -i\sqrt{a + 2d})$ : c'est le sommet de l'un des deux cônes du second degré circonscrits simultanément à  $S$  et  $\Sigma$ ; prenons donc un point quelconque  $A_1$  sur  $\Delta_2$ : les deux cônes  $C$  et  $C'$ , circonscrits de  $A_1$  à  $S$  et  $S'$  sont osculateurs suivant la génératrice  $\Delta_2$  ou  $A_1\delta$ ; cette proposition est en effet, par dualité, la correspondante de celle-ci: si deux surfaces  $S$  et  $S'$  sont tangentes en un point, tout plan qui passe par l'une des tangentes au point double donne dans  $S$  et  $S'$

deux sections osculatrices; ici la développable circonscrite à S et S' a un plan tangent double (le plan  $\Delta_1 \Delta_2$ ) et nous avons pris un point sur l'une des génératrices de cette développable contenues dans le plan tangent double ( $A_1$  sur  $\Delta_2$ ); les deux cônes C et C' ont donc trois génératrices communes confondues avec  $\Delta_2$  et une autre génératrice commune; comme on doit garder trois, convenablement choisies, des quatre génératrices communes, on doit garder sûrement  $\Delta_2$  et prendre le point d'intersection de  $\Delta_2$  avec le plan polaire (relativement à  $\Sigma$ ) de  $A_1$  : ce point est le point ( $\Delta_1, \Delta_2$ ) ou  $\delta$  qui joue ainsi le rôle de  $\Delta_2$ ; les points  $A_3, A_4$  sont à l'intersection de T' avec la droite conjuguée, vis-à-vis de  $\Sigma$ , de  $A_1 A_2$  : cette droite est précisément dans le plan tangent en  $\delta$  à  $\Sigma$ , plan qui est tangent à T', de sorte que  $A_3$  et  $A_4$  coïncident avec  $A_2$  ou  $\delta$  : *trois arêtes du trièdre sont donc confondues avec  $\Delta_2$ , les trois autres confondues avec la conjuguée de  $\Delta_2$ , qui se détermine aisément* :  $A_1$  a pour coordonnées  $[\lambda, i\lambda, \mu\sqrt{a+2c}, -i\mu\sqrt{a+2d}]$ , de sorte que son plan polaire tourne quand  $\lambda : \mu$  varie autour de la droite

$$x + iy = 0, \quad z\sqrt{a+2c} - i\sqrt{a+2d}t = 0,$$

qui est la tangente en  $\delta$  à la conique

$$(\Gamma_2) \quad z\sqrt{a+2c} - i\sqrt{a+2d}t = 0 \quad (a+2d)(x^2+y^2) + 4z^2(c-d) = 0.$$

Supposons maintenant que  $A_1$  soit pris en  $\gamma$ , intersection de  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  : cette fois C et C' coïncident; donc, d'après la proposition démontrée pour C, C', C'', le cône C'' coïncide avec eux : l'unique cône C, C', C'' en jeu a donc pour base la conique  $\Gamma_2$ , dont le plan est le plan polaire de  $\gamma$  vis-à-vis de  $\Sigma$ ; cette fois la conique  $\Gamma_2$  admet pour polaire réciproque, vis-à-vis de la section de  $\Sigma$  par le plan de  $\Gamma_2$ , précisément la section commune de S et S' par le plan de  $\Gamma_2$ , de sorte qu'il existe *exceptionnellement*  $\infty^1$  triangles inscrits dans  $\Gamma_2$ , circonscrits à la section commune de S et S', conjugués relativement à la section de  $\Sigma$  : le point  $A_1$  coïncidant donc avec le point  $\gamma$  ou ( $\Delta_1, \Delta_3$ ), nous avons  $\infty^1$  tétraèdres ayant le point  $A_1$  comme sommet commun; le point ( $\Delta_1, \Delta_4$ ) fournit une seconde série  $\infty^1$ . En dehors de ces deux séries de tétraèdres véritables, nous avons les séries de tétraèdres dégénérés fournis par  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ .

Ces résultats sont évidents en partant d'une pyramide triangulaire régulière de sommet  $A_1$ , ayant pour base le triangle équilatéral  $A_2A_3A_4$ ; nous supposons  $A_1A_2 \neq A_2A_3$ . Si nous prenons le cercle inscrit dans la base  $A_2A_3A_4$  et les trois cercles *inscrits* dans chaque face latérale  $A_1A_iA_j$  [ou les trois cercles *ex-inscrits* dans ces faces relativement à l'angle  $A_1$ ], ces quatre cercles tangents deux à deux déterminent une sphère  $S$  de centre  $O$ ; les hauteurs de la pyramide concourent en un point  $\omega$  distinct de  $O$ ; la sphère conjuguée au tétraèdre, de centre  $\omega$ , est facile à construire : nous avons ainsi réalisé le cas de figure annoncé; il résulte même de cette construction que *si un tétraèdre admet une sphère  $S$  tangente aux six arêtes, il est nécessairement tel que les arêtes issues d'un certain sommet sont égales et les arêtes situées dans la face opposée, égales aussi*; cela tient à ce que la sphère  $\Sigma$  conjuguée jointe à la sphère  $S$  donnent la disposition étudiée ici. Mais la conception purement géométrique de cette figure ne nous aurait pas fait découvrir la seconde série de tétraèdres effectifs, ni les quatre séries de tétraèdres dégénérés.

