JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SERGE BERNSTEIN

Sur la convergence de certaines suites de polynômes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 345-358.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__345_0>

Sur la convergence de certaines suites de polynomes ;

PAR SERGE BERNSTEIN.

1. Il est connu que $f(x)$ étant une fonction continue quelconque dans l'intervalle O 1, les polynomes

$$B_n[f(x)] = \sum_0^n f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}, \tag{1}$$

où $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, convergent uniformément vers la fonction $f(x)$ sur tout le segment O 1.

La rapidité de convergence de ces polynomes sur O 1 ne dépend que relativement peu de la nature de la fonction $f(x)$, puisqu'on a

$$\lim_{n=\infty} n\{B_n[f(x)] - f(x)\} = \frac{1}{2} x(1-x) f''(x)$$

en tout point x du segment, où la dérivée seconde est finie et continue (1). Il est d'autant plus remarquable que, comme l'a montré M. Kantorowitsch (2), la suite des polynomes $B_n[f(x)]$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$, lorsque celle-ci est analytique, au moins dans la même région complexe, où a lieu la convergence du

(1) E. VORONOVSKAYA, *Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de S. Bernstein* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S.*, 1932); S. BERNSTEIN, *Complément à l'article de E. Voronovskaya* (*Ibid.*).

(2) J. KANTOROWITSCH, *Sur la convergence de la suite des polynomes de S. Bernstein à l'extérieur de l'intervalle fondamental* (en russe) (*Bull. de l'Acad. des Sc. de l'U. R. S. S.*, 1931, p. 1103-1115).

développement de $f(x)$ en série de polynomes de Tchebycheff, c'est-à-dire à l'intérieur de l'ellipse de régularité E de la fonction $f(x)$, ayant pour foyers les points O et 1. Pour arriver à ce résultat M. Kantorowitsch utilise, d'une part, le développement mentionné de $f(x)$ en série de polynomes de Tchebycheff, et remarque, d'autre part, que d'après un théorème classique, la convergence des polynomes $B_n[f(x)]$ vers $f(x)$ est assurée dans tout domaine D (comprenant une partie finie du segment O1), où les polynomes $B_n[f(x)]$ sont bornés. Il indique lui-même, d'ailleurs, des exemples où le domaine D est encore plus étendu que l'ellipse E.

Je me propose de compléter ici sur certains points l'étude du domaine D, en utilisant la représentation de $B_n[fx)]$ par des séries de puissances ([1]). Cela nous amènera ensuite à envisager des polynomes tels que

$$A_n[f(x)] = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)f^{(k)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n^n}f^{(n)}(0)$$

qui *permettent de faire le prolongement analytique d'une fonction $f(x)$ donnée par son développement de Taylor au delà de son cercle de convergence en tous les points réguliers de sa circonférence.*

2. Démontrons en premier lieu le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Si la fonction*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + \dots + a_k(x-c)^k + \dots$$

admet en un point c du segment O1 *un cercle de convergence* C *de rayon* R *contenant le segment* O1 *et si* $\sum_0^\infty |a_k| R^k \leq M$, *on a aussi sur* C

([1]) Ma Note des *Comptes rendus : Sur le domaine de convergence des polynomes* $B_n f(x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m(1-x)^{n-m}$, où j'emploie une méthode différente, résume une partie des résultats de ce travail et en contient d'autres plus généraux.

(et à son intérieur) $|B_n[f(x)]| \leqq M$ *pour toute valeur entière de* $n \geqq 0$. (Le cercle C appartient donc au domaine D de convergence de $B[f(x)]$.]

Il suffit évidemment de montrer que

$$(2) \qquad |B_n[(x-c)^s]| \leqq R^s,$$

quel que soit le nombre entier s si $|x-c| = R$, en supposant $c \leqq R$ et $1-c \leqq R$.

