JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. HOSTINSKÝ

Sur une classe d'équations fonctionnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 16, nº 1-4 (1937), p. 267-284.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1937_9_16_1-4_267_0>

Sur une classe d'équations fonctionnelles;

PAR B. HOSTINSKÝ.

Brno (Tchécoslovaquie.)

INTRODUCTION. — Volterra a donné en 1914 l'exemple d'une fonction $V(x, y, \lambda)$ telle que $V(x, y, \lambda+\mu)$ s'exprime au moyen de $V(x, y, \lambda)$ et de $V(x, y, \mu)$ par des multiplications, additions et une intégration; il dit que $V(x, y, \lambda)$ admet un théorème d'addition intégral. Nous nous proposons ici d'étudier des équations fonctionnelles qui donnent l'expression des théorèmes d'addition plus généraux et de montrer comment elles peuvent être résolues; nous allons construire des fonctions qui admettent ce théorème d'addition plus général et qui dépendent d'une fonction arbitraire de trois variables. Une équation fonctionnelle étudiée par Hadamard en 1903 rentre aussi dans ce type d'équations.

Nous commencerons par rappeler quelques propriétés d'un système d'équations fonctionnelles plus simples qui se rattache à un système différentiel linéaire (nº 1 — 4). Les formules relatives à ces équations fonctionnelles simples conduisent aux résultats plus généraux que nous cherchons, si l'on remplace certaines sommes par des intégrales.

1. SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE. — Soit $\delta_{ik}=1$, si $i=k$, et $\delta_{ik}=0$, si $i\neq k$ (pour $i, k=1, 2, 3, \ldots$) et considérons le système différentiel linéaire

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)x_k, \quad i=1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

où $a_{ik}(t)$ sont fonctions continues données. Soient

$$\Phi_{1k}(s, t), \quad \Phi_{2k}(s, t), \quad \ldots, \quad \Phi_{nk}(s, t),$$

n fonctions qui satisfont à (1) si l'on y pose $x_i = \Phi_{ik}(s, t)$ et telle que l'on ait

$$\Phi_{ik}(s, s) = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

En prenant successivement $k = 1, 2, \ldots, n$, on obtient ainsi n^2 fonctions

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Phi_{11}(s, t) & \Phi_{12}(s, t), & \ldots, & \Phi_{1n}(s, t), \\ \Phi_{21}(s, t) & \Phi_{22}(s, t), & \ldots, & \Phi_{2n}(s, t), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{n1}(s, t) & \Phi_{n2}(s, t), & \ldots. & \Phi_{nn}(s, t), \end{array} \right. \tag{3}$$

qui forment un système fondamental d'intégrales de (1). Les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne du tableau (3) donnent les valeurs des fonctions x_1, $x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont à (1) et qui se réduisent pour $t = s$ à zéro sauf x_k qui devient égale à 1 pour $t = s$.

Intégrons les deux membres de (1) par rapport à t entre les limites s et t. En tenant compte des notations que nous venons d'introduire, nous trouvons que le système (1) peut être remplacé par

$$\Phi_{ij}(s, t) = \delta_{ij} + \int_s^t \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(u)\, \Phi_{kj}(s, u) \right] du, \tag{4}$$
$$i, j = 1, 2, \ldots n.$$

Supposons que les fonctions $\Phi_{ij}(s, t)$, qui satisfont à ce système d'équations intégrales (4), soient dérivables par rapport à t; alors le problème de trouver le système fondamental de (1) qui satisfait aux conditions initiales (2) sera équivalent à la résolution de (4).

2. Résolution du système différentiel au moyen de séries. — La méthode d'approximations successives permet de calculer le système fondamental (3). La forme (4) des équations est commode pour faire le calcul. Supposons que δ_{ik} soit la première valeur approchée de $\Phi_{ik}(s, t)$. En remplaçant les Φ_{kj} dans le second membre de (4)

par δ_{kj}, on trouve

$$\delta_{ij}+\int_s^t a_{ij}(u)\,du$$

comme seconde valeur approchée de $\Phi_{ij}(s, t)$. Introduisons cette expression à la place de Φ dans le second membre de (4); nous obtenons ainsi une troisième valeur approchée, et ainsi de suite. La $m^{\text{ième}}$ valeur approchée de $\Phi_{ik}(s, t)$ apparaît comme une expression à m termes, le $r^{\text{ième}}$ terme étant une intégrale r-uple. L'expression exacte de $\Phi_{ik}(s, t)$ sera donnée par la série infinie suivante

$$(5)\qquad \delta_{ik}+\int_s^t a_{ik}(u)\,du+\sum_{m=2}^{\infty}\iint_{D_m}\cdots$$
$$\times\int\left[\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\cdots\sum_{\lambda=1}^{n}a_{i\alpha}(u_m)\,a_{\alpha\beta}(u_{m-1})\ldots a_{\lambda k}(u_1)\right]du_1\,du_2\ldots du_m,$$

où il faut sommer, dans le $m^{\text{ième}}$ terme, par rapport à $m-1$ indices $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ et où le domaine d'intégration D_m est défini par les inégalités (¹) suivantes :

$$s<u_1<u_2<\ldots\qquad <u_m<t.$$

La série (5) converge absolument et uniformément par rapport à s et à t, ce qui se démontre en observant que $|a_{ik}(u)|<M$, M étant une constante. Les équations (4) sont satisfaites si l'on y remplace les Φ_{ik} par les séries (5).