Au point de vue de la réalité, on peut avoir des dispositions diverses : avec deux sphères réelles, les quatre droites  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  sont imaginaires. On peut avoir un cas de figure où tout est réel :  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ . Supposons en effet que  $y$  et  $z$  soient deux imaginaires pures et posons  $iy = y', iz = z'$ ; supposons  $c, d$  positifs; l'égalité  $(a+2c)(a+2d) = 3cd$  entraîne que  $a+2c, a+2d$  soient de même signe, si  $a$  est réel : or l'équation  $a^2 + 2a(c+d) + cd = 0$  a ses deux racines en  $a$  réelles (d'ailleurs négatives, mais peu importe). Alors on a

$$\Sigma \equiv x^2 - y'^2 + z^2 - z'^2, \quad S \equiv a(x^2 - y'^2) + cz'^2 - dt'^2.$$

Le système  $\Gamma_1, \Gamma_2$  est défini par le système

$$\frac{x^2 - y'^2}{4(c-d)} + \frac{z^2}{a+2d} = 0, \quad \left(\frac{z}{z'}\right)^2 = \frac{a+2d}{a+2c}$$

et est réel : intersection d'un cône réel par l'un ou l'autre de deux plans réels. De même  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  définies par

$$x^2 - y'^2 = 0, \quad \left(\frac{z}{z'}\right)^2 = \frac{a+2c}{a+2d},$$

et l'on obtient une infinité de tétraèdres réels, dans les deux séries (car il suffit de prendre les  $\infty^1$  triangles inscrits dans une conique réelle tracée sur  $T'$  et conjugués à une conique réelle tracée sur  $\Sigma$ ).

8. CAS PARTICULIER  $c + d = 0$ . — Nous supposons  $a + b \neq 0$ ,  $a - b \neq 0$ ,  $a - c \neq 0$ ,  $a - d \neq 0$ ,  $b - c \neq 0$ ,  $b - d \neq 0$ . Le calcul général, réalisé pour les formules (20), s'applique; nous avons  $c + d = 0$  et  $ab - c^2 = 0$ ; le trinome qui figure dans  $x^2$  s'écrit

$$\rho^2 a + 2c^2 \rho + bc^2 \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{b} (\rho + b)^2.$$

On écrit donc

$$(36) \quad \begin{cases} x = \varepsilon a \sqrt{(b-c)(c-d)(d-b)} (\rho + b) & (\varepsilon = +1 \text{ ou } -1), \\ y = \varepsilon' b \sqrt{-(c-d)(d-a)(a-c)} (\rho + a) & (\varepsilon' = +1 \text{ ou } -1), \\ z^2 = c^2 (d-a)(a-b)(b-d) [\rho^2 - 2\{c-a-b\}\rho + c^2], \\ t^2 = -d^2 (a-b)(b-c)(c-a) [\rho^2 + 2\{c+a+b\}\rho + c^2]. \end{cases}$$

Quand on a fixé  $\varepsilon, \varepsilon'$ , on peut donc écrire ces formules sous la forme

$$(37) \quad \frac{x'}{\rho} = \frac{y'}{1} = \frac{z}{\sqrt{A(\rho^2 + 2B\rho + c^2)}} = \frac{t}{\sqrt{A'(\rho^2 + 2B'\rho + c^2)}},$$

où  $A, B, A', B'$  sont certaines constantes, tandis que

$$(38) \quad \begin{cases} x' = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{(b-c)(c-d)(d-b)}} - \frac{\varepsilon' y}{\sqrt{-(c-d)(d-a)(a-c)}}, \\ y' = \frac{\varepsilon' y}{b\sqrt{-(c-d)(d-a)(a-c)}} - \frac{\varepsilon x}{a\sqrt{(b-c)(c-d)(d-b)}}. \end{cases}$$

Remplacer *simultanément*  $\varepsilon$  par  $-\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  par  $-\varepsilon'$  ne change pas les formules (37), en raison de la double détermination des deux radicaux écrits sous  $z$  et  $t$ . Il est clair que les formules (37) définissent une biquadratique  $\Gamma$ , d'équations rationnelles

$$(39) \quad z^2 = A(x'^2 + 2Bx'y' + c^2y'^2), \quad t^2 = A'(x'^2 + 2B'x'y' + c^2y'^2).$$

En changeant de signe une seule des quantités  $\varepsilon$  ou  $\varepsilon'$  on a une autre biquadratique  $\Gamma_2$ , se déduisant d'ailleurs de  $\Gamma$ , par l'homologie involutive

$$\frac{X_2}{-X_1} = \frac{Y_2}{Y_1} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Si l'on choisit le sommet  $A_1$  sur  $\Gamma_1$  par exemple, nous allons voir qu'un autre sommet  $A_2$  est aussi sur  $\Gamma_1$ , tandis que les deux autres  $A_3, A_4$  sont sur  $\Gamma_2$ . L'équation (26) devient maintenant, avec  $c + d = 0$ ,  $ab = c^2$ ,

$$(40) \quad (\rho_1 + \rho)(\rho^2 \rho_1^2 - c^4) + 2(a + b)\rho_1 \rho[\rho_1 \rho - c^2] = 0.$$

Le facteur  $\rho_1 \rho - c^2 = 0$  fournit le sommet que nous appelons  $A_2$ ; le facteur  $(\rho_1 + \rho)(\rho \rho_1 + c^2) + 2(a + b)\rho_1 \rho = 0$  fournit  $A_3, A_4$ ; comme vérification, on a bien  $\rho_3 \rho_4 = c^2$ . Si nous nous reportons à la conique  $\Gamma'$ , dans le cas général, les quatre points  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  forment un groupe où chaque corde  $A'_i A'_j$  ( $i \neq j$ ) enveloppe une courbe  $\gamma$  de troisième classe; les deux courbes  $\Gamma', \gamma$  admettant une infinité de triangles de Poncelet; ici, accidentellement  $\gamma$  se décompose en un point, où concourent toutes les droites telles que  $A'_1 A'_3$  ou  $A'_1 A'_4$  (facteur  $\rho \rho_1 - c^2 = 0$ ), tandis que les sécantes telles que  $A'_1 A'_3, A'_1 A'_4$  enveloppent une conique admettant avec  $\Gamma'$  une infinité de quadrilatères de Poncelet.

