JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL FLAMANT

Étude des familles compactes de fonctions dans les classes quasi analytiques (D)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 375-420.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_375_0>

Étude des familles compactes de fonctions dans les classes quasi analytiques (D);

PAR PAUL FLAMANT.

INTRODUCTION.

Les questions traitées ici concernent les classes quasi analytiques (D) et m'ont été suggérées par l'analyse générale. Je suis heureux de dédier ce Mémoire en hommage à M. Jacques Hadamard, au Maître à qui je dois de m'être orienté vers l'analyse fonctionnelle et l'analyse générale, et dont l'influence a contribué aussi à m'intéresser à la quasi analyticité.

Les familles compactes de fonctions d'une classe quasi analytique sont tout à fait analogues aux familles compactes de fonctions holomorphes connues sous le nom de familles normales, mais il n'y a pas de critères très simples comme pour ces dernières. Toutefois, même pour les fonctions analytiques, ces critères simples ne s'appliquent que dans le domaine complexe : la famille des $\sin ax$ (a variable) également bornée dans le domaine réel n'y est pas compacte.

Ce Mémoire comprend deux parties. La première, qui s'applique à toute classe quasi analytique (D), traite des familles compactes dont tous les éléments d'accumulation sont finis; elle est basée sur l'emploi d'une norme (distance de la fonction à zéro) dont la petitesse signifie que la fonction et toutes ses dérivées restent petites; dans cette partie, les fonctions interviennent linéairement. Les résultats essentiels ont été présentés à l'Académie des Sciences le 27 novembre 1933 (1).

(1) P. FLAMANT, *Convergence et compacité dans les classes de fonctions quasi analytiques* (D) (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. **197**, Paris, 1933, p. 1282-1284).

La seconde partie exige une certaine régularité de la suite de nombres définissant la classe quasi analytique; sauf dans la première section relative au cas où les dérivées appartiennent à la même classe que la fonction, les fonctions n'interviennent plus linéairement. La norme d'un produit peut être limitée, connaissant les normes des facteurs; ce fait sert de base pour atteindre au moyen des séries de Taylor les fonctions analytiques des fonctions de la classe; j'ai considéré surtout les puissances quelconques, les logarithmes et les exponentielles. Cela m'a conduit à définir la convergence vers l'infini et à généraliser dans ce sens la notion de compacité. Dans cette étude intervient à côté de la norme un élément nouveau, la fluctuation d'une fonction de signe constant, caractéristique de sa ressemblance à une constante; la fluctuation est analogue au rapport du maximum au minimum de valeur absolue, comme la norme est analogue à la valeur absolue maximum, ces deux nombres tenant compte en outre des dérivées de tous les ordres. La convergence vers l'infini a fait l'objet de ma Communication au Congrès international des Mathématiciens à Oslo le 17 juillet 1936; les résultats de la seconde partie ont été présentés à l'Académie des Sciences le 12 octobre 1936 [1].

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS AYANT LIEU DANS TOUTE CLASSE QUASI ANALYTIQUE.

I. — Convergence.

1. Une classe quasi analytique (D) est définie par la donnée d'un intervalle fermé $(a \mid b)$ et d'une suite de nombres positifs $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ telle que la série $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}$ diverge. Une fonction de variable réelle $\varphi(x)$ appartient à cette classe si elle est définie et indéfiniment

---

(1) P. Flamant, *Sur la compacité dans les classes de fonctions quasi analytiques* (D) (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. **203**, Paris, 1936, p. 652-654).

dérivable sur l'intervalle $(a \mid b)$ et s'il existe un nombre k tel que les inégalités

$$|\varphi'(x)| \leqq k A_1, \quad |\varphi''(x)| \leqq k^2 A_2, \quad \ldots, \quad |\varphi^{(r)}(x)| \leqq k^r A_r, \quad \ldots$$

aient lieu dans tout l'intervalle $(a \mid b)$.

2. Type et norme. — Nous appelons *type* s de cette classe, s étant un nombre positif, l'ensemble des fonctions pour chacune desquelles les quotients

$$\frac{|\varphi(x)|}{A_0}, \quad \frac{|\varphi'(x)|}{A_1 s}, \quad \frac{|\varphi''(x)|}{A_2 s^2}, \quad \ldots, \quad \frac{|\varphi^{(r)}(x)|}{A_r s^r}, \quad \ldots$$

admettent une borne supérieure finie. Cette borne supérieure sera appelée la *norme* de la fonction φ dans le type s; nous la noterons $\|\varphi\|$, ou $\|\varphi\|_s$ lorsqu'il sera nécessaire d'indiquer explicitement le type.

Il est clair que le type s est un ensemble croissant avec s; autrement dit, toute fonction du type s appartient aux types $s' > s$.

Connaissant la classe, le type et la norme, la fonction et toutes ses dérivées sont limitées par les inégalités

$$(1) \quad |\varphi(x)| \leqq \|\varphi\| A_0, \quad |\varphi'(x)| \leqq \|\varphi\| A_1 s, \quad \ldots, \quad |\varphi^{(r)}(x)| \leqq \|\varphi\| A_r s^r, \quad \ldots.$$

Abstraction faite de la première, ces inégalités expriment que $\varphi'(x)$ appartient au type s de la classe définie par $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}, \ldots$ et que sa norme y est au plus égale à $s\|\varphi\|$. Cette nouvelle classe est quasi analytique (D) en même temps que la classe donnée, d'après la comparaison des séries correspondantes (¹). La remarque s'étend aux dérivées de tous les ordres.

Les inégalités (1) permettent de vérifier que le type s d'une classe quasi analytique (D) constitue une multiplicité de vecteurs abstraits, l'addition et la multiplication ayant le sens algébrique habituel (²).

(¹) T. Carleman, *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926, p. 106.

(²) P. Flamant, *La notion de continuité dans l'étude des transmutations distributives des fonctions d'une variable complexe et ses applications* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. LII, 1928, 1ʳᵉ partie, p. 32-34).

Les différences finies satisfont aussi à des inégalités, car

$$\Delta_h\varphi(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_x^{x+h}\varphi'(y)\,dy,$$

$$\Delta_h\varphi^{(r)}(x)=\int_x^{x+h}\varphi^{(r+1)}(y)\,dy,$$

d'où

$$(2)\qquad |\Delta_h\varphi(x)|\leqq\|\varphi\|\,A_1 sh,\qquad \ldots,\qquad |\Delta_h\varphi^{(r)}(x)|\leqq\|\varphi\|\,A_{r+1}s^{r+1}h,\qquad \ldots,$$

pour x et $x+h$ tous deux dans $(a\,|\,b)$.

3. Définition de la convergence. — Dans le type s, le mode de convergence le plus naturel à considérer est celui qui s'exprime par la norme; nous l'appellerons convergence en norme (s). La suite $\varphi_n(x)$ converge vers $\psi(x)$ si $\|\varphi_n-\psi\|$ tend vers zéro. D'après la définition de la norme, il faut et il suffit que les fonctions

$$\frac{\varphi_n(x)-\psi(x)}{A_0},\quad \frac{\varphi'_n(x)-\psi'(x)}{A_1 s},\quad \ldots,\quad \frac{\varphi_n^{(r)}(x)-\psi^{(r)}(x)}{A_r s^r},\quad \ldots$$

tendent uniformément [quel que soit x dans $(a\,|\,b)$] et également [quel que soit l'entier r] vers zéro pour n infini. En particulier, les fonctions et les dérivées de chaque ordre tendent uniformément vers la fonction limite et sa dérivée du même ordre.

On voit aussi que $\varphi'_n(x)$ converge en norme (s) vers $\psi'(x)$ dans la classe définie par $\{A'_r=A_{r+1}\}$, et de même pour les dérivées suivantes.

4. *L'ensemble des fonctions du type s constitue une multiplicité complète.*

Cela signifie [1] que toute suite intrinsèquement convergente en norme (s) converge de même vers une fonction du type considéré. Par hypothèse, à tout nombre positif h correspond un rang q tel que l'on ait

$$\|\varphi_n-\varphi_p\|\leqq h\qquad\text{pour}\quad n,\ q\geqq q,$$

[1] *Ibid.*, p. 36.

c'est-à-dire

$$|\varphi_n^{(r)}(x) - \varphi_p^{(r)}(x)| \leqq h A_r s^r \qquad \text{pour} \quad n, p \geqq q.$$

Pour les fonctions, ou pour les dérivées d'un ordre déterminé, en un point déterminé (r et x fixés), c'est le critère de convergence de Cauchy, d'où l'existence d'un nombre

$$\psi_r(x) = \lim_{p \succ \infty} \varphi_p^{(r)}(x).$$

Dans l'inégalité précédente, faisons tendre p vers l'infini

$$(3) \qquad |\varphi_n^{(r)}(x) - \psi_r(x)| \leqq h A_r s^r \qquad \text{pour} \quad n \geqq q;$$

x décrivant l'intervalle $(a \mid b)$, cette inégalité traduit la convergence uniforme de $\varphi_n^{(r)}(x)$ vers $\psi_r(x)$. De là résultent deux conséquences : 1° chaque fonction $\psi_r(x)$ est continue; 2° ces fonctions sont les dérivées les unes des autres, car

$$\varphi_n^{(r-1)}(x) - \varphi_n^{(r-1)}(a) = \int_a^x \varphi_n^{(r)}(y)\, dy$$

et, en passant à la limite sous le signe $\int$,

$$\psi_{r-1}(x) - \psi_{r-1}(a) = \int_a^x \psi_r(y)\, dy,$$

remplaçant alors $\psi_r(x)$ par $\psi^{(r)}(x)$, les inégalités (3) se traduisent par

$$\|\varphi_n - \psi\| \leqq h \qquad \text{pour} \quad n \geqq q. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. Distribution des zéros. — Les fonctions quasi analytiques étant continues, si la fonction limite n'a pas de zéro dans un intervalle fermé, sa borne inférieure en valeur absolue n'y est pas nulle, et par suite de la convergence uniforme, il en est de même des fonctions de la suite. Donc : *Si la fonction limite est sans zéro dans un intervalle fermé, la fonction de la suite convergente est, à partir d'un certain rang, sans zéro dans ce même intervalle.*

Considérons maintenant un intervalle fermé à l'intérieur duquel la fonction limite admet un zéro, sa dérivée en étant dépourvue. Les valeurs de la fonction limite aux extrémités de l'intervalle sont de signes opposés, il en est de même pour les fonctions de rang élevé de la suite qui admettent donc chacune un nombre impair de zéros. La convergence uniforme des dérivées premières entraîne pour elles l'absence de zéro, d'où un zéro simple et unique pour les fonctions. Ceci est valable pour un intervalle arbitrairement petit autour d'un zéro simple de la fonction limite. Donc :

Un zéro simple de la fonction limite intérieur à l'intervalle fondamental est limite d'un zéro et d'un seul de la fonction variable. Si la fonction limite n'admet que des zéros simples tous intérieurs à l'intervalle fondamental, la fonction de la suite convergente finit par en avoir exactement le même nombre (simples et intérieurs).

Prenons maintenant un zéro double de la fonction limite, et un intervalle fermé l'entourant sans contenir d'autre zéro de la fonction ni de la dérivée première. La fonction limite a même signe aux deux extrémités, il en est de même des fonctions de rang élevé de la suite qui ont donc dans cet intervalle un nombre pair de zéros. Leurs dérivées premières ayant un zéro simple et unique, elles ont exactement 0 ou 2 zéros; les deux cas sont effectivement possibles, comme le montre la suite $x^2 \pm \frac{1}{n}$ qui tend vers x^2; il peut y avoir aussi un zéro double. On peut raisonner de même par l'examen direct des signes aux extrémités d'une part et l'emploi d'un raisonnement récurrent qui renseigne sur les zéros de la dérivée d'autre part. On obtient ainsi le théorème suivant :

Si la fonction limite a un zéro p-uple intérieur à l'intervalle : à partir d'un certain rang, la fonction de la suite a au voisinage un nombre total de zéros au plus égal à p et de même parité.

6. Supposons maintenant qu'une extrémité de l'intervalle fondamental soit zéro de la fonction limite, nommons p son ordre. Nous pouvons prendre à partir de cette extrémité un intervalle assez petit pour que la fonction et ses $p-1$ premières dérivées n'y possèdent pas d'autre zéro et pour que la $p^{\text{ième}}$ dérivée n'en ait aucun. Alors la $p^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction de rang assez élevé dans la suite n'a aucun zéro dans l'intervalle en question; la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée a un zéro simple au maximum; la précédente a 2 zéros au maximum, et ainsi de suite; la fonction elle-même a p zéros au maximum. Naturellement, les considérations de signes aux extrémités de l'intervalle disparaissent.

Si une extrémité de l'intervalle est zéro p-uple pour la fonction limite, les fonctions de la suite à partir d'un certain rang ont au maximum p zéros à son voisinage.

Les théorèmes précédents admettent les corollaires suivants :

Si la fonction limite d'une suite convergente n'est pas identiquement nulle, le nombre total des zéros de la suite est, à partir d'un certain rang, borné par celui de la fonction limite; si cette dernière n'a pas de zéro aux extrémités de l'intervalle, il est de même parité.

Si la fonction limite n'est pas identiquement nulle, le nombre des zéros des fonctions de la suite est borné.

Si une suite convergente est formée de fonctions dont le nombre de zéros n'est pas borné, sa limite est identiquement nulle.

