JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL VINCENSINI

Sur la courbure des congruences de sphères et les congruences de courbure constante

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 315-328.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_315_0>

Sur la courbure des congruences de sphères et les congruences de courbure constante ;

PAR PAUL VINCENSINI.

INTRODUCTION. — M. Demoulin ([1]) a introduit la notion de *courbure d'une congruence de sphères*. Il a défini la courbure K d'une telle congruence comme celle de la forme

$$(1) \qquad d\varphi^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2},$$

où ds^2 représente l'élément linéaire de la déférente (S) de la congruence, et où $R(u, v)$ est le rayon de la sphère centrée au point (u, v) de (S).

M. Demoulin a étudié les congruences de courbure $+1$, et il a montré que, pour qu'une congruence ait pour courbure $+1$, il *faut* et il *suffit* qu'il soit possible de déformer la déférente, de façon qu'après la déformation toutes les sphères passent par un même point.

Le caractère de nécessité de la condition précédente est établi au moyen des formules relatives aux coordonnées pentasphériques. M. Hadamard, dans une séance de son séminaire du Collège de France, a attiré l'attention sur les éléments linéaires généralisés tels que (1), et a donné par la suite une démonstration géométrique fort simple de ce caractère ([2]), sur lequel M. Demoulin est d'ailleurs revenu dans un article récent ([3]).

([1]) *Bulletin Ac. Belgique*, 5e série, **19**, 1933, p. 877.

([2]) J. HADAMARD, *Comptes rendus des séances de la Soc. Math. de France*, **62**, 1934, p. 24.

([3]) *Bulletin Ac. Belgique*, 5e série, **21**, 1935, p. 770.

En ce qui concerne le caractère de suffisance de la proposition ci-dessus, nous ferons, dès à présent, la remarque suivante. Dans la forme (1) [*élément angulaire* de la congruence], $d\varphi$ est l'angle de deux sphères infiniment voisines. La courbure de la congruence est donc conservée, non seulement par une déformation arbitraire de la déférente, mais aussi par une transformation quelconque du groupe conforme de l'espace opérant sur l'ensemble des sphères.

Supposons dès lors que toutes les sphères passent par un même point O, et soumettons la congruence à une inversion de pôle O. Les sphères deviennent des plans enveloppant une certaine surface (Σ).

Pour la congruence transformée, $d\varphi$ est l'angle de deux plans tangents infiniment voisins à (Σ), c'est-à-dire, au fond, la distance de deux points infiniment voisins de la sphère unitaire sur laquelle on effectuerait la représentation sphérique de (Σ). La courbure de l'élément angulaire de la congruence envisagée, étant égale à celle de l'élément linéaire de la sphère unitaire, est bien égale à $+1$.

La courbure d'une congruence de sphères se conservant dans une déformation arbitraire de la déférente [le rayon $R(u, v)$ étant conservé], il était naturel de chercher à l'évaluer au moyen de quantités invariantes; c'est ce que j'ai commencé par faire dans le présent travail.

K peut s'exprimer simplement au moyen de la courbure k de la déférente et des paramètres différentiels de Beltrami Δ, Δ_2, Δ_{22} de la quantité ρ telle que $2\rho = R^2$.

La forme de l'expression de K [formule (6) du numéro **1**] met immédiatement en évidence le résultat de M. Demoulin; elle établit simultanément les deux parties de la proposition ci-dessus rappelée, et montre en outre que le cas de M. Demoulin [$K = 1$] est sans doute le seul, pour lequel le problème de la détermination des congruences de sphères de courbure donnée est susceptible d'une interprétation géométrique simple.

Même dans le cas où la courbure est constante, ou plus particulièrement encore si $K = 0$, on ne voit guère apparaître d'interprétation facile. Contrairement à ce qui a lieu pour la courbure des surfaces, le cas où $K = 0$ est plus compliqué que celui où $K = 1$.

Il est clair que si $R =$ const., la courbure de la congruence est proportionnelle à celle de la déférente. En prenant des déférentes à courbure constante on obtient ainsi des congruences particulières à courbure constante. Les exemples obtenus par ce procédé sont assez banaux; on en déduit d'autres un peu moins banaux par une opération du groupe conforme.