Or,

$$B_n[(x-c)^s] = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(\frac{m}{n} - c\right)^s x^m (1-x)^{n-m}.$$

Donc, en posant

$$\Phi(b, x) = \left[x e^{\frac{b(1-c)}{n(x-c)}} + (1-x) e^{-\frac{bc}{n(x-c)}}\right]^n = \sum_{0}^{n} C_n^m e^{\frac{(m-nc)b}{n(x-c)}} x^m (1-x)^{n-m},$$

on voit que

$$(x-c)^s \left[\frac{\partial^s \Phi}{\partial b^s}\right]_{b=0} = \sum_{0}^{n} C_n^m \left(\frac{m}{n} - c\right)^s x^m (1-x)^{n-m} = B_n[(x-c)^s].$$

Par conséquent, l'inégalité (2) sera démontrée si l'on aura prouvé que

$$(3) \qquad \left|\frac{\partial^s \Phi}{\partial b^s}\right|_{b=0} \leqq 1.$$

Or,

$$\Phi(b, x) = \left\{1 + \frac{b}{n} + \frac{b^2}{2!\,n^2}\left[\frac{x(1-c)^2 + (1-x)c^2}{(x-c)^2}\right] + \ldots + \frac{b^k}{k!\,n^k}\left[\frac{x(1-c)^k + (1-x)(-c)^k}{(x-c)^k}\right] + \ldots\right\}^n.$$

De plus, je dis qu'on a

$$(4) \qquad |x(1-c)^k + (1-x)(-c)^k| \leqq |x-c|^k = R^k,$$

si $|x-c| \geqq c$ et $|x-c| \geqq 1-c$. En effet, en supposant, pour fixer les idées, que $c \leqq \frac{1}{2}$ et en posant $x - c = u$, nous pouvons mettre (4) sous la forme

$$|(1-c)^k(u+c) + (-c)^k(1-c-u)| \leqq |u|^k,$$

c'est-à-dire

$$(5)\qquad |u[(1-c)^k-(-c)^k]+(1-c)c[(1-c)^{k-1}-(-c)^{k-1}]|\leqq|u|^k.$$

Or, le coefficient de u et le terme libre étant non négatifs dans le membre gauche de (5), celui-ci atteindra son module maximum pour $|u| = \mathrm{R}$ donné, lorsque u sera réel et positif; il suffit donc de vérifier que

$$\mathrm{R}^k-\mathrm{R}[(1-c)^k-(-c)^k]-(1-c)c[(1-c)^{k-1}-(-c)^{k-1}]\geqq 0$$

lorsque $\mathrm{R}\geqq 1-c$. Mais, en remarquant que la dérivée

$$\begin{aligned}k\mathrm{R}^{k-1}-[(1-c)^k-(-c)^k]&\geqq k(1-c)^{k-1}-(1-c)^k+(-c)^k\\ &=(k-1+c)(1-c)^{k-1}+(-c)^k\geqq c[(1-c)^{k-1}-(-c)^{k-1}]\geqq 0\end{aligned}$$

est non négative, nous n'avons qu'à constater que pour $\mathrm{R}=1-c$ on a

$$(1-c)^k-(1-c)[(1-c)^k-(-c)^k]-(1-c)c[(1-c)^{k-1}-(-c)^{k-1}]=0.$$

Par conséquent, la fonction $\Phi(b, x)$ considérée comme série suivant les puissances de b admet comme série majorante

$$\left[1+\frac{b}{n}+\frac{b^2}{2n^2}+\ldots+\frac{b^k}{k!\,n^k}+\ldots\right]^n=\left(e^{\frac{b}{n}}\right)^n=e^b,$$

dont les dérivées successives pour $b=0$ sont égales à 1, d'où résulte l'inégalité (3).

Il résulte en particulier de ce théorème que *si la fonction $f(x)$ possédant au point $\frac{1}{2}$ un cercle de convergence de rayon $\mathrm{R}>\frac{1}{2}$ admet un seul point singulier* A, *il présente sur la frontière* L *du domaine* D *un point anguleux rentrant* (¹) *de* L.

En effet, le domaine D contiendra nécessairement deux cercles C_1 et C_2 passant par A et ayant pour centres respectifs certains points $c_1<\frac{1}{2}$ et $c_2>\frac{1}{2}$ du segment O 1.