Donc sur les trois points  $A_2, A_3, A_4$  un se sépare, à savoir  $A_2$ , et doit décrire le même lieu que  $A_1$ , tandis que  $A_3, A_4$  décrivent  $\Gamma_2$ . Pour le voir en toute rigueur, appelons  $\rho_1$  le paramètre de  $A_1$ ,  $\frac{c^2}{\rho_1}$  celui de  $A_2$ ; les formules (36) doivent, au fond, être regardées comme donnant des valeurs proportionnelles pour  $x_1, y_1, z_1, t_1$ ; si donc on suppose que  $A_2$  correspond à la même détermination pour  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , on voit que les rapports  $\frac{x_2}{x_1}, \frac{y_2}{y_1}, \frac{z_2}{z_1}, \frac{t_2}{t_1}$  sont proportionnels aux nombres ( $\eta = \pm 1, \eta' = \pm 1$ )

$$(41) \quad \frac{\frac{c^2}{\rho_1} + b}{\rho_1 + b}, \quad \frac{\frac{c^2}{\rho_1} + a}{\rho_1 + a}, \quad \eta \frac{c}{\rho_1}, \quad \eta' \frac{c}{\rho_1}.$$

D'autre part, les formules (22) donnent aussi (à un facteur de proportionnalité près) les mêmes rapports : on trouve, avec les hypothèses actuelles ( $c + d = 0, ab - c^2 = 0$ ),

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2c + \frac{ac}{\rho_1} + \frac{c\rho_1}{a}, & 2c + \frac{bc}{\rho_1} + \frac{c\rho_1}{b}, \\ a + b + \rho_1 + \frac{c^2}{\rho_1}, & -a - b - \rho_1 - \frac{c^2}{\rho_1}. \end{array} \right.$$

On voit aussitôt que la multiplication de la ligne (41) par  $\frac{(\rho_1 + a)(\rho_1 + b)}{c}$  la convertit en la ligne (42), à condition de prendre  $\eta = 1$ ,  $\eta' = -1$ ; le résultat est donc vérifié.

Cette vérification a aussi l'avantage de montrer que la correspondance  $(A_1, A_2)$  est comprise dans une involution biaxiale; utilisons en effet les formules (37); on a, pour  $A_1$  et  $A_2$ ,

$$(43) \quad \frac{x'_2}{y'_2} = \frac{c^2}{\rho_1} = c^2 \frac{y'_1}{x'_1}, \quad \frac{z_2}{y'_2} = \frac{c}{\rho_1} \frac{z_1}{y'_1} = \frac{cz_1}{x'_1}, \quad \frac{t_2}{y'_2} = -\frac{c}{\rho_1} \frac{t_1}{y'_1} = -\frac{ct_1}{x'_1}.$$

Ce sont les formules de l'involution biaxiale qui a pour axes les droites  $z = 0$ ,  $x' + cy' = 0$ , puis  $t = 0$ ,  $x' - cy' = 0$ . La courbe  $\Gamma_1$  contient le point  $(x'_2, y'_2, z_2, -t_2)$ , qui cette fois correspond au point  $A_1$  dans l'homologie involutive qui a pour pôle le point  $x' + cy' = 0$ ,  $z = t = 0$  et pour plan directeur le plan  $x' + cy' = 0$ ; cette homologie  $(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, -t_2)$ , suivie de l'homologie involutive  $(x'_2, y'_2, z_2, -t_2; x_2, y_2, z_2, t_2)$ , fait passer de  $A_1$  à  $A_2$ , de sorte que l'involution biaxiale  $(A_1, A_2)$  donne une série  $\infty^1$  de cordes  $A_1 A_2$  engendrant une surface de degré 4 (autrement dit  $x, y, z, t$  étant exprimés en fonction d'un argument elliptique,  $A_1$  et  $A_2$  ont des arguments dont la différence est la moitié d'une période des fonctions elliptiques introduites).

$\Gamma_2$ , qui est une transformée par homologie de  $\Gamma_1$ , possède les propriétés analogues pour les cordes  $A_3 A_4$ .

On peut remarquer que si  $\rho_1$  devient égal à  $(-a)$ ,  $\rho_2$  devient égal à  $\frac{c^2}{(-a)}$  ou  $(-b)$  et que  $\rho_3$  et  $\rho_4$  sont égaux l'un à  $(-a)$ , l'autre à  $(-b)$ ; l'équation qui donne les quatre valeurs associées de la variable  $\rho$  est donc avec un paramètre  $\mu$  arbitraire

$$(\rho + a)^2 (\rho + b)^2 - \mu^2 \rho^2 = 0.$$

La valeur  $\rho = -a$  fournit quatre points communs à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  pendant que les quatre autres points communs sont fournis par  $\rho = -b$ ;  $\rho = -a$  fournit les points  $(\sqrt{2}, 0, \pm 1, \pm 1)$  et  $\rho = -b$  les points  $(0, \sqrt{2}, \pm 1, \mp 1)$ ; avec ces huit points particuliers, on ne peut former

que deux tétraèdres de l'espèce cherchée dont les sommets sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \dots (\sqrt{2}, 0, 1, 1) \\ A_2 \dots (\sqrt{2}, 0, -1, -1) \\ A_3 \dots (0, \sqrt{2}, 1, -1) \\ A_4 \dots (0, \sqrt{2}, -1, -1) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} A_1 \dots (\sqrt{2}, 0, 1, -1) \\ A_2 \dots (\sqrt{2}, 0, -1, +1) \\ A_3 \dots (0, \sqrt{2}, 1, 1) \\ A_4 \dots (0, \sqrt{2}, -1, -1) \end{array} \right.$$

Pour les valeurs  $\rho = -c$ ,  $\rho = -d$  on trouve les mêmes particularités que dans le cas général.