Le présent Mémoire traite surtout des congruences à courbure constante, positive, négative ou nulle. En imposant aux sphères de la congruence des conditions géométriques convenables on peut obtenir des familles intéressantes de pareilles congruences. Si l'on exige, en particulier, que par une déformation convenable de la déférente les sphères de la congruence viennent se placer tangentiellement à une droite fixe, on est conduit à des congruences de courbure constante dont les déférentes sont en relation avec certaines surfaces de Peterson de définition géométrique déterminée.

Le cas où la courbure est égale à $+1$ conduit, en particulier, à une solution immédiate d'un intéressant problème de déformation traité à la fin du numéro **4**, en même temps qu'à une propriété caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur.

Quelques-uns des résultats obtenus dans ce travail ont été succinctement indiqués dans une Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 25 novembre 1935.

1. Forme invariante de l'expression de la courbure d'une congruence de sphères. — Nous supposerons, pour simplifier le calcul, la surface déférente rapportée aux courbes normales aux rayons joignant le centre de la sphère aux deux points de contact avec son enveloppe [$u=$ const.] et leurs trajectoires orthogonales [$v=$ const.].

Le ds^2 de la déférente aura la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Le rayon de la sphère génératrice sera fonction de u seul [$R(u)$], et la courbure K de la congruence sera celle de la forme

$$(1)\qquad d\varphi^2 = \frac{E\,du^2 + G\,dv^2 - dR^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}\left[E - \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]du^2 + \frac{G}{R^2}dv^2.$$

En posant

$$(2)\qquad \begin{cases} R^2 = 2\rho, \\ E_0 = \dfrac{1}{2\rho}\left[E - \dfrac{1}{2\rho}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2\right], \\ G_0 = \dfrac{G}{R^2}, \end{cases}$$

nous écrirons

$$(3)\qquad d\varphi^2 = E_0\,du^2 + G_0\,dv^2.$$

Calculons la courbure de la forme (3) au moyen de l'expression classique; nous aurons

$$(4)\qquad K = -\frac{1}{2\sqrt{E_0G_0}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\dfrac{\partial G_0}{\partial u}}{\sqrt{E_0G_0}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\dfrac{\partial E_0}{\partial v}}{\sqrt{E_0G_0}}\right)\right\}.$$

En remplaçant dans (4) E_0 et G_0 par leurs expressions (2), tenant compte de l'expression de la courbure k de la déférente que l'on déduit évidemment de (4) en remplaçant ρ par $\frac{1}{2}$, et en se rappelant les expressions des paramètres différentiels $\Delta\rho$, $\Delta_2\rho$, $\Delta_{22}\rho$ relatifs au ds^2 de la déférente qui ont ici pour valeurs

$$\begin{cases} \Delta\rho = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2, \\ \Delta_2\rho = \dfrac{E\rho_{22} + G\rho_{11}}{EG}, \\ \Delta_{22}\rho = \dfrac{\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2}{EG}, \end{cases}$$

les ρ_{ij} sont les dérivées secondes covariantes de ρ,

on trouve, après un calcul sans difficultés et moyennant un groupement convenable de termes

$$(5)\qquad K = 1 - \frac{4\rho^2}{(\Delta\rho - 2\rho)^2}\left[\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + k(\Delta\rho - 2\rho) + 1\right].$$

La quantité entre crochets n'est autre chose que le premier membre de ce que L. Bianchi a appelé la *deuxième équation de l'applicabilité* pour la déférente; nous désignerons cette quantité par Φ.

D'autre part, on vérifie immédiatement que si θ désigne l'angle que fait la normale à la déférente en un point avec les rayons joignant le point aux points de contact de la sphère avec son enveloppe, on a

$$\sin^2\theta = \frac{\Delta\rho}{2\rho},$$

d'où

$$\frac{4\rho^2}{(\Delta\rho - 2\rho)^2} = \frac{1}{\cos^4\theta}.$$

(5) peut alors se mettre sous la forme simple

$$K = 1 - \frac{\Phi}{\cos^4\theta}. \tag{6}$$

(6) met en évidence le résultat de M. Demoulin. On connaît la signification géométrique des solutions de la deuxième équation de l'applicabilité pour une surface quelconque : si ρ est une telle solution, il existe une déformation de la surface après laquelle $R = \sqrt{2\rho}$ représente la distance d'un point fixe de l'espace aux différents points de la surface. Pour qu'une congruence de sphères ait une courbure égale à $+1$, *il faut et il suffit*, d'après (6), que l'on ait $\Phi = 0$, donc que l'on puisse, par une déformation convenable de la déférente, *amener toutes les sphères à passer par un même point.*