Introduisons encore le système différentiel

$$(1\ bis)\qquad \frac{dy_i}{dt}=\sum_{\kappa=1}^{n}a_{ki}(t)\,y_k,\qquad i=1, 2\ldots, n,$$

obtenu en remplaçant a_{ik} dans (1) par a_{ki}.

Soient

$$\varphi_{k1}(s, t),\quad \varphi_{k2}(s, t),\quad \ldots,\quad \varphi_{kn}(s, t),$$

(¹) Ces inégalités (ainsi que toutes les inégalités analogues dans la suite) peuvent être remplacées par les relations avec le signe d'égalité : $s\leqq u_1\leqq u_2\leqq\ldots$, car il s'agit partout d'un domaine d'intégration, la fonction à intégrer étant continue.

n fonctions telles que les équations (1 *bis*) soient vérifiées pour $y_t = \varphi_{ki}(s, t)$, et que l'on ait

$$(2\ bis) \qquad \varphi_{ik}(s, s) = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Ces n^2 fonctions

$$(3\ bis) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \varphi_{11}(s, t), & \varphi_{12}(s, t), & \ldots, & \varphi_{1n}(s, t), \\ \varphi_{21}(s, t), & \varphi_{22}(s, t), & \ldots, & \varphi_{2n}(s, t), \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \varphi_{n1}(s, t), & \varphi_{n2}(s, t), & \ldots, & \varphi_{nn}(s, t), \end{array} \right.$$

forment alors un système fondamental d'intégrales de (1 *bis*). Les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne du tableau (3 *bis*) donnent les valeurs des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui satisfont à (1 *bis*) ou au système suivant d'équations intégrales, équivalent à (1 *bis*) avec les conditions (2 *bis*)

$$(4\ bis) \qquad \Phi_{ik}(s, t) = \delta_{ik} + \int_s^t \left[\sum_{j=1}^n a_{ji}(u) \varphi_{kj}(s, u) \right] du.$$

L'expression de $\varphi_{ik}(s, t)$ s'obtient par la même méthode que nous avons employée pour calculer $\Phi_{ik}(s, t)$; on trouve que $\varphi_{ik}(s, t)$ est égale à la somme de la série infinie

$$(5\ bis) \qquad \delta_{ik} + \int_s^t a_{ik}(u)\, du + \sum_{m=2}^{\infty} \iint_{D_m} \cdots$$
$$\times \int \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \cdots \sum_{\lambda=1}^n a_{i\alpha}(u_1) a_{\alpha\beta}(u_2) \ldots a_{\lambda k}(u_m) \right] du_1\, du_2 \ldots du_m.$$

Considérons *le cas particulier où les fonctions* $a_{ik}(u)$ *sont constantes*. Les formules (5) et (5 *bis*) montrent qu'alors

$$\varphi_{ik}(s, t) = \Phi_{ik}(s, t) = \delta_{ik} + a_{ik}(t - s)$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \left[\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \cdots \sum_{\lambda=1}^n a_{i\alpha} a_{\alpha\beta} \ldots a_{\lambda k} \right] \frac{(t - s)^m}{m!}.$$

Les deux systèmes différentiels à coefficients constants

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad \text{et} \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ki} y_k$$

admettent donc chacun un système fondamental d'intégrales qui se déduisent d'un même tableau formé par les n^2 fonctions $\varphi_{ik}(s, t)$. Pour avoir une solution $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du premier système différentiel, il faut prendre les éléments du tableau qui figurent dans une même colonne; pour avoir une solution $y_1, y_2, \ldots, y_n$ du second système différentiel, il faut prendre les éléments d'une même ligne. On a, de plus, $\varphi_{ik}(s, s) = \delta_{ik}$.

3. Intégrale d'une substitution. — Revenons au cas général où les $a_{ik}(t)$ sont fonctions continues de t. Suivant Volterra l'intégration du système (1) ou (1 *bis*) peut être regardée comme *intégration d'une substitution*.

Les valeurs initiales $x_i(s)$ que prend une solution de (1) pour $t = s$ sont liées à celles qu'elle prend pour une autre valeur de t par la substitution suivante que nous désignerons par S

$$\text{(S)} \qquad x_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ik}(s, t)\, x_k(s), \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

En effet, d'après les définitions des quantités $\Phi_{ik}(s, t)$, les seconds membres des formules (S) satisfont aux équations (1) si on les y introduit à la place des x_i; si $t = s$, la substitution S se réduit à la substitution identique, comme le montrent les conditions (2). Convenons de désigner par $\{\alpha_{ik}\}$ la substitution homogène à n variables dont α_{ik} sont les coefficients. La substitution S sera alors représentée par $\{\Phi_{ik}(s, t)\}$.