En appliquant ce résultat aux dérivées d'un certain ordre, on obtient : *Si le nombre des zéros des dérivées $p^{\text{ièmes}}$ des fonctions de la suite n'est pas borné, la fonction limite est un polynome de degré $p - 1$.*

7. Points faibles. — La comparaison de ces résultats à ceux que donne la convergence uniforme des fonctions holomorphes dans un domaine complexe fait ressortir une différence essentielle : au lieu de l'égalité entre le nombre des zéros de la fonction limite et celui des fonctions de la suite convergente, on a une inégalité, la fonction limite pouvant avoir plus de zéros. Un zéro de la fonction limite pouvant n'être pas limite de zéros des fonctions de la suite, les raisonnements où l'on conclut de la fonction limite aux fonctions convergentes ne peuvent subsister qu'en introduisant une notion nouvelle.

Appelons *point faible* d'une fonction toute valeur de la variable minimant la valeur absolue de la fonction. Pour une fonction quasi analytique (D), un point faible ne peut être qu'un zéro de la fonction, un zéro de la dérivée ou une extrémité de l'intervalle fondamental. Les points faibles d'une même fonction sont donc en nombre fini.

Dans la convergence uniforme des fonctions continues, toute valeur minimante propre de la fonction limite est limite de valeurs minimantes des fonctions de la suite.

En effet, soit

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

toutes les fonctions étant continues et la convergence uniforme dans un certain intervalle. Soit x_0 une valeur minimante propre de $f(x)$, il existe un intervalle $(x_0 - l \mid x_0 + l)$ dans lequel le minimum

$$f(x_0) = y_0$$

n'est atteint que pour x_0. Excluons un intervalle concentrique arbitrairement petit $(x_0 - l' \mid x_0 + l')$; dans la réunion des intervalles fermés $(x_0 - l \mid x_0 - l')$ et $(x_0 + l' \mid x_0 + l)$, la fonction continue $f(x)$ atteint effectivement sa borne inférieure, et celle-ci est par suite supérieure à y_0, soit $y_0 + 3k$. Par suite de la convergence uniforme, à partir d'un certain rang, $|f_n(x) - f(x)| \leqq k$; dès lors, on a dans les intervalles latéraux $f_n(x) \geqq y_0 + 2k$, tandis que $f_n(x_0) \leqq y_0 + k$, ce qui prouve que la borne inférieure de $f_n(x)$ pour tout l'intervalle

$$(x_0 - l \mid x_0 + l)$$

est nécessairement atteinte dans la partie centrale $(x_0 - l' \mid x_0 + l')$. Bien entendu le minimum n'est pas nécessairement propre pour les fonctions $f_n(x)$.

Revenons à nos fonctions quasi analytiques et considérons leurs valeurs absolues, ce sont des fonctions continues, et la convergence est uniforme car

$$\big| |\varphi_n(x)| - |\psi(x)| \big| \leqq |\varphi_n(x) - \psi(x)|.$$

L'application du théorème précédent montre donc que :

Tout point faible de la fonction limite est limite de points faibles des fonctions de la suite convergente.

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant : le polynome $x^3 - \frac{3x}{n^2} + 1$ admet pour point faible $\frac{1}{n}$ tandis que le polynome limite $x^3 + 1$ n'admet pas zéro pour point faible.

II. — Compacité.

8. Famille bornée en norme (s). — Considérons une famille de fonctions du type s dont les normes soient bornées supérieurement :

$$\|\varphi\| \leqq m.$$

L'application des inégalités (1) et (2) donne

$$(4) \qquad |\varphi^{(r)}(x)| \leqq m A_r s^r; \qquad |\Delta_h \varphi^{(r)}(x)| \leqq m A_{r+1} s^{r+1} h.$$

Ces fonctions sont donc également bornées et également continues, et pour chaque ordre de dérivation leurs dérivées sont aussi également bornées et également continues.

Considérons une suite de fonctions de la famille; l'égale borne et l'égale continuité de ces fonctions garantissent l'existence d'une suite partielle uniformément convergente. Prenons les dérivées premières des fonctions de cette suite partielle; leur égale borne et leur égale continuité entraînent l'existence d'une suite partielle uniformément convergente; cette suite étant extraite de la précédente, les fonctions convergent aussi uniformément. Continuant ainsi, chaque extraction de suite partielle réalise la convergence uniforme pour les dérivées d'un ordre plus élevé. Le procédé diagonal classique (¹) donnant une suite extraite de toutes les précédentes, les fonctions de cette suite et leurs dérivées d'un même ordre quel qu'il soit convergent uniformément dans l'intervalle fondamental. Il en résulte, par le raisonnement du n° **4**, que les limites sont une fonction et ses dérivées successives.

En appliquant les inégalités (4) aux fonctions $\varphi_n(x)$ et passant à la limite, on voit que *la fonction limite $\psi(x)$ appartient au type s et a une norme au plus égale à m.*

De plus, quel que soit $s' > s$, la convergence a lieu en norme (s'). Il s'agit de montrer que, étant donnés deux nombres $s' > s$ et $h > 0$, les inégalités

$$(5) \qquad |\varphi_n^{(r)}(x) - \psi^{(r)}(x)| \leqq h A_r s'^r$$

(¹) *Cf.* par exemple P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris, 1927, p. 15-17.

ont lieu pour toute valeur de r à partir de n suffisamment grand. Toutes les fonctions étant bornées en norme (s), les inégalités (4) donnent

$$|\varphi_n^{(r)}(x)| \leqq m A_r s^r, \qquad |\psi^{(r)}(x)| \leqq m A_r s^r,$$

et, par suite,

$$|\psi_n^{(r)}(x) - \psi^{(r)}(x)| \leqq 2 m A_r s^r,$$

les inégalités (5) ont donc lieu dès que

$$2 m s^r \leqq h s'^r \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{s}{s'}\right)^r \leqq \frac{h}{2m},$$

ce qui a lieu, indépendamment de n, pour r suffisamment grand. Il ne reste à envisager que des valeurs de r en nombre fini. Pour chacune d'elles, l'inégalité (5) a lieu, par suite de la convergence uniforme de la dérivée correspondante, à partir d'une certaine valeur de $n \geqq p(r)$; ces entiers $p(r)$ étant en nombre fini, il suffit de retenir le plus grand d'entre eux.

9. Définition d'une famille compacte du type s. — C'est une famille de fonctions bornée en norme (s') quel que soit $s' > s$. Une famille bornée en norme (s) satisfait évidemment à la condition, car les inégalités (4) subsistent *a fortiori* si l'on augmente s. Mais la condition est plus large, les fonctions de la famille pouvant appartenir ou non au type s. Cette définition se justifie par les deux théorèmes suivants :

Dans une telle famille, toute suite infinie admet une suite partielle convergente en norme (s') quel que soit $s' > s$.

Étant donné un nombre $s_1 > s$, la famille est bornée en norme (s_1); d'après le numéro précédent, il existe une suite partielle convergente en norme (s') quel que soit $s' > s_1$. Donnons-nous une suite de nombres $\{s_n\}$ tendant vers s en décroissant constamment, et appliquons cette propriété avec la valeur s_1 à la suite de fonctions donnée, avec la valeur s_2 à la suite partielle extraite, etc. La suite diagonale fait partie de chacune des suites extraites, elle possède donc la convergence en norme (s'), s' étant supérieur à quelqu'un des s_n, autrement dit, quel que soit $s' > s$.

Réciproquement, *si une famille de fonctions appartenant à tous les* *types plus grands que s est telle que toute suite de fonctions de cette famille admette une suite partielle convergente en norme* (s') *quel que soit* $s' > s$, *cette famille est bornée en norme* (s') *quel que soit* $s' > s$.

En effet, si pour une valeur particulière $s' > s$, elle n'était pas bornée en norme (s'), on pourrait y choisir une suite de fonctions dont les normes dans ce type s' croîtraient constamment et indéfiniment, caractère subsistant dans toute suite partielle. Or, c'est incompatible avec la convergence en norme (s') vers une fonction limite qui, par hypothèse, a lieu pour une suite partielle; car, dans toute convergence définie par une norme, la norme de l'élément variable tend vers celle de l'élément limite ([1]).

D'après la remarque faite au n° 2, *si une famille de fonctions est compacte du type s dans la classe définie par* $\{A_n\}$, *la famille de leurs dérivées est compacte du même type dans la classe définie par* $\{A'_n = A_{n+1}\}$.

10. La norme d'un élément d'accumulation étant la limite des normes (de même espèce) des fonctions convergeant vers lui, elle ne dépasse pas leur borne supérieure. Donc, *en adjoignant à une famille compacte du type s ses éléments d'accumulation, la famille obtenue est aussi compacte du type s*. En outre, *c'est un ensemble fermé*. Cela tient à ce que la convergence considérée peut se définir au moyen d'une distance ([2]), savoir

$$(\varphi, \psi)_s = \int_s^{s+1} \frac{\|\varphi - \psi\|_t}{1 + \|\varphi - \psi\|_t}\, dt.$$

Tout d'abord, le nombre défini par cette expression est bien une distance. Il est évident que sa nullité équivaut à $\varphi = \psi$; il reste à voir que l'inégalité

$$(\varphi, \psi) \leqq (\varphi, \chi) + (\chi, \psi)$$

a lieu pour trois fonctions; cette inégalité résulte immédiatement de l'inégalité analogue pour les fonctions sous le signe $\int$. Or, si trois nombres positifs a, b, c satisfont aux inégalités caractérisant les trois

([1]) P. FLAMANT, *loc. cit.*, p. 35.

([2]) M. FRÉCHET, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906, p. 18).

côtés d'un triangle, il en est de même des trois nombres $\frac{a}{1+a}$, $\frac{b}{1+b}$, $\frac{c}{1+c}$. Il suffit, en effet, d'écrire que le plus grand nombre est inférieur à la somme des deux autres; la croissance de la fonction homographique $\frac{x}{1+x}$ montre que les nombres des deux suites se rangent dans le même ordre de grandeur; si a est le plus grand, il est clair que $a \leqq b+c$ entraîne

$$\frac{a}{1+a} \leqq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c},$$

puisque le diviseur du premier membre est plus grand que chacun de ceux figurant au second membre.

Pour voir quelle est la convergence définie par cette distance, nous utilisons le fait que, pour une même fonction, la norme est une fonction non croissante du type. Partageons l'intervalle d'intégration en deux parties au moyen du nombre intermédiaire s', nous voyons que, pour $s \leqq t \leqq s'$,

$$\|\varphi-\psi\|_{s'} \leqq \|\varphi-\psi\|_t \quad \text{et, par suite} \quad \frac{\|\varphi-\psi\|_{s'}}{1+\|\varphi-\psi\|_{s'}} \leqq \frac{\|\varphi-\psi\|_t}{1+\|\varphi-\psi\|_t} < 1,$$

et, pour $s' \leqq t \leqq s+1$,

$$\|\varphi-\psi\|_t \leqq \|\varphi-\psi\|_{s'} \quad \text{et, par suite} \quad 0 < \frac{\|\varphi-\psi\|_t}{1+\|\varphi-\psi\|_t} \leqq \frac{\|\varphi-\psi\|_{s'}}{1+\|\varphi-\psi\|_{s'}}.$$

Il en résulte que

$$\frac{(s'-s)\|\varphi-\psi\|_{s'}}{1+\|\varphi-\psi\|_{s'}} < (\varphi, \psi)_s < s'-s+\frac{(s+1-s')\|\varphi-\psi\|_{s'}}{1+\|\varphi-\psi\|_{s'}},$$

s' étant fixé, l'inégalité de gauche montre que, la distance tendant vers zéro, la norme dans le type s' tend vers zéro. Si, quel que soit $s' > s$, la norme dans le type s' tend vers zéro, l'inégalité de droite permet de rendre la distance arbitrairement petite en choisissant d'abord s' assez voisin de s, puis s' une fois fixé, en rendant la norme assez petite. La convergence définie par cette distance est donc bien la convergence en norme (s') quel que soit $s' > s$.

III. — Propriétés des familles compactes.

11. Convergence des suites. — *Si une suite de fonctions d'une famille compacte du type s converge en tout point de l'intervalle fondamental ainsi que la suite des dérivées de chaque ordre, il y a convergence en norme (s') quel que soit $s' > s$.*

Tout d'abord, il y a en chaque point une limite des fonctions et une limite des dérivées de chaque ordre, limites qui restent les mêmes pour toute suite partielle. Or, il existe une suite partielle qui converge en norme (s') vers une fonction de la classe et ses dérivées; les limites considérées sont donc les valeurs d'une fonction quasi analytique $\psi(x)$ et de ses dérivées. Affirmer que la suite donnée converge en norme (s'), c'est dire que, s' et h étant donnés, l'inégalité (5) a a lieu quels que soient r et x à partir de n assez grand, ou encore que les valeurs de n pour lesquelles elle n'a pas lieu sont en nombre fini. Nier cette convergence, c'est donc dire qu'il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles l'inégalité n'a pas lieu, c'est-à-dire à chacune desquelles correspondent une valeur de x et une valeur de r telles que

$$(6) \qquad |\varphi_n^{(r_n)}(x_n) - \psi^{(r_n)}(x_n)| > h\,A_{r_n} s'^{r_n}.$$

La suite $\varphi_n(x)$ réduite à ces valeurs de n admet une suite partielle ayant la convergence en question, et la limite ne saurait être différente; autrement dit, parmi ces valeurs de n, il y en a une infinité pour lesquelles a lieu l'inégalité (5) quels que soient x et r, ce qui est contradictoire avec (6).