2. Congruences de courbure nulle. — Dans ce paragraphe, nous nous occupons uniquement des congruences de courbure nulle. Les congruences de ce type admettant une déférente donnée, sont définies par l'équation (6) où l'on fait $K = 0$, soit

$$\Phi - \cos^4\theta = 0. \tag{7}$$

(7) est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en ρ dont l'intégration, dans le cas général, semble difficile à effectuer. Si la déférente est une déformée de surface de révolution, il est cependant possible de définir géométriquement, et de façon fort simple, ∞^1 congruences du type envisagé. Avant d'aborder ce cas particulier nous donnerons quelques indications sur le problème général.

ds^2 représentant l'élément linéaire de la déférente d'une congruence de courbure nulle arbitraire (C), et R (u, v) étant le rayon de la sphère centrée au point (u, v) de la déférente, l'élément angulaire de (C) est

$$d\varphi^2 = \frac{ds^2 - dR^2}{R^2}.$$

La courbure de cet élément angulaire étant nulle, on peut, en choisissant convenablement les paramètres u, v, mettre $d\varphi^2$ sous la forme

$$d\varphi^2 = du^2 + dv^2.$$

Le ds^2 de la déférente affectera alors la forme

$$ds^2 = R^2(du^2 + dv^2) + dR^2,$$

soit

$$(8) \qquad ds^2 = \left[R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} du\, dv + \left[R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\right] dv^2,$$

ou, en mettant R^2 en facteur et posant $R = e^z$,

$$(8') \qquad ds^2 = e^{2z}\left\{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} du\, dv + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] \partial v^2\right\}.$$

Indépendamment de la méthode qui consiste à étudier directement l'équation (7), le problème de la détermination des congruences de courbure nulle peut, comme l'on voit, être posé sous les deux formes suivantes, en quelque sorte inverses :

a. On se donne $R(u, v)$ [ou $z(u, v)$], et il s'agit de déterminer les surfaces (S) admettant l'élément linéaire (8) [ou (8′)]; c'est là un problème ordinaire de déformation que l'on peut essayer de traiter par l'application des méthodes classiques.

b. On se donne (S), et il s'agit alors de mettre l'élément linéaire *connu* de (S) sous une forme particulière [(8) ou (8′)]. Au Tome III de sa *Théorie générale des surfaces* (p. 204), G. Darboux donne des indications sur ce problème général; nous y renvoyons le lecteur, nous bornant ici à observer que, du moment que ce dernier problème équivaut au fond à l'intégration de l'équation (7), sa solution se ramènera à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à une fonction inconnue.

Eu égard à la forme (8′) du ds^2 de la déférente (S), considérons la surface auxiliaire (Σ) dont l'équation cartésienne relativement aux axes rectangulaires Ou, Ov, Oz est

$$z = z(u, v).$$

La quantité entre parenthèses au second membre de $(8')$ n'est pas autre chose que l'élément linéaire $d\sigma^2$ de (Σ), et l'on peut écrire $(8')$ sous la nouvelle forme

$$ds^2 = e^{2z} d\sigma^2. \tag{9}$$

(9) montre que les surfaces (S) et (Σ) sont en représentation conforme, le rapport des éléments linéaires en deux points correspondants étant e^z, z désignant la cote du point de (Σ).

On peut donc dire que le problème de la recherche des congruences de sphères de courbure nulle admettant pour déférente une surface (S) donnée, *revient à la détermination des surfaces* (Σ) *que l'on peut représenter conformément sur* (S), *le rapport des éléments linéaires homologues sur* (S) *et* (Σ) *étant égal à* e^z, z *désignant la distance d'un point quelconque de* (Σ) *à un plan fixe.*

Les considérations qui précèdent montrent que le problème de représentation conforme qui vient d'être énoncé, toujours possible, admet une infinité de solutions : à chaque congruence de sphères de courbure nulle de déférente (S) en correspond une.

En choisissant convenablement la fonction z dans (9), on peut donner des exemples explicites de congruences de courbure nulle. Nous allons, pour le moment, nous borner à indiquer un exemple particulier relatif au cas où la déférente (S) est applicable sur une surface de révolution.

