# JOURNAL
DE
# MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



ÉMILE COTTON


**Sur le pivotement et le contact des surfaces**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 169-178.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_169_0>

# *Sur le pivotement et le contact des surfaces;*

**Par Émile COTTON.**

La partie géométrique des travaux de M. Hadamard sur les mouvements de roulement [1] m'avait conduit à étudier dans un travail antérieur [2] le pivotement sans roulement ni glissement (mais avec déplacement du point de contact) de deux surfaces S, S'.

Loin de présenter dans le cas général le même degré d'indétermination que pour deux plans superposés, il dépend de constantes arbitraires; les lignes de pivotement analogues aux roulettes ne peuvent plus être choisies à volonté.

Après avoir brièvement rappelé ici (**1**) les résultats essentiels de ce travail, je les complète, soit en ce qui concerne les équations différentielles du problème (**2**), soit par des exemples (**3**).

Je montre ensuite (**4**) que l'équation donnant l'orientation spéciale des surfaces S, S' lors du pivotement, se présente aussi quand on étudie la possibilité de réalisation directe du contact des deux surfaces avec orientation donnée : en entendant par là que les deux surfaces S, S' ne doivent pas se traverser au voisinage du point de contact.

**1**. Rappelons d'abord la représentation paramétrique du contact de deux surfaces donnée par M. Hadamard. Soient $u$, $v$ les paramètres

---

(1) *Sur les mouvements de roulement* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4e série, t. V, 1895). Cet article est réimprimé dans le livre d'Appell : *Les mouvements de roulement en Dynamique.*

(2) *Remarques géométriques sur les mouvements de roulement* (*Annales de l'Université de Grenoble*, t. XX, 1908, p. 1). Cet article est désigné par la lettre A.

caractérisant un point M de la surface S, $u'$, $v'$ ceux qui donnent un point M' de S', on fait correspondre à S un trièdre $Mxyz$ dont l'axe $Mz$ est normal à S; un trièdre analogue $M'x'y'z'$ est attaché en M' à S'. On suppose qu'il y a coïncidence de M et de M' et aussi de $Mz$ et $M'z'$; soit $\varphi$ l'angle $\widehat{Mx, Mx'}$.

Des variations infiniment petites $du$, $dv$ des paramètres $u$, $v$ entraînent un déplacement infiniment petit $PP_1$, par rapport à S, pour tout point P lié à $Mxyz$. Ce petit vecteur est le moment par rapport à P d'un torseur infiniment petit dont les coordonnées pluckériennes rapportées à $Mxyz$ sont des expressions de Pfaff

$$(1)\quad \begin{cases} p_d = p\,du + p_1\,dv, & q_d = q\,du + q_1\,dv, \quad r_d = r\,du + r_1\,dv, \\ \xi_d = \xi\,du + \xi_1\,dv, & \eta_d = \eta\,du + \eta_1\,dv, \quad \zeta_d = 0. \end{cases}$$

Elles satisfont à certaines conditions d'intégrabilité dont nous n'aurons pas à faire usage.

Soient

$$p'_d = p'\,du' + p'_1\,dv', \qquad q'_d = q'\,du' + q'_1\,dv', \qquad r'_d = r'\,du' + r'_1\,dv',$$
$$\xi'_d = \xi'\,du' + \xi'_1\,dv', \qquad \eta'_d = \eta'\,du' + \eta'_1\,dv'$$

les expressions analogues relatives à $M'x'y'z'$. En composant les trois torseurs correspondant aux déplacements de S' par rapport à $M'x'y'z'$, de $M'x'y'z'$ par rapport à $Mxyz$, de $Mxyz$ par rapport à S, on a le torseur correspondant au déplacement de S' par rapport à S; ses coordonnées pluckériennes, rapportées à $Mxyz$, sont :