Divisons maintenant l'intervalle (s, t) en m parties $h_1, h_2, \ldots, h_m$ (à partir de s; $s < t$), et soit u_ν un point quelconque de h_ν. Désignons par S_ν la substitution $\{\delta_{ik} + h_\nu a_{ik}(u_\nu)\}$. Elle a pour effet d'augmenter $x_i(u_\nu)$ de la quantité $h_\nu \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(u_\nu)\, x_k(u_\nu)$, infiniment petite si h_ν est infiniment petit; ce qui exprime les relations entre les x_i établies par le système différentiel (1) (où il faut écrire h_ν au lieu de dt). Effectuons successivement les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_m$. La substitution composée ainsi obtenue $S_m S_{m-1} \ldots S_1$ tend, si m augmente indéfiniment et si tous les h_ν tendent vers zéro, vers une substitution limite qui n'est autre chose que la substitution S. Les coefficients de la substitution $S_m S_{m-1} \ldots S_1$ tendent vers les quantités $\Phi_{ik}(s, t)$ données par la série (5)([1]). Volterra appelle cette substitution limite *intégrale gauche* de la substitution $\{a_{ik}(u)\}$ prise par rapport à u de s à t.

Supposons maintenant que l'on opère les substitutions S_ν en ordre inverse : d'abord S_m, puis $S_{m-1}, \ldots$ et enfin S_1. La substitution ainsi composée $S_1 S_2 \ldots S_m$ tend vers une substitution limite S', si m augmente indéfiniment et si tous les h_ν tendent vers zéro. S' est suivant Volterra *intégrale droite* de la substitution $\{a_{ik}(u)\}$. Il en résulte que le tableau (3 *bis*) de coefficients de l'intégrale droite donne les intégrales du système différentiel (1 *bis*).

Les séries (5) et (5 *bis*) définissent donc les coefficients de l'intégrale gauche et de l'intégrale droite de la substitution $\{a_{ik}\}$.

4. Équations fonctionnelles attachées aux systèmes différentiels linéaires. — Soient s, u et t trois valeurs de la variable indépendante, $s < u < t$. Il résulte immédiatement de la définition de l'intégrale gauche que la substitution $\{\Phi_{ik}(s, t)\}$ peut être regardée comme composée de $\{\Phi_{ik}(s, u)\}$ et de $\{\Phi_{ik}(u, t)\}$. La règle connue qui donne les éléments (coefficients) de la substitution composée en fonction de ceux des substitutions composantes montre que

$$\Phi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_{ij}(u, t)\, \Phi_{jk}(s, u). \tag{6}$$

De même, la définition de l'intégrale droite montre que la substitution $\{\varphi_{ik}(s, t)\}$ est composée de $\{\varphi_{ik}(u, t)\}$ et de $\{\varphi_{ik}(s, u)\}$, donc

$$\varphi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(s, u)\, \varphi_{jk}(u, t), \tag{6 bis}$$

$$i, k = 1, 2 \ldots n.$$

Nous cherchons à résoudre les systèmes d'équations fonctionnelles

([1]) On peut calculer les $\Phi_{ik}(s, t)$ directement comme coefficients de la substitution limite. Voir le calcul analogue pour les $\varphi_{ik}(s, t)$ dans mon travail sur une équation fonctionnelle de la Théorie des Probabilités (*Publications de la Faculté des Sciences de Brno*, 1932, n° 156).

(6) et (6 *bis*), c'est-à-dire nous cherchons systèmes de n^2 fonctions $\Phi_{ik}(s, t)$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ qui satisfont à (6) ou systèmes de n^2 fonctions $\varphi_{ik}(s, t)$ qui satisfont à (6 *bis*) avec les conditions

$$\varphi_{ik}(s, s) = \delta_{ik}, \qquad \Phi_{ik}(s, s) = \delta_{ik}.$$

Une première méthode de solution est donnée par les formules précédentes. Quelles que soient les fonctions continues données $a_{ik}(u)$, les séries (5) satisfont à (6) et les séries (5 *bis*) satisfont à (6 *bis*). On peut démontrer que ces séries donnent la solution pour u, s, t quelconques (et non seulement pour $s < u < t$), à condition de définir convenablement le terme général de l'une et de l'autre série pour u, s, t quelconques. Nous donnerons plus tard (*voir* n° 6) la démonstration d'un résultat tout à fait analogue de celui que nous venons d'énoncer sans démonstration.