Pour la même raison, quelle que soit la fonction $f(x)$, aucun point M régulier sur l'ellipse E de Tchebycheff-Kantorowitsch ne

(¹) Cette conséquence est précisée et généralisée dans la Note citée.

peut appartenir à la frontière L du domaine D, si l'on a

$$\mathrm{MN} \geqq \mathrm{ON} \quad \text{et} \quad \mathrm{MN} \geqq \mathrm{IN},$$

où N est le point d'intersection avec l'axe réel de la normale en M à ellipse E; alors le cercle C de centre N et de rayon un peu supérieur à NM étant intérieur à l'ellipse, sauf le voisinage du point M (et son conjugué) satisfera aux conditions du théorème A. Ce cas se présentera, en particulier, pour tous les points de l'ellipse, lorsque son grand axe est au moins égal à 3.

3. Théorème B. — *Si la fonction $f(x)$ est régulière à l'intérieur de la région bicyclique convexe $S_{\rho\rho_1}$ limitée par la circonférence C de centre O et de rayon ρ, par la circonférence de centre 1 et de rayon ρ_1 et par leurs tangentes extérieures communes, cette région appartient au domaine D pourvu que l'on ait* (1) $2\rho \geqq \rho_1 \geqq \frac{\rho}{2}$.

Pour la démonstration, nous aurons à faire une nouvelle transformation des polynomes $B_n[f(x)]$ et à considérer les polynomes

$$(6) \qquad B_n[(x);\, b] = \sum_{m=0}^{n} f\left(b\,\frac{m}{n}\right) C_n^m \left(\frac{x}{b}\right)^m \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{n-m}$$

relatifs à un segment quelconque Ob; ainsi

$$B_n[f(x);\, 1] = B_n[f(x)].$$

De plus, en posant

$$\begin{aligned} \Delta\,[f(x), h] &= f(x+h) - f(x), \\ \Delta_2[f(x), h] &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

nous écrirons, pour abréger,

$$\Delta_k\left(f(x), \frac{1}{n}\right) = \Delta_k f(x)$$

lorsque $h = \frac{1}{n}$.

(1) Par l'emploi de la méthode indiquée dans la Note, on peut se débarrasser de cette restriction.

Ceci posé, nous aurons

$$(7)\quad \begin{aligned} B_n[f(x)] &= \sum_{m=0}^{n}\left[f(0)+m\Delta f(0)+\frac{m(m-1)}{2!}\Delta_2 f(0)+\ldots\right]C_n^m x^m(1-x)^{n-m} \\ &= f(0)+n\Delta f(0)x+\ldots \\ &\quad +\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\Delta_k f(0)x^k+\ldots+\Delta_n f(0)x^m. \end{aligned}$$

Admettons à présent que la *fonction* $f(x)$ soit analytique et régulière à l'intérieur de la région bicyclique $S_{\rho\rho_1}$, où $\rho_1 \geqq \frac{\rho}{2}$ et $|f(x)| < M$ sur son contour (pour fixer les idées, nous supposons $\rho \geqq \rho_1$). Dans ces conditions, en un point c du segment $O\,1$ on aura

$$|f^{(k)}(c)| < \frac{k!\,M}{\rho_c^k}, \qquad \text{où} \quad \rho_c = \rho\left(1-\frac{c}{2}\right).$$

Donc,

$$|\Delta_k f(0)| \leqq \operatorname*{Max.}_{0\leqq x\leqq \frac{k}{n}}\left|\frac{f^{(k)}(x)}{n^k}\right| < \frac{k!\,M}{\rho^k\left(n-\frac{k}{2}\right)^k}.$$

Par conséquent [d'après (7)],

$$(8)\qquad B_n f(x)| < M\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\left(n-\frac{k}{2}\right)^k}\left|\frac{x}{\rho}\right|^k = M\sum_{k=0}^{n} b_k\left|\frac{x}{\rho}\right|^k.$$