$$(2)\quad \begin{cases} P_d = p_d - p'_d\cos\varphi + q'_d\sin\varphi, & Q_d = q_d - p'_d\sin\varphi - q'_d\cos\varphi, \\ R_d = r_d - r'_d + d\varphi, & \\ \Xi_d = \xi_d - \xi'_d\cos\varphi + \eta'_d\sin\varphi, & H_d = \eta_d - \xi'_d\sin\varphi - \eta'_d\cos\varphi, \quad Z_d = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait ni glissement ni roulement de S' sur S, nous avons quatre équations que doivent vérifier les paramètres $u$, $v$, $u'$, $v'$, $\varphi$

$$(3)\qquad \Xi_d = 0, \qquad H_d = 0, \qquad P_d = 0, \qquad Q_d = 0.$$

Le déplacement par pivotement ne comporte donc en général qu'un degré de liberté; mais divers cas sont à distinguer :

1° Si le déterminant $\Delta$ des coefficients des différentielles $du$, $dv$, $du'$, $dv'$ est différent de zéro, ces différentielles sont nulles et chacune des surfaces tourne par rapport à l'autre autour de la normale commune qui reste fixe par rapport aux deux surfaces; nous écartons désormais ce cas simple.

2° L'équation $\Delta = 0$ permet en général de calculer $\varphi$ en fonction de $u$, $v$, $u'$, $v'$; une telle valeur de $\varphi$ détermine ce que nous appellerons une *orientation spéciale* des surfaces en contact. Dans les mêmes conditions, le système (3) se réduit en général à trois équations différentielles du premier ordre déterminant $u$, $v$, $u'$, $v'$ en fonction de l'une de ces variables. On peut donc grouper les positions de S' tangentes à S avec orientation spéciale, de telle façon que les surfaces S' d'une même famille se déduisent de l'une d'elles par un déplacement à un paramètre où il y a toujours rotation tangente autour de la normale commune. Les deux surfaces $\Sigma$, $\Sigma'$, lieux de cet axe instantané dans ses déplacements par rapport à S et à S', sont, comme on sait, applicables l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes d'une part et d'autre part des intersections de S et de $\Sigma$, de S' et de $\Sigma'$. Ces intersections (lieux du point de contact sur S et sur S') seront appelées *lignes de pivotement.*

Si l'on substitue à S et S' des surfaces $S_1$, $S'_1$ qui leur soient respectivement parallèles (en prenant dans des sens correspondants la même longueur sur les normales à S et à S'), le pivotement de S' sur S entraîne celui de $S'_1$ sur $S_1$ et il y a correspondance des lignes de pivotement.

Quand on prend en chaque point des surfaces S, S' les tangentes aux lignes de courbure pour axes des trièdres correspondants, les formules de Codazzi données dans la *Théorie des surfaces* de Darboux (t. II, Livre V, Chap. II, Tableau V) donnent pour l'angle $\varphi$ caractérisant l'orientation spéciale

$$(4) \qquad \tan^2\varphi = -\frac{R_1 - R'_1}{R_1 - R'_2} : \frac{R_2 - R'_1}{R_2 - R'_2} = -(R_1 R_2 R'_1 R'_2),$$

$R_1$, $R_2$, $R'_1$, $R'_2$ étant les rayons de courbure principaux (A. n° 11).

La méthode indiquée plus haut donne facilement les lignes de pivotement dans le cas où S' est un cylindre de révolution; celles de S correspondent aux lignes asymptotiques de la surface parallèle à S, à laquelle l'axe de S' reste tangent (A. n° 12).

