JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. DELSARTE

Sur une extension de la formule de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 213-231.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_213_0>

Sur une extension de la formule de Taylor;

PAR J. DELSARTE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.

Le présent travail est consacré à une extension formelle assez large de la série de Taylor. On l'a obtenue en remplaçant l'opérateur de dérivation par un opérateur linéaire possédant un spectre continu, ainsi que certaines propriétés d'unicité. La sommation des séries ainsi introduites est un problème de prolongement d'opérateur fonctionnel et équivaut à l'inversion d'une équation linéaire et homogène portant sur une fonction de deux arguments; la détermination du reste, dans les formules analogues à la formule de Taylor, revient à l'inversion de la même équation lorsqu'elle a un second membre. Il y a plus : le développement du formalisme qui vient d'être esquissé conduit à considérer une famille d'opérateurs linéaires ayant des propriétés comparables à celles des opérateurs de translation sur la droite; on est ainsi amené à une généralisation de la notion de fonctions moyenne-périodiques et à des formules nouvelles, jouant par rapport à ces fonctions et à ces opérateurs, le même rôle que la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin par rapport à la série de Taylor et aux fonctions périodiques. J'ajoute enfin que le procédé formel général de développement des fonctions en séries, que j'ai indiqué ailleurs (1), ne prend tout son sens qu'à la suite des considérations qui vont maintenant être exposées.

Pour faciliter la lecture de ce qui suit, on a indiqué immédiatement

(1) *Sur un procédé formel de développement des fonctions en séries et sur quelques applications* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. **15**, fasc. I).

après chaque groupe de définitions et d'énoncés généraux, l'application qu'on en peut faire aux deux cas les plus simples et les plus importants.

1. La lettre A désignera une classe linéaire de fonctions de la variable réelle x; $\mathfrak{d}$ ou $\mathfrak{d}_x[f(\xi)]$ sera un opérateur linéaire défini dans A et possédant un spectre continu S faisant partie du plan de la variable complexe λ. A toute valeur λ de S correspond donc une fonction $j_\lambda(x)$ appartenant à A et telle que l'on ait

$$\mathfrak{d}_x[j_\lambda(\xi)] = \lambda j_\lambda(x).$$

On peut, en choisissant convenablement l'origine sur la droite et en multipliant $j_\lambda(x)$ par un facteur convenable indépendant de x, supposer que $j_\lambda(0)$ se réduit à l'unité, quel que soit λ dans S; en choisissant convenablement l'origine dans le plan des λ, on peut supposer que $\lambda = 0$ appartient à S; de plus, nous supposerons que, dans un voisinage de l'origine on a, quel que soit λ de S appartenant à ce voisinage,

$$j_\lambda(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots, \tag{1}$$

le second membre étant convergent pour toute valeur finie de x et les fonctions $\varphi_n(x)$ faisant partie de la classe A. On a alors nécessairement

$$\varphi_0(0) = 1, \qquad \varphi_n(0) = 0,$$

puis, par identification,

$$\mathfrak{d}_x[\varphi_0(\xi)] = 0, \qquad \mathfrak{d}_x[\varphi_n(\xi)] = \varphi_{n-1}(x).$$

Exemple I. — Prenons pour classe A l'ensemble des fonctions définies dans tout ou partie de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et une fois dérivables dans leur domaine de définition.

L'opérateur $\mathfrak{d}$ sera l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$; le spectre S est constitué par tout le plan de la variable complexe λ, et les fonctions propres sont les exponentielles

$$e^{\lambda x},$$

on a

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Exemple II. — Prenons pour classe A l'ensemble des fonctions définies dans un intervalle $[0, \alpha]$, α étant positif, ou $[0, +\infty)$, deux fois dérivables dans leur domaine de définition, la dérivée première étant nulle pour $x = 0$.

L'opérateur $\mathfrak{d}$ sera l'opérateur de Bessel défini par

$$\mathfrak{d}_x[f(\xi)] = \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\frac{df}{dx},$$

p étant un nombre complexe dont la partie réelle est plus grande que $-\frac{1}{2}$; le spectre S est constitué par tout le plan de la variable complexe λ, et les fonctions propres sont données par

$$j_\lambda(x) = \frac{2^p p!}{(ix\sqrt{\lambda})^p} J_p(ix\sqrt{\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{p!}{(p+k)!}\lambda^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k};$$

avec la notation habituelle pour les fonctions de Bessel de première espèce, on a

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{p!}{(p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

2. Considérons maintenant la série formelle d'opérateurs

$$T^y = \varphi_0(y)E + \varphi_1(y)\mathfrak{d} + \varphi_2(y)\mathfrak{d}^{(2)} + \ldots + \varphi_n(y)\mathfrak{d}^{(n)} + \ldots,$$

où $\mathfrak{d}^{(n)}$ désigne le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur $\mathfrak{d}$; la variable réelle y joue ici un rôle paramétrique; en général, l'opérateur T^y n'aura de sens que dans une classe linéaire α faisant partie de A; cette classe α n'est pas vide, car

$$T_x^y[j_\lambda(\xi)] = j_\lambda(x) j_\lambda(y),$$

pourvu que λ appartienne, dans S, au voisinage de l'origine pour les points duquel le second membre de (1) converge. De plus, l'opérateur T^0 se réduit évidemment à l'identité, et il est clair que les opérateurs T^y sont deux à deux permutables, et sont aussi permutables avec $\mathfrak{d}$ et tout ses itérés, pourvu qu'on restreigne convenablement les domaines de définition.