Rapportons (S) au système des déformées de parallèles et de méridiens, et prenons son élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2,$$

$r(u)$ désignant la distance à l'axe de révolution, d'un point quelconque d'une déformée révolutive de (S).

Définissons une congruence de sphères de déférente (S), en fixant le rayon R relatif à chaque point (u, v) par la loi

$$R = c.r, \qquad c = \text{constante arbitraire.}$$

Si (S) a la forme révolutive, l'une des congruences obtenues s'obtient en considérant les sphères centrées sur (S) et tangentes à l'axe de révolution; les autres s'en déduisent en réduisant les rayons dans un rapport constant arbitraire.

On aura

$$d\varphi^2 = \frac{du^2 + r^2 dv^2 - c^2 dr^2}{c^2 r^2} = \left[\frac{1 - c^2\left(\dfrac{dr}{du}\right)^2}{c^2 r^2}\right] du^2 + \frac{dv^2}{c^2}.$$

La forme $d\varphi^2$ a visiblement une courbure nulle. Ainsi :

On obtient des congruences de sphères de courbure nulle, en déformant arbitrairement les déférentes des congruences obtenues en centrant, en chaque point d'une surface de révolution, une sphère dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à l'axe de révolution.

L'exemple précédent est d'autant plus intéressant, que les congruences de sphères telles que l'on puisse réduire les rayons dans un rapport constant, sans modifier la courbure, *n'existent pas pour une valeur arbitraire de cette courbure*, comme nous le verrons au numéro suivant.

3. Congruences telles qu'une réduction des rayons dans un rapport constant conserve la courbure. — Considérons l'expression (5) de la courbure donnée au numéro **1**, et écrivons-la sous la forme

$$K = 1 - A(\rho), \tag{5'}$$

après avoir posé

$$A(\rho) = \frac{4\rho^2}{(\Delta\rho - 2\rho)^2}[\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho + k(\Delta\rho - 2\rho) + 1].$$

Multiplier le rayon R par un nombre constant revient à multiplier $\rho\,[R^2 = 2\rho]$ par un nombre constant. Pour qu'une congruence jouisse de la propriété indiquée, il faut et il suffit que si l'on remplace dans l'expression de la courbure ρ par $n\rho\,[n = \text{const. arbitraire}]$, K reste inchangé: c'est-à-dire, en désignant par $A(n\rho)$ la valeur prise par $A(\rho)$ lorsqu'on remplace ρ par $n\rho$, que l'expression $A(n\rho)$ *ne dépende pas de n*.

En remarquant que remplacer ρ par $n\rho$ revient à multiplier $\Delta_2\rho$

par n, $\Delta\rho$ et $\Delta_{22}\rho$ par n^2, on a

$$\mathrm{A}(n\rho) = \frac{4\rho^2[\Delta_{22}\rho + k\Delta\rho]\,n^2 - 4\rho^2[\Delta_2\rho + 2k\rho]\,n + 4\rho^2}{(\Delta\rho)^2 n^2 - 4\rho\Delta\rho n + 4\rho^2}.$$

Pour que $\mathrm{A}(n\rho)$ ne dépende pas de n, il faut et il suffit que les polynomes en n figurant au numérateur et au dénominateur de l'expression précédente soient proportionnels ; c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{4\rho^2(\Delta_{22}\rho + k\Delta\rho)}{(\Delta\rho)^2} = \frac{\rho[\Delta_2\rho + 2k\rho]}{\Delta\rho} = 1,$$

soit

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho(\Delta_2\,\rho + 2k\rho) - \Delta\rho \quad = 0,\\ &4\rho^2(\Delta_{22}\rho + k\Delta\rho) - (\Delta\rho)^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Si les conditions (10) sont remplies, la valeur fixe de $\mathrm{A}(n\rho)$ est 1, et l'on a en particulier $\mathrm{A}(\rho) = 1$. L'expression (5') de la courbure de la congruence montre alors que $\mathrm{K} = 0$.

D'où ce résultat :

Une condition nécessaire pour qu'une congruence de sphères conserve sa courbure, lorsqu'on réduit les rayons de toutes les sphères dans un même rapport, est que la courbure de la congruence soit nulle.