**2.** Les équations différentielles du problème s'obtiennent en éliminant $\varphi$ entre les équations (3) sans qu'il soit nécessaire d'utiliser l'équation $\Delta = 0$; on a ainsi

$$(5)\quad \xi_d^2+\eta_d^2=\xi_d'^2+\eta_d'^2,\qquad p_d\eta_d-q_d\xi_d=p'_d\eta'_d-q'_d\xi'_d,\qquad p_d^2+q_d^2=p_d'^2+q_d'^2.$$

Ces équations expriment que les surfaces réglées $\Sigma, \Sigma'$ sont applicables comme il a été dit; on s'en assure de la façon suivante : $u, v, u', v'$ étant considérés comme fonctions d'une même variable (représentant le temps), il faut que, quelle que soit la fonction $h$ de cette même variable, les vitesses absolues des points de même cote $h$ pris sur les axes $Mz$, $Mz'$ des deux trièdres soient égales; on a l'identité suivante par rapport à $h$ et $dh$

$$(\xi_d+q_dh)^2+(\eta_d-p_dh)^2+dh^2=(\xi'_d+q'_dh)^2+(\eta'_d-p'_dh)^2+dh^2.$$

Elle donne bien les équations (5).

On peut aussi bien trouver les deux surfaces $\Sigma, \Sigma'$, lieux des normales applicables l'une sur l'autre (comme plus haut) quand S et S' sont données par les représentations paramétriques des coordonnées X, Y, Z de M en fonction de $u, v$ et de celles X'Y'Z' de M' en fonction de $u', v'$. De ces représentations on déduit les cosinus directeurs ($a, b, c$ et $a', b', c'$) des normales à S et S' et l'égalité des arcs correspondants donne l'identité

$$\begin{aligned}&[d(X+ah)]^2+[d(Y+bh)]^2+[d(Z+ch)]^2\\&\quad=[d(X'+ah)]^2[d(Y'+bh)]^2+[d(Z'+ch)]^2,\end{aligned}$$

qui conduit à trois équations seulement

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&dX^2+dY^2+dZ^2=dX'^2+dY'^2+dZ'^2,\\&dX\,da+dY\,db+dZ\,dc=dX'\,da'+dY'\,db'+dZ'\,dc',\\&da^2+db^2+dc^2=da'^2+db'^2=dc'^2.\end{aligned}\right.$$

Les équations de même rang se correspondent dans les deux groupes (5) et (6) : les premiers expriment l'égalité des arcs correspondants $ds$, $ds'$ des deux intersections S, $\Sigma$ et S', $\Sigma'$; les troisièmes celles des arcs $d\sigma$, $d\sigma'$ de leurs représentations sphériques et les secondes celles des produits scalaires des vecteurs infiniment petits $\overrightarrow{ds}.\overrightarrow{d\sigma}$ et $\overrightarrow{ds'}.\overrightarrow{d\sigma'}$. Les deux premières équations (6) s'écrivent immédiatement avec les formes quadratiques de différentielles utilisées dans la théorie classique des lignes de courbure et des lignes asymptotiques.

**3.** On peut évidemment ramener de trois à deux le nombre des équations différentielles du problème lorsque l'une des surfaces est soit un cylindre, soit une surface de révolution, soit une surface helicoïde. Supposons par exemple S surface de révolution, et prenons $Mx$ tangent au parallèle de M, $My$ tangent au méridien, $u$ étant l'angle du méridien de M et d'un méridien fixe, $v$ l'angle de la normale et de l'axe ; on a

$$p_d = dv, \qquad q_d = \sin v\, du, \qquad r_d = \cos v\, du,$$

$$\xi_d = A(v)\, du, \qquad \eta_d = -\frac{dA(v)}{\cos v} = C(v)\, dv,$$

les premiers membres des équations (5) sont :

$$A^2\, du^2 + C^2\, dv^2, \qquad A \sin v\, du^2 - C\, dv^2, \qquad \sin^2 v\, du^2 + dv^2,$$

l'élimination de $du$ entre les équations différentielles donne deux équations différentielles entre $v$, $u'$, $v'$.