12. *Si une suite de fonctions d'une famille compacte converge ainsi que la suite des dérivées de chaque ordre en un seul et même point de l'intervalle fondamental, ces suites convergent partout et par conséquent à la manière précédente.*

Tout d'abord, les valeurs des fonctions ou des dérivées d'un certain ordre étant bornées, leur ensemble n'a que des valeurs d'accumulation finies; la suite des valeurs considérées converge si elle a une seule valeur d'accumulation. Il suffit donc de prouver l'impossibilité de deux valeurs d'accumulation distinctes pour les fonctions ou pour les dérivées d'un même ordre en un même point. Imaginons ainsi deux valeurs d'accumulation, chacune est limite d'une suite extraite de la suite donnée, d'où deux suites de fonctions qui admettent chacune une suite partielle convergeant vers une fonction quasi analytique de la classe; ces deux fonctions, égales ainsi que toutes leurs dérivées au point où la suite primitive converge par hypothèse, différeraient soit par elle-mêmes, soit par leurs dérivées d'un certain ordre en l'autre point, ce qui est impossible.

13. *Si une suite de fonctions d'une famille compacte converge en une infinité de points de l'intervalle fondamental, cette suite converge partout ainsi que la suite des dérivées d'un même ordre, et par suite converge à la manière précédente.*

Le mode de raisonnement est le même; on aurait deux fonctions de la classe quasi analytique coïncidant en une infinité de points sans être identiques, puisqu'elles différeraient soit par elles-mêmes, soit par leurs dérivées d'un certain ordre en un autre point, ce qui est impossible.

14. Dans cet ordre d'idées, on peut généraliser un peu :

Étant donnée une suite de fonctions d'une famille compacte, si la suite des dérivées de chaque ordre à partir de r converge en un seul et même point, ou si la suite des dérivées d'ordre r converge en une infinité de points, les éléments d'accumulation de la suite ne peuvent différer que par un polynome additif de degré $r-1$.

En effet, prenons deux suites partielles convergeant à la manière indiquée, leurs limites respectives sont deux fonctions d'une même classe quasi analytique, leurs dérivées $r^{\text{ièmes}}$ également; or, ces dernières sont égales ainsi que toutes leurs dérivées en un point, ou bien sont égales en une infinité de points, ce qui entraîne leur coïncidence. La différence des deux fonctions limites a donc sa dérivée $r^{\text{ième}}$ nulle, et est par suite un polynome de degré $r-1$. Tout système de r conditions permettant d'affirmer sa nullité identique entraîne la convergence de la suite donnée; les plus simples sont la convergence des fonctions en r points, celle des fonctions et des dérivées des $r-1$ premiers ordres en un point (qui peut varier avec l'ordre de dérivation); mais ce ne sont pas les seules; par exemple, pour $r=3$, la convergence des fonctions en deux points et celle des dérivées premières en un point autre que le milieu des deux précédents produisent le même effet.

15. Familles sans élément d'accumulation constant. — *Si une famille compacte du type s n'admet pas de fonction identiquement nulle parmi ses éléments d'accumulation, le nombre des zéros des fonctions de la famille est borné supérieurement.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Formons alors une suite de fonctions de la famille dont le nombre des zéros aille en croissant constamment et indéfiniment, ce caractère subsiste dans toute suite partielle. En vertu de la compacité, il existe une suite partielle convergente et, d'après le n° 6, la fonction limite est identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

16. Une famille compacte qui n'admet pas de constante parmi ses éléments d'accumulation ne peut contenir qu'un nombre fini de fonctions constantes. En effet, la famille étant bornée en norme (s'), les valeurs prises par les fonctions sont bornées. Imaginons alors une infinité de fonctions constantes, leurs valeurs appartiennent à un intervalle fini, elles admettent au moins une valeur d'accumulation vers laquelle converge une suite partielle; or, pour les fontions constantes, la convergence ordinaire a aussi lieu en norme, il y aurait donc au moins un élément d'accumulation constant. On ne restreint donc pas la généralité en excluant, lorsque c'est commode, les fonctions constantes de la famille.

Si une famille compacte du type s ne contient pas de constante et n'en admet aucune parmi ses éléments d'accumulation, le nombre des racines de toutes les équations $\varphi(x)=a$ dans l'intervalle fondamental admet une borne supérieure indépendante de la fonction $\varphi(x)$ de la famille et de la constante a.

Les fonctions étant bornées, les équations considérées n'ont pas de racine dès que a sort de l'intervalle des valeurs prises par les fonctions. Considérons alors la famille des fonctions $\varphi(x)-a$, $\varphi(x)$ fonction quelconque de la famille donnée, a constante quelconque prise dans l'intervalle considéré. Cette famille est compacte; soit, en effet, une suite de fonctions lui appartenant : ou bien une même fonction $\varphi(x)$ y figure une infinité de fois, nous prenons la suite partielle correspondante; ou bien chaque fonction $\varphi(x)$ ne figure qu'un nombre fini de fois, il y a une infinité de fonctions $\varphi(x)$ distinctes, et la famille des $\varphi(x)$ étant compacte, il y a une suite partielle convergente que nous prenons. La suite partielle ainsi prise met en jeu une infinité de valeurs de a (distinctes ou non) admettant une suite partielle (peut-être formée de valeurs égales) qui converge vers une valeur finie; la suite correspondante des $\varphi(x)-a$ converge vers $\lim \varphi(x) - \lim a$. La convergence a bien lieu en norme (s') quel que soit $s' > s$, puisqu'il en est ainsi pour les $\varphi(x)$.

La compacité étant établie, montrons qu'aucun élément d'accumulation n'est identiquement nul. Si, pour une certaine suite, les $\varphi(x)-b$ tendaient vers zéro, on pourrait considérer une suite partielle dans laquelle les a tendraient vers une limite finie, les $\varphi(x)$ figurant dans cette suite tendraient vers la limite des a; ce seraient ou bien des fonctions distinctes de la famille, et il y aurait une constante parmi les éléments d'accumulation, ou bien la même fonction répétée, et elle serait constante, éventualités toutes deux contraires à l'hypothèse.

La famille des $\varphi(x)-a$ est alors justiciable du n° **15**, ce qui démontre le théorème énoncé.

17. *Si une famille compacte n'a aucune constante parmi ses éléments d'accumulation, le nombre des zéros des dérivées des fonctions de la famille est borné.*

Imaginons une suite de dérivées, la suite des fonctions correspondantes admet une suite partielle convergeant à la manière adoptée, la suite partielle correspondante des dérivées tend vers la dérivée de la fonction limite, et cette limite est la même que pour la suite complète imaginée. Si une suite de dérivées tendait vers zéro, il y aurait donc un élément d'accumulation constant, contrairement à l'hypothèse. Les dérivées n'admettant pas zéro comme élément d'accumulation, le n° **15** leur est applicable.

Corollaire. — *Si une famille compacte n'a aucune constante parmi ses éléments d'accumulation, le nombre des points faibles des fonctions de la famille est borné.*

18. Considérons une famille compacte ne contenant pas la fonction identiquement nulle et ne l'admettant pas parmi ses éléments d'accumulation. Prenons pour chaque fonction de la famille la borne supérieure de sa valeur absolue. Ces bornes sont supérieures à un même nombre fixe; sinon il y aurait une suite de fonctions de la famille dont les bornes supérieures tendraient vers zéro, ces fonctions tendraient vers zéro dans tout l'intervalle fondamental et (n° **13**) convergeraient suivant le mode utilisé vers la constante zéro qui serait élément d'accumulation.

Supposons de plus que chaque fonction de la famille prenne la valeur zéro en quelque point de l'intervalle fondamental (ce qui exclut la présence de constantes dans la famille), alors l'oscillation de chaque fonction est au moins égale à sa borne supérieure, et par suite ces oscillations admettent pour toute la famille une borne inférieure non nulle.

Soit maintenant une famille compacte ne contenant pas de constante et n'en admettant pas parmi ses éléments d'accumulation. Formons la famille $\varphi(x) - \varphi(c)$, $\varphi(x)$ fonction arbitraire de la famille donnée, c nombre fixe de l'intervalle fondamental. Cette nouvelle famille, faisant partie de la famille $\varphi(x) - a$ considérée au n° **15**, est compacte et n'admet pas la fonction identiquement nulle comme élément d'accumulation. Les fonctions $\varphi(x) - \varphi(c)$, s'annulant pour $x = c$ sans être identiquement nulles, la propriété précédente a lieu. Comme $\varphi(x)$ et $\varphi(x) - \varphi(c)$ ont la même oscillation, on a le théorème suivant :

Si une famille compacte ne contient pas de constante et n'en admet pas parmi ses éléments d'accumulation, les oscillations de toutes les fonctions de la famille sont supérieures à un même nombre positif.

19. Considérons une famille compacte dont les éléments d'accumulation ne prennent pas la valeur zéro. Dans toute suite convergeant à la manière indiquée, en particulier uniformément, la borne inférieure des fonctions de la suite tend vers la borne inférieure de la fonction limite; cette dernière n'étant pas nulle, la borne inférieure des fonctions de la suite est à partir d'un certain rang supérieure à un nombre positif. La même propriété a lieu pour toutes les fonctions de la famille, sauf peut-être pour un nombre fini d'entre elles. Sinon, on pourrait former une suite infinie de fonctions dont les bornes inférieures tendraient vers zéro, suite qui admettrait une suite partielle convergente pour laquelle il y aurait contradiction avec la propriété précédente.

Si les éléments d'accumulation d'une famille compacte ne s'annulent pas, les fonctions de la famille qui s'annulent sont en nombre fini et les valeurs absolues des autres admettent une borne inférieure non nulle.

20. Considérons une famille compacte sans élément d'accumulation constant. Soit φ une fonction de la famille; entourons chacun de ses points faibles d'un intervalle d'exclusion de longueur $2l'$, soit $\mathcal{I}(\varphi)$ le reste de l'intervalle fondamental après ces exclusions et $b(\varphi)$ la borne inférieure de $|\varphi|$ sur $\mathcal{I}(\varphi)$. Les $b(\varphi)$ admettent une borne inférieure non nulle. En effet, dans le cas contraire, il y aurait une suite de fonctions pour laquelle ces nombres tendraient vers zéro en décroissant constamment, caractère subsistant dans toute suite partielle, en particulier dans la suite convergente $\{\varphi_n\}$. Soit ψ la limite de cette suite (non constante et par conséquent non identiquement nulle). Entourons chacun de ses zéros d'un intervalle d'exclusion de longueur l', soit $\mathcal{J}$ le reste de l'intervalle fondamental et $b'(\varphi)$ la borne inférieure de $|\varphi|$ sur $\mathcal{J}$. Tout zéro étant un point faible, chaque zéro de ψ est limite de points faibles des φ_n (n° **6**); il y a donc un rang à partir duquel chaque intervalle d'exclusion entourant un zéro de ψ contient un point faible de φ_n et se trouve ainsi englobé dans l'intervalle d'exclusion de longueur double attaché à ce point faible; par conséquent, à partir de ce rang $\mathcal{I}(\varphi_n)$ fait partie de $\mathcal{J}$, ce qui entraîne l'inégalité $b(\varphi_n) \geqq b'(\varphi_n)$. Or, d'après la convergence uniforme, $b'(\varphi_n)$ tend vers $b'(\psi)$ qui n'est pas nul, ce qui est incompatible avec le fait que $b(\varphi_n)$ tend vers zéro.

Le nombre des points faibles étant borné pour toutes les fonctions de la famille (n° **16**), une longueur arbitraire l étant donnée, il est possible de choisir l' de façon que la longueur totale des intervalles d'exclusion ne dépasse pas l.

Reprenons maintenant une famille compacte ne contenant pas la fonction identiquement nulle et ne l'admettant pas parmi ses éléments d'accumulation. Les bornes supérieures en valeur absolue des fonctions de la famille sont supérieures à un nombre fixe (n° **17**), et par suite de la convergence uniforme, le même fait est vrai des éléments d'accumulation. Ainsi, s'il y a des constantes soit dans la famille, soit parmi les éléments d'accumulation, elles sont supérieures en valeur absolue à un nombre fixe a. Partageons les fonctions de la famille en deux catégories, celles qui satisfont dans tout l'intervalle fondamental à l'inégalité $|\varphi(x)| \geqq a$, et celles qui prennent des valeurs de l'intervalle $(-a|+a)$. Considérons d'abord la dernière sous-famille; elle est compacte comme la famille totale et ses éléments d'accumulation font partie de ceux de la famille totale; les constantes étant au moins égales à a en valeur absolue ne peuvent figurer ni dans cette sous-famille, ni parmi ses éléments d'accumulation. Les fonctions considérées possèdent donc la propriété établie plus haut. Quant à celles de l'autre catégorie, d'après l'inégalité $|\varphi(x)| \geqq a$, elles ont la même propriété sans intervalle d'exclusion.

Étant données une famille compacte n'ayant pas la constante zéro parmi ses éléments d'acccumulation et une longueur l arbitrairement petite, il leur correspond un nombre positif auquel la valeur absolue de toute fonction de la famille reste supérieure, sauf peut-être dans des intervalles en nombre fini dont la longueur totale ne dépasse pas l (et dont la position dépend de la fonction considérée).

