

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

A. DANILEWSKY

**Remarque sur la note de M. R. Garnier : sur une propriété  
des matrices orthogonales**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 17, n° 1-4 (1938), p. 13-14.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1938\\_9\\_17\\_1-4\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_13_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Remarque sur la Note de M. R. Garnier :  
Sur une propriété des matrices orthogonales ;*

**PAR A. DANILEWSKY.**

(Kharkoff.)

Je veux montrer que le théorème démontré par M. Garnier (1) :

+ et — désignant respectivement des éléments réels (ou nuls) et purement imaginaires (ou nuls), il n'existe aucune matrice orthogonale

$$\Sigma \equiv \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{+ \dots +}^{2n-p} & \overbrace{- \dots -}^{p-h} & & & & \\ + & \dots & + & - & \dots & - \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ + & \dots & + & - & \dots & - \\ - & \dots & - & + & \dots & + \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & \dots & - & + & \dots & - \end{array} \right\| \begin{array}{l} p \\ 2n-p-h \end{array}$$

où l'on aurait

$$(1) \quad h \leq p < n,$$

est une conséquence immédiate de la loi d'inertie des formes quadratiques.

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 9<sup>e</sup> série, **16**, 1937, p. 105-110.

En effet, en vertu de la définition

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^p & \overbrace{\dots \dots \dots}^{2n-p-h} \\ & i \\ & \dots \\ & i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overbrace{+ \dots +}^{2n-h} \\ \dots \dots \dots \\ + \dots + \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overbrace{1 \dots 1}^{2n-p} & \overbrace{\dots \dots \dots}^{p-h} \\ & i \\ & \dots \\ & i \end{vmatrix}$$

$$\equiv (\overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{i, \dots, i}^{2n-p-h}) S(\overbrace{1, \dots, 1}^{2n-p}, \overbrace{i, \dots, i}^{p-h}),$$

où  $S$  est une matrice *réelle* d'ordre  $2n - h$  et  $(x_1, x_2, \dots)$  désigne une matrice diagonale.

La matrice  $\Sigma$  étant orthogonale, on a

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1, \dots, 1}^{2n-h} \end{pmatrix} = \Sigma \Sigma' = \begin{pmatrix} \overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{i, \dots, i}^{2n-p-h} \end{pmatrix} \times S(\overbrace{1, \dots, 1}^{2n-p}, \overbrace{i, \dots, i}^{p-h}) (\overbrace{1, \dots, 1}^{2n-p}, \overbrace{i, \dots, i}^{p-h}) S'(\overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{i, \dots, i}^{2n-p-h})$$

ou

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \overbrace{1, \dots, 1}^{2n-h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{i, \dots, i}^{2n-p-h} \end{pmatrix} \times S(\overbrace{1, \dots, 1}^{2n-p}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{p-h}) S'(\overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{i, \dots, i}^{2n-p-h}).$$

En multipliant (2) à droite et à gauche par la matrice

$\begin{pmatrix} \overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{i, \dots, i}^{2n-p-h} \end{pmatrix}$ , on obtient l'égalité

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1, \dots, 1}^p, \overbrace{-1, \dots, -1}^{2n-p-h} \end{pmatrix} = S(\overbrace{1, \dots, 1}^{2n-p}, \overbrace{-1, \dots, -1}^{p-h}) S',$$

en vertu de laquelle la forme  $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{2n-h}^2$  se réduit par la substitution réelle  $S$  à la forme

$$y_1^2 + \dots + y_{2n-p}^2 - y_{2n-p+1}^2 - \dots - y_{2n-h}^2,$$

ce qui est contraire à la loi d'inertie, car, en vertu de (1),

$$2n - p = 2(n - p) + p > p.$$