La condition obtenue n'est pas suffisante. Les congruences de courbure nulle jouissant de la propriété indiquée sont définies par le système (10), qui montre, en particulier, que la déférente d'une congruence répondant à la question ne saurait être choisie arbitrairement.

Nous allons intégrer complètement le système (10), et déterminer ainsi, par les ds^2 de leurs déférentes et par les rayons des sphères centrées aux différents points de ces dernières, toutes les congruences dont la courbure (nécessairement nulle) se conserve lorsque, sans changer les déférentes, on multiplie les rayons des sphères par un nombre constant arbitraire.

Soient (S) la déférente d'une congruence répondant à la question, $\mathrm{R}(u, v)$ le rayon de la sphère centrée au point (u, v). Supposons (S) rapportée à ses lignes de longueur nulle ; son ds^2 aura la forme

$$ds^2 = 2\mathrm{F}\,du\,dv,$$

et l'on a dans ces conditions

$$k = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v},$$

$$\Delta\rho = \frac{2}{F}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v},$$

$$\Delta_2\rho = \frac{2}{F}\frac{\partial^2\rho}{\partial u \partial v},$$

$$\Delta_{22}\rho = -\frac{1}{F^2}\left[\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u \partial v}\right)^2\right].$$

Le système (10) s'écrit

$$(10')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v},\\ &\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)\\ &\qquad - \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u \partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \log F}{\partial u \partial v}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v} + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

La première équation donne immédiatement

$$F = \rho UV \qquad [U = f(u),\quad V = f(v)].$$

En changeant les paramètres u, v, on peut supposer $U = V = 1$; on aura alors

$$F = \rho,$$

et la deuxième équation (10′) s'écrira

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial v^2} - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial u \partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v}\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\frac{\partial \log\rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial \log\rho}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial \log\rho}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

Si l'on tient compte de ce que

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log\rho}{\partial u}\frac{\partial \log\rho}{\partial v},$$

et si l'on pose

$$\rho = e^z, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = t, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = s,$$

(11) s'écrit finalement

$$rt - s^2 = 0.$$

La fonction $z(u, z)$ a, comme l'on voit, une signification géométrique très simple : elle représente la cote d'un point décrivant une surface développable arbitraire rapportée aux axes rectangulaires Ou, Ov, Oz. Ainsi :

Les congruences de sphères conservant leur courbure lorsque, sans changer la déférente, on réduit les rayons dans un rapport constant arbitraire, sont celles dont les déférentes ont pour élément linéaire

$$ds^2 = 2e^z du\, dv,$$

où, en axes rectangulaires $(Ouvz)$, $z = z(u, v)$ *représente une surface développable arbitraire.*

Le rayon $R = \sqrt{2\rho}$ de la sphère centrée au point (u, v) a pour expression

$$R = ae^{\frac{z}{2}} \qquad [a = \text{const. arbitraire}].$$

Les congruences à déférentes applicables sur les surfaces de révolution, étudiées au n° **2**, s'obtiennent en prenant

$$z = f(u + v).$$

4. Recherche complète des congruences de courbure constante dont les sphères sont tangentes a une droite fixe. — Nous commencerons par la recherche des congruences de courbure nulle.

Prenons la droite fixe comme axe Oz d'un système de coordonnées rectangulaires $(Oxyz)$, et supposons la déférente (S) rapportée à un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

Son équation aura la forme $\rho = \rho(\theta, z)$ [nous excluons le cas où (S) serait un conoïde droit, qui n'apporte d'ailleurs aucun résultat nouveau], et les coordonnées cartésiennes ordinaires de l'un quelconque de ses points seront

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z.$$

Le ds^2 de (S) est

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + dz^2.$$

L'élément angulaire de la congruence des sphères centrées sur (S)

et tangentes à Oz est

$$(12) \qquad d\varphi^2 = \frac{\rho^2 d\theta^2 + dz^2}{\rho^2} = d\theta^2 + \frac{dz^2}{\rho^2}.$$

La courbure de cet élément angulaire sera nulle si l'on a

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial\theta^2} =$$

soit

$$(13) \qquad \frac{1}{\rho} = Z\theta + Z_1,$$

Z et Z_1 étant deux fonctions arbitraires de z.