En résumé, les fonctions de la famille admettent en valeur absolue une égale borne supérieure B et, hors des intervalles d'exclusion, une égale borne inférieure b. Prenons les valeurs d'une même fonction en deux points, le second hors des intervalles d'exclusion, nous avons

$$|\varphi(x_1)| \leqq \mathrm{B}, \qquad |\varphi(x_2)| \geqq b, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}\right| \leqq \frac{\mathrm{B}}{b}.$$

Dans les conditions précédentes, il correspond à la famille et à la *longueur l un nombre k tel que l'on ait pour toute fonction de la famille $\left|\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}\right| \leqq k$, sauf peut-être lorsque x_2 se trouve dans un des intervalles signalés.*

21. Comme pour les fonctions analytiques, il y a bien des procédés pour exclure les fonctions constantes, ou la fonction identiquement nulle, de la famille et de ses éléments d'accumulation. Par exemple, la fonction identiquement nulle est exclue en imposant aux fonctions de prendre une même valeur non nulle en un point soit fixe, soit quelconque; les fonctions constantes sont exclues en imposant aux fonctions de prendre deux valeurs distinctes ou aux dérivées une même valeur non nulle, etc. Les théorèmes précédents sont ainsi susceptibles de diverses particularisations.

IV. — Remarques diverses.

22. Classe analytique. — La classe analytique est ordinairement définie par l'une des suites $\{n!\}$ ou $\{n^n\}$. Montrons d'abord que la notion de compacité est indépendante de la suite employée. D'après la formule de Stirling, $n!$ est un infiniment grand équivalent à $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. Quel que soit $q > 1$, l'inégalité $\sqrt{2\pi n} < q^n$ a lieu à partir d'une certaine valeur de n, il existe donc un facteur k tel que l'on ait $\sqrt{2\pi n} < kq^n$ pour tout entier n; d'où

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < k\left(\frac{qn}{e}\right)^n. \tag{6}$$

Considérons une famille compacte du type s relativement à la suite $\{n^n\}$; elle est bornée en norme (s') quel que soit $s' > s$, ce que traduisent les inégalités

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqq n^n s'^n m$$

qui, jointes à (6), entraînent

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqq n!(es')^n m; \tag{7}$$

la famille est donc, relativement à la suite $\{n!\}$ bornée en norme (es'), nombre arbitraire supérieur à es. Réciproquement, une famille compacte du type es relativement à la suite $\{n!\}$ satisfait aux inégalités (7) qui, jointes à (6), entraînent

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqq n^n (qs')^n km;$$

la famille est donc bornée en norme (qs'), nombre arbitraire supérieur à s.

Il y a donc identité entre famille compacte du type s relativement à la suite $\{n^n\}$ et famille compacte du type es relativement à la suite $\{n!\}$.

23. Définissons la classe analytique par la suite $\{n!\}$. Une fonction du type s satisfait aux inégalités (1) qui deviennent ici

$$|\varphi(x)| \leqq \|\varphi\|, \qquad |\varphi'(x)| \leqq 1.s\|\varphi\|, \qquad \ldots, \qquad |\varphi^{(n)}(x)| \leqq n!\, s^n \|\varphi\|, \qquad \ldots.$$

La série de Taylor en un point a de l'intervalle fondamental est donc dominée par

$$\|\varphi\|[1 + s|x-a| + (s|x-a|)^2 + \ldots + (s|x-a|)^n + \ldots],$$

série géométrique de raison $s|x-a|$, convergente pour $|x-a| < \frac{1}{s}$; les fonctions du type s sont donc holomorphes dans le domaine formé par les cercles de rayon $\frac{1}{s}$ ayant leurs centres aux points de l'intervalle fondamental, domaine que nous appellerons bande de rayon $\frac{1}{s}$. Dans une bande de rayon moindre r, le module de la fonction est en outre limité par $\frac{\|\varphi\|}{1-sr}$.

Une famille bornée en norme (s) est donc formée de fonctions holomorphes dans la bande de rayon $\frac{1}{s}$ et bornées en module dans tout domaine fermé intérieur. Considérons maintenant une famille compacte du type s et un nombre $r < \frac{1}{s}$, nous pouvons intercaler un nombre s' entre s et $\frac{1}{r}$. La famille étant compacte du type s est bornée en norme (s'), ses fonctions sont donc holomorphes dans la bande de rayon $\frac{1}{s'}$ et bornées en module dans la bande de rayon moindre r.

Réciproquement, prenons une famille de fonctions holomorphes dans la bande de rayon $\frac{1}{s}$ et bornées en module dans toute bande de rayon moindre; soit m la borne supérieure dans la bande de rayon r. Évaluons la fonction et ses dérivées aux points de l'intervalle fondamental par les formules

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x},\qquad \ldots,\qquad \varphi^{(n)}(x)=\frac{n\,!}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{\varphi(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}},\qquad \ldots,$$

$\mathcal{C}$ étant le cercle de centre x et de rayon r; nous en tirons

$$|\varphi(x)|\leqq m,\qquad |\varphi'(x)|\leqq\frac{1.m}{r},\qquad \ldots,\qquad |\varphi^{(n)}(x)|\leqq\frac{n\,!\,m}{r^n},\qquad \ldots.$$

La famille, au point de vue de la classe analytique réelle, est donc bornée en norme $\left(\frac{1}{r}\right)$, et $\frac{1}{r}$ est un nombre arbitraire supérieur à s.

Il y a donc identité entre famille compacte du type s et famille normale dans la bande de rayon $\frac{1}{s}$ n'admettant pas ∞ comme élément d'accumulation (les fonctions de cette dernière étant réelles sur l'axe réel).

24. Comparaison des classes définies par deux suites. — Le raisonnement du n° **22** se généralise aisément. Soient deux suites $\{A_n\}$ et $\{A'_n\}$ telles que le nombre

$$L=\overline{\lim_{n\succ\infty}}\sqrt[n]{\frac{A_n}{A'_n}}$$

soit fini. A tout nombre $a>L$, correspond un entier p tel que l'on ait $A_n\leqq A'_n a^n$ pour $n\geqq p$. Les autres valeurs de n étant en nombre fini, il existe un nombre k tel que l'on ait, quel que soit n, $A_n\leqq A'_n a^n k$. Soit alors une famille compacte du type s relativement à la suite $\{A_n\}$, elle est bornée en norme (s') quel que soit $s'>s$, soit m la borne; toute fonction de cette famille satisfait à

$$|\varphi^{(r)}(x)|\leqq A_r s'^r m\leqq A'_r (as')^r mk.$$

as' étant un nombre arbitraire supérieur à Ls, l'inégalité obtenue exprime que la famille est compacte du type Ls relativement à la suite $\{A'_n\}$. On voit en même temps que la classe $\{A'_n\}$ contient la classe $\{A_n\}$.

On peut échanger les rôles des deux suites. Donc, lorsque la limite inférieure l n'est pas nulle, la classe $\{A'_n\}$ est contenue dans la classe $\{A_n\}$, et toute famille compacte du type t relativement à $\{A'_n\}$ est compacte du type $\frac{t}{l}$ relativement à $\{A_n\}$.

Lorsque les limites extrêmes de $\sqrt[n]{\frac{A_n}{A'_n}}$ *pour n infini sont finies et non nulles, les deux suites* $\{A_n\}$ *et* $\{A'_n\}$ *définissent la même classe quasi analytique et les familles compactes sont les mêmes par rapport à l'une ou à l'autre suite.*

Si $L = 0$, a est arbitrairement petit, et as' également. Donc, *lorsque* $\sqrt[n]{\frac{A_n}{A'_n}}$ *tend vers zéro par n infini, la classe* $\{A'_n\}$ *contient la classe* $\{A_n\}$, *et toute famille compacte dans la classe* $\{A_n\}$ *est compacte du type zéro dans la classe* $\{A'_n\}$.

Un raisonnement classique de la théorie des séries à termes positifs prouve que, lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite, $\sqrt[n]{u_n}$ a la même limite. En dissociant dans ce raisonnement les doubles inégalités, on voit que : la limite supérieure (inférieure) pour n infini de $\sqrt[n]{u_n}$ est au plus (moins) égale à celle de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Par suite, *les énoncés ci-dessus subsistent a fortiori en remplaçant* $\sqrt[n]{\frac{A_n}{A'_n}}$ *par* $\frac{A_{n+1}A'_n}{A_n A'_{n+1}}$.

SECONDE PARTIE.

PROPRIÉTÉS AYANT LIEU DANS LES CLASSES ASSUJETTIES A UNE CERTAINE RÉGULARITÉ.

I. — Dérivées.

1. Comparons à la classe $\{A_n\}$, la classe $\{A'_n = A_{n+1}\}$ à laquelle appartiennent les dérivées des fonctions de la première. Tout d'abord,

en supposant la suite $\{A_n\}$ *non décroissante*, la seconde classe contient la première. En effectuant la comparaison suivant le procédé précédent (1^re^ Partie, n° **24**) l'inégalité $A_n \leqq A'_n$ entraîne $L \leqq 1$. Nous allons voir que L est exactement égal à 1. Soit en effet un nombre $a > L$, on a l'inégalité

$$\frac{A_n}{A'_n} < a^n \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A_{n+1}} < \frac{a^n}{A_n} \quad \text{pour} \quad n \geqq p.$$

Posons

$$\frac{1}{A_p} = ka^{1+2+\ldots+(p-1)},$$

il en résulte

$$\frac{1}{A_n} < ka^{1+2+\ldots+(n-1)} = ka^{\frac{(n-1)n}{2}} \quad \text{pour} \quad n \geqq p$$

et

$$\frac{1}{\sqrt[n]{A_n}} < k^{\frac{1}{n}} a^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pour} \quad n \geqq p;$$

le premier membre étant le terme général d'une série divergente, il en est de même du second; or, $k^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1, donc la progression géométrique de raison $a^{\frac{1}{2}}$ est divergente; a et par suite L ne peuvent être plus petits que 1.

De cette valeur $L = 1$ résulte que *lorsqu'une famille est compacte relativement à $\{A_n\}$, cette même famille et la famille des dérivées premières sont compactes du même type relativement à $\{A'_n = A_{n+1}\}$.*

Les deux classes coïncident lorsque la limite inférieure de $\sqrt[n]{\frac{A_n}{A'_n}}$ n'est pas nulle, ou lorsque la limite supérieure de $\sqrt[n]{\frac{A'_n}{A_n}}$ est finie; en posant

$$q = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{A'_n}{A_n}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{A_{n+1}}{A_n}},$$

la compacité du type s relativement à $\{A'_n\}$ entraîne la compacité du type qs relativement à $\{A_n\}$.

Lorsque le nombre q est fini, les dérivées de tous les ordres appartiennent à la même classe que la fonction, et lorsqu'une famille est compacte du type s, la famille des dérivées $r^{\text{ièmes}}$ est compacte du type $q^r s$.

II. — Produits et séries entières.

2. La condition de régularité que nous utiliserons désormais est *la non croissance de la suite* $\left\{\frac{n A_{n-1}}{A_n}\right\}$. Cette expression tend alors pour n infini vers une limite positive ou nulle; celle-ci sert à comparer la classe considérée et la classe analytique définie par $\{n!\}$ (1re Partie, n° **24**). La classe considérée est la classe analytique si la limite est positive, et contient la classe analytique si la limite est nulle. Dans ce dernier cas, un beau résultat de M. S. Mandelbrojt [1], sous la forme nouvelle que je lui ai donnée [2], permet souvent d'affirmer qu'elle contient aussi d'autres fonctions. D'après notre hypothèse, $\left\{\frac{A_n}{A_{n-1}}\right\}$ va en croissant; l'une des inégalités $A_n < e^{an^2}$ ou $\frac{A_n}{A_{n-1}} < e^{bn}$ réalisée à partir d'un certain rang suffit alors à affirmer que la classe $\{A_n\}$ est plus étendue que la classe analytique.

Voici sous quelle forme notre condition de régularité va intervenir. Pour $n > p$ on a

$$\frac{A_{n-1}}{(n-1)!} : \frac{A_n}{n!} \leqq \frac{A_{p-1}}{(p-1)!} : \frac{A_p}{p!} \qquad \text{ou} \qquad \frac{A_{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{A_p}{p!} \leqq \frac{A_n}{n!} \cdot \frac{A_{p-1}}{(p-1)!}.$$

En d'autres termes, *un produit* $\frac{A_p}{p!} \cdot \frac{A_q}{q!}$ *ne peut qu'augmenter de valeur lorsqu'on écarte également les deux entiers p et q.*

3. Considérons le produit de deux fonctions de la classe, φ du type s et ψ du type t. La dérivée $n^{\text{ième}}$ est donnée par la formule de Leibniz

$$(\varphi\psi)^{(n)} = \varphi^{(n)}\psi + \frac{n!}{1.(n-1)!}\varphi^{(n-1)}\psi' + \ldots + \frac{n!}{p!(n-p)!}\varphi^{(n-p)}\psi^{(p)} + \ldots + \varphi\psi^{(n)}.$$

En évaluant par excès la valeur absolue de chaque facteur au moyen

(1) S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et classes quasi analytiques de fonctions*, Paris, 1935, p. 88-89.