Dans ce qui suit, nous allons donner un certain nombre de relations formelles entre opérateurs; ces relations seront valables pourvu que les fonctions de A, qui servent d'arguments à ces opérateurs soient dans des sous-classes linéaires de A assez restreintes; le lecteur verra sans peine que ces classes ne sont pas vides en constatant qu'elles contiennent les fonctions $j_\lambda(x)$ pour lesquelles vaut la relation (1).

Remarquons d'abord que $T_x^y[f(\xi)]$ est en réalité une fonction des deux variables réelles x et y. On peut donc regarder le résultat de l'application de cet opérateur à $f(x)$, comme fonction de y, x jouant alors un rôle paramétrique; on adjoint ainsi à T^y un nouvel opérateur linéaire que nous appellerons le transposé de T^y, soit

$$\widetilde{T}_x^y[f(\xi)] = \varphi_0(x)f(y) + \varphi_1(x)\mathfrak{d}_y[f(\xi)] + \ldots + \varphi_n(x)\mathfrak{d}_y^{(n)}[f(\xi)] + \ldots,$$

et il vient

$$\mathfrak{d}_x\{\widetilde{T}_\xi^y[f(\eta)]\} = \varphi_0(x)\mathfrak{d}_y[f(\xi)] + \ldots + \varphi_{n-1}(x)\mathfrak{d}_y^{(n)}[f(\xi)] + \ldots,$$

et aussi

$$\mathfrak{d}_y\{T_\xi^x[f(\eta)]\} = \varphi_0(x)\mathfrak{d}_y[f(\xi)] + \ldots + \varphi_{n-1}(x)\mathfrak{d}_y^{(n)}[f(\xi)] + \ldots;$$

donc

$$\mathfrak{d}_x\{\widetilde{T}_\xi^y[f(\eta)]\} = \mathfrak{d}_y\{T_\xi^x[f(\eta)]\}; \tag{2}$$

on constate de même que

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_x^{(2)}\{\widetilde{T}_\xi^y[f(\eta)]\} &= \mathfrak{d}_y^{(2)}\{T_\xi^x[f(\eta)]\}\\ &= \varphi_0(x)\mathfrak{d}_y^{(2)}[f(\xi)] + \ldots + \varphi_{n-2}(x)\mathfrak{d}_y^{(n)}[f(\xi)] + \ldots,\\ \mathfrak{d}_x^{(p)}\{\widetilde{T}_\xi^y[f(\eta)]\} &= \mathfrak{d}_y^{(p)}\{T_\xi^x[f(\eta)]\}\\ &= \varphi_0(x)\mathfrak{d}_y^{(p)}[f(\xi)] + \ldots + \varphi_{n-p}(x)\mathfrak{d}_y^{(n)}[f(\xi)] + \ldots,\end{aligned}$$

et qu'enfin, quel que soit z réel,

$$\begin{aligned}T_x^z\{\widetilde{T}_\xi^y[f(\eta)]\} &= \varphi_0(z)\,\widetilde{T}_x^y[f(\xi)] + \ldots + \varphi_n(z)\mathfrak{d}_x^{(n)}\{\widetilde{T}_\xi^y[f(\eta)]\} + \ldots\\ &= \varphi_0(z)\,T_x^y[f(\xi)] + \ldots + \varphi_n(z)\mathfrak{d}_y^{(n)}\{T_\xi^x[f(\eta)]\} + \ldots\\ &= T_y^z\{T_\xi^x[f(\eta)]\} = T_y^x\{T_\xi^z[f(\eta)]\} = \widetilde{T}_x^y\{T_\xi^z[f(\eta)]\};\end{aligned}$$

d'où la relation entre opérateurs

$$\widetilde{T}^y T^z = T^z \widetilde{T}^y.$$

Un opérateur quelconque de la famille T^y est donc permutable avec un opérateur quelconque de la famille des opérateurs transposés.

Il s'agit maintenant de prolonger les opérateurs T^y en conservant ces diverses propriétés. On y arrive grâce à l'équation (2). Posons

$$\Phi(x, y) = T_x^y[f(\xi)],$$

l'équation (2) s'écrit

$$\mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta)] = \mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y)]. \tag{3}$$

Nous ferons sur l'opérateur $\mathfrak{d}$, une hypothèse complémentaire que nous nommerons *hypothèse d'unicité* et qui se formule ainsi :

La seule solution $\Phi(x, y)$ *de l'équation* (3), *appartenant à* A, *soit comme fonction de* x, *quel que soit* y, *soit comme fonction de* y, *quel que soit* x, *identiquement nulle pour* $y = 0$, *est identiquement nulle.*