9. CAS PARTICULIER  $c + d = 0$ ,  $a + b = 0$ . — On peut alors sans restreindre, supposer

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ S \equiv x^2 - y^2 + i(z^2 - t^2) = 0, \\ S' \equiv x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2) = 0, \\ T' \equiv x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 0, \\ W \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4[x^2 - y^2 + i(z^2 - t^2)][x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2)]. \end{array} \right.$$

Nous savons que les formules (20) donnent pour  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ ,  $t^2$  des carrés parfaits en  $\rho$ , de sorte que la courbe  $\Gamma$  dégénère ici en huit droites; autrement dit, si nous considérons ce nouveau cas comme dégénérescence du précédent, chaque biquadratique  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se décompose elle-même en quatre droites. Il est d'ailleurs plus aisé de faire la discussion directement; en tenant compte de  $T' = 0$ , l'équation  $W$  donne  $(x^2 + y^2)^2 - [(x^2 - y^2)^2 + (z^2 - t^2)^2] = 0$  ou  $4x^2y^2 - (z^2 - t^2) = 0$ , de sorte que l'on a à résoudre le système  $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ ,  $2xy = z^2 - t^2$  ou celui qui s'en déduit en permutant  $z$  et  $t$ ; on a ainsi, en ajoutant et retranchant  $(x + y)^2 = 2z^2$ ,  $(x - y)^2 = 2t^2$ , ce qui donne quatre droites pour le premier des deux systèmes.

Si nous considérons les deux droites

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Delta_1) \quad x + y = z\sqrt{2}, \quad x - y = t\sqrt{2}, \\ (\Delta_2) \quad x + y = -z\sqrt{2}, \quad x - y = -t\sqrt{2}, \end{array} \right.$$

on constate aussitôt qu'elles sont conjuguées par rapport à  $\Sigma$  et qu'elles sont tangentes à  $S$  et  $S'$ . Prenons un point  $A_1$  sur  $\Delta_1$ : le plan polaire de  $A_1$  par rapport à  $\Sigma$  coupe  $\Delta_1$  de nouveau en  $A_2$ ; de  $A_1$  dans le plan  $A_1\Delta_2$  on peut mener à  $S$  deux tangentes qui percent  $\Delta_2$  en  $A_3$

et  $A_4$ ; le tétraèdre  $A_1 A_2 A_3 A_4$  répond aux conditions, comme on le vérifie aisément. Il y a quatre couples de droites telles que  $\Delta, \Delta_2$ , de sorte qu'il y a quatre séries simplement infinies de tétraèdres, séries distinctes les unes des autres.

On peut faire disparaître les imaginaires des équations de  $S$  et  $S'$  en posant

$$(46) \quad z = \zeta + i\theta, \quad t = \zeta - i\theta.$$

On a alors

$$(47) \quad \begin{cases} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + 2(\zeta^2 - \theta^2), \\ S \equiv x^2 - y^2 - 4\zeta\theta, \\ S' \equiv x^2 - y^2 + 4\zeta\theta, \\ T' \equiv x^2 - y^2 + 2(\zeta^2 - \theta^2). \end{cases}$$

Si le tétraèdre  $(x, y, \zeta, \theta)$  est réel, les quadriques  $\Sigma, S, S', T'$  sont, non seulement d'équation réelle, mais même à point réels, mais les droites  $\Delta$  sont toutes imaginaires.

On peut se demander ce qu'est, sur la conique  $\Gamma'$  introduite précédemment, la figure  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  : les cordes joignant deux de ces quatre points passent par l'un ou l'autre de trois points fixes formant un triangle conjugué par rapport à  $\Gamma'$ ; l'équation en  $\rho$  et  $\rho_1$  se décompose ici en  $(\rho + \rho_1)(\rho\rho_1 + 1)(\rho\rho_1 - 1) = 0$ .

**10. TÉTRAÈDRES DONT LES ARÊTES SONT TANGENTES A DEUX QUADRIQUES  $S, S'$ .** — Donnons-nous *a priori* un tétraèdre  $T$ ; une quadrique  $S$  assujettie à toucher les six arêtes de  $T$  dépend de trois paramètres. Si nous appelons  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les sommets de  $T$  et  $\alpha_{ij}$  le point de contact inconnu de l'arête  $A_i A_j$  avec  $S$ , il est facile de voir que la donnée des points  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$  relatifs à trois arêtes formant un trièdre détermine complètement  $S$ ; en effet, le plan  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$  coupe  $A_{23}, A_{34}, A_{42}$  en  $\beta_{23}, \beta_{34}, \beta_{42}$  qui sont en ligne droite; donc les conjugués  $\alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{42}$  (des points  $\beta_{ij}$ , par rapport aux sommets  $A_i, A_j$ ) sont tels que les droites  $A_4 \alpha_{23}, A_2 \alpha_{34}, A_3 \alpha_{42}$  concourent; il y a donc une conique  $s_1$  inscrite dans le triangle  $A_2 A_3 A_4$  et touchant les côtés aux points  $\alpha_{34}, \alpha_{42}, \alpha_{23}$ ; d'autre part  $\alpha_{13}, \alpha_{14}$  sont en ligne droite avec  $\beta_{34}$ , de sorte que  $\alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{34}$  sont aussi les points de contact des côtés du triangle  $A_1 A_3 A_4$ , avec une conique  $s_2$  : finalement les quatre

coniques  $s_1, s_2, s_3, s_4$  ainsi obtenues se touchent deux à deux en un point d'une arête de T et sont évidemment sur une même quadrique S qui est la seule à toucher T en  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$ . Remarquons que si l'on avait donné  $\alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{43}$ , il aurait fallu s'assurer d'abord que  $A_4\alpha_{23}, A_2\alpha_{34}, A_3\alpha_{42}$  concourent; ensuite on aurait pu faire passer un plan quelconque par la droite  $\beta_{23}\beta_{34}\beta_{42}$  et l'on aurait obtenu  $\infty^1$  quadriques. La proposition réciproque est la suivante : *la donnée des plans  $P_{23}, P_{34}, P_{42}$  tangents à la quadrique inconnue S aux points inconnus où elle doit toucher  $A_{23}, A_{34}, A_{42}$  détermine complètement S*; bien entendu  $P_{ij}$  contient l'arête  $A_{ij}$ .