Or,

$$\sqrt[k]{b_k} = \frac{1}{1-\frac{k}{2n}}\sqrt[k]{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)};$$

d'où en posant $\frac{k}{n} = a$ et en faisant croître n indéfiniment, il vient

$$(9)\quad \begin{aligned} \frac{1}{k}\log b_k &= -\log\left(1-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{k}\sum_{1}^{k-1}\log\left(1-\frac{h}{n}\right) \\ &\sim \frac{1}{a}\int_0^a \log(1-x)\,dx - \log\left(1-\frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{(a-1)\log(1-a)-a}{a} - \log\left(1-\frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc, pour $0 \leqq \frac{k}{n} = a \leqq 1$,

$$\lim \sqrt[k]{b_k} = \frac{1-a}{1-\frac{a}{2}} \frac{e^{-1}}{(1-a)^{\frac{1}{a}}} \leqq 1, \tag{10}$$

où le signe d'égalité n'a lieu que pour $a=0$, car l'expression (9) décroît de 0 à $\log 2 - 1$ puisque sa dérivée est

$$\frac{1}{a^2}\log(1-a) + \frac{1}{a} + \frac{1}{2-a} \leqq 0.$$

Ainsi, d'après (8) et (10), $B_n[f(x)]$ reste borné pour $(x) < \rho$.

Donc, en vertu du théorème de Stieltjes, $B_n[f(x)]$ converge vers $f(x)$ à l'intérieur du cercle C de rayon ρ.

4. D'autre part, en effectuant la même transformation sur $B_n[f(x), b]$ nous aurons

$$\begin{aligned}
B_n[f(x), b] &= \sum_0^n f\left(\frac{bm}{n}\right) C_n^m \left(\frac{x}{b}\right)^m \left(1-\frac{x}{b}\right)^{n-m} \\
&= \sum_0^n \left[f(0) + m\,\Delta\left(f(0), \frac{b}{n}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{m(m-1)}{2}\Delta_2 f\left(f(0), \frac{b}{n}\right) + \ldots\right] C_n^m \left(\frac{x}{b}\right)^m \left(1-\frac{x}{b}\right)^{n-m} \\
&= f(0) + n\,\Delta\left(f(0), \frac{b}{n}\right)\frac{x}{b} + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\Delta_k\left(f(0), \frac{b}{n}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^k + \ldots.
\end{aligned} \tag{11}$$

En particulier, si $b = \frac{l}{n}$, où $l \leqq n$ est un nombre entier, nous aurons

$$B_l[f(x); b] = f(0) + l\,\Delta\left(f(0), \frac{1}{n}\right)\frac{x}{b} + \frac{l(l-1)}{2!}\Delta_2\left(f(0), \frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{b^2} + \ldots;$$

donc, en utilisant la notation abrégée $\Delta_k\left(f(x), \frac{1}{n}\right) = \Delta_k f(x)$, nous aurons aussi, pour $b = \frac{l}{n}$,

$$B_l[\Delta_k f(c); b] = \Delta_k f(0) + l\Delta_{k+1} f(0)\frac{c}{b} + \ldots + C_l^h \Delta_{k+h} f(0)\left(\frac{c}{b}\right)^h + \ldots;$$

ainsi en posant $c_k = c\frac{n-k}{n}$, on aura

$$(11\ bis)\qquad B_{n-k}\left(\Delta_k f(c_k); \frac{n-k}{n}\right) = \Delta_k f(0) + (n-k)\Delta_{k+1} f(0)c + \ldots + C_{n-k}^h \Delta_{k+h} f(0) c^h + \ldots.$$

Par conséquent, quel que soit c, on a [d'après (7) et (11 *bis*)]

$$(12)\quad B_n[f(x)] = f(0) + n\Delta f(0)[x - c + c] + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta_2 f(0)[x-c+c]^2 + \ldots$$
$$= B_n[f(c)] + n(x-c)\left[\Delta f(0) + (n-1)\Delta_2 f(0)c + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\Delta_3 f(0)c^2 + \ldots + \ldots\right]$$
$$+ C_n^k (x-c)^k [\Delta_k f(0) + (n-k)\Delta_{k+1} f(0)c + \ldots + C_{n-k}^h \Delta_{k+h} f(0)c^h + \ldots] + \ldots$$
$$= B_n[f(c)] + n(x-c)B_{n-1}\left[\Delta f(c_1); \frac{n-1}{n}\right] + \ldots + C_n^k (x-c)^k B_{n-k}\left[\Delta_k f(c_k); \frac{n-k}{n}\right] + \ldots.$$