Conséquemment, l'équation (3) admet une seule solution Φ appartenant à A, soit comme fonction de x, soit comme fonction de y, et se réduisant à $f(x)$ pour $y = 0$; si l'on admet que cette solution est développable en une série procédant suivant les $\varphi_n(y)$, on retrouve le développement formel qui a servi de définition à l'opérateur T^y; la solution unique de (3) quand elle existe, sous les conditions aux limites indiquées, fournit donc le prolongement fonctionnel de cet opérateur. Il faut maintenant montrer que ce prolongement a toutes les propriétés formelles déduites de la première définition de T^y. Remarquons d'abord que la seconde définition implique que T^0 se réduit à l'identité. Convenons de dire qu'une fonction $\Phi(x, y, z)$ des trois variables réelles x, y, z, appartient à A par rapport à toutes les variables lorsqu'elle appartient a A quand on la considère comme fonction d'une seule des variables, les deux autres ayant des valeurs constantes finies quelconques; montrons d'abord la permutabilité

$$T^y T^z = T^z T^y.$$

Pour cela posons

$$\Phi(x, y, z) = T_x^z\{T_\xi^y[f(\eta)]\}.$$

Par définition, cette fonction appartient à A par rapport à toutes les variables, satisfait à l'équation

$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Phi(x, y, \zeta)], \tag{4}$$

et est telle que

$$\Phi(x, y, 0) = T_x^y[f(\xi)] = \Phi(x, y),$$

c'est la seule satisfaisant à toutes ces conditions. Posons encore

$$\mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta, z)] = \Psi(x, y, z),$$
$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Phi(x, y, \zeta)] = \Psi_1(x, y, z).$$

Pour continuer le raisonnement, il est nécessaire de restreindre un peu le choix de $f(x)$ dans la classe linéaire formée par les fonctions pour lesquelles l'opérateur T^y prolongé à un sens, il faut supposer que $f(x)$ est telle que Ψ et Ψ_1 appartiennent à A par rapport à toutes les variables, et telle aussi que les opérations qui vont suivre soient légitimes. (Le lecteur verra sur les exemples de quelle nature sont ces restrictions.) Appliquons l'opérateur $\mathfrak{d}_y$ aux deux membres de (4), et supposons que le résultat puisse être obtenu par application de $\mathfrak{d}_y$ sous les signes $\mathfrak{d}_x$ et $\mathfrak{d}_z$, on trouve

$$\mathfrak{d}_x[\Psi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Psi(x, y, \zeta)].$$

De même, appliquons l'opérateur $\mathfrak{d}_x$ aux deux membres de (4), et supposons qu'au second membre, le résultat puisse être obtenu par application de $\mathfrak{d}_x$ sous le signe $\mathfrak{d}_z$, on trouve

$$\mathfrak{d}_x[\Psi_1(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Psi_1(x, y, \zeta)].$$

De plus, il vient, à cause de l'équation (3),

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, 0) &= \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta, 0)] \\ &= \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta)] = \mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y)] = \mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, 0)] = \Psi_1(x, y, 0);\end{aligned}$$

l'hypothèse d'unicité entraîne alors

$$\Psi \equiv \Psi_1.$$

Elle entraîne aussi, par suite, que la fonction Φ peut être définie par l'équation

$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta, z)],$$

jointe à la condition aux limites

$$\Phi(x, 0, z) = T_x^z[f(\xi)] = \Phi(x, z),$$

et au fait que Φ appartient à la classe A par rapport à toutes les variables; il en résulte, par définition,

$$\Phi(x, y, z) = \mathrm{T}_x^y \{ \mathrm{T}_\xi^z [f(\eta)] \};$$

d'où la permutabilité annoncée.

Montrons maintenant que l'on a aussi

$$\widetilde{\mathrm{T}}^y \mathrm{T}^z = \mathrm{T}^z \widetilde{\mathrm{T}}^y.$$

Pour cela posons

$$\mathrm{T}_x^z \{ \mathrm{T}_y^\xi [f(\eta)] \} = \Phi(x, y, z);$$

par définition, cette fonction appartient à A, par rapport à toutes les variables, satisfait à l'équation

$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Phi(x, y, \zeta)], \tag{5}$$

et est telle que

$$\Phi(x, y, 0) = \mathrm{T}_y^x [f(\eta)] = \Phi(y, x);$$

c'est la seule satisfaisant à toutes ces conditions; posons encore

$$\mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta, z)] = \Psi(x, y, z),$$
$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Phi(x, y, \zeta)] = \Psi_1(x, y, z).$$

Supposons que $f(x)$ soit telle que Ψ et Ψ_1 appartiennent à A par rapport à toutes les variables, et telle aussi que les opérations qui vont suivre soient légitimes. Appliquons l'opérateur $\mathfrak{d}_y$ aux deux membres de (5), et faisons l'hypothèse que le résultat puisse être obtenu par application de $\mathfrak{d}_y$ sous les signes $\mathfrak{d}_x$ et $\mathfrak{d}_z$, on trouve

$$\mathfrak{d}_x[\Psi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Psi(x, y, \zeta)].$$

De même appliquons l'opérateur $\mathfrak{d}_x$ aux deux membres de (5), et supposons qu'au second membre le résultat puisse être obtenu par application de $\mathfrak{d}_x$ sous le signe $\mathfrak{d}_z$, on trouve

$$\mathfrak{d}_x[\Psi_1(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_z[\Psi_1(x, y, \zeta)].$$