Imaginons donc deux quadriques S, S' tangentes aux arêtes de T; le système général T, S, S' dépend de dix-huit paramètres, et nous allons constater que le système S, S' obtenu ne dépend que de dix-sept paramètres et admet  $\infty^1$  tétraèdres T. Pour le voir remarquons qu'il existe  $\infty^3$  quadriques  $\Sigma$  conjuguées au tétraèdre T; si l'on donne un point  $\alpha_{12}$  de l'arête  $A_{12}$  et un plan  $P'_{34}$  contenant l'arête  $A_{34}$ , on obtient une condition linéaire entre les coefficients de  $\Sigma$  en imposant que  $\alpha_{12}$  soit le pôle de  $P'_{34}$  relativement à  $\Sigma$ ; donc  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$  étant les points de contact de S avec  $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4$ , et  $P'_{34}, P'_{42}, P'_{23}$  étant les plans tangents à S' aux points où elle touche  $A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3$ , la quadrique  $\Sigma$ , déterminée d'une façon unique par ce fait que  $\alpha_{1i}$  admet pour plan polaire  $P'_{jk}$ , est telle que S admette S' pour réciproque vis-à-vis de  $\Sigma$ <sup>(1)</sup>. Nous avons donc la configuration étudiée jusqu'ici. On peut ramener les équations de S, S',  $\Sigma$  aux formes

$$(48) \quad \begin{cases} (S) & ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0, \\ (S') & \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0, \\ (\Sigma) & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \end{cases}$$

(<sup>1</sup>) Dans un travail, comme celui-ci, où le simple dénombrement d'inconnues et d'équations peut conduire à des erreurs, il importe de démontrer en toute rigueur l'existence de la quadrique  $\Sigma$  unique. Prenons  $A_1A_2A_3A_4$  pour tétraèdre de référence; le point donné  $\alpha_{12}$  a des coordonnées connues  $(1, \lambda_2, 0, 0)$  et le plan donné  $P'_{34}$  des coordonnées connues  $(1, L_2, 0, 0)$ ;  $\alpha_{13}$  est  $(1, 0, \lambda_3, 0)$ ,  $\alpha_{14}(1, 0, 0, \lambda_4)$  et les plans  $P'_{42}, P'_{23}$  sont  $(1, 0, L_3, 0), (1, 0, 0, L_4)$ . La quadrique  $\Sigma$  est  $x_1^2 + \frac{L_2}{\lambda_2} x_2^2 + \frac{L_3}{\lambda_3} x_3^2 + \frac{L_4}{\lambda_4} x_4^2 = 0$ .

Les racines de l'équation en  $\lambda$  relatives au faisceau  $S - \lambda S' = 0$  sont  $a^2, b^2, c^2, d^2$ ; la relation  $\Sigma ab = 0$  devient donc  $\Sigma \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} = 0$  *nécessaire et suffisante* <sup>(1)</sup> pour que  $S, S'$  admettent un tétraèdre dont les arêtes les touchent toutes deux et par suite  $\infty^1$  *tétraèdres* de cette espèce; la conclusion du moins est générale, quand  $S$  et  $S'$  admettent un tétraèdre conjugué commun unique (et non dégénéré).

Examinons maintenant quelques cas particuliers. Le cas où  $S$  et  $\Sigma$  se raccordent le long d'une conique est ici sans intérêt, car  $S'$  se confond alors avec  $S$ . Le cas de deux quadriques  $S, \Sigma$  bitangentes fournit

$$S \equiv a(x^2 + y^2) + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$S' \equiv \frac{1}{a}(x^2 + y^2) + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

La transformation homographique

$$(x, y, z, t; X \cos \alpha - Y \sin \alpha, X \sin \alpha + Y \cos \alpha, Z, T)$$

fournit  $\infty^1$  nouveaux tétraèdres conjugués communs à  $S, S', \Sigma$  sans changer ces quadriques ni l'ensemble des tétraèdres d'arêtes tangentes à  $S, S', \Sigma$ .

Les circonstances sont bien différentes avec l'hypothèse  $c + d = 0$ ,  $ab - c^2 = 0$ . Nous avons alors

$$S \equiv ax^2 + by^2 + c(z^2 - t^2) = 0,$$

$$S' \equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{1}{c}(z^2 - t^2) = 0,$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

(<sup>1</sup>) Dans cette relation chaque radical  $\sqrt{\lambda_i}$  est pris avec la même détermination dans les produits où il figure, de sorte que l'on doit, pour avoir une relation rationnelle, prendre le produit de 8 facteurs irrationnels, obtenus en changeant le signe des termes  $\sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, \sqrt{\lambda_4}$  de toutes les façons possibles. Il ne faut pas confondre cette relation avec  $\Sigma \sqrt{\lambda_i \lambda_j} = 0$  qui ferait intervenir 32 facteurs et qui, rendue rationnelle serait décomposable en plusieurs rationnels, dont l'un correspond à  $\Sigma \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} = 0$ .

*Cette fois la transformation homographique*

$$(x, y, z, t; X, Y, Z \text{ Ch } \alpha + T \text{ Sh } \alpha, \varepsilon \{ Z \text{ Sh } \alpha + T \text{ Ch } \alpha \}) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

*ne change ni S ni S', mais donne successivement  $\infty^1$  quadriques  $\Sigma$ , de sorte que nous obtenons  $\infty^2$  tétraèdres d'arêtes tangentes à S et S', répartis en  $\infty^1$  séries, les tétraèdres d'une même série étant conjugués par rapport à l'une des quadriques  $\Sigma$ . Les sommets de ces tétraèdres sont répartis sur l'une ou l'autre des deux surfaces engendrées par les biquadratiques  $\Gamma_1, \Gamma_2$  indiquées plus haut, au cours de cette transformation homographique continue. En changeant de notations (ce qui revient à remplacer  $t$  par  $it$ , et supposer  $x = 1$ ) nous pouvons ramener S et S' à être de révolution autour du même axe,  $\Sigma$  étant à points réels et la transformation homographique devient une révolution.*

Le cas particulier  $a + b = 0, c + d = 0$  a donné

$$S \equiv x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2) = 0,$$

$$S' \equiv x^2 - y^2 - i(z^2 - t^2) = 0,$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