(2) P. Flamant, *Comparaison des classes quasi analytiques* (*D*) (*Annales de la Société polonaise de Mathématique*, t. XIV, 1935, p. 145-148).

du type et de la norme, nous obtenons

$$|(\varphi\psi)^{(n)}| \leqq \sum_{p=0}^{p=n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \|\varphi\| A_{n-p} s^{n-p} \|\psi\| A_p t^p = n! \|\varphi\| . \|\psi\| \sum_{p=0}^{p=n} \frac{A_{n-p}}{(n-p)!} . \frac{A_p}{p!} s^{n-p} t^p;$$

puis, en écartant les entiers $n-p$ et p et les amenant à n et zéro, nous avons

$$(1) \qquad |(\varphi\psi)^{(n)}| \leqq \|\varphi\| . \|\psi\| A_0 A_n (s^n + s^{n-1} t + \ldots + s t^{n-1} + t^n).$$

Distinguons alors deux cas :

Premier cas : $s \neq t$ et, pour fixer les idées $s > t$. (1) donne

$$|(\varphi\psi)^{(n)}| \leqq \|\varphi\| . \|\psi\| A_0 A_n s^n \left(1 + \frac{t}{s} + \frac{s^2}{t^2} + \ldots + \frac{t^n}{s^n}\right) < \|\varphi\| . \|\psi\| A_0 A_n s^n \frac{s}{s-t},$$

en prolongeant indéfiniment la progression géométrique. Donc *le produit d'une fonction du type s par une fonction du type $t < s$ est une fonction du type s dont la norme vérifie*

$$(2) \qquad \|\varphi\psi\|_s \leqq \frac{A_0 s}{s-t} \|\varphi\|_s . \|\psi\|_t.$$

Lorsque $\frac{n A_{n-1}}{A_n}$ tend vers zéro, toute fonction analytique appartient à tout type de la classe $\{A_n\}$ (1re Partie, n° **24**); par suite, *le produit d'une fonction du type s par une fonction analytique holomorphe est une fonction du type s.*

Deuxième cas : $s = t$. (1) devient

$$|(\varphi\psi)^{(n)}| \leqq \|\varphi\| . \|\psi\| A_0 A_n (n+1) s^n.$$

Le produit appartient donc au type s de la classe définie par la suite $\{A_n(n+1)\}$, classe qui coïncide avec la première puisque $\sqrt[n]{n+1}$ tend vers 1 ; il appartient donc à tout type plus grand que s relativement à la suite $\{A_n\}$. Soit un nombre $k > 1$,

$$\frac{|(\varphi\psi)^{(n)}|}{A_n (ks)^n} \leqq \|\varphi\| . \|\psi\| A_0 \frac{n+1}{k^n}.$$

Le produit de deux fonctions du type s appartient à tout type plus grand que s et l'on a

$$\|\varphi\psi\|_{ks} \leqq \|\varphi\|_s \|\psi\|_s A_0 \max_{n \geqq 0} \frac{n+1}{k^n}.$$

Pour $k \geqq 2$, ce maximum, atteint pour $n = 0$, est égal à 1. Si n était variable continue, le maximum serait $\frac{k}{e \log k}$, expression avantageuse pour k peu supérieur à 1.

L'inégalité (2) s'écrit, en changeant les notations,

$$(2') \qquad \|\varphi\psi\|_{ks} \leqq \frac{A_0 k}{k-1} \|\varphi\|_{ks} \|\psi\|_s,$$

qui donne *a fortiori* la suivante, que nous utiliserons,

$$(3) \qquad \|\varphi\psi\|_{ks} \leqq \frac{A_0 k}{k-1} \|\varphi\|_s \|\psi\|_s.$$

En effectuant de proche en proche un produit de plusieurs facteurs, nous appliquons (3) ou (2′) lors de la première multiplication, et ensuite (2′); nous obtenons ainsi

$$(4) \qquad \|\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n\|_{ks} \leqq \left(\frac{A_0 k}{k-1}\right)^{n-1} \|\varphi_1\|_s \|\varphi_2\|_s \ldots \|\varphi_n\|_s,$$

ou

$$(4') \qquad \|\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n\|_{ks} \leqq \left(\frac{A_0 k}{k-1}\right)^{n-1} \|\varphi_1\|_{ks} \|\varphi_2\|_s \ldots \|\varphi_n\|_s.$$

Supposons les facteurs pris dans une famille bornée en norme (s). Notons $m(s)$ la borne supérieure des normes de ces fonctions et $m_n(s)$ la borne analogue pour les produits de n de ces fonctions. En prenant les bornes supérieures des deux membres de (4), nous obtenons

$$(5) \qquad m_n(ks) \leqq \frac{k-1}{A_0 k} \left[\frac{A_0 k m(s)}{k-1}\right]^n.$$

Nous aboutissons à une valeur indépendante de n lorsque $\frac{A_0 k m(s)}{k-1} \leqq 1$, ce qui exige $A_0 m(s) < 1$; il suffit alors de poser $\frac{A_0 k m(s)}{k-1} = 1$, ce qui donne $k = \frac{1}{1 - A_0 m(s)}$.

Étant donnée une famille de fonctions bornée en norme (s) dont la borne supérieure est moindre que $\frac{1}{A_0}$, la famille des produits de ces fonctions, quel que soit le nombre de leurs facteurs est bornée en norme $\left(\frac{s}{1 - A_0 m(s)}\right)$.

Supposons maintenant nos fonctions prises dans une famille compacte du type s, il suffit de remplacer s par $k's$ ($k'>1$) dans (5)

$$m_n(kk's) \leq \frac{k-1}{A_0 k}\left[\frac{A_0 k m(k's)}{k-1}\right]^n. \tag{6}$$

Étant donnée une famille compacte du type s, les produits de n fonctions (distinctes ou non) *de cette famille constituent une famille compacte du même type.*

Si ces facteurs sont variables et tendent simultanément vers des fonctions limites, le produit tend vers le produit des limites, en norme (s') quel que soit $s'>s$ (1re Partie, n° **13**).

4. Considérons maintenant une série entière en φ, φ appartenant à la famille compacte

$$\omega(\varphi) = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \ldots + a_n\varphi^n + \ldots \tag{7}$$

et la famille des polynomes de tête; nous pouvons, grâce à (6), évaluer par excès leurs normes

$$\|\varpi_n(\varphi)\| \leq \frac{|a_0|}{A_0} + |a_1|\, m(kk's) + \frac{k-1}{A_0 k}\sum_{i=2}^{i=n}|a_i|\left[\frac{A_0 k m(k's)}{k-1}\right]^i.$$

La somme Σ est formée des premiers termes d'une série entière ayant pour coefficients $|a_i|$, et par conséquent pour rayon de convergence celui R de $\omega(\varphi)$. Si k et k' sont tels que

$$\frac{A_0 k m(k's)}{k-1} < R, \tag{8}$$

on peut prolonger cette série indéfiniment et aboutir à une limitation indépendante de n. La famille des $\varpi_n(\varphi)$ est alors bornée en norme ($kk's$). L'inégalité (8) est vérifiée d'elle-même si $R = \infty$; sinon, elle revient à

$$A_0 m(k's) < R \quad \text{et} \quad k > \frac{R}{R - A_0 m(k's)}.$$

Par suite, les produits kk' ont pour borne inférieure

$$q = R \underset{m(k's)<\frac{R}{A_0}}{\text{borne inf.}} \frac{k'}{R - A_0 m(k's)},$$

et la famille des $\varpi_n(\varphi)$ est compacte du type qs (q est égal à 1 lorsque $\omega(\varphi)$ est fonction entière).

Dans les conditions considérées, la série (7) converge numériquement, car $|\varphi| \leqq \|\varphi\| A_0 \leqq A_0 m(k's) < R$.

Si, la fonction φ restant la même, on fait tendre n vers l'infini, $\varpi_n(\varphi)$ tend vers $\omega(\varphi)$ pour chaque valeur de x, donc $\varpi_n(\varphi)$ tend vers $\omega(\varphi)$ en norme (s') quel que soit $s' > qs$ (1re Partie, n° **13**), et *la famille des $\omega(\varphi)$ est compacte du type qs* (1re Partie, n° **10**). Il en résulte par exemple que, si $\{\varphi_n\}$ est formée de fonctions de la famille initiale tendant vers φ, $\omega(\varphi_n)$ tend vers $\omega(\varphi)$ en norme (s') quel que soit $s' > qs$.

III. — Introduction de fonctionnelles auxiliaires.

5. Soit φ une fonction de signe constant, positif pour fixer les idées. Les fonctions φ^p (exposant réel quelconque), $\log\varphi$ étant développables en séries entières par rapport à $\varphi - a$, les propriétés précédentes ont lieu pour ces fonctions. Nous nous proposons d'établir effectivement les inégalités qui les traduisent. Cela fait intervenir des fonctionnelles autres que la norme que nous allons d'abord définir et étudier.

Pour une fonction φ déterminée d'un certain type s, nous avons à choisir a et k; ce dernier nombre déterminant le type ks auquel appartiennent certainement φ^p et $\log\varphi$, devra être le plus petit possible; a est à fixer en vue de ce but. Tout d'abord, les développements considérés sont des séries entières en $\frac{\varphi - a}{a}$ ayant un rayon de convergence égal à 1. La convergence numérique exige donc $\frac{\varphi - a}{a} < 1$ ou $a > \frac{\varphi}{2} > 0$.

Le rôle joué au n° **4** par l'inégalité (6) sera tenu par

$$\left\|\left(\frac{\varphi - a}{a}\right)^n\right\|_{ks} \leqq \frac{k-1}{A_0 k}\left[\frac{A_0 k}{k-1}\left\|\frac{\varphi - a}{a}\right\|_s\right]^n \tag{9}$$

[application de (4)], et l'inégalité (8) se traduira par

$$\frac{A_0 k \|\varphi - a\|_s}{(k-1)a} < 1.$$

Considérons les valeurs de a telles que

$$(10) \qquad A_0 \| \varphi - a \|_s \leq b,$$

b étant un nombre donné; notre condition sera réalisée si nous avons en outre

$$(11) \qquad kb < (k-1)a$$

qui montre que, parmi ces valeurs de a, la plus avantageuse est la plus grande. Or, (10) équivaut à l'ensemble des inégalités

$$|\varphi - a| \leq b, \qquad A_0 |\varphi'| \leq b A_1 s, \qquad \ldots, \qquad A_0 |\varphi^{(r)}| \leq b A_r s^r, \qquad \ldots,$$

dont la première (la seule où figure a) s'écrit encore $-b \leq \varphi - a \leq b$, où l'on voit que la plus grande des valeurs de a considérées est donnée par $-b = \min \varphi - a$. Donc, b étant donné de façon qu'il existe quelque valeur de a satisfaisant à (10), nous lui associons $a = b + \min \varphi$ qui, portée dans (11) donne $b < (k-1) \min \varphi$.

Il y a donc intérêt à prendre b le plus petit possible, ce qui conduit à chercher dans la famille $\varphi - a$ la fonction ayant la plus petite norme. Il faut et il suffit pour cela que $|\varphi - a|$ ait le plus petit maximum possible, ce qui a lieu pour la fonction

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \frac{1}{2}(\min \varphi + \max \varphi),$$

que nous appellerons *fonction réduite* de la famille. Cette définition a un sens pour une fonction quelconque; elle dépend de l'intervalle (supposé ici invariable) où varie x. On a évidemment, quelle que soit la constante c,

$$\varphi^* = (\varphi - c)^*, \qquad (c\varphi)^* = c\varphi^*.$$

Cette fonction réduite intervient par sa norme qui renseigne sur les variations de φ (amplitude, rapidité et régularité) à un point de vue plus compréhensif que l'oscillation. On peut la définir directement par

$$\|\varphi^*\|_s = \text{borne sup.} \left[\frac{\text{osc. } \varphi}{2A_0}, \frac{|\varphi'|}{A_1 s}, \ldots, \frac{|\varphi^{(r)}|}{A_r s^r}, \ldots \right],$$

puisque

$$\max |\varphi^*| = \frac{1}{2}(\max \varphi - \min \varphi) = \frac{1}{2} \text{osc.} \varphi.$$

On a évidemment, quelle que soit la constante c,

$$\|\varphi^*\| \leqq \|\varphi - c\| \qquad \|(c\varphi)^*\| = |c| \cdot \|\varphi^*\|.$$

De plus, $\varphi^* + \psi^*$ étant une des fonctions $\varphi + \psi - c$, on a

$$(12) \qquad \|(\varphi + \psi)^*\| \leqq \|\varphi^* + \psi^*\| \leqq \|\varphi^*\| + \|\psi^*\|.$$

De là résulte la continuité de cette fonctionnelle. En regardant φ comme la somme de ψ et de $\varphi - \psi$

$$\|\varphi^*\| \leqq \|\psi^*\| + \|(\varphi - \psi)^*\| \leqq \|\psi^*\| + \|\varphi - \psi\|.$$

Cette inégalité et celle obtenue en permutant φ et ψ se résument en

$$(13) \qquad \big|\|\varphi^*\| - \|\psi^*\|\big| \leqq \|\varphi - \psi\|.$$

Ces notions introduites, la question posée se résout en prenant

$$b = A_0\|\varphi^*\|_s, \qquad \text{d'où} \qquad a = A_0\|\varphi^*\|_s + \min\varphi,$$

et enfin

$$A_0\|\varphi^*\|_s < (k - 1)\min\varphi,$$

$$k > 1 + \frac{A_0\|\varphi^*\|_s}{\min\varphi}.$$

6. Fluctuation. — Cette dernière formule, concernant une fonction positive, nous conduit à introduire une nouvelle fonctionnelle. Nous appelons fluctuation d'une fonction de signe constant l'expression

$$\mathrm{fl}(\varphi, s) = 1 + \frac{A_0\|\varphi^*\|_s}{\min|\varphi|},$$

qui dépend de la fonction φ, de l'intervalle de variation de x et du type s (qui sera écrit ou sous-entendu suivant les besoins). *La fluctuation est* (comme la norme) *une fonction non croissante du type.* On a

$$\mathrm{fl}(c\varphi) = \mathrm{fl}(\varphi).$$

Considérons deux fonctions ayant une différence constante et le même signe constant, $+$ pour fixer les idées; elles ont la même fonction réduite et satisfont à $\min(\varphi - c) = \min\varphi - c$, d'où

$$\frac{\mathrm{fl}(\varphi) - 1}{\mathrm{fl}(\varphi - c) - 1} = 1 - \frac{c}{\min\varphi}.$$