Admettons que S' soit aussi de révolution, employons pour cette surface des notations analogues, éliminons $du^2$ et $du'^2$, nous obtenons l'équation

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} A^2(v) & A'^2(v') & C^2(v)\, dv^2 - C'^2(v')\, dv'^2 \\ A(v)\sin v & A'(v')\sin v' & -C(v)\, dv^2 + C'(v')\, dv'^2 \\ \sin^2 v & \sin^2 v' & dv^2 - dv'^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$u$, $u'$ se calculent par quadratures une fois cette équation intégrée.

Des solutions particulières apparaissent immédiatement. On peut prendre $v$ et $v'$ constants pourvu que $\frac{A(v)}{\sin v} = \frac{A'(v')}{\sin v'}$ ; les lignes de pivotement sont ici des parallèles auxquels correspondent des normales égales.

Prenons deux surfaces de révolution égales, mais avec des normales orientées de façon différente, $A(v) + A'(v) = 0$, $C(v) + C'(v) = 0$, on a une solution particulière en prenant $v' = v$; une quadrature achève de déterminer ces lignes de pivotement. C'est ainsi que deux tores égaux disposés comme deux anneaux d'une chaîne peuvent pivoter l'un sur l'autre, les points de contact étant de plus astreints à arriver simultanément sur les cercles de gorge : dans ce cas, $A = -a + b \sin v$, $b$ étant le rayon des cercles méridiens, $a$ celui du lieu de leurs centres. Les lignes de pivotement, pour lesquelles $v = v'$ sont données par les formules suivantes, où $c_1$, $c_2$ désignent deux constantes

$$u = u' - c_1 = c_2 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{v} \frac{dv}{\sqrt{\sin v(\alpha - \sin v)}}, \qquad \alpha = \frac{a}{b}.$$

Dans le cas de *deux surfaces développables* le système (5) est intégrable par quadratures. Pour le voir, prenons pour paramètres relatifs à S l'abscisse curviligne $u$ du point de contact $m$ d'une génératrice rectiligne avec l'arête de rebroussement et la mesure algébrique $v$ du vecteur $m$M de la génératrice. (Les éléments analogues relatifs à S' et M' seront $u'$ et $v'$.) Prenons la génératrice pour axe M$x$. Les expressions de $p_d$, $q_d$, $r_d$ sont les mêmes pour le trièdre M$xyz$ et pour le trièdre $mx_1y_1z_1$ ayant ses axes parallèles à ceux du premier; son axe $mx_1$ est la tangente à l'arête de rebroussement, le plan $x_1my_1$ en est le plan osculateur. Désignant par $p(u)$ et $r(u)$ la torsion changée de signe et la courbure de l'arête de rebroussement au point $m$, on a, pour le trièdre M$xyz$,

$$p_d = p(u)\,du, \qquad q_d = 0, \qquad r_d = r(u)\,du, \qquad \xi_d = du + dv, \qquad \eta_d = v\,r(u)\,du,$$

et des expressions analogues pour le trièdre M'$x'y'z'$.

La seconde des équations (3) est ici

$$\sin\varphi\, p'(u')\,du' = 0.$$

Nous écartons le cas où l'on aurait $du' = 0$, car alors on aurait aussi, d'après les autres équations $du = dv = dv' = 0$, M et M' seraient fixes. Prenons donc $\sin\varphi = 0$, et pour fixer les idées $\varphi = 0$, les équations (3) donnent

$$p(u)\,du = p'(u')\,du', \qquad d(u+v) = d(u'+v'), \qquad v\,r(u)\,du = v'r'(u')\,du'.$$

Elles sont compatibles si

$$v\frac{r(u)}{p(u)} = v'\frac{r'(u')}{p(u')}, \tag{8}$$

et alors

$$u + v = u' + v' + c_1, \tag{9}$$

$$\int p(u)\,du = \int p'(u')\,du' + c_2. \tag{10}$$

On a ici deux constantes arbitraires seulement au lieu de trois dans le cas où S et S′ sont quelconques.

L'interprétation géométrique est immédiate.