De plus il vient, à cause de l'équation (3),

$$\Psi(x, y, 0) = \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta, 0)] = \mathfrak{d}_y[\Phi(\eta, x)] = \mathfrak{d}_x[\Phi(y, \xi)]$$

et

$$\Psi_1(x, y, 0) = \mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, 0)] = \mathfrak{d}_x[\Phi(y, \xi)] = \Psi(x, y, 0);$$

l'hypothèse d'unicité entraîne alors

$$\Psi = \Psi_1$$

et aussi

$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta, z)]. \tag{6}$$

Considérons d'autre part la fonction

$$\Phi(o, y, z) = T_0^z \{ T_y^\xi [f(\eta)] \}.$$

On a

$$\Phi(o, y, o) = T_y^0 [f(\eta)] = f(y),$$

et les résultats précédents donnent, pour $x = o$,

$$\mathfrak{d}_z[\Phi(o, y, \zeta)] = \mathfrak{d}_0[\Phi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_y[\Phi(o, \eta, z)];$$

une nouvelle conséquence de l'hypothèse d'unicité est donc

$$\Phi(o, y, z) = T_y^z [f(\eta)] = \Phi(y, z).$$

La fonction $\Phi(x, y, z)$ peut donc être définie par l'équation (6), par la condition aux limites précédente et par le fait qu'elle appartient à A, par rapport à toutes les variables; on a donc

$$\Phi(x, y, z) = T_y^x \{ T_\xi^z [f(\eta)] \};$$

d'où la permutabilité annoncée.

Exemple I. — L'équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

l'intégrale prenant la valeur $f(x)$ pour $y = o$ est évidemment

$$T_x^y [f(\xi)] = f(x + y).$$

Le prolongement ainsi obtenu pour l'opérateur T^y est aussi vaste que possible, puisque cet opérateur s'applique maintenant à toutes les fonctions d'une variable réelle. Toutes les propriétés de permutabilité sont évidentes; on remarquera que dans ce cas l'opérateur T^y est identique à son transposé. Dans cet exemple, les restrictions apportées aux choix de la fonction $f(x)$, pour que la démonstration donnée plus haut des propriétés de permutabilité soit valable, se ramènent à demander que $f(x)$ soit deux fois dérivable.

Exemple II. — L'équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{2p+1}{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Elle rentre dans la catégorie des équations aux dérivées partielles du second ordre que Darboux qualifie d'harmoniques; le changement de variables

$$u=\frac{1}{4}(x+y)^2,\qquad v=\frac{1}{4}(x-y)^2$$

la ramène à une équation d'Euler-Poisson

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial v}+\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{u-v}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial v}-\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right]=0.$$

Bien que les données de Cauchy soient portées par une demi-droite singulière pour les coefficients de l'équation, et qu'on ait ici à résoudre un problème mixte : données de Cauchy sur le demi-axe Ox, données de Neumann sur tout l'axe Oy, on se trouve dans des conditions où les formules de Poisson sont applicables; ces formules donnent l'expression suivante pour la solution se réduisant à $\psi(u)$ pour $u=v$, et dont le développement, suivant les puissances de $u-v$, quand il existe, ne contient que des puissances paires positives

$$\Phi=\frac{2^{2p}\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1\psi[u+(v-u)t]\,t^{p-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-\frac{1}{2}}\,dt;$$

posant

$$t=\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

remplaçant u et v par $\frac{1}{4}(x+y)^2$ et $\frac{1}{4}(x-y)^2$, ainsi que $\psi(u)$ par $f\left[2\sqrt{u}\right]$, il vient

$$\Phi(x,y)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right]\sin^{2p}\varphi\,d\varphi.$$

Cette expression est symétrique en x et y, lorsque la fonction f est une fois dérivable, elle satisfait aux conditions aux limites

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{pour } x = 0, \qquad \Phi = f(x), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \begin{cases} y = 0, \\ x \geqq 0, \end{cases}$$

et il y a continuité de Φ pour $x = y$; enfin, si f est deux fois dérivable, Φ est solution de l'équation (3); d'ailleurs Φ appartient à la classe A par rapport aux deux variables; la solution obtenue satisfait bien à toutes les conditions et elle est unique, car Darboux a démontré que les formules de Poisson donnaient toutes les solutions de l'équation considérée. Le prolongement est donc effectué, on peut écrire

$$\mathrm{T}_x^y[f(\xi)] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right] \sin^{2p}\varphi \, d\varphi,$$

expression valable pour toute fonction $f(x)$ définie et sommable dans tout intervalle fini. On remarquera qu'ici encore

$$\mathrm{T}^y = \widetilde{\mathrm{T}}^y.$$

La propriété de permutabilité peut se constater dans le cas le plus étendu par un calcul direct, la démonstration donnée plus haut est valable ici, pourvu que $f(x)$ soit quatre fois dérivable.