Prenons maintenant une somme de deux fonctions ayant même signe constant. Entre les normes des fonctions réduites on a l'inégalité (12). De plus

$$(14)\qquad \min|\varphi+\psi| = \min(|\varphi|+|\psi|) \geqq \min|\varphi| + \min|\psi|.$$

Donc

$$\mathrm{fl}(\varphi+\psi) \leqq 1 + \frac{A_0\|\varphi^*\| + A_0\|\psi^*\|}{\min|\varphi| + \min|\psi|}.$$

Le rapport figurant au second membre est compris entre les deux rapports

$$\frac{A_0\|\varphi^*\|}{\min|\varphi|} \quad \text{et} \quad \frac{A_0\|\psi^*\|}{\min|\psi|},$$

et, par suite, le second membre est compris entre $\mathrm{fl}(\varphi)$ et $\mathrm{fl}(\psi)$. En conclusion, *la fluctuation de la somme de plusieurs fonctions de même signe constant est au plus égale à la plus grande des fluctuations de ces fonctions.*

Continuité de la fluctuation.

$$\begin{aligned}
\mathrm{fl}(\varphi) - \mathrm{fl}(\psi) &= \frac{A_0\|\varphi^*\|}{\min|\varphi|} - \frac{A_0\|\psi^*\|}{\min|\psi|} \\
&= \frac{A_0(\|\varphi^*\| - \|\psi^*\|)}{\min|\varphi|} + A_0\|\psi^*\|\left(\frac{1}{\min|\varphi|} - \frac{1}{\min|\psi|}\right) \\
&= \frac{A_0(\|\varphi^*\| - \|\psi^*\|)}{\min|\varphi|} + \frac{A_0\|\psi^*\|(\min|\psi| - \min|\varphi|)}{\min|\varphi|.\min|\psi|}.
\end{aligned}$$

Prenons les valeurs absolues des termes; au premier numérateur, nous appliquons l'inégalité (13); au second numérateur, en pensant aux valeurs des deux fonctions lorsque le plus petit minimum est atteint, nous écrivons

$$(15)\qquad \big|\min|\psi| - \min|\varphi|\big| \leqq \text{ une valeur de } |\psi-\varphi| \leqq A_0\|\varphi-\psi\|,$$

nous avons donc

$$|\mathrm{fl}(\varphi) - \mathrm{fl}(\psi)| \leqq \frac{A_0\|\varphi-\psi\|}{\min|\varphi|} + \frac{A_0^2\|\psi^*\|.\|\varphi-\psi\|}{\min|\varphi|.\min|\psi|},$$

$$|\mathrm{fl}(\varphi) - \mathrm{fl}(\psi)| \leqq \frac{A_0\|\varphi-\psi\|}{\min|\varphi|}\left(1 + \frac{A_0\|\psi^*\|}{\min|\psi|}\right) = \frac{A_0\,\mathrm{fl}(\psi)\|\varphi-\psi\|}{\min|\varphi|}.$$

On a, d'après (15),

$$\min|\varphi| \geqq \min|\psi| - A_0\|\varphi-\psi\|$$

et, par suite,

$$|\mathrm{fl}(\varphi)-\mathrm{fl}(\psi)| \leqq \frac{A_0\,\mathrm{fl}(\psi)\|\varphi-\psi\|}{\min|\psi|-A_0\|\varphi-\psi\|},$$

en supposant le dénominateur positif, ce qui exprime la continuité de la fluctuation.

Inégalités concernant la fluctuation. — D'après les définitions mêmes, $\|\varphi\|$ est le plus grand des deux nombres $\|\varphi^\star\|$ et $\frac{\max|\varphi|}{A_0}$. De plus,

$$\min|\varphi| \leqq \max|\varphi| = \min|\varphi| + \operatorname{osc}\varphi \leqq \min|\varphi| + 2A_0\|\varphi\|^\star,$$

d'où

$$(16)\qquad \min|\varphi| \quad \text{et} \quad A_0\|\varphi^\star\| \leqq A_0\|\varphi\| \leqq \min|\varphi| + 2A_0\|\varphi^\star\|.$$

Le minimum de la valeur absolue et la norme de la fonction réduite peuvent s'évaluer au moyen de l'un d'eux et de la fluctuation, ce qui donne par exemple

$$(17)\quad \min|\varphi| \quad \text{et} \quad [\mathrm{fl}(\varphi)-1].\min|\varphi| \leqq A_0\|\varphi\| \leqq [2\,\mathrm{fl}(\varphi)-1].\min|\varphi|$$

qui, résolue par rapport à la fluctuation, s'écrit

$$(18)\qquad \frac{1}{2}\left(1+\frac{A_0\|\varphi\|}{\min|\varphi|}\right) \leqq \mathrm{fl}(\varphi) \leqq 1+\frac{A_0\|\varphi\|}{\min|\varphi|}.$$

Fluctuation d'un produit. — Supposons les facteurs tous positifs et associons à chacun φ_i le nombre a_i défini à la fin du n° 8. Développons

$$\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n = \prod_{i=1}^{i=n}[a_i+(\varphi_i-a_i)],$$

$$\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n - a_1a_2\ldots a_n = \sum a_i a_{i'}\ldots(\varphi_j-a_j)(\varphi_{j'}-a_{j'})\ldots,$$

les termes du second membre correspondant à tous les partages des n premiers nombres en deux catégories (les i et les j), la seconde n'étant pas vide. Appliquons (4) sous la forme

$$\frac{A_0 k \| \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \|_{ks}}{k-1} \leqq \prod_{i=1}^{i=n} \frac{A_0 k \| \varphi_i \|_s}{k-1}$$

à chaque terme du Σ précédent, en observant que

$$\| \varphi_j - a_j \|_s = \| \varphi_j^* \|_s,$$

d'où

$$\frac{A_0 k \| \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n - a_1 a_2 \ldots a_n \|_{ks}}{k-1} \leqq \sum a_i a_{i'} \ldots \frac{A_0 k \| \varphi_j^* \|_s}{k-1} \cdot \frac{A_0 k \| \varphi_{j'}^* \|_s}{k-1} \ldots$$

qui donne, par le calcul inverse du précédent,

$$\frac{A_0 k \| (\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n)^* \|_{ks}}{k-1} \leqq \prod_{i=1}^{i=n} \left[a_i + \frac{A_0 k \| \varphi_i^* \|_s}{k-1} \right] - a_1 a_2 \ldots a_n.$$

En divisant membre à membre par l'inégalité évidente

$$\min(\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n) \geqq \min \varphi_1 . \min \varphi_2 \ldots \min \varphi_n,$$

nous obtenons

$$(19) \quad \frac{[k \operatorname{fl}(\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n, ks) - 1]}{k-1} \leqq \prod_{i=1}^{i=n} \left[\operatorname{fl}(\varphi_i, s) + \frac{k[\operatorname{fl}(\varphi_i, s) - 1]}{k-1} \right] - \prod_{i=1}^{i=n} \operatorname{fl}(\varphi_i, s).$$

La forme développée montre que *le second membre augmente si l'on remplace quelqu'une des fluctuations par une valeur plus grande*. En employant (4′) au lieu de (4), on voit que la fluctuation d'*un* des facteurs peut être prise dans le type ks au lieu de s.

8. Nous rencontrerons aussi l'expression

$$(20) \qquad z(\varphi; s, k) = \min |\varphi| - \frac{A_0 \| \varphi^* \|_s}{k-1} = \frac{[k - \operatorname{fl}(\varphi, s)] \min |\varphi|}{k-1}$$

pour les valeurs de k qui la rendent positive $[k > \operatorname{fl}(\varphi, s)]$; s et k pourront être sous-entendus.

On voit directement que $z(c\varphi) = |c| z(\varphi)$, et que, φ et $\varphi - c$ étant toutes deux positives, $z(\varphi - c) = z(\varphi) - c$.

Pour deux fonctions φ et ψ ayant le même signe constant, les inégalités (14) et (12) entraînent $z(\varphi+\psi) \geqq z(\varphi)+z(\psi)$.

Enfin, cette fonctionnelle est continue car

$$z(\varphi)-z(\psi)=\min|\varphi|-\min|\psi|-\frac{A_0(\|\varphi^*\|-\|\psi^*\|)}{k-1},$$

d'où

$$|z(\varphi)-z(\psi)| \leqq \big|\min|\varphi|-\min|\psi|\big|+\frac{A_0\big|\|\varphi^*\|-\|\psi^*\|\big|}{k-1},$$

et, d'après (15) et (13),

$$|z(\varphi)-z(\psi)| \leqq A_0\|\varphi-\psi\|+\frac{A_0\|\varphi-\psi\|}{k-1},$$

ou

$$|z(\varphi;\, s,\, k)-z(\psi;\, s,\, k)| \leqq \frac{A_0 k\|\varphi-\psi\|_s}{k-1}. \tag{21}$$

IV. — Puissances quelconques et logarithmes.

9. Puissances négatives d'une fonction de signe constant. — Nous supposons la fonction positive; pour une fonction négative (exposant entier, ou rationnel tel que la puissance soit réelle), il suffit de considérer la valeur absolue pour que les conclusions subsistent. Nous partons de la série du binome, appliquée dans les conditions définies au n° 5

$$\frac{1}{\varphi^p}=\frac{1}{a^p}\left[1+\frac{-p}{1}\frac{\varphi-a}{a}+\frac{(-p)(-p-1)}{2!}\left(\frac{\varphi-a}{a}\right)^2+\dots \right.$$
$$\left. +\frac{(-p)\dots(-p-n+1)}{n!}\left(\frac{\varphi-a}{a}\right)^n+\dots\right]$$

$$\left\|\frac{\varphi-a}{a}\right\|_s=\frac{\|\varphi-a\|_s}{a}=\frac{\|\varphi^*\|_s}{A_0\|\varphi^*\|_s+\min\varphi}=\frac{\mathrm{fl}(\varphi,\, s)-1}{A_0\,\mathrm{fl}(\varphi,\, s)}=\frac{f-1}{A_0 f},$$

en posant momentanément $\mathrm{fl}(\varphi, s)=f$. L'inégalité (9) donne

$$\left\|\left(\frac{\varphi-a}{a}\right)^n\right\|_{ks} \leqq \frac{k-1}{A_0 k}\left[\frac{k(f-1)}{(k-1)f}\right]^n,$$

valable à partir de $n = 1$. Nous avons alors

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p}\right\|_{ks} \leqq \frac{1}{A_0 a^p}\left\{\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p)(-p-1)\dots(-p-n+1)}{n\,!}\left[-\frac{k(f-1)}{(k-1)f}\right]^n\right\}$$
$$= \frac{1}{A_0 a^p}\left\{\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\left[1 - \frac{k(f-1)}{(k-1)f}\right]^{-p}\right\} = \frac{1}{A_0 a^p}\left\{\frac{1}{k} + \frac{k-1}{k}\left[\frac{(k-1)f}{k-f}\right]^p\right\}.$$

Distribuons a^p aux deux termes du second facteur, remplaçons dans le dernier a par sa valeur et appliquons l'égalité (20)

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p}\right\|_{ks} \leqq \frac{1}{A_0 k}\left[\frac{1}{a^p} + \frac{k-1}{z^p(\varphi;\, s,\, k)}\right].$$

Comme $a \gtreqless z(\varphi;\, s,\, k)$,

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p}\right\|_{ks} \leqq \frac{1}{A_0 z^p(\varphi;\, s,\, k)}. \tag{22}$$

Les considérations du n° **4** sont évidemment applicables aux séries doubles ou multiples. Soient ψ une autre fonction positive, et $b = A_0 \| \psi^* \|_s + \min \psi$ le nombre analogue à a. Le développement de $\frac{1}{\varphi^p \psi^q}$ par rapport à $\frac{\varphi - a}{a}$ et $\frac{\psi - b}{b}$ traité à la façon précédente donne

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p \psi^q}\right\|_{ks} \leqq \frac{1}{A_0 k}\left[\frac{1}{a^p b^q} + \frac{k-1}{z^p(\varphi;\, s,\, k) z^q(\psi;\, s,\, k)}\right]$$

et

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p \psi^q}\right\|_{ks} \leqq \frac{1}{A_0 z^p(\varphi;\, s,\, k) z^q(\psi;\, s,\, k)}, \tag{23}$$

et de même pour un plus grand nombre de fonctions.