Fréchet [1] a remarqué que l'on obtient solutions de (6 *bis*) sous une forme très simple. La formule de Fréchet s'étend très facilement à l'équation (6), et l'on arrive ainsi au résultat suivant : si $b_{ik}(u)$ $(i, k = 1, 2 \ldots n)$ sont n^2 fonctions continues dont le déterminant D est différent de zéro dans l'intervalle $s \leqq u \leqq t$, et si $B_{ik}(u)$ est le mineur qui dans D correspond à $b_{ik}(u)$ divisé par D, les équations (6) admettent la solution

$$\Phi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(s)\, B_{ij}(t),$$

tandis que les équations (6 *bis*) sont satisfaites par

$$\varphi_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(s)\, B_{kj}(t).$$

Fréchet a démontré que la dernière formule donne la solution continue la plus générale de (6 *bis*).

Remarque. — Si nous posons

$$\Psi_{ik}(s, t) = \Phi_{ik}(s, t) - \delta_{ik}, \qquad \psi_{ik}(s, t) = \varphi_{ik}(s, t) - \delta_{ik},$$

---

[1] M. Fréchet, *Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités « en chaine »* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. **60**, 1932, p. 242; t. **61**, 1933, p. 182).

l'équation (6) sera remplacée par

$$\Psi_{ik}(s,t)=\Psi_{ik}(u,t)+\Psi_{ik}(s,u)+\sum_{j=1}^{n}\Psi_{ij}(u,t)\Psi_{jk}(s,u),$$

et (6 *bis*) par

$$\psi_{ik}(s,t)=\psi_{ik}(s,u)+\psi_{ik}(u,t)+\sum_{j=1}^{n}\psi_{ij}(s,u)\psi_{jk}(u,t).$$

Ces fonctions Ψ et ψ sont définies par les séries (5) ou (5 *bis*), où il faut toujours supprimer le terme δ_{ik}; nous avons $\Psi_{ik}(s,s)=\psi_{ik}(s,s)=0$.

5. Équations intégrodifférentielles linéaires. — Soit $K(x,y,u)$ une fonction continue donnée dans le domaine

$$a\leqq x\leqq b,\qquad a\leqq y\leqq b,\qquad s\leqq u\leqq t,$$

et considérons l'équation intégrodifférentielle

$$\frac{\partial\Psi(x,y,s,u)}{\partial u}=K(x,y,u)+\int_a^b K(x,z,u)\Psi(z,y,s,u)\,dz, \tag{7}$$

avec la condition que la fonction inconnue $\Psi(x,y,s,u)$ soit égale à zéro pour $u=s$. Cette fonction s'exprime au moyen d'une série qui est analogue de la série (5) sans le terme δ_{ik}; il faut remplacer $a_{ik}(u)$ par $K(x,y,u)$ et introduire des intégrations par rapport aux variables x, y au lieu des sommations par rapport à i et k. On arrive ainsi à la série, nulle pour $t=s$,

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\Psi(x,y,s,t)\\ &=\int_s^t K(x,y,u)\,du+\sum_{m=2}^{\infty}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b\int\int_{D_m}\cdots\int K(x,z_1,u_m),\\ &\qquad\times K(z_1,z_2,u_{m-1})\dots K(z_{m-1},y,u_1)\,du_1\,du_2\dots du_m\,dz_1\,dz_2\dots dz_{m-1},\end{aligned}$$

et l'on démontre aisément qu'elle satisfait à (7).

De même l'équation

$$\frac{\partial\psi(x,y,s,u)}{\partial u}=K(x,y,u)+\int_a^b\psi(x,z,s,u)K(z,y,u)\,dz \tag{7 bis}$$

admet la solution suivante, nulle pour $t = s$,

$$(8\ bis)\quad \psi(x, y, s, t) = \int_s^t \mathrm{K}(x, y, u)\,du$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \int\int_{\mathrm{D}_m} \cdots$$
$$\times \int \mathrm{K}(x, z_1, u_1)\,\mathrm{K}(z_1, z_2, u_2)\ldots$$
$$\times\, \mathrm{K}(z_{m-1}, y, u_m)\,du_1\,du_2\ldots du_m\,dz_1\,dz_2\ldots dz_{m-1},$$

série analogue de (5 *bis*).

Supposons qu'en particulier *la fonction* $\mathrm{K}(x, y, u)$ *soit indépendante de* u. Dans ce cas la série (8) est identiquement égale à (8 *bis*); par conséquent les équations intégrodifférentielles

$$\frac{\partial \Psi(x, y, s, u)}{\partial u} = \mathrm{K}(x, y) + \int_a \mathrm{K}(x, z)\,\Psi(z, y, s, u)\,dz$$

et

$$\frac{\partial \psi(x, y, s, u)}{\partial u} = \mathrm{K}(x, y) + \int_a^b \psi(x, z, s, u)\,\mathrm{K}(z, y)\,dz$$

admettent la solution commune

$$\Psi(x, y, s, u) = \psi(x, y, s, u)$$
$$= \mathrm{K}(x, y)\,(t-s) + \sum_{m=2}^{\infty} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{K}(x, z_1)\,\mathrm{K}(z_1, z_2)\ldots$$
$$\times\, \mathrm{K}(z_{m-1}, y)\,dz_1\,dz_2\ldots dz_{m-1}\,\frac{(t-s)^m}{m\,!}$$

qui ne dépend que de x, y et de la différence $t - s$.