*Dans ce cas la transformation homographique à deux paramètres*

$$(x, y, z, t; X \text{ Ch } \alpha + Y \text{ Sh } \alpha, \varepsilon \{ X \text{ Sh } \alpha + Y \text{ Ch } \alpha \} Z \text{ Ch } \beta + T \text{ Sh } \beta, \eta \{ Z \text{ Ch } S + T \text{ Ch } \beta \})$$

*avec  $\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1$  nous donne  $\infty^3$  tétraèdres d'arêtes tangentes à S et S' répartis en  $\infty^2$  séries, les tétraèdres d'une même série étant conjugués par rapport à une même quadrique. Il y a possibilité de faire venir un sommet en un point arbitraire de l'espace; mais quelle que soit la façon de choisir les variables, on n'obtient jamais de tétraèdres réels. Avec la substitution déjà employée*

$$z = \zeta + i\theta, \quad t = \zeta - i\theta,$$

on a

$$S \equiv x^2 - y^2 - 4\zeta\theta, \quad S' \equiv x^2 + y^2 + 4\zeta\theta, \quad \Sigma \equiv x^2 + y^2 + 2(\zeta^2 - \theta^2),$$

*et l'on a trois quadriques réelles, puis une transformation homographique réelle*

$$(x, y, \zeta, \theta; X \text{ Ch } \alpha + Y \text{ Sh } \alpha, X \text{ Sh } \alpha + Y \text{ Ch } \alpha, B\beta Z, \frac{\theta}{\beta}).$$

Nous n'avons pas épuisé tous les cas spéciaux. Étant données deux

quadriques S, S' rapportées à un tétraèdre conjugué commun d'équations

$$(S) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$(S') \quad \frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} + \frac{t^2}{d'} = 0;$$

elles sont réciproques vis-à-vis de l'une des huit quadriques

$$(\Sigma) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0,$$

définies par les relations

$$A^2 = \frac{a}{a'}, \quad B^2 = \frac{b}{b'}, \quad C^2 = \frac{c}{c'}, \quad D^2 = \frac{d}{d'}.$$

Nous avons ensuite envisagé le cas où l'on a

$$\Sigma \frac{a}{A} \frac{b}{B} = 0,$$

ce qui, en général, n'est possible qu'avec l'une des huit quadriques  $\Sigma$ , quand on a la relation  $\Sigma \sqrt{aa'} \sqrt{bb'} = 0$  (il suffit de raisonner sur la relation équivalente  $\Sigma \frac{ab}{AB} = 0$ , car on a  $aa' = A^2 a'^2$ ,  $\pm \sqrt{aa'} = A a' = \frac{a}{A}$ ).

On voit aisément que si nous supposons  $b + c + d = 0$ ,  $bc + cd + db = 0$ , la quadrique S peut être associée à l'une des deux quadriques

$$(\Sigma) \quad \pm x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

et que l'on obtient comme réciproque toujours la même quadrique

$$(S') \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

On a, en effet, pris  $A = \pm 1$ ,  $B = C = D = 1$  et les deux relations

$$\pm a(b + c + d) + bc + cd + db = 0$$

sont réalisées ensemble; cette fois les deux quadriques S, S' admettent deux séries  $\infty^1$  de tétraèdres dont les arêtes leur sont tangentes. Pour la première série on a

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ T' \equiv b(c + d + a)y^2 + c(d + a + b)z^2 + d(a + b + c)t^2 = 0.$$

La quadrique  $T'$  est un cône. Pour la seconde série on a

$$\Sigma = -x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

$$T' \equiv b(c + d - a)y^2 + c(d - a + b)z^2 + d(-a + b + c)t^2.$$

Dans chaque série, les tétraèdres sont conjugués par rapport à la quadrique  $\Sigma$  correspondante. Ici les trois quantités  $b, c, d$  sont racines d'une équation de la forme  $u^3 = \alpha$ ; si  $\alpha$  est réel, le nombre  $b$  est réel,  $c$  et  $d$  sont imaginaires conjuguées de sorte qu'en écrivant  $z = \zeta + i\theta$   $t = \zeta - i\theta$ , on fait disparaître les imaginaires de toutes les équations  $S, S', \Sigma, T'$ .

De même, quand nous prenons  $a + b = 0, a^2 = cd$  nous pouvons prendre pour  $\Sigma$  soit  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ , soit  $-x^2 - y^2 + z^2 + t^2 = 0$ . Nous avons alors la première combinaison

$$\begin{aligned} (S) \quad & a(x^2 - y^2) + cz^2 + dt^2 = 0, \\ (S) \quad & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ (S') \quad & \frac{1}{a}(x^2 - y^2) + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0, \\ & T' \equiv (c + d - a)x^2 - (a + c - d)y^2 + a(z^2 + t^2) = 0, \end{aligned}$$

puis la seconde combinaison

$$\begin{aligned} (S) \quad & a(x^2 - y^2) + cz^2 + dt^2 = 0, \\ (S) \quad & -x^2 - y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ (S') \quad & \frac{1}{a}(x^2 - y^2) + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0, \\ & T' \equiv + (a + c + d)x^2 - (c + d - a)y^2 + a(z^2 + t^2) = 0, \end{aligned}$$

et chacune donne encore une série  $\infty^4$  de tétraèdres.

D'ailleurs on passe de la première combinaison à la seconde en changeant  $x^2$  en  $(-y^2)$  et  $y^2$  en  $(-x^2)$ , ce qui revient à faire une transformation homographique simple, mais on remarque que la transformation homographique déjà employée qui consiste à remplacer  $x, y$  par  $X \operatorname{Ch} \alpha + Y \operatorname{Sh} \alpha, \varepsilon(X \operatorname{Sh} \alpha + Y \operatorname{Ch} \alpha)$  donne ce résultat en prenant  $\operatorname{Ch} \alpha = 0, \operatorname{Sh} \alpha = \pm i$ , ce qui donne  $e^\alpha = \pm i, \alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ , de sorte que nous pouvons négliger ce dernier résultat.

