JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

T. PÉYOVITCH

Contribution à l'étude de la valeur maximum du module d'un déterminant

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 349-353.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_349_0>

Contribution à l'étude de la valeur maximum du module d'un déterminant;

PAR T. PÉYOVITCH,

(Beograd).

On connaît le célèbre théorème de M. Hadamard ([1]).

Ce théorème a été démontré par M. Hadamard en 1893, mais il a été inappliqué jusqu'en 1903, où il a été utilisé par Fredholm pour démontrer la convergence des séries qui donnent la solution des équations intégrales.

Après l'application faite par Fredholm, ce théorème fut repris et démontré par de nombreux auteurs ([2]).

En utilisant les résultats de Boggio, nous allons donner une formule pour la valeur maximum du module d'un déterminant.

Considérons le déterminant d'ordre n,

$$(1) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

([1]) Résolution d'une question relative aux déterminants (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 240. *Selecta-Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard,* 1935, p. 136).

([2]) Concernant la littérature de ce théorème, on peut voir l'article de Boggio, *Nouvelle démonstration du théorème de M. Hadamard sur les déterminants* (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 2e série, t. XXXV, 1911, p. 113, première Partie).

Transformons ce déterminant, d'après Boggio (*loc. cit.*), en un autre ayant la même valeur, c'est-à-dire

$$(2)\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} b_{1k} &= a_{1k}, \\ b_{2k} &= a_{2k} - m_{21} b_{1k}, \\ b_{3k} &= a_{3k} - m_{31} b_{1k} - m_{32} b_{2k}, \\ b_{4k} &= a_{4k} - m_{41} b_{1k} - m_{42} b_{2k} - m_{43} b_{3k} \end{aligned}$$

et, en général,

$$(3)\qquad b_{ik} = a_{ik} - \sum_{r=1}^{i-1} m_{ir} b_{rk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les coefficients m_{ir} sont des constantes quelconques.

Si l'on choisit les coefficients m_{ir} de manière que l'on ait

$$b_{ik} = 0 \qquad (k < i),$$

c'est-à-dire que tous les éléments du déterminant (2) au-dessous de la diagonale principale soient égaux à zéro, la valeur du déterminant (2) sera le produit des éléments de la diagonale principale, c'est-à-dire on aura

$$(4)\qquad \Delta_n = b_{11} b_{22} \ldots b_{nn}.$$

Les valeurs des éléments b_{ii} sont, d'après (3),

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} b_{11} &= a_{11}, \\ b_{22} &= a_{22} - m_{21} b_{12} = a_{22} - m_{21} a_{12}, \\ b_{33} &= a_{33} - m_{31} b_{13} - m_{32} b_{23}, \\ b_{44} &= a_{44} - m_{41} b_{14} - m_{42} b_{24} - m_{43} b_{34}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_{nn} &= a_{nn} - m_{n1} b_{1n} - m_{n2} b_{2n} - \ldots - m_{nn-1} b_{n-1n}, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients m_{ir} sont alors bien déterminés.

Si les valeurs absolues des éléments a_{ik} du déterminant (1) et des coefficients m_{ir} ne dépassent pas les nombres positifs respectifs A et M, on aura, d'après (3) et (5),

$$(6)\quad \begin{cases} |b_{11}| \leqq A, \\ |b_{22}| \leqq A + MA = A(1+M), \\ |b_{33}| \leqq A + MA + M(A+MA) = A(1+M)^2, \\ |b_{44}| \leqq A + MA + MA(1+M) + MA(1+M)^2 = A(1+M)^3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ |b_{nn}| \leqq A(1+M)^{n-1}. \end{cases}$$

Le produit (4), d'après les formules (5), donne

$$(7)\quad \begin{aligned} |\Delta_n| \leqq |a_{11}|(|a_{22}| + |m_{21}b_{12}|)(|a_{33}| + |m_{31}b_{12}| + |m_{32}b_{23}|)\dots \\ \times(|a_{nn}| + |m_{n1}b_{1n}| + \dots + |m_{nn-1}b_{n-1n}|) \end{aligned}$$

ou, d'après les inégalités (6),

$$(8)\qquad |\Delta_n| \leqq A^n(1+M)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

ce qui représente la formule pour la valeur maximum du module du déterminant (1).