3. Nous allons maintenant donner la formule généralisant la formule de Taylor limitée. Nous remarquerons d'abord que l'hypothèse d'unicité a pour conséquence le fait suivant : l'équation

$$(7) \qquad \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta)] - \mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y)] = f(x, y),$$

quand elle a une solution Φ appartenant à A par rapport aux deux variables, identiquement nulle pour $y = 0$, n'en a qu'une. Nous désignerons cette solution, quand elle existe, par la notation

$$(8) \qquad \Phi(x, y) = \mathfrak{i}_{xy}[f(\xi, \eta)],$$

où $\mathfrak{i}_{xy}$ désigne un opérateur linéaire défini dans une certaine classe linéaire. Cela étant, considérons l'expression

$$\Phi(x, y) = \mathrm{T}_x^y[f(\xi)] - \sum_{p=0}^{n} \varphi_p(y)\, \mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)];$$

nous supposons que $f(x)$ soit telle que chacun des termes du second membre existe, et aussi que Φ appartienne à A par rapport aux deux variables. On a, dans ces conditions ([1]),

$$\mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y)] = T_x^y\{\mathfrak{d}_\xi[f(\eta)]\} - \sum_{p=0}^{n} \varphi_p(y)\,\mathfrak{d}_x^{(p+1)}[f(\xi)],$$

puis

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta)] &= \mathfrak{d}_y\{\widetilde{T}_\xi^x[f(\eta)]\} - \sum_{p=1}^{n} \varphi_{p-1}(y)\,\mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)] \\ &= T_x^y\{\mathfrak{d}_\xi[f(\eta)]\} - \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_p(y)\,\mathfrak{d}_x^{(p+1)}[f(\xi)],\end{aligned}$$

et enfin

$$\Phi(x, 0) = 0, \qquad \mathfrak{d}_y[\Phi(x, \eta)] - \mathfrak{d}_x[\Phi(\xi, y)] = \varphi_n(y)\,\mathfrak{d}_x^{(n+1)}[f(\xi)].$$

Il en résulte donc

$$\Phi(x, y) = \mathfrak{i}_{x,y}\{\varphi_n(\eta)\,\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\}$$

et

$$T_x^y[f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} \varphi_p(y)\,\mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)] + \mathfrak{i}_{x,y}\{\varphi_n(\eta)\,\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\}, \tag{9}$$

qui est une généralisation de la formule de Taylor limitée. On remarquera que le reste de la formule a nécessairement un sens pourvu que $f(x)$ satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

Exemple I. — L'opérateur $\mathfrak{i}$ s'obtient en inversant l'équation

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial x} = f(x, y),$$

Φ devant être nulle pour $y = 0$; on trouve de manière immédiate

$$\mathfrak{i}_{x,y}[f(\xi, \eta)] = \int_0^y f(x + y - u, u)\,du;$$

([1]) Nous admettons ici les permutabilités $\mathfrak{d}T^y = T^y\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}\widetilde{T}^y = \widetilde{T}^y\mathfrak{d}$; on les établit en procédant de façon analogue à ce qui a été fait au paragraphe **2**, pour démontrer $T^xT^y = T^yT^x$ et $T^x\widetilde{T}^y = T^y\widetilde{T}^x$.

d'où la formule de Taylor limitée

$$f(x+y)=\sum_{p=0}^{n}\frac{y^p}{p!}\frac{d^p f}{dx^p}+\int_0^y f^{(n+1)}(x+y-u)\frac{u^n}{n!}\,du.$$

Exemple II. — Ici l'équation (7) s'écrit

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+(2p+1)\left[\frac{1}{y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}-\frac{1}{x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right]=f(x,y), \tag{10}$$

et il faut en chercher l'intégrale satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

$$f(x,0)=0,\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=0}=0\quad (x\geqq 0)\qquad \text{et}\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=0}=0. \tag{11}$$

On peut substituer à ce problème mixte hyperbolique un problème de Cauchy pur; prolongeons la fonction $f(x, y)$ par symétrie par rapport à l'axe Oy, et cherchons l'intégrale de (10) définie dans tout le plan et satisfaisant aux conditions de Cauchy

$$f(x,0)=0,\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x=0}=0\qquad (x\gtrless 0).$$

L'équation et les données restent invariées quand on change x en $-x$, il en sera de même de la solution; cette dernière sera donc une fonction paire de x, régulière pour $x=0$, elle satisfera par suite aux conditions (11). Tout revient à la détermination de la fonction de Riemann pour l'équation (10) dont, comme nous l'avons dit, le premier membre est une transformée du premier membre de l'équation de Poisson; la fonction de Riemann cherchée se rattache aux fonctions hypergéométriques; il y a aucune difficulté provenant du fait que les données de Cauchy soient portées par une droite singulière des coefficients de l'équation, car ces données sont nulles, et, d'ailleurs, la fonction de Riemann devient nulle sur cette droite; elle est nulle aussi sur l'axe des y; la méthode classique s'applique sans modification et l'on trouve, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}\mathrm{i}_{x,y}[f(\xi,\eta)]=\iint_{\Delta_{xy}}&\frac{(4\xi\eta)^{2p+1}f(\xi,\eta)}{[(y+\eta)^2-(x-\xi)^2]^{p+\frac{1}{2}}[(x+\xi)^2-(y-\eta)^2]^{p+\frac{1}{2}}}\\&\times F\left\{1,p+\frac{1}{2},p+\frac{1}{2},\frac{[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2][(x+\xi)^2-(y+\eta)^2]}{[(x-\xi)^2-(y+\eta)^2][(x+\xi)^2-(y-\eta)^2]}\right\}d\xi\,d\eta,\end{aligned}$$