**11. EXAMEN DES CAS SPÉCIAUX.** — Dans ce qui précède nous avons admis que  $S$  et  $\Sigma$  (ou  $S$  et  $S'$ ) admettent un tétraèdre conjugué non

dégénéré [pour être plus précis, au moins un tel tétraèdre]. Cette conclusion est en défaut : 1° si  $S$  et  $\Sigma$  sont tangentes en un point et un seul; 2° si  $S$  et  $\Sigma$  se coupent suivant une cubique gauche et une génératrice; 3° si  $S$  et  $\Sigma$  se coupent suivant une conique et deux génératrices; mêmes remarques si  $S$  et  $S'$  offrent une de ces configurations.

Or pour le problème relatif à  $S$  et  $\Sigma$ , nous avons obtenu la condition nécessaire et suffisante  $\Sigma\lambda_i\lambda_j$  : cette condition, que l'on pourrait former sans particulariser le système de référence, subsiste même dans les cas particuliers que nous avons indiqués; le lieu des sommets des tétraèdres peut subir certaines altérations : points doubles, ou décomposition. Même remarque pour le problème relatif à  $S$  et  $S'$  et la relation  $\Sigma\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} = 0$ .

Il y a aussi à considérer le cas où  $S$  se réduit à un cône : il n'y a pas lieu de traiter le cas où  $\Sigma$  dégénère. Dans ce cas, les raisonnements et calculs effectués subsistent tant qu'il n'y a pas lieu de faire intervenir les équations tangentielles de  $S$ , qui sont au nombre de deux, et non plus d'une seule; de la sorte certains résultats du cas général ne peuvent plus être suivis par continuité : en prenant

$$(S) \quad by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

on obtient pour  $S'$

$$(S') \quad x = 0, \quad \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

Si donc on fait tendre  $a$  vers zéro, on a bien le droit de conclure à la condition, nécessaire et suffisante,  $bc + cd + db = 0$ , mais le lieu  $\Gamma$  va être modifié complètement, parce que l'équation  $W = 0$  n'a plus lieu d'être envisagée. En effet, la méthode générale conduit encore pour le lieu des points  $A_i$ , tels que le cône  $C$  de sommet  $A_i$  circonscrit à  $S$  (dégénéré en deux plans), soit harmoniquement circonscrit au cône de même sommet circonscrit à  $\Sigma$ , à l'équation

$$T' \equiv b(c + d)y^2 + c(b + d)z^2 + d(b + c)t^2 = 0.$$

De même la condition pour que le plan polaire de  $A_i$  par rapport à  $\Sigma$  coupe  $S$  suivant une conique harmoniquement inscrite dans la

section de  $\Sigma$  est

$$T'' = x^2(bc + cd + db) + y^2cd + z^2bd + t^2bc = 0,$$

et nous retrouvons la condition  $bc + cd + db \equiv 0$  pour que ces deux lieux coïncident. On a eu simplement à faire  $a = 0$  dans les résultats du cas général, parce que l'équation tangentielle de la quadrique  $S$  n'a pas eu à intervenir. Mais ici, si nous cherchions à continuer l'application du calcul général, pour obtenir la condition pour qu'un plan coupe  $T'$  suivant une conique circonscrite à  $\infty^1$  triangles circonscrits à la section de  $S$ , il faudrait considérer les quadriques du faisceau  $T' + \lambda S = 0$ , qui sont toutes des cônes, et au lieu de prendre leurs équations tangentielles écrire qu'elles se décomposent : le résultat est donc tout à fait modifié. Ici, on constate même que la condition est satisfaite *identiquement* pour un plan *quelconque* ; cela tient à ce que  $T'$  et  $S$  sont deux cônes de même sommet,  $T'$  étant capable de  $\infty^1$  angles trièdres à faces tangentes à  $S$  ; en raisonnant en effet sur les sections de  $T'$ ,  $\Sigma$ ,  $S$  par le plan  $x = 0$ , la base de  $T'$  est harmoniquement circonscrite à la section de  $\Sigma$ , laquelle est elle-même harmoniquement circonscrite à la section de  $S$  : en écrivant l'équation de  $T'$  sous la forme  $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0$ , on voit bien que les bases de  $T'$  et  $S$  sont réciproques vis-à-vis de la section de  $\Sigma$ , de sorte que tous les triangles inscrits dans  $T'$ , conjugué à  $\Sigma$ , ont leurs côtés tangents à la base de  $S$ .

Cela posé, pour tout point  $A_1$  de  $T'$ , la fin du raisonnement se poursuit sans modification, et l'on trouve un unique triangle  $A_2, A_3, A_4$  dans le plan polaire de  $A_1$  vis-à-vis de  $\Sigma$ . Les tétraèdres obtenus ont leurs arêtes sécantes à la conique  $S'$ . Synthétiquement, on peut énoncer les résultats ainsi :

*Le cône  $S$  est simplement assujéti à être harmoniquement inscrit dans le cône de même sommet circonscrit à  $\Sigma$  ; la conique  $S'$  réciproque de  $S$  vis-à-vis de  $\Sigma$  est base du cône  $T'$ .*

Si l'on fait une homologie *quelconque* dont le pôle est le sommet commun de  $S$  et  $T'$ , dont le plan directeur est le plan polaire de ce sommet par rapport à  $\Sigma$ , les cônes  $S$ ,  $T'$  et la conique  $S'$  restent invariables, de sorte que  $S$  et la conique  $S'$  admettent  $\infty^3$  tétraèdres dont les

arêtes sont tangentes à  $S$ , sécantes à  $S'$ , les sommets étant sur  $T'$ ; la quadrique  $\Sigma$  donne naissance à un faisceau de quadriques se raccordant suivant la même conique.