Les représentations sphériques des deux surfaces développables S et S′ sont des courbes Γ, Γ′. La relation (10) établit entre les points P, P′ de ces courbes une correspondance telle que les arcs décrits par P et P′ soient égaux entre eux. Au cours du pivotement les surfaces développables viennent se raccorder suivant les génératrices de contact de plans tangents correspondant aux points homologues P et P′. En rapprochant (8) de la formule (10) du Tableau I de l'Ouvrage de Darboux, on voit que les rayons de courbure principaux des développables doivent être égaux aux points correspondants.

On peut d'ailleurs, en un certain sens, considérer les génératrices des développables S, S′ comme des lignes de pivotement, les surfaces Σ, Σ′, des normales à S et S′ le long des génératrices rectilignes sont ici des plans, et sont non seulement applicables mais superposées l'une à l'autre (avec correspondances des normales et des intersections S, Σ; S′, Σ′).

Plus généralement, si deux surfaces S, S′ convenablement placées l'une par rapport à l'autre se raccordent tout le long d'une courbe C, cette courbe C constitue pour les deux surfaces une ligne de pivotement de nature analogue, puisque les surfaces Σ, Σ′ sont encore superposées.

**4.** Nous dirons que le contact de deux surfaces S, S′ est *directement réalisable* dans les conditions précisées plus haut (n° 1) si le point commun est un point double isolé de l'intersection de S et de S′. Dans ces conditions, en effet, on peut imaginer deux régions σ, σ′ sur S et S' auxquelles M et M' seraient respectivement intérieurs, et qui constitueraient des parties des frontières de deux solides ne se pénétrant pas mutuellement. Pour étudier la possibilité de cette réalisation directe du contact prenons les axes $Mx$, $My$, $Mx'$, $My'$ tangents aux lignes de courbure de S et de S', soient

$$z = ax^2 + by^2 + f(x, y), \qquad z' = cx'^2 + dy'^2 + g(x', y'),$$

les équations des deux surfaces supposées analytiques; $a$, $b$, $c$, $d$ sont des constantes, les séries entières $f$ et $g$ s'annulent, ainsi que leurs dérivées premières et secondes lorsque $x = y = x' = y' = 0$.

Le point de contact des deux surfaces tangentes est en général un point double dont les tangentes rapportées aux axes $Mx$, $My$ ont pour équation

$$ax^2 + by^2 - c(x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 - d(x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 = 0 \qquad \left(\varphi = \widehat{Mx, Mx'}\right),$$

ou, en posant $\operatorname{tang}\varphi = t$,

$$[a - c + (a - d)t^2]x^2 + 2(c - d)txy + [b - d + (b - c)t^2] = 0.$$

Le contact est directement réalisable si

$$\begin{aligned} &[a - c + (a - d)t^2][b - d + (b - c)t^2] - (c - d)^2 t^2 \\ &\quad = (t^2 + 1)[(a - d)(b - c)t^2 + (a - c)(b - d)] > 0. \end{aligned}$$

Soient A, B, C, D les points de $Mz$, $Mz'$ de cotes $a$, $b$, $c$, $d$ (ils se déduisent, par une même inversion de pôle M, des centres de courbure des sections principales des deux surfaces); on obtient facilement les résultats suivants :

Si les deux segments AB, CD sont extérieurs l'un à l'autre, la réalisation directe est possible, quels que soient $t$ et $\varphi$ (Exemple : deux surfaces convexes à concavités opposées).

Si l'un des segments est entièrement intérieur à l'autre, la réalisation directe est impossible quels que soient $t$ et $\varphi$ (Exemple : deux surfaces minima).

Si les deux segments empiètent l'un sur l'autre, la réalisation directe est possible pour certaines valeurs de $\varphi$, impossible pour d'autres. Le changement se fait pour les valeurs de $\varphi$ telles que

$$(11) \qquad \operatorname{tang}^2\varphi = t^2 = -\frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)} = -(R_1 R_2 R'_1 R'_2),$$

$R_1$, $R_2$, $R'_1$, $R'_2$ sont les rayons de courbures principaux de S et S′; ces valeurs de passage sont précisément celles de l'orientation spéciale considérée plus haut. Elles correspondent au cas où les tangentes au point double de l'intersection étant confondues, il y a en général rebroussement, les surfaces sont *osculatrices* (1).