où $\Delta_{x,y}$ désigne le triangle compris entre Ox et les deux parallèles aux bissectrices des axes par le point de coordonnées x et y. On en déduit la généralisation suivante de la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right]\sin^{2p}\varphi\,d\varphi \\
&=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\,\frac{p!}{(p+m)!}\left(\frac{y}{2}\right)^m\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2p+1}{x}\,\frac{d}{dx}\right]^m f(x) \\
&+\iint_{\Delta_{x,y}}\frac{(4\xi\eta)^{2p+1}\,\dfrac{p!}{n!\,(p+n)!}\left(\dfrac{\eta}{2}\right)^{2n}\left[\dfrac{d^2}{d\xi^2}+\dfrac{2p+1}{\xi}\,\dfrac{d}{d\xi}\right]^{n+1}f(\xi)}{\left[(y+\eta)^2-(x-\xi)^2\right]^{p+\frac{1}{2}}\left[(x+\xi)^2-(y-\eta)^2\right]^{p+\frac{1}{2}}} \\
&\times F\left\{1,\,p+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2},\,\frac{\left[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2\right]\left[(x+\xi)^2-(y+\eta)^2\right]}{\left[(x-\xi)^2-(y+\eta)^2\right]\left[(x+\xi)^2-(y-\eta)^2\right]}\right\}d\xi\,d\eta.
\end{aligned}$$

4. Passons maintenant à l'extension de la notion de fonctions moyenne-périodiques, qui découle des considérations qui précèdent. Toute famille à un paramètre y, d'opérateurs linéaires T^y sera dite *famille abélienne* lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes :

$$T^0 = E, \qquad T^y T^z = T^z T^y, \qquad T^y \widetilde{T}^z = \widetilde{T}^z T^y.$$

Un opérateur linéaire Δ sera dit *attaché* à cette famille s'il est permutable, quel que soit y, avec $\widetilde{T}^y$

$$\widetilde{T}^y \Delta = \Delta \widetilde{T}^y.$$

Il vient, en développant cette condition,

$$\Delta_x\{T^\xi_y[f(\eta)]\} = T^x_y\{\Delta_\xi[f(\eta)]\};$$

faisant ensuite $x = 0$, compte tenu de $T^0 = E$,

$$\Delta_y[f(\xi)] = \Delta_0\{T^\xi_y[f(\eta)]\}.$$

Le second membre donne une forme nécessaire pour les opérateurs Δ, Δ_0 y désigne une *fonctionnelle* linéaire quelconque. Inversement, on a, si Δ est de cette forme,

$$\Delta_y\{T^\xi_x[f(\eta)]\} = \Delta_0(T^\xi_y\{T^\eta_x[f(\zeta)]\})$$

et

$$T_x^y\{\Delta_\xi[f(\eta)]\} = T_x^y(\Delta_0\{T_\xi^\zeta[f(\zeta)]\}) = \Delta_0(T_x^y\{T_\eta^\xi[f(\zeta)]\}),$$

mais la permutabilité de $\widetilde{T}^x$ et T^ξ entraîne

$$T_y^\xi\{T_x^\eta[f(\zeta)]\} = T_x^y\{T_\eta^\xi[f(\zeta)]\},$$

et l'on voit que la forme obtenue pour Δ est nécessaire et suffisante(¹). Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est moyenne-périodique par rapport à la famille abélienne T^y et par rapport à l'opérateur Δ attaché à cette famille, lorsqu'elle annule identiquement cet opérateur

$$\Delta_x[f(\xi)] \equiv 0.$$

Remarquons que l'on a, dans le cas présent,

$$\Delta_x[j_\lambda(\xi)] = \Delta_0\{T_x^\xi[j_\lambda(\eta)]\} = \Delta_0[j_\lambda(x)j_\lambda(\xi)] = A(\lambda)j_\lambda(x),$$

en posant

$$A(\lambda) = \Delta_0[j_\lambda(\xi)].$$

La fonction $A(\lambda)$ est l'indicatrice de l'opérateur Δ. Si $A(\lambda)$ a des racines

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots$$

dans S, les fonctions

$$j_{\lambda_p}(x)$$

sont moyenne-périodiques relativement à la famille abélienne T^y et à l'opérateur Δ attaché à cette famille.

Il est ensuite facile de définir des fonctions bernoulliennes analogues aux polynomes bernoulliens; supposons que Δ soit tel que $A(\lambda)$ soit développable en une série procédant suivant les puissances positives croissantes de λ dans un voisinage de l'origine du plan des λ appartenant à S; alors on a, pour λ assez petit en module et appartenant à S,

$$\frac{j_\lambda(x)}{A(\lambda)} = \mathcal{B}_0(x) + \lambda\,\mathcal{B}_1(x) + \ldots + \lambda^n\,\mathcal{B}_n(x) + \ldots,$$

où $\mathcal{B}(x)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants de $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, de cette formule, on déduit aisément, de

(¹) On notera que les opérateurs T^y sont des opérateurs Δ.

proche en proche, les relations suivantes :

$$\Delta_x[\mathcal{B}_n(\xi)] = \varphi_n(x), \qquad \mathfrak{D}_x[\mathcal{B}_0(\xi)] = 0, \qquad \mathfrak{D}_x[\mathcal{B}_n(\xi)] = \mathcal{B}_{n-1}(x) \qquad (n \neq 0).$$

qui généralisent les propriétés bien connues des polynomes de Bernoulli.