10. Puissances positives. — Les transformations ci-dessus se présentent de façon moins simple, parce que l'alternance des signes dans la série du binome n'a lieu qu'à partir d'un certain rang. On obtient, par exemple,

$$\| \varphi^p \|_{ks} \leqq \frac{1}{A_0 k}\left[(2k-1)a^p - (k-1) z^p(\varphi;\, s,\, k)\right] \qquad \text{pour} \quad 0 < p < 1.$$

Logarithmes. — En traitant de la même manière la série

$$\log\frac{\varphi}{a} = \frac{\varphi - a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi - a}{a}\right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{\varphi - a}{a}\right)^n + \dots,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\left\|\log\frac{\varphi}{a}\right\|_{ks} &\leqq \frac{k-1}{\Lambda_0 k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{k(f-1)}{(k-1)f}\right]^n \\ &= \frac{k-1}{\Lambda_0 k}\log\frac{1}{1-\dfrac{k(f-1)}{(k-1)f}} = \frac{k-1}{\Lambda_0 k}\log\frac{(k-1)f}{k-f},\end{aligned}$$

$\log\frac{\varphi}{a}$ étant une des fonctions $\log\varphi +$ const., nous en concluons

$$\|(\log\varphi)^*\|_{ks} \leqq \frac{k-1}{\Lambda_0 k}\log\frac{(k-1)\mathfrak{f}(\varphi, s)}{k-\mathfrak{f}(\varphi, s)}, \tag{24}$$

et compte tenu de la constante additive $\log a$

$$\begin{aligned}\|\log\varphi\|_{ks} &\leqq \frac{1}{\Lambda_0}\left[\log a + \frac{k-1}{k}\log\frac{(k-1)f}{k-f}\right] \\ &= \frac{1}{\Lambda_0}\left[\log z(\varphi;\, s,\, k) + \frac{2k-1}{k}\log\frac{(k-1)\mathfrak{f}(\varphi, s)}{k-\mathfrak{f}(\varphi, s)}\right].\end{aligned}$$

11. Questions de proximité et de convergence. — Soient φ et ψ deux fonctions de même signe constant; l'inégalité (2′) appliquée à

$$\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi\psi}(\varphi - \psi)$$

donne

$$\left\|\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right\|_{ks} \leqq \frac{\Lambda_0 k}{k-1}\left\|\frac{1}{\psi\varphi}\right\|_{ks}\cdot\|\psi - \varphi\|_{ks},$$

et, d'après (23),

$$\left\|\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right\|_{ks} \leqq \frac{k\|\psi - \varphi\|_{ks}}{(k-1)z(\varphi;\, s,\, k)\,z(\psi;\, s,\, k)}. \tag{25}$$

En opérant de même sur chaque terme du second membre,

$$\frac{1}{\psi^m} - \frac{1}{\varphi^m} = \sum_{i=1}^{i=m}\frac{\varphi - \psi}{\varphi^i\psi^{m-i+1}}$$

donne

$$\left\|\frac{1}{\psi^m} - \frac{1}{\varphi^m}\right\|_{ks} \leqq \frac{k\|\psi - \varphi\|_{ks}}{k-1}\sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{z^i(\varphi;\, s,\, k)\,z^{m-i+1}(\psi;\, s,\, k)} \tag{26}$$

(m entier positif).

Enfin, l'application de $(4')$ et (22) à

$$\left(\frac{\psi}{\varphi}-1\right)^m=\frac{1}{\varphi^m}(\psi-\varphi)^m,$$

donne

$$\left\|\left(\frac{\psi}{\varphi}-1\right)^m\right\|_{ks}\leqq\frac{1}{A_0}\left[\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)\mathfrak{z}(\varphi;s,k)}\right]^m$$

(m entier positif), et plus généralement

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p\psi^q}(\psi-\varphi)^m\right\|_{ks}\leqq\frac{1}{A_0\mathfrak{z}^p(\varphi,s,k)\mathfrak{z}^q(\psi,s,k)}\left(\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{k-1}\right)^m \tag{27}$$

$$(p>0;\ q>0).$$

Soit une fonction analytique $\omega(u)$, nulle et régulière pour $u=1$,

$$\omega(u)=c_1(u-1)+c_2(u-1)^2+\ldots+c_i(u-1)^i+\ldots.$$

La série

$$\frac{1}{\varphi^p\psi^q}\omega\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{\varphi^p\psi^q}\left(\frac{\psi}{\varphi}-1\right)^i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i(\psi-\varphi)^i}{\varphi^{p+i}\psi^q}$$

donne

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p\psi^q}\omega\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right\|_{ks}\leqq\sum_{i=0}^{\infty}|c_i|\cdot\left\|\frac{1}{\varphi^{p+i}\psi^q}(\psi-\varphi)^i\right\|_{ks}.$$

Comme $p+i\geqq p+1$, nous pouvons appliquer l'inégalité (27) en supposant $p>-1$, $q>0$, ce qui donne

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p\psi^q}\omega\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right\|_{ks}\leqq\frac{1}{A_0\mathfrak{z}^p(\varphi;s,k)\mathfrak{z}^q(\psi;s,k)}\times\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|\cdot\left[\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)\mathfrak{z}(\varphi;s,k)}\right]^i$$

ou

$$\left\|\frac{1}{\varphi^p\psi^q}\omega\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right\|_{ks}\leqq\frac{k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)\mathfrak{z}^{p+1}(\varphi;s,k)\mathfrak{z}^q(\psi;s,k)}\times\sum_{i=0}^{\infty}|c_{i+1}|\cdot\left[\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)\mathfrak{z}(\varphi;s,k)}\right]^i, \tag{28}$$

$$(p>-1;\ q>0).$$

Dans les cas où les signes des c_i sont ou identiques ou alternés, la série du second membre peut s'exprimer au moyen de la fonction ω.

Voici quelques exemples :

$$
(29)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\left\|\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^m - 1\right\|_{ks} \leqq \frac{k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)} \sum_{i=0}^{i=m-1}\left[1+\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)}\right]^i \\
&\qquad (m \text{ entier positif}),\\
&\left\|\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^p - 1\right\|_{ks} = \left\|\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-p} - 1\right\|_{ks} \\
&\qquad \leqq \frac{pk\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)}\left[1-\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)}\right]^{-p},\\
&\left\|\frac{1}{\psi^p}-\frac{1}{\varphi^p}\right\|_{ks} = \left\|\frac{1}{\varphi^p}\left[\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-p}-1\right]\right\|_{ks} \\
&\qquad \leqq \frac{pk\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z^{p+1}(\varphi;\,s,\,k)}\left[1-\frac{A_0 k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)}\right]^{-p},\\
&\qquad (p>1),\\
&\left\|\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)^p - 1\right\|_{ks} = \left\|\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{-p} - 1\right\|_{ks} \\
&\qquad \leqq \frac{pk\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)-A_0k\|\psi-\varphi\|_s},\\
&\left\|\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^p - 1\right\|_{ks} \leqq \frac{pk\|\psi-\varphi\|_s}{[(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)]^p[(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)-A_0k\|\psi-\varphi\|_s]^{1-p}},\\
&\left\|\frac{1}{\psi^p}-\frac{1}{\varphi^p}\right\|_{ks} = \left\|\frac{1}{\psi^p}\left[1-\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{p}\right]\right\|_{ks} \\
&\qquad \leqq \frac{pk\|\psi-\varphi\|_s}{[(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)z(\psi;\,s,\,k)]^p[(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)-A_0k\|\psi-\varphi\|_s]^{1-p}},\\
&\|\psi^p-\varphi^p\|_{ks} = \left\|\frac{1}{\varphi^{-p}}\left[\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{p}-1\right]\right\|_{ks} \\
&\qquad \leqq \frac{pk\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)^p[(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)-A_0k\|\psi-\varphi\|_s]^{1-p}}\\
&\qquad (0<p<1),\\
&\|\log\psi-\log\varphi\|_{ks} = \left\|\log\frac{\psi}{\varphi}\right\|_{ks} \\
&\qquad \leqq \frac{1}{A_0}\log\frac{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)-A_0k\|\psi-\varphi\|_s} \leqq \frac{k\|\psi-\varphi\|_s}{(k-1)z(\varphi;\,s,\,k)-A_0k\|\psi-\varphi\|_s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Soit $\{\varphi_n\}$ une suite qui converge vers φ en norme (s); choisissons $k > \mathrm{fl}(\varphi,\,s)$ afin d'avoir $z(\varphi;\,s,\,k) > 0$; $z(\varphi_n;\,s,\,k)$ tendant vers $z(\varphi;\,s,\,k)$ (nº **8**) est aussi positif à partir d'un certain rang. En remplaçant dans les inégalités (25) à (29) ψ par φ_n, ou encore φ par φ_n et ψ par φ, nous voyons que, en général, $\frac{1}{\varphi^p\varphi_n^q}\,\omega\left(\frac{\varphi_n}{\varphi}\right)$ et $\frac{1}{\varphi_n^p\varphi^q}\,\omega\left(\frac{\varphi}{\varphi_n}\right)$

tendent vers 1 en norme (ks). En particulier, toute puissance de φ_n tend vers la même puissance de φ, toute puissance de $\frac{\varphi_n}{\varphi}$ tend vers 1 et $\log\varphi_n$ tend vers $\log\varphi$. Il en résulte que :

Si φ_n *tend vers* φ *en norme* (s') *quel que soit* $s' > s$, φ_n^p *tend vers* φ^p, $\left(\frac{\varphi_n}{\varphi}\right)^p$ *tend vers* 1 (p quelconque), $\log\varphi_n$ *tend vers* $\log\varphi$ *en norme* (s'') *quel que soit*

$$s'' > \underset{s'>s}{\text{borne inf.}}[s' \,\text{fl}(\varphi, s')].$$

La fluctuation d'une constante non nulle étant égale à 1, *si* φ_n *tend vers une constante* $c \neq 0$ *en norme* (s') *quel que soit* $s' > s$, φ_n^p *tend vers* c^p *et* $\log\varphi_n$ *tend vers* $\log c$ *de la même manière.*

12. Convergence vers ∞. — Nous dirons que φ_n tend vers ∞ en norme (s) s'il existe un nombre $k > 1$ tel que $z(\varphi_n; s, k)$ tende vers $+\infty$; d'après l'inégalité (22), les puissances négatives de φ_n tendent vers zéro en norme (ks). L'égalité (20) permet de voir qu'il est équivalent de dire que les fluctuations sont bornées supérieurement et que $\min|\varphi_n|$ tend vers $+\infty$; en partant du fait que les fluctuations sont bornées, k sera choisi de manière que $k - \text{fl}(\varphi_n, s)$ reste, à partir d'un certain rang, supérieur à un nombre positif fixe, c'est-à-dire

$$k > \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \text{fl}(\varphi_n, s).$$

Nous dirons que la convergence vers ∞ est *faible* ou *forte* suivant que cette limite est supérieure ou égale à 1. Le changement de s en croissant ne peut faire changer la convergence que de faible à forte.

Si φ_n *tend vers* ∞ *en norme* (s') *quel que soit* $s' > s$, *ses puissances négatives tendent vers zéro en norme* (s'') *quel que soit*

$$s'' > \underset{s'>s}{\text{borne inf.}}\left[s' \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \text{fl}(\varphi_n, s')\right].$$

En particulier, si φ_n *tend fortement vers* ∞ *en norme* (s') *quel que soit* $s' > s$, *ses puissances négatives tendent aussi vers zéro en norme* (s').

A cet égard, la convergence faible est analogue à la convergence vers une fonction non constante finie, et la convergence forte à la convergence vers une constante finie.

Les expressions de $z(c\varphi)$ et $z(\varphi - c)$ (n° **8**) montrent que toute fonction linéaire de φ_n à coefficients indépendants de n tend vers ∞ de la même manière que φ_n.

Pour que deux suites $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ convergent vers ∞ en norme (s) en même temps, il suffit que $\frac{z(\psi_n;\, s,\, k)}{z(\varphi_n;\, s,\, k)}$ reste compris entre deux nombres positifs finis, et *a fortiori* que, pour n assez grand,

$$\frac{|z(\psi_n;\, s,\, k) - z(\varphi_n;\, s,\, k)|}{z(\varphi_n;\, s,\, k)} \leqq q < 1$$

ou, d'après (21),

$$\frac{\|\psi_n - \varphi_n\|_s}{z(\varphi_n;\, s,\, k)} \leqq \frac{q(k-1)}{A_0 k},$$

puis, d'après (20),

$$\frac{\|\psi_n - \varphi_n\|_s}{[k - \mathrm{fl}(\varphi_n,\, s)]\min|\varphi_n|} \leqq \frac{q}{A_0 k}.$$

Il suffit en particulier, que $\frac{\|\psi_n - \varphi_n\|_s}{z(\varphi_n,\, s,\, k)}$ tende vers zéro, ou, lorsque $k - \mathrm{fl}(\varphi_n,\, s)$ reste supérieur à un nombre fixe, que $\frac{\|\psi_n - \varphi_n\|_s}{\min|\varphi_n|}$ tende vers zéro.

V. — Compacité généralisée.

13. Définitions. — Une famille de fonctions sera dite compacte du type s au sens généralisé si les fonctions de cette famille appartiennent à tous les types plus grands que s et si toute suite de fonctions de cette famille admet une suite partielle convergente en norme (s') quel que soit $s' > s$, la limite pouvant être finie ou infinie.

Toute famille bornée en fluctuation (s') quel que soit $s' > s$ est compacte du type s au sens généralisé.

En effet, considérons une suite $\{\varphi_n\}$ de fonctions de cette famille. Ou bien la suite numérique $\{\min|\varphi_n|\}$ admet une suite partielle tendant vers $+\infty$, et les fonctions correspondantes tendent vers ∞ en norme (s') (n° **12**); ou bien la suite $\{\min|\varphi_n|\}$ est bornée supérieurement et l'inégalité (17) montre que pour tout $s' > s$, $\{\|\varphi_n\|_{s'}\}$ est bornée, et $\{\varphi_n\}$ est compacte au sens ancien.