Pour qu'un cône  $S$  et une conique  $S'$  donnent cette propriété, il faut et il suffit que la conique  $S'$  soit capable d'une infinité de triangles circonscrits à la section de  $S$  par son plan.  $A_1$  étant un point de  $T'$ , la perspective de  $A_1$  sur  $S'$  à partir du sommet de  $S$  est un point  $\alpha$ ; on construit le triangle  $\alpha\beta\gamma$  inscrit dans  $S'$ , circonscrit à la section de  $S$ ;  $\beta, \gamma$  sont deux sommets  $A_3, A_4$  des tétraèdres,  $A_2$  est un point quelconque de la génératrice passant en  $A_1$  sur le cône  $T'$ .

Nous pouvons de même examiner le cas de deux cônes  $S, S'$  devant admettre des tétraèdres dont les arêtes leur sont tangentes. L'équation en  $\lambda$  relative au faisceau  $S + \lambda S' = 0$  ( $S$  et  $S'$  n'ont pas le même sommet) a deux racines particulières connues, l'une  $\lambda_1$ , nulle, l'autre infinie  $\lambda_4$ ; quand, dans le cas général  $\lambda_4$  devient infini dans la relation  $\Sigma \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} = 0$ , celle-ci devient  $\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_3} = 0$ ; ici  $\lambda_1$  devenant nul, il reste  $\lambda_2 = \lambda_3$ , ce qui peut avoir lieu dans deux cas : ou bien  $S$  et  $S'$  se touchent en un point, ou bien l'intersection de  $S$  et  $S'$  se décompose en deux coniques, de sorte que, dans ce dernier cas, les quadriques du faisceau ont un tétraèdre conjugué commun. Il est facile de se rendre compte de cette décomposition du problème; car l'équation générale des quadriques tangentes aux arêtes d'un tétraèdre, adopté comme tétraèdre de référence est ( $\varepsilon_i = 1$  ou  $-1$ )

$$\begin{aligned} A^2x^2 + A'^2y^2 + A''^2z^2 + A'''^2t^2 + 2\varepsilon_1 AA'xy + 2\varepsilon_2 AA''xz \\ + 2\varepsilon_3 AA'''xt + 2\varepsilon_4 A'A''yz + 2\varepsilon_5 A'A'''yt + 2\varepsilon_6 A''A'''zt = 0. \end{aligned}$$

En changeant éventuellement de signe  $A', A'', A'''$  on peut supposer  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ ; cela posé, si les trois quantités  $\varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$  sont égales à  $+1$ , on a un plan double d'équation

$$(-Ax + A'y + A''z + A'''t)^2 = 0;$$

si deux de ces quantités,  $\varepsilon_4$  et  $\varepsilon_5$  par exemple, valent  $(+1)$  et si l'autre  $\varepsilon_6$  vaut  $(-1)$  on a un cône  $(-Ax + A'y + A''z + A'''t)^2 - 4A''A'''zt = 0$ , dont le sommet est sur l'arête  $z = t = 0$ ; si  $\varepsilon_5$  et  $\varepsilon_6$  valent  $(-1)$ ,  $\varepsilon_4$  valant  $(+1)$ , on a encore le cône

$$(Ax - A'y - A''z + A'''t)^2 - 4AA'''xt = 0$$

dont le sommet est sur l'arête  $x = t = 0$ ; si  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ , on a une quadrique véritable, sauf si l'un des nombres  $A, A', A'', A'''$  est nul, auquel cas on a un cône dont le sommet est confondu avec un sommet du tétraèdre.

Donc si deux cônes sont tangents aux arêtes d'un même trièdre, ils peuvent avoir leurs sommets sur la même arête et alors ils sont manifestement tangents aux deux faces qui contiennent cette arête, ou bien ils ont leurs sommets chacun sur deux arêtes distinctes  $A_1 A_2, A_1 A_3$  : mais alors la face  $A_1 A_2 A_3$  leur est tangente à chacun suivant une génératrice et leur intersection présente un point double. La construction synthétique des tétraèdres d'arêtes tangentes est immédiate dans le premier cas : appelons  $P, Q$  les deux plans tangents communs menés aux cônes  $S$  et  $S'$  par la ligne de leurs sommets : nous prenons  $A_1$  et  $A_2$  arbitraires sur cette ligne; la droite  $A_3 A_4$  est une tangente quelconque commune aux deux cônes, limitée aux points où elle coupe  $P$  et  $Q$ ; on trouve ainsi  $\infty^4$  tétraèdres.

Dans le second cas, une face du tétraèdre,  $A_1 A_2 A_3$  par exemple, est dans le plan  $P$  tangent commun aux deux cônes menés par la ligne de leurs sommets; coupons les deux cônes par un plan quelconque  $Q$ ; la droite  $A_2 A_3$  peut être prise coïncidant avec la droite d'intersection de  $P$  et  $Q$ ; nous prenons deux quelconques des tangentes communes [autres que la droite  $P, Q$ ] aux sections de  $S$  et  $S'$  par  $Q$ ; ces deux tangentes forment avec  $(P, Q)$  un triangle  $A_2 A_3 A_4$ , les sommets  $A_2$  et  $A_3$  étant sur  $(P, Q)$ ; peu importe d'ailleurs comment on choisit celui des deux points que l'on appelle  $A_2$  ou  $A_3$ ; les droites  $SA_2$  et  $S'A_3$  se coupent en  $A_1$ . On a ainsi  $\infty^3$  tétraèdres : la position du plan  $Q$  détermine  $A_1$  dans le plan lieu de  $A_1$ ; le choix de  $A_1$  dans ce plan est arbitraire (2 paramètres); on doit alors prendre  $A_4$  arbitrairement (1 paramètre) sur la droite commune au plan, autre que  $SA, S'$ , mené par  $A_1, S'$  tangentielllement à  $S'$ ; on mène alors dans le plan  $SA, A_4$  la droite  $A_1 A_2$  tangente à la section de  $S'$  par ce plan; on obtient ensuite  $A_4 A_3$  par le procédé analogue.

Inutile de parler du problème corrélatif : tétraèdre dont les arêtes rencontrent deux coniques qui ont soit un point commun, soit deux points communs.