Exemple I. — La famille abélienne est constituée des opérateurs de translations

$$T_x^y[f(\xi)] = f(x+y);$$

les opérateurs Δ attachés à cette famille sont de la forme

$$\Delta_x[f(\xi)] = \Delta_0[f(x+\xi)];$$

les fonctions bernoulliennes correspondantes, définies par le développement

$$\frac{e^{\lambda x}}{A(\lambda)} = B_0(x) + \lambda B_1(x) + \ldots + \lambda^n B_n(x) + \ldots,$$

avec

$$A(\lambda) = \Delta_0[e^{\lambda\xi}],$$

sont des polynomes en x de degré marqué par leur indice; on a

$$\Delta_x[B_n(\xi)] = \frac{x^n}{n!}, \qquad \frac{dB_0}{dx} = 0, \qquad \frac{dB_n}{dx} = B_{n-1}(x) \qquad (n \neq 0).$$

Exemple II. — La famille abélienne de Bessel est constituée par les opérateurs

$$T_x^y[f(\xi)] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right] \sin^{2p}\varphi \, d\varphi,$$

les opérateurs Δ attachés à cette famille sont de la forme

$$\Delta_x[f(\xi)] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \Delta_0 \left\{ \int_0^\pi f\left[\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\varphi}\right] \sin^{2p}\varphi \, d\varphi \right\},$$

les fonctions bernoulliennes correspondantes, définies par le développement

$$\frac{2^p p!}{(ix\sqrt{\lambda})^p} \frac{J_p(ix\sqrt{\lambda})}{A(\lambda)} = \mathcal{B}_0(x) + \ldots + \lambda^n \mathcal{B}_n(x) + \ldots,$$

avec

$$A(\lambda) = 2^p p\,!\,\Delta_0\left[\frac{J_p(i\xi\sqrt{\lambda})}{(i\xi\sqrt{\lambda})^p}\right],$$

sont des polynomes pairs en x de degré marqué par le double de leur indice; on a

$$\Delta_x[\mathcal{B}_n(\xi)] = \frac{1}{n\,!}\,\frac{p\,!}{(n+p)\,!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

$$\frac{d^2\mathcal{B}_0}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\,\frac{d\mathcal{B}_0}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2\mathcal{B}_n}{dx^2} + \frac{2p+1}{x}\,\frac{d\mathcal{B}_n}{dx} = \mathcal{B}_{n-1}(x).$$

5. Ces fonctions bernoulliennes permettent de donner une généralisation très large de la formule sommatoire d'Euler-Mac Laurin; posons (¹)

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(z)\,T_x^y\{\mathfrak{d}_\xi^{(p)}[f(\eta)]\} - \sum_{p=0}^{n} \mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)]\,T_z^y[\mathcal{B}_p(\xi)],$$

on a

$$\Psi(x, 0, z) = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(z)\,\mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)] - \sum_{p=0}^{n} \mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)]\,\mathcal{B}_p(z) = 0,$$

puis

$$\mathfrak{d}_x[\Psi(\xi, y, z)] = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(z)\,T_x^y\{\mathfrak{d}_\xi^{(p+1)}[f(\eta)]\} - \sum_{p=0}^{n} \mathfrak{d}_x^{(p+1)}[f(\xi)]\,T_z^y[\mathcal{B}_p(\xi)],$$

$$\mathfrak{d}_y[\Psi(x, \eta, z)] = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(z)\,T_x^y\{\mathfrak{d}_\xi^{(p+1)}[f(\eta)]\} - \sum_{p=0}^{n-1} \mathfrak{d}_x^{(p+1)}[f(\xi)]\,T_z^y[\mathcal{B}_p(\xi)]$$

et

$$\mathfrak{d}_y[\Psi(x, \eta, z)] - \mathfrak{d}_x[\Psi(\xi, y, z)] = \mathfrak{d}_x^{(n+1)}[f(\xi)]\,T_z^y[\mathcal{B}_n(\xi)];$$

d'où, par suite de l'hypothèse d'unicité,

$$\Psi(x, y, z) = \mathfrak{i}_{x.y}\{\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\,T_z^\eta[B_n(\zeta)]\}.$$

Calculons d'autre part

$$\Delta_0[\Psi(x, \eta, z)] = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(z)\,\Delta_x\{\mathfrak{d}_\xi^{(p)}[f(\eta)]\} - \sum_{p=0}^{n} \mathfrak{d}_x^{(p)}[f(\xi)]\,\varphi_p(z)$$

(¹) Il va sans dire que $f(x)$ est supposée telle que Ψ existe et appartienne à A par rapport à toutes les variables.

et, compte tenu de la formule (9),

$$\Delta_0[\Psi(x, \eta, z)] = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(z)\Delta_x\{\mathfrak{d}_\xi^{(p)}[f(\eta)]\} - \mathrm{T}_x^z[f(\xi)] + \mathrm{i}_{x,z}\{\varphi_n(\eta)\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\};$$

d'où encore

$$\mathrm{T}_x^y[f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(y)\Delta_x\{\mathfrak{d}_\xi^{(p)}[f(\eta)]\} + \mathrm{i}_{x,y}\{\varphi_n(\eta)\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\} - \Delta_0\big[\mathrm{i}_{x,\xi}\{\mathfrak{d}_\eta^{(n+1)}[f(\zeta)]\,\mathrm{T}_y^0[\mathcal{B}_n(\zeta)]\}\big]$$