La différence $z - z'$ est une série entière en $x$, $y$ en groupant les termes de même degré, on écrit

$$z - z' = F_2(x, y) + F_3(x, y) + \dots.$$

Pour une valeur $\varphi_1$ de $\varphi$ vérifiant l'équation (11), $F_2$ est un carré parfait; en général $F_3$ ne s'annule pas lorsque le point P de coordonnées $x$, $y$ décrit la tangente au point de rebroussement, et $\delta = z - z'$ prend alors des valeurs $\delta_1$, $\delta_2$ de signes contraires pour des points $P_1$, $P_2$ situés sur cette tangente de part et d'autre de l'origine. Pour cette orientation spéciale les surfaces se traversent mutuellement au voisinage de l'origine; des considérations de continuité montrent que $\delta_1 \delta_2$ est encore négatif si $\varphi$ est suffisamment voisin de $\varphi_1$. En définitive, la réalisation directe de l'orientation spéciale est en général impossible, et pour réaliser directement des orientations voisines de celle-là, il

(1) Les tangentes au point double de l'intersection situé au point de contact M se trouvent de la façon suivante, quand on utilise la représentation de M. Hadamard : on détermine de deux façons différentes les projections sur $Mx$, $My$ d'un arc infiniment petit $MM_1$ de l'intersection

$$(a) \qquad \zeta_d = \xi'_d \cos\varphi - \eta'_d \sin\varphi, \qquad \eta_d = \xi'_d \sin\varphi + \eta'_d \cos\varphi.$$

On écrit ensuite que la courbure normale (en M) d'une branche de l'intersection est la même quelle que soit celle des surfaces S, S′ à laquelle on applique les formules de Codazzi [Darboux, *Surfaces*, t. II, tableau II, formule (3)], ce qui conduit facilement à

$$(b) \qquad p_d \eta_d - q_d \zeta_d = p'_d \eta'_d - q'_d \xi'_d.$$

Pour chaque valeur de $\varphi$, les équations ($a$) et ($b$) déterminent les rapports mutuels de $du$, $dv$, $du'$, $dv'$ et la discussion directe de la réalité de ces rapports renseigne sur la possibilité de réalisation directe du contact avec cette orientation.

Une méthode analogue permet de trouver les équations différentielles des intersections de deux surfaces S, S′ données par des trièdres mobiles.

faut prendre les frontières des éléments de surface $\sigma$, $\sigma'$ de plus en plus voisines de M et M'.

On doit encore examiner à part le cas des surfaces S, S' développables; les deux surfaces se raccordant le long d'une génératrice quand le point double de leur intersection correspondant au contact n'est pas à tangentes distinctes. La génératrice de contact étant prise pour axe $Oy$, le plan $z=0$ étant le plan tangent commun, les équations des surfaces (analytiques) sont de la forme

$$z=y^2[a+\theta_1(x,y)+\theta_2(x,y)+\ldots], \qquad z'=y^2[b+\psi_1(x,y)+\psi_2(x,y)+\ldots]$$

($\theta_i$ et $\psi_i$ sont des polynomes homogènes de degré $i$).

On a ici

$$z-z'=y^2[a-b+\theta_1-\psi_1+\theta_2-\psi_2+\ldots].$$

Cette différence est nulle ou de signe constant au voisinage de l'origine, sauf lorsque $a$ étant égal à $b$, les rayons de courbure principaux finis seraient égaux. Dans ce cas il arrive en général que $\theta_1-\psi_1$ est différent de zéro. Alors il peut prendre des signes différents, le contact cesse encore d'être directement réalisable.