6. Équations fonctionnelles ou théorèmes d'addition; solution au moyen des séries. — La fonction $\Psi(x, y, s, t)$ définie par la série (8) satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(9)\qquad \Psi(x, y, s, t) = \Psi(x, y, s, u) + \Psi(x, y, u, t)$$
$$+ \int^b \Psi(x, z, u, t)\,\Psi(z, y, s, u)\,dz,$$

et la fonction $\psi(x, y, s, t)$ définie par la série (8 *bis*) satisfait à l'équation

$$\text{(9 bis)} \qquad \psi(x, y, s, t) = \psi(x, y, s, u) + \psi(x, y, u, t) + \int_a^b \psi(x, z, s, u)\, \psi(z, y, u, t)\, dz,$$

quelles que soient les valeurs de s, u et de t.

Pour démontrer ce théorème, il faut d'abord définir la valeur de $\Psi(x, y, s, t)$ [et de $\psi(x, y, s, t)$] pour $s \geqq t$. Nous avons donné la définition pour $s < t$ au moyen de la série (8) que nous écrirons sous la forme abrégée suivante

$$\Psi(x, y, s, t) = \int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{m=2}^{\infty} \int_s^t \int_s^{u_m} \int_s^{u_{m-1}} \cdots \int_s^{u_2} F(u_1, u_2 \ldots u_m)\, du_1\, du_2 \ldots du_m$$

ou

$$\Psi(x, y, s, t) = \int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{m=2}^{\infty} \int\int_{D_m} \cdots \int F\, du_1\, du_2 \ldots du_m$$

avec

$$F(u_1, u_2 \ldots u_m) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, z_1, u_m) K(z_1, z_2, u_{m-1}) \ldots \times K(z_{m-1}, y, u_1)\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{m-1}.$$

Si toujours $s < t$, nous conservons la même formule pour exprimer $\Psi(x, y, t, s)$; donc

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, t, s) = & \int_t^s K(x, y, u)\, du \\ & + \sum_{m=2}^{\infty} \int_t^s \int_t^{u_m} \int_t^{u_{m-1}} \cdots \int_t^{u_2} F(u_1, u_2 \ldots u_m)\, du_1\, du_2 \ldots du_m \\ = & -\int_s^t K(x, y, u)\, du + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \\ & \times \int_s^t \int_{u_m}^t \int_{u_{m-1}}^t \cdots \int_{u_2}^t F\, du_1\, du_2 \ldots du_m, \end{aligned}$$

ou

$$(10)\quad \Psi(x, y, t, s) = -\int_s^t K(x, y, u)\,du + \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m \int\int_{E_m}\cdots\int F\,du_1\,du_2\ldots du_m,$$

le domaine d'intégration E_m étant défini par les inégalités

$$s < u_m < u_{m-1} < \ldots < u_1 < t.$$

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soit* $s < u < t$, D_N *le domaine*

$$s < u_1 < u_2 < \ldots < u_N < t$$

et $D(m, N)$ *le domaine*

$$s < u_1 < u_2 < \ldots < u_m < u; \qquad u < u_{m+1} < u_{m+2} < \ldots < u_N < t,$$

où $m = 0, 1, 2\ldots, N$. *Nous avons*

$$D(0, N) + D(1, N) + \ldots + D(N, N) = D_N,$$

où la somme au premier membre représente le domaine obtenu par la réunion de domaines $D(0, N)$, $D(1, N)$, ...

LEMME 2. — *Soit* $s < t$ *et soit* $E(m, N)$ *le domaine*

$$s < u_1 < u_2 < \ldots < u_m < t; \qquad s < u_N < u_{N-1} < \ldots < u_{m+1} < t.$$

Nous avons

$$E(0, N) - E(1, N) + E(2, N) - \ldots + (-1)^N E(N, N) = 0,$$

où le premier membre représente le domaine obtenu par la réunion de $E(0, N)$, $E(2, N)$, $E(4, N)$, ..., *diminué du domaine obtenu par la réunion de* $E(1, N)$, $E(3, N)$, ...

Nous allons maintenant distinguer trois cas :

1° $s < u < t$. La série (8) satisfait alors à l'équation (9); en effet, si nous remplaçons les fonctions Ψ qui figurent au second membre de (9) par les séries correspondantes, ce second membre devient égal à $S_1 + S_2 + \ldots + S_N + \ldots$, où S_N représente l'ensemble de termes qui sont de degré N par rapport à $K(x, y, u)$. Or, on trouve que

$$S_N = \sum_{m=0}^{N} \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \int\int_{D(m,N)} \cdots \int K(x, z_1, u_N) K(z_1, z_2, u_{N-1}) \ldots$$
$$\times K(z_{N-1}, y, u_1)\, du_1\, du_2 \ldots du_N\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{N-1}.$$

La fonction sous les signes d'intégration ne dépend pas de m. S_N est donc une somme de $N+1$ intégrales qui ne diffèrent que par leurs domaines d'intégration. D'après le lemme 1 cette somme pourra être remplacée par une intégrale unique avec le domaine d'intégration D_N. Le second membre de (9) est donc identiquement égal à la série (8).