Si l'on remarque enfin que

$$\varphi_n(\eta) = \Delta_0\{\mathrm{T}_\eta^\alpha[\mathcal{B}_n(\xi)]\}$$

(la fonctionnelle Δ_0 jouant sur la variable α), on voit qu'on a

$$\mathrm{i}_{x,y}\{\varphi_n(\eta)\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\xi)]\} = \Delta_0\big[\mathrm{i}_{x,y}\{\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\xi)]\,\mathrm{T}_\eta^\alpha[\mathcal{B}_n(\xi)]\}\big]$$

et la formule sommatoire généralisée prend la forme définitive ([1])

$$\mathrm{T}_x^y[f(\xi)] = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{B}_p(y)\Delta_x\{\mathfrak{d}_\xi^{(p)}[f(\eta)]\} + \Delta_0\big[\mathrm{i}_{x,y}\{\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\,\mathrm{T}_\eta^\alpha[\mathcal{B}_n(\zeta)]\} - \mathrm{i}_{x,\alpha}\{\mathfrak{d}_\xi^{(n+1)}[f(\zeta)]\,\mathrm{T}_y^\eta[\mathcal{B}_n(\zeta)]\}\big].$$

Si l'on prend, pour fixer les idées, le cas de l'exemple I, cette formule devient, après quelques réductions,

$$f(x+y) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{B}_p(y)\Delta_x[f^{(p)}(\xi)] + \Delta_0\left[\int_0^{y-\alpha} \mathrm{B}_n(u+\alpha)f^{(n+1)}(x+y-u)\,du\right].$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la formule analogue dans le cas du second exemple.

6. Revenons maintenant sur l'hypothèse d'unicité; soit

$$\varphi(x, y) = j_\lambda(x)f(y),$$

([1]) Comme dans le cas de la formule de Taylor généralisée, le reste existe pourvu que les autres termes de la formule existent.

$f(y)$ appartenant à A, on a

$$\mathfrak{d}_y[\varphi(x, \eta)] - \mathfrak{d}_x[\varphi(\xi, y)] = j_\lambda(x)[\mathfrak{d}_y[f(\xi)] - \lambda f(y)];$$

une conséquence de l'hypothèse d'unicité est donc que l'équation

$$\mathfrak{d}_y[f(\xi)] - \lambda f(y) = 0$$

n'a pas, dans A, d'autre solution nulle pour $y = 0$, que la solution identiquement nulle. Il en résulte que l'équation

$$(12) \qquad \mathfrak{d}_y[f(\xi)] - \lambda f(y) = g(y),$$

lorsqu'elle a une solution appartenant à A et nulle pour $y = 0$, n'en a qu'une; cette solution s'exprime aisément à l'aide de l'opérateur $\mathfrak{i}$, on le voit en calculant

$$\mathfrak{i}_{x,y}[j_\lambda(\xi)g(\eta)],$$

et en remarquant que si $f(y)$ est la solution de (12) appartenant à A et nulle pour $y = 0$, la fonction $j_\lambda(x)f(y)$ est la solution de l'équation

$$\mathfrak{d}_y[\varphi(x, \eta)] - \mathfrak{d}_x[\varphi(\xi, y)] = j_\lambda(x)g(y)$$

nulle pour $y = 0$ et appartenant à A par rapport aux deux variables, de sorte que

$$f(y) = \frac{1}{j_\lambda(x)}\,\mathfrak{i}_{x,y}[j_\lambda(\xi)g(\eta)].$$

En particulier, pour $g(y) = j_\mu(y)$, la fonction

$$f(y) = \frac{j_\lambda(y) - j_\mu(y)}{\lambda - \mu}$$

satisfait à toutes les conditions, et l'on a

$$\frac{j_\lambda(y) - j_\mu(y)}{\lambda - \mu} = \frac{1}{j_\lambda(x)}\,\mathfrak{i}_{x,y}[j_\lambda(\xi)j_\mu(\eta)].$$

Soit alors $f(y)$ une fonction de A moyenne-périodique par rapport à un opérateur Δ attaché à la famille abélienne T^y; si l'indicatrice $A(\lambda)$ de Δ possède des zéros dans S

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots,$$

et si l'on admet que $f(y)$ est développable en une série procédant suivant les $j_{\lambda_n}(y)$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n j_{\lambda_n}(x),$$

la détermination formelle des coefficients de ce développement se fait de manière immédiate en utilisant les relations que nous venons de rappeler, et l'on a

$$a_p = \frac{\Delta_0\{\mathrm{i}_{x,\eta}[j_{\lambda_p}(\xi) f(\zeta)]\}}{j_{\lambda_p}(x)\, \mathrm{A}'(\lambda_p)}.$$

Le procédé formel général de développement des fonctions en séries apparaît donc maintenant comme donnant le développement des fonctions moyenne-périodiques relativement à un opérateur Δ attaché à une famille abélienne T^y, ce développement procédant suivant les fonctions propres $j_\lambda(x)$, qui sont moyenne-périodiques.