Il est évident, d'après les équations (5), que le déterminant (1) peut atteindre son maximum en valeur absolue si tous les coefficients m_{ir} sont égaux à zéro. Dans ce cas on aura, d'après (4) et (5),

$$|\Delta_n| = |b_{11}b_{22}\dots b_{nn}| = |a_{11}a_{22}\dots a_{nn}|$$

ou, d'après (8),

$$|\Delta_n| \leqq A^n.$$

Si tous les éléments a_{ik} du déterminant (1) ne dépassent pas l'unité, la formule (8) devient

$$|\Delta_n| \leqq (1+M)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Remarquons que la valeur maximum du module du déterminant (1), donnée par M. Hadamard, est

$$(7')\qquad |\Delta_n| \leqq \sqrt{s_1 s_2 \dots s_n},$$

les s_i désignant la somme des carrés des éléments de $i^{\text{ième}}$ ligne ou colonne du déterminant (1), ou enfin

$$(8')\qquad |\Delta_n| \leqq A^n \sqrt{n^n},$$

où A a la même signification que plus haut. Si l'on pose $|A| \leqq 1$, on aura

$$|\Delta_n| \leqq n^{\frac{n}{2}}.$$

Faisons maintenant la comparaison entre les formules (8) et (8′). Il s'ensuit :

1° Si l'on a $M \geqq 1$, on aura

$$(1+m) \leqq (1+M)^m,$$

m étant un nombre entier, positif et fini. Posons $m = n - 1$, n désignant l'ordre du déterminant (1), la formule ci-dessus devient

$$n \leqq (1+M)^{n-1}$$

ou enfin

$$(9) \qquad A^n n^{\frac{n}{2}} \leqq A^n (1+M)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2° Si l'on a

$$M < \sqrt[m]{1+m} - 1 = \sqrt[n-1]{n} - 1,$$

en désignant par n l'ordre du déterminant (1), on aura

$$(1+M)^m \leqq m+1$$

ou enfin

$$(9') \qquad A^n (1+M)^{\frac{n(n-1)}{2}} \leqq A^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Les inégalités (9) et (9′) sont bien évidentes sous les conditions énoncées.

Remarquons que la condition (9′) est bien satisfaite si l'on pose

$$M \leqq \frac{1}{m} = \frac{1}{n-1},$$

car on a

$$\frac{1}{m} \leqq \sqrt[m]{1+m} - 1.$$

Par conséquent, nous avons le théorème suivant :

Si l'on a $M \geqq 1$, *la valeur maximum du module du déterminant* (1), *donnée par la formule* (8′) *de M. Hadamard, est plus petite que celle donnée par la formule* (8).

Si l'on a $M < \sqrt[m]{m+1} - 1$, *la valeur maximum du module du déter-*

minant (1), *donnée par la formule* (8), *est plus petite que celle donnée par la formule* (8′) *de M. Hadamard.*

Prenons, par exemple, le déterminant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Dans ce cas on aura

$$m_{21} = \frac{1}{3}, \qquad m_{31} = \frac{1}{3}, \qquad m_{32} = \frac{1}{4}, \qquad |a_{ik}| \leqq 3, \qquad M \leqq \frac{1}{3} < \sqrt{3} - 1.$$

La valeur maximum du module du déterminant (10), donnée par les formules (7) et (8), est respectivement

$$|\Delta_3| \leqq 30, \qquad \Delta \leqq 3^3 \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 64. \tag{11}$$

La valeur maximum du module du déterminant (10), d'après les formules (7′) et (8′), est respectivement

$$|\Delta_3| \leqq 3\sqrt{11 \cdot 14}, \qquad |\Delta_3| \leqq 3^3 . 3\sqrt{3} = 81\sqrt{3}. \tag{11′}$$

Par conséquent, la valeur maximum du module du déterminant (10), donnée par les formules (11), est plus petite que celle donnée par les formules (11′).