2° Soit $s = t$. D'après la définition donnée plus haut nous trouvons $\Psi(x, y, s, s) = 0$, donc (9) se réduit à

$$\Psi(x, y, s, u) + \Psi(x, y, u, s) + \int_a^b \Psi(x, z, u, s)\, \Psi(z, y, s, u)\, dz = 0, \tag{11}$$

et il faut démontrer que la série (8) satisfait à (11). Supposons, par exemple, que $s < u$ et remplaçons $\Psi(x, y, s, u)$ et $\Psi(x, y, u, s)$ par les séries de la forme (10).

Le premier membre de (11) devient ainsi égal à

$$T_0 + T_1 + \ldots + T_N + \ldots,$$

où T_N est l'ensemble de termes de degré N en $K(x, y, u)$.

On trouve que

$$T_N = \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b \int\int_{E(N-m,N)} \cdots \int K(x, z_1, u_N) K(z_1, z_2, u_{N-1}) \ldots$$
$$\times K(z_{N-1}, y, u_1)\, du_1\, du_2 \ldots du_N\, dz_1\, dz_2 \ldots dz_{N-1},$$

ce qui est égal à zéro d'après le lemme 2.

3° Soit enfin $s < t < u$. Dans ce cas la formule (9) a lieu si nous y échangeons t avec u, ce qui donne

$$\Psi(x, y, s, t) + \int_a^b \Psi(x, z, t, u) \Psi(z, y, s, t)\, dz = \Psi(x, y, s, u) - \Psi(x, y, t, u).$$

Regardons cette équation comme une équation de Fredholm,

$\Psi(x, y, s, t)$ étant la fonction inconnue (avec y, s, t comme paramètres fixes); le noyau est égal à $\Psi(x, z, t, u)$ (avec t, u comme paramètres).

Le noyau résolvant (fonction de variables x, z) sera égal à $\Psi(x, z, u, t)$, comme le montre l'équation (11). Nous aurons donc, en appliquant la formule connue de Fredholm,

$$\Psi(x, y, s, t) = \Psi(x, y, s, u) - \Psi(x, y, t, u) \\ + \int_a^b \Psi(x, z, u, t)[\Psi(z, y, s, u) - \Psi(z, y, t, u)]\,dz$$

ou, en tenant compte de (11) (où il faut écrire t au lieu de s)

$$\Psi(x, y, s, t) = \Psi(x, y, s, u) + \Psi(x, y, u, t) \\ + \int_a^b \Psi(x, z, u, t)\,\Psi(z, y, s, u)\,dz,$$

ce qui montre que (9) est satisfaite. On démontrerait de la même manière que cette équation a lieu pour $u < s < t$. Elle est donc valable dans tous les cas [1].

Considérons encore le cas particulier où la fonction $K(x, y, u)$ ne dépend pas de u; nous la désignerons alors par $K(x, y)$. Dans ce cas les séries (8) et (8 *bis*) deviennent identiques l'une à l'autre et nous arrivons à ce résultat que, quelle que soit la fonction continue $K(x, y)$, la série

$$(12)\quad \Psi(x, y, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v^m}{m!} \int_a^b \int_a^b \cdots \\ \times \int_a^b K(x, z_1) K(z_1, z_2) \ldots K(z_{m-1}, y)\,dz_1\,dz_2 \ldots dz_{m-1}$$

satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(13)\quad \Psi(x, y, u+v) = \Psi(x, y, u) + \Psi(x, y, v) \\ + \int_a^b \Psi(x, z, u)\,\Psi(z, y, v)\,dz.$$

[1] Le même principe de démonstration sert à démontrer que (8 *bis*) satisfait à l'équation (9 *bis*), et il peut être aussi appliqué aux équations (6) et (6 *bis*) (*voir* n° 4).

On peut vérifier directement ce résultat qui est dû à Volterra [1]; il suffit de substituer les séries de forme (12) à la place des fonctions Ψ dans l'équation (13). La fonction de trois variables $\Psi(x, y, v)$ est égale à la fonction $\Psi(x, y, s, t)$ obtenue antérieurement; dans le cas particulier en question cette fonction dépend seulement de x, de y et de la différence $(t - s)$ que nous nommons v.

En résumé, pour obtenir les fonctions $\Psi(x, y, s, t)$ ou $\psi(x, y, s, t)$ qui admettent le théorème d'addition (9) ou (9 *bis*), il suffit de construire les séries (8) ou (8 *bis*) où $K(x, y, u)$ est une fonction continue arbitraire de trois variables. Si $\Psi(x, y, s, t)$ ou $\psi(x, y, s, t)$ ne dépend pas que de la différence $t - s = v$, les deux équations (9) et (9 a) sont identiques; elles se réduisent à (13) et, pour trouver une solution $\Psi(x, y, v)$ de (13), on n'a qu'à former la série (12) où $K(x, y)$ est une fonction continue de deux variables.

