# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



HENRI MINEUR


# Réduction des systèmes mécaniques à *n* degrés de liberté admettant *n* intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées


*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 15 (1936), p. 385-389.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__385_0>

# *Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées ;*

PAR HENRI MINEUR.

J'expose dans cette Note une conséquence des résultats que j'ai établis dans un travail paru récemment dans le *Journal de l'École Polytechnique* (3^e^ série, 1^er^ cahier, fasc. 2 et 3).

Dans ce dernier travail j'ai étudié les systèmes admettant $n$ intégrales premières uniformes en involution, j'ai montré que, moyennant des hypothèses assez générales, les mouvements de ces systèmes étaient représentables par des séries trigonométriques, et que l'on pouvait écrire leurs conditions de quantification.

En m'appuyant sur les résultats établis dans ce travail du *Journal de l'École Polytechnique*, je montre ici que sous les mêmes conditions, un système admettant $n$ intégrales premières uniformes en involution peut être ramené à un système à variables séparées par un changement de variables canonique et biuniforme.

**1.** Il est bien connu qu'un système mécanique à variables séparées et à $n$ degrés de liberté admet $n$ intégrales premières uniformes en involution.

Je vais établir la réciproque de ce résultat, tout au moins dans un cas très général.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ un système de variables conjuguées et $\mathrm{H}(q, p)$ la fonction d'Hamilton. Je suppose que le problème de mécanique correspondant admet les $n$ intégrales premières en involution

$$(1) \qquad c_i(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les $c_i(q, p)$ étant des fonctions uniformes.

Les hypothèses supplémentaires relatives au système considéré sont les mêmes que celles que j'ai faites dans mon travail du *Journal de l'École Polytechnique*.

Je désigne par $\mathfrak{M}$ la portion de multiplicité de l'espace à $2n$ dimensions définie par les équations (1) sur laquelle le point $q$, $p$ se déplace. Je suppose que tous les points M de $\mathfrak{M}$ sont à distance finie et que deux points quelconques peuvent être joints par un chemin de longueur bornée tracé sur $\mathfrak{M}$.

Je suppose en outre qu'en tout point de $\mathfrak{M}$ on peut extraire du tableau T :

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial q_1} & \frac{\partial c_1}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial c_1}{\partial q_n} & \frac{\partial c_1}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial c_1}{\partial p_n} \\ \frac{\partial c_2}{\partial q_1} & \frac{\partial c_2}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial c_2}{\partial q_n} & \frac{\partial c_2}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial c_2}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial c_n}{\partial q_1} & \frac{\partial c_n}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial c_n}{\partial q_n} & \frac{\partial c_n}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial c_n}{\partial p_n} \end{Vmatrix}$$

au moins un déterminant d'ordre $n$ qui n'est pas nul.

J'ai établi au sujet d'un système satisfaisant aux hypothèses précédentes les résultats suivants :

Soit la fonction

$$V(M) = \int_{M_0}^{M} \sum_{i=1}^{n} p_i \, dq_i,$$

l'intégrale étant prise le long d'un chemin tracé sur $\mathfrak{M}$. Les formules

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} = w_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

définissent les $(q, p)$ en fonction des $(c, w)$. Ces fonctions sont des fonctions uniformes des $w$ admettant $n$ systèmes de périodes.

On peut remplacer $c_1, c_2, \ldots, c_n$ par $n$ nouvelles intégrales premières uniformes en involution $v_1, v_2, \ldots, v_n$ telles que les fonctions $(q, p)$ des variables et $u$ définies par les formules

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial v_i} = u_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admettent comme système de périodes par rapport aux $u_i$ :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0, \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0, \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0, \\ . & . & . & \ldots & ., \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1. \end{matrix}$$

Les $(q, p)$ sont représentables par des séries trigonométriques ordonnées suivant les multiples des $2\pi u_i$.

Je considère l'espace réel E, $m(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ à $n$ dimensions et le parallélogramme de période P dont les sommets sont les points de E dont les coordonnées sont 0 ou 1.

Les formules (2) établissent entre les points M de $\mathfrak{M}$ et les points $m$ de E une correspondance telle qu'à un point $m$ correspond un seul point M et à un point M correspond un seul point $m$ dans P.

La transformation $(q, p) \longleftrightarrow (v, u)$ est canonique.

Le mouvement du système s'obtient en considérant les $v_i$ comme constants et les $u_i$ comme des fonctions linéaires du temps

$$v_i = \gamma_i, \qquad u_i = \nu_i t + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\nu_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_i}$, $\varphi$ désignant l'énergie du système et les $\gamma_i$ et $\varepsilon_i$ $2n$ constantes.

**2.** Par la suite nous supposerons pour simplifier que les $v_i$ qui sont constants au cours du mouvement sont positifs, il serait facile de ramener le cas général à ce cas particulier.

Considérons un espace réel à $2n$ dimensions décrit par le point $N(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, \ldots, P_n)$ et dans cet espace la multiplicité $\mathfrak{N}$ à $n$ dimensions.

$$(n) \qquad P_i^2 + Q_i^2 = \frac{\gamma_i}{\pi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Posons

$$Q_i = \sqrt{\frac{v_i}{\pi}} \sin 2\pi u_i,$$
$$P_i = \sqrt{\frac{v_i}{\pi}} \cos 2\pi u_i.$$

Les formules précédentes établissent une correspondance entre les points N de $\mathfrak{N}$ et les points M de $\mathfrak{M}$.

Cette correspondance est biuniforme sur $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{M}$.

En effet à un point M de $\mathfrak{M}$ correspond un seul point $m$ dans P, donc un seul point de $\mathfrak{N}$, et réciproquement.

La transformation $M \leftrightarrow N$ est canonique puisqu'il en est ainsi de $M \leftrightarrow m$ et de $m \leftrightarrow N$.

On a en effet

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, dQ_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \, du_i + d \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i}{4\pi} \sin 4\pi u_i.$$

La fonction hamiltonienne H ne dépend que de $v_1, v_2, \ldots, v_n$; elle a donc la forme

$$H = f(P_1^2 + Q_1^2, P_2^2 + Q_2^2, \ldots, P_n^2 + Q_n^2). \tag{3}$$

Si l'on prend comme nouvelles variables les $Q_i$, $P_i$, les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{dP_i}{dt} = 2 \frac{\partial f}{\partial (P_i^2 + Q_i^2)} Q_i,$$
$$\frac{dQ_i}{dt} = -2 \frac{\partial f}{\partial (P_i^2 + Q_i^2)} P_i$$

et admettent les mêmes $n$ intégrales premières uniformes en involution que le premier système

$$P_i^2 + Q_i^2 = C_i.$$

Exprimé au moyen des variables $Q_i$, $P_i$, le système est à variables séparées puisque

$$V = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q_i^0}^{Q_i} \sqrt{C_i - Q_i^2} \, dQ_i.$$

Nous avons établi le résultat suivant :

Un système admettant $n$ intégrales premières uniformes en involution et vérifiant les conditions imposées, peut être ramené par un changement de variables canonique et biuniforme à un système admettant pour fonction hamiltonienne la fonction définie par la formule (3); ce dernier système est à variables séparées, et les équations du mouvement s'écrivent

$$P_i = C_i \cos(\nu_i t + \varepsilon_i),$$
$$Q_i = C_i \sin(\nu_i t + \varepsilon_i),$$

où les $C_i$ et les $\varepsilon_i$ sont des constantes et où les $\nu_i$ sont des fonctions des $C_i$.

Les $C_i$ sont des invariants adiabatiques du système.