(13) est l'équation générale des déférentes des congruences cherchées. On voit que l'on obtient ces déférentes, en soumettant une spirale hyperbolique, dont le pôle ω est sur Oz et dont le plan est perpendiculaire à Oz, à une translation parallèle à Oz cependant que la courbe subit une rotation et une homothétie arbitraires de centre commun ω.

Si $Z = 0$ on retrouve les congruences à déférente de révolution.

Nous pouvons énoncer le résultat général suivant :

La classe complète des congruences de sphères de courbure nulle, dont les sphères, par une déformation convenable de la déférente peuvent être amenées à être tangentes à une droite fixe, est constituée par les congruences déformées de celles dont les déférentes sont engendrées par une spirale hyperbolique dont le pôle ω décrit une droite fixe Δ (perpendiculaire au plan de la courbe), la courbe subissant d'autre part une rotation et une homothétie arbitrairement variables de centre commun ω; les rayons des sphères centrées sur une même déférente sont les distances des différents points de cette déférente à la droite Δ.

On peut dire, si l'on veut, que les déférentes des congruences qui viennent d'être définies s'obtiennent, en partant d'une surface de Peterson admettant une spirale hyperbolique pour ligne de niveau et un profil méridien arbitraire, et en faisant tourner chaque ligne de niveau autour de l'axe d'un angle arbitraire, variable d'une ligne à l'autre.

Congruences de courbure constante. — La courbure de l'élément angulaire (12) est constante si l'on a

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial\theta^2} = -\frac{K}{\rho}, \qquad (K = \text{const.}).$$

Si la courbure est positive $\left(K = \frac{1}{a^2}\right)$, l'intégrale générale de l'équation (14) est

$$(15)\qquad \frac{1}{\rho} = Z\cos\left(\frac{\theta}{a}\right) + Z_1 \sin\left(\frac{\theta}{a}\right);$$

si la courbure est négative $\left(K = -\frac{1}{a^2}\right)$, on a

$$(16)\qquad \frac{1}{\rho} = Z\cosh\left(\frac{\theta}{a}\right) + Z_1 \sinh\left(\frac{\theta}{a}\right),$$

Z et Z_1 étant, dans chaque cas, des fonctions arbitraires de z. (15) et (16) sont les équations, en coordonnées cylindriques, des déférentes des congruences de courbure constante formées de sphères tangentes à Oz.

Comme dans le cas où la courbure est nulle, on peut déduire les déférentes précédentes de types déterminés de surfaces de Peterson.

Lorsque la courbure est positive, par exemple, on peut écrire (15) sous la forme

$$(15')\qquad \rho = \frac{Z}{\cos\left[\left(\frac{\theta}{a}\right) + Z_1\right]},$$

et l'on voit que les déférentes s'obtiennent en considérant une surface de Peterson admettant pour ligne de niveau la courbe $\rho = \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{a}\right)}$ et un profil méridien arbitraire, puis en soumettant chaque ligne de niveau à une rotation arbitraire variable d'une ligne à l'autre.

Si la courbure est égale à $+1$ ($a = 1$), (15') représente la surface réglée la plus générale à plan directeur (Oxy), de sorte que :

Les congruences de sphères de courbure $+1$, *tangentes à une droite* *fixe Δ, sont celles qui admettent pour déférentes les surfaces réglées à plan directeur perpendiculaire à Δ.*

Cette dernière remarque conduit immédiatement à la résolution du problème de déformation suivant.

Quelles sont les congruences de sphères susceptibles de deux déformations distinctes de la déférente, la première après laquelle toutes les sphères passent par un point fixe, la deuxième après laquelle toutes les sphères sont tangentes à une droite fixe?

La première des deux conditions imposées à la congruence exige que la courbure soit égale à $+1$. Il résulte alors de l'étude qui précède que la deuxième condition exige que, pour une déformation déterminée de la déférente, celle-ci se transforme en une surface réglée à plan directeur, les sphères venant se placer tangentiellement à une même droite quelconque perpendiculaire au plan directeur.

Ainsi :

Les congruences susceptibles de deux déformations distinctes après lesquelles les sphères passent par un point fixe ou sont tangentes à une droite fixe, ont pour déférentes les surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur. Les rayons des sphères d'une même congruence sont les distances des différents points de la surface réglée correspondant à une perpendiculaire quelconque au plan directeur.