7. Une autre méthode pour trouver les fonctions qui admettent le théorème d'addition donné. — Soit $K(x, y, u)$ une fonction continue de trois variables x, y, u, et représentons par $N(x, y, u)$ le noyau résolvant de Fredholm relatif à $K(x, y, u)$ considéré comme noyau primitif; nous supposons que u conserve dans l'équation de Fredholm une valeur invariable. Nous avons, suivant Fredholm,

$$\begin{aligned} K(x, y, u) + N(x, y, u) &= -\int_a^b K(x, z, u) N(z, y, u)\, dz \\ &= -\int_b^a N(x, z, u) K(z, y, u)\, dz. \end{aligned}$$

La fonction $\Psi(x, y, s, t)$ de quatre variables, définie par la formule

$$\Psi(x, y, s, t) = K(x, y, t) + N(x, y, s) + \int_a^b K(x, z, t) N(z, y, s)\, dz, \tag{14}$$

(1) V. Volterra, *Sulle equazioni alle derivate funzionali* (*Rendiconti dell' Acc. dei Lincei*, 5e série, t. 23, 1o sem. 1914, p. 393). *Voir* aussi Volterra, *Leçons sur les fonctions des lignes*, p. 127, Paris, 1913.

satisfait à l'équation (9), *tandis que la fonction*

$$\psi(x, y, s, t) = \mathrm{K}(x, y, s) + \mathrm{N}(x, y, t) + \int_a^b \mathrm{K}(x, z, s)\mathrm{N}(z, y, t)\,dz \tag{14 bis}$$

satisfait à (9 *bis*). Pour le démontrer il suffit d'introduire ces expressions à la place de Ψ ou de ψ dans (9) ou (9 *bis*), et de tenir compte des relations entre K et N que nous venons de rappeler.

Supposons en particulier que la fonction $\mathrm{K}(x, y, t)$ soit égale à zéro pour $x < y$.

La fonction $\mathrm{N}(x, y, t)$ satisfait aux relations

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x, y, t) + \mathrm{N}(x, y, t) &= -\int_y^x \mathrm{K}(x, z, t)\mathrm{N}(z, y, t)\,dz \\ &= -\int_y^x \mathrm{N}(x, z, t)\mathrm{K}(z, y, t)\,dz,\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{N}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{K}^{(i)}(x, y, t)$$

$$\mathrm{K}^{(1)}(x, y, t) = -\mathrm{K}(x, y, t), \qquad \mathrm{K}^{(i+1)}(x, y, t) = \int_y^x \mathrm{K}^{(i)}(x, z, t)\mathrm{K}^{(1)}(z, y, t)\,dz.$$

8. Solution de l'équation de Hadamard. — Soient ψ et g deux fonctions de quatre variables et supposons que la relation suivante ait lieu entre ψ et g pour des valeurs quelconques de x, x_0 y, y_0 comprises entre des limites données :

$$\begin{aligned} &g(x, y, x_0, y_0) \\ &\quad = e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} a(x, \eta)\,d\eta} + \int_{y_0}^{y} \psi(\eta_1, y_0, x, x_0) \\ &\qquad \times e^{\int_0^{x} b(\xi, \eta_1)\,d\xi - \int_0^{x_0} b(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{\eta_1}^{y} a(x, \eta_2)\,d\eta_2}\,d\eta_1, \end{aligned} \tag{15}$$

$a(x, y)$ et $b(x, y)$ étant deux fonctions continues données.

La formule (15) sert à déterminer la fonction g, si ψ est donnée. Pour avoir inversement ψ, si g est donnée, observons qu'il résulte de (15) [nous admettons que la fonction $g(x, y, x_0, y_0)$ soit dérivable par rapport à y]

(15 *bis*)
$$\frac{\partial g(x, y, x_0, y_0)}{\partial y} - a(x, y)\, g(x, y, x_0, y_0) = \psi(y, y_0, x, x_0)\, e^{\int_0^x b(\xi, y)\, d\xi - \int_0^{x_0} b(\xi, y_0)\, d\xi}.$$

Les formules (15) et (15 *bis*) établissent une correspondance biunivoque entre les fonctions g et ψ; si l'une est connue on sait calculer l'autre.

Posons maintenant

$$\begin{aligned} L(g \mid x, y, x_0, y_0, x_1) &= g(x, y, x_0, y_0) - g(x, y, x_1, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\, d\xi} \\ &- \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_1, \eta)\left[\frac{\partial g(x_1, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta)\, g(x_1, \eta, x_0, y_0)\right] d\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(\psi \mid \eta_1, y_0, x, x_0, x_1) &= \psi(\eta_1, y_0, x, x_0) - \psi(\eta_1, y_0, x, x_1) - \psi(\eta_1, y_0, x_1, x_0) \\ &- \int_{y_0}^{\eta_1} \psi(\eta_1, \eta, x, x_1)\, \psi(\eta, y_0, x_1, x_0)\, d\eta; \end{aligned}$$

nous aurons identiquement

(16)
$$\begin{aligned} L(g \mid x, y, x_0, y_0, x_1) = \int_{y_0}^{y} & \Omega(\psi \mid \eta_1, y_0, x, x_0, x_1) \\ & \times e^{\int_0^x b(\xi, \eta_1)\, d\xi - \int_0^{x_0} b(\xi, y_0)\, d\xi + \int_{\eta_1}^{y} a(x, \eta)\, d\eta}\, d\eta_1. \end{aligned}$$