Une telle famille sera dite *compacte de seconde espèce;* par opposition, une famille compacte au sens primitif sera dite *compacte de première espèce.*

14. Décomposition. — *Dans une famille compacte au sens généralisé les fonctions dont le minimum de valeur absolue est borné supérieurement forment une famille compacte de première espèce, et celles dont le minimum est borné inférieurement en forment une de seconde espèce.*

La première partie est immédiate, ∞ ne pouvant pas être élément d'accumulation de la première famille. La deuxième partie se démontre par l'absurde. Nier cet énoncé, c'est dire que pour un type $s' > s$, les fluctuations ne sont pas bornées supérieurement; il existe alors une suite $\{\varphi_n\}$ telle que $\mathrm{fl}(\varphi_n, s')$ tende vers $+\infty$; d'après l'inégalité (17), grâce à $\min|\varphi_n| \geqq a$, $\|\varphi_n\|_{s'}$ tend aussi vers $+\infty$. Le premier fait empêche la convergence vers ∞ et le second la convergence vers une fonction finie. Comme ils subsistent pour toute suite partielle, cela contredit la compacité.

Par suite, *toute famille compacte générale est décomposable en deux sous-familles compactes, l'une de première, l'autre de deuxième espèce.*

15. Critères de compacité. — *Des fonctions dont les fonctions réduites forment une famille compacte forment elles-mêmes une famille compacte où la convergence vers ∞ est forte.*

Les fonctions réduites prenant toutes la valeur zéro, leur famille est compacte de première espèce, ce qui se traduit par $\|\varphi^\star\|_{s'} \leqq m(s')$. Soit une suite de fonctions; si, pour une suite partielle, $\min|\varphi_n|$ tend vers $+\infty$,

$$\mathrm{fl}(\varphi_n, s') \leqq 1 + \frac{A_0 m(s')}{\min|\varphi_n|}$$

tend vers 1 et φ_n tend fortement vers ∞ en norme (s'); si cela n'a pas lieu, $\min|\varphi_n|$ est borné supérieurement, $\|\varphi_n\|_{s'}$ est borné supérieurement d'après l'inégalité (16) et la suite est compacte de première espèce.

Des fonctions dont les dérivées forment une famille compacte de première espèce forment une famille compacte où la convergence vers ∞ est forte.

D'après notre hypothèse de régularité (n° **2**), la suite $\{A_r\}$ finit par croître, et une famille bornée en norme (s') relativement à $\{A_r\}$ l'est *a fortiori* relativement à $\{A_{r+1}\}$. Supposons donc que les dérivées satisfassent à

$$|\varphi'(x)| \leqq m(s')A_1, \qquad |\varphi''(x)| \leqq m(s')A_2 s', \qquad \ldots,$$
$$|\varphi^{(r)}(x)| \leqq m(s')A_r s'^{r-1}, \qquad \ldots.$$

De la première inégalité résulte

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqq |x_2 - x_1| . \max |\varphi'(x)| \leqq l m(s') A_1$$

(l longueur de l'intervalle fondamental), ce qui limite l'oscillation de φ et par suite $\|\varphi^\star\|_{s'}$; et le théorème précédent s'applique.

La propriété de compacité des produits de n fonctions d'une famille compacte de première espèce (2ᵉ Partie, fin du nº **3**) ne saurait s'étendre aux familles compactes générales, car le produit d'une fonction fixe ayant des zéros par une fonction qui tend vers ∞ tend vers ∞ sauf aux zéros du premier facteur, allure excluant la convergence. Mais pour les familles compactes de deuxième espèce, elle résulte de l'inégalité (19). D'après la décomposition d'une famille compacte générale en familles compactes des deux espèces, *si la famille des fonctions φ est compacte, la famille des φ^m (m entier positif) est compacte du même type.*

16. Propriétés. *Convergence des suites. — Si une suite de fonctions extraite d'une famille compacte du type s converge numériquement en un point vers ∞, elle converge vers ∞ en norme (s') quel que soit $s' > s$.*

Il suffit de voir que la suite des valeurs absolues minima de ces fonctions tend vers $+\infty$. Le nier serait affirmer qu'une infinité de ces minima serait inférieure à un nombre fixe; la suite des fonctions correspondantes serait compacte de première espèce (nº **14**), et leurs valeurs au point considéré seraient bornées.

Les propriétés concernant la convergence des suites (1ʳᵉ Partie, nºˢ **11** à **14**) s'appliquent aux familles compactes générales, le mot *converger* s'entendant vers une limite finie.

Familles sans élément d'accumulation constant. — Grâce à la décomposition d'une famille compacte générale, il suffit de voir à quelle condition une propriété a lieu dans une famille compacte de deuxième espèce. Les propriétés des familles n'admettant pas zéro comme élément d'accumulation (1ʳᵉ Partie, nºˢ **15**, **19** et **20**) subsistent : les deux premières sont évidentes, la troisième résulte de l'inégalité (17) et a lieu sans intervalle d'exclusion

$$\left|\frac{\varphi(x_2)}{\varphi(x_1)}\right| \leq \frac{\max|\varphi|}{\min|\varphi|} \leq \frac{A_0\|\varphi\|}{\min|\varphi|} \leq 2\,\mathrm{fl}(\varphi) - 1. \tag{30}$$

Les équations $\varphi(x) = a$ (a constante arbitraire) peuvent s'écrire $c\varphi(x) = b$ (c constante déterminée pour chaque fonction, b constante arbitraire). Dans une famille compacte de deuxième espèce, nous pouvons choisir c pour que toutes les fonctions $c\varphi$ aient 1 pour minimum; la famille des $c\varphi$ est alors compacte de deux espèces et ne peut avoir que 1 comme élément d'accumulation constant; pour qu'elle l'ait, il faut et il suffit qu'une suite de fluctuations tende vers 1. Les limites correspondantes pour les fonctions φ peuvent être les constantes finies et ∞ avec convergence forte. Décomposons une famille compacte en mettant dans la sous-famille compacte de deuxième espèce les fonctions dont le minimum est plus grand que 1; pour elles, l'oscillation de φ est plus grande que celle de $c\varphi$. Cela montre que les propriétés énoncées aux n^{os} **16** à **18** (1re Partie) appartiennent aux *familles compactes générales ne contenant pas de constante, n'en admettant pas parmi leurs éléments d'accumulation, et où la convergence vers ∞ est faible.*

17. Familles des puissances et des logarithmes. — Nous avons vu (fin du n° **4**) que, $\omega(u)$ étant une fonction analytique régulière pour $u = 0$, lorsque φ varie dans une famille compacte de première espèce, $\omega(\varphi)$ engendre une famille compacte de même espèce d'un certain type. L'application à φ^p et à $\log\varphi$ est impossible sans restriction car, lorsque φ s'annule, φ^p et $\log\varphi$ sortent de la classe quasi analytique (étant infinies ou ayant des dérivées infinies). En dehors du cas des puissances naturelles (fin du n° **15**), c'est la compacité de seconde espèce qui donne des résultats simples.

Pour les puissances négatives, le calcul du n° **9** modifié en mettant le terme constant au premier membre donne

$$\left\|\left(\frac{1}{\varphi^p}\right)^*\right\|_{ks} \leq \left\|\frac{1}{\varphi^p} - \frac{1}{a^p}\right\|_{ks} \leq \frac{k-1}{A_0 k a^p}\left\{\left[\frac{(k-1)f}{k-f}\right]^p - 1\right\}.$$

D'autre part,

$$\min\frac{1}{\varphi^p} = \frac{1}{(\max\varphi)^p}.$$

Donc

$$\mathrm{fl}\left(\frac{1}{\varphi^p}, ks\right) - 1 \leqq \frac{k-1}{k}\left(\frac{\max\varphi}{a}\right)^p \left\{\left[\frac{(k-1)f}{k-f}\right]^p - 1\right\}.$$

Nous avons, grâce à (30)

$$\frac{\max\varphi}{a} = \frac{\max\varphi}{\min\varphi} : \frac{\min\varphi + \mathrm{A}_0\|\varphi^*\|}{\min\varphi} \leqq \frac{2f-1}{f};$$

$$(31)\qquad \mathrm{fl}\left(\frac{1}{\varphi^p}, ks\right) \leqq 1 + \frac{k-1}{k}[2\,\mathrm{fl}(\varphi, s) - 1]^p \left[\left(\frac{k-1}{k-\mathrm{fl}(\varphi, s)}\right)^p - \left(\frac{1}{\mathrm{fl}(\varphi, s)}\right)^p\right].$$

Pour $p = 1$, l'expression se simplifie

$$\mathrm{fl}\left(\frac{1}{\varphi}, ks\right) \leqq 1 + \frac{(k-1)[\mathrm{fl}(\varphi, s) - 1][2\,\mathrm{fl}(\varphi, s) - 1]}{\mathrm{fl}(\varphi, s)[k - \mathrm{fl}(\varphi, s)]}.$$

Toute puissance positive étant le produit d'une puissance naturelle par une puissance négative, on obtiendrait une limitation analogue par combinaison des inégalités (19) et (31).

Le second membre de (31) est une fonction croissante de $\mathrm{fl}(\varphi, s)$ pour $1 < \mathrm{fl}(\varphi, s) < k$. Donc, si des fonctions φ ont leurs fluctuations (s) bornées supérieurement, en prenant k supérieur à leur borne et en remplaçant $\mathrm{fl}(\varphi, s)$ par cette borne, on aura une limitation pour les $\mathrm{fl}(\varphi^{-p}, ks)$. Il en résulte que :

Si la famille des fonctions φ est compacte de deuxième espèce du type s, la famille des φ^p (p fixe) *est aussi compacte de deuxième espèce du type*

$$s_0 = \underset{s'>s}{\text{borne inf.}}\left[s' \underset{\varphi \text{ varie}}{\text{borne sup.}}\,\mathrm{fl}(\varphi, s')\right].$$

En utilisant de même l'inégalité (24) et le premier critère du n° **15**, on voit que *la famille des* $\log\varphi$ *est compacte du même type s_0, la convergence vers ∞ si elle a lieu étant forte.*

18. L'inégalité (24) a une sorte de réciproque. Le développement en série

$$e^\varphi - 1 = \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^n}{n!} + \ldots$$

nous donne

$$(32)\qquad \mathrm{A}_0\|(e^\varphi)^*\|_{ks} \leqq \mathrm{A}_0\|e^\varphi - 1\|_{ks} \leqq \frac{k-1}{k}\left(e^{\frac{\mathrm{A}_0 k\|\varphi\|_s}{k-1}} - 1\right);$$

d'autre part

$$\min e^{\varphi} = e^{\min \varphi} \geqq e^{-A_0 \|\varphi\|_s}.$$

Donc

$$\mathrm{fl}(e^{\varphi}, ks) \leqq 1 + \frac{k-1}{k} e^{A_0\|\varphi\|_s}\left(e^{\frac{A_0 k \|\varphi\|_s}{k-1}} - 1\right).$$

Les fonctions $e^{\varphi - c} = e^{-c} e^{\varphi}$ ont toutes la même fluctuation, qui est en particulier celle de e^{φ^*}; d'où finalement

$$\mathrm{fl}(e^{\varphi}, ks) \leqq 1 + \frac{k-1}{k} e^{A_0\|\varphi^*\|_s}\left(e^{\frac{A_0 k \|\varphi^*\|_s}{k-1}} - 1\right).$$

La série convergeant toujours, on peut prendre k arbitraire (>1) en sorte que :

Si les fonctions φ *ont des fonctions réduites* φ^* *formant une famille compacte* (nécessairement de première espèce), *les fonctions* e^{φ} *forment une famille compacte de deuxième espèce du même type.*

La distance de deux exponentielles peut d'ailleurs être précisée par une formule analogue aux inégalités (29) en écrivant

$$e^{\psi} - e^{\varphi} = e^{\varphi}(e^{\psi - \varphi} - 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\varphi}(\psi - \varphi)^i}{i\,!},$$

et en appliquant à chaque terme l'inégalité (4′)

$$\| e^{\varphi}(\psi - \varphi)^i \|_{ks} \leqq \| e^{\varphi} \|_{ks} \left(\frac{A_0 k \| \psi - \varphi \|_s}{k-1}\right)^i,$$

d'où, par addition

$$\| e^{\psi} - e^{\varphi} \|_{ks} \leqq \| e^{\varphi} \|_{ks} \left(e^{\frac{A_0 k \|\psi - \varphi\|_s}{k-1}} - 1\right).$$

Or, il résulte de (32) que

$$\| e^{\varphi} \|_{ks} \leqq \| e^{\varphi} - 1 \|_{ks} + \| 1 \|_{ks} \leqq \frac{k-1}{A_0 k}\left(e^{\frac{A_0 k \|\varphi\|_s}{k-1}} + \frac{1}{k-1}\right),$$

d'où

$$\| e^{\psi} - e^{\varphi} \|_{ks} \leqq \frac{k-1}{A_0 k}\left(e^{\frac{A_0 k \|\varphi\|_s}{k-1}} + \frac{1}{k-1}\right)\left(e^{\frac{A_0 k \|\psi - \varphi\|_s}{k-1}} - 1\right)$$

et, *a fortiori*

$$\| e^{\psi} - e^{\varphi} \|_{ks} \leqq \| \psi - \varphi \|_s e^{\frac{A_0 k \|\psi - \varphi\|_s}{k-1}} \left(e^{\frac{A_0 k \|\varphi\|_s}{k-1}} + \frac{1}{k-1}\right).$$