Pour le montrer, substituons le second membre de (15) à la place de g dans l'expression $L(g)$. Nous obtenons ainsi une forme nouvelle de $L(g)$ qui se réduit à une somme des intégrales simples et d'une intégrale double de la forme

$$\int_{y_0}^{y} \int_{\eta}^{y} f(\eta_1, \eta)\, d\eta_1\, d\eta.$$

Remplaçons cette intégrale par la suivante qui lui est équivalente

$$\int_{y_0}^{y} \int_{y_0}^{\eta_1} f(\eta_1, \eta)\, d\eta\, d\eta_1;$$

nous trouvons que $L(g)$ est égal au second membre de (16).

Pour avoir inversement $\Omega(\psi)$, si $L(g)$ est connu, dérivons $L(g|x, y, x_0, y_0, x_1)$ par rapport à y et formons $\frac{\partial L}{\partial y} - aL$; nous trouvons ainsi

$$(16\ bis) \qquad \frac{\partial L(g|x, y, x_0, y_0, x_1)}{\partial y} - a(x, y)\,L(g|x, y, x_0, y_0, x_1)$$
$$= \Omega(\psi\,|\,y, y_0, x, x_0, x_1)\,e^{\int_0^x b(\xi, y)\,d\xi - \int_0^{x_0} b(\xi, y_0)\,d\xi}.$$

Les formules (16) et (16 *bis*) montrent que si ψ satisfait à l'équation $\Omega(\psi) = 0$, la fonction correspondante g satisfait à $L(g) = 0$ et inversement : si $L(g) = 0$, on a aussi $\Omega(\psi) = 0$. L'équation $L(g) = 0$ a été considérée par Hadamard en 1903 (1); il a montré que la fonction g de Riemann (relative à l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolique) satisfait à $L(g) = 0$. Nous venons de voir comment $L(g) = 0$ se ramène à $\Omega(\psi) = 0$; cette dernière équation ne diffère pas de l'équation (9 *bis*), sauf à ce que les limites d'intégration y_0 et y sont maintenant variables, tandis qu'elles étaient fixes dans (9 *bis*); cela correspond au cas particulier de (9 *bis*) signalé à la fin du n° 7. Pour avoir une solution de l'équation de Hadamard $L(g) = 0$, il suffit donc de substituer le second membre de (14 *bis*) à la place de ψ dans la formule (15) et de tenir compte de ce qu'il faut calculer N au moyen des formules simplifiées données à la fin du n° 7.

En résumé, *l'équation de Hadamard*

$$g(x, y, x_0, y_0) - g(x, y, x_1, y_0)\,e^{\int_{x_0}^{x_1} b(\xi, y_0)\,d\xi}$$
$$= \int_{y_0}^{y} g(x, y, x_1, \eta)\left[\frac{\partial g(x_1, \eta, x_0, y_0)}{\partial \eta} - a(x_1, \eta)\,g(x_1, \eta, x_0, y_0)\right]d\eta$$

(1) J. Hadamard, *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. **31**, 1903, p. 208).

admet comme solution l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
g(x, y, x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} \Bigg[& \mathrm{K}(\eta_1, y_0, x) + \mathrm{N}(\eta_1, y_0, x_0) \\
& + \int_{y_0}^{\eta_1} \mathrm{K}(\eta_1, z, x)\, \mathrm{N}(z, y_0, x_0)\, dz \Bigg] \\
& \times e^{\int_0^x b(\xi, \eta_1)\, d\xi - \int_0^{x_0} b(\xi, y_0)\, d\xi + \int_{\eta_1}^{y} a(x, \eta)\, d\eta}\, d\eta_1 \\
& + e^{\int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} a(x, \eta)\, d\eta},
\end{aligned}
$$

où $\mathrm{K}(x, y, s)$ *est une fonction continue arbitraire de trois variables et*

$$\mathrm{N}(x, y, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{K}^{(i)}(x, y, s)$$

avec

$$\mathrm{K}^{(1)}(x, y, s) = -\mathrm{K}(x, y, s), \qquad \mathrm{K}^{(i+1)}(x, y, s) = \int_{y}^{x} \mathrm{K}^{(i)}(x, z, s)\, \mathrm{K}(z, y, s)\, dz.$$

Hadamard a considéré quelques autres équations qui expriment les théorèmes d'addition; pour résoudre ces équations on pourrait employer la méthode que nous venons d'appliquer dans le cas où le théorème d'addition est exprimé par $\mathrm{L}(g) = 0$.