Supposons à présent $0 < c < 1$; alors, en tenant compte de

$$B_{n-k}\left(\Delta_k f(x); \frac{n-k}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-k} \Delta_k f\left[\frac{m}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right] C_{n-k}^m \left(\frac{nx}{n-k}\right)^m \left(1 - \frac{nx}{n-k}\right)^{n-k-m},$$

nous voyons que

$$\left|B_{n-k}\left(\Delta_k f(x); \frac{n-k}{n}\right)\right| < \frac{Mk!}{\rho^k} \sum_{m=0}^{n-k} \frac{C_{n-k}^m \left(\frac{nx}{n-k}\right)^m \left(1 - \frac{nx}{n-x}\right)^{n-k-m}}{\left\{n - \frac{1}{2}\left[m + k\left(1 - \frac{m}{n}\right)\right]\right\}^k},$$

car

$$\left|\Delta_k f\left[\frac{m}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right]\right| \leqq \frac{1}{n^k} \operatorname*{Max}_{0 < x \leqq \frac{m}{n} + \frac{k}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)} |f^{(k)}(x)| < \frac{Mk!}{n^k \rho^k \left[1 - \frac{m}{2n} - \frac{k}{2n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)\right]^k}.$$

Donc

$$\left|B_{n-k}\left(\Delta_k f(c_k); \frac{n-k}{n}\right)\right| < \frac{Mk!}{\left[\left(n - \frac{k}{2}\right)\rho\right]^k} \sum_{m=0}^{n-k} C_{n-k}^m \frac{c^m (1-c)^{n-k-m}}{\left[1 - \frac{m}{2n}\left(\frac{n-k}{n - \frac{k}{2}}\right)\right]^k}.$$

Puisque pour k fini et n croissant infiniment le coefficient de $(x-c)^k$ dans (12) tend vers $\frac{f^{(k)}(c)}{k!}$ nous pouvons supposer que $k \to \infty$; dans ces conditions, il est aisé de voir que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[k]{\sum_0^{n-k} C_{n-k}^m \frac{c^m(1-c)^{n-k-m}}{\left[1-\frac{m}{2n}\left(\frac{n-k}{n-\frac{k}{2}}\right)\right]^k}} \leqq \frac{1}{1-\frac{c}{2}}. \tag{13}$$

C'est évident d'abord pour le cas, où $n-k$ est borné, car alors, pour n assez grand, $1-\frac{m}{2n}\left(\frac{n-k}{n-\frac{k}{2}}\right)$ tend vers 1.

Or, en posant $m=(n-k)(c+\varepsilon)$ et $k=an$, on a

$$\begin{aligned} 1-\frac{m}{2n}\left(\frac{n-k}{n-\frac{k}{2}}\right) &= 1-\frac{(c+\varepsilon)(n-k)^2}{n(2n-k)} \\ &= 1-\frac{(c+\varepsilon)(1-a)^2}{2-a} = \left(1-\frac{c}{2}\right)(1-\delta), \end{aligned}$$

où

$$\delta = \frac{\varepsilon(1-a)^2 - ac\left(\frac{3}{2}-a\right)}{\left(1-\frac{c}{2}\right)(2-a)};$$

ainsi $\delta < 0$ pour $\varepsilon < 0$, nous n'avons donc pas à nous préoccuper des termes correspondants; on voit, d'autre part (en calculant le rapport du terme suivant au précédent) que les termes dans la somme (13) vont certainement en décroissant, lorsque $\varepsilon \geqq a(1-a)c(1-c)$. Mais, lorsque $0 < \varepsilon < \frac{c(1-c)}{4}$, on a

$$\begin{aligned} &\log\left[C_{n-k}^m c^m (1-c)^{n-k-m}\right] \\ &< m \log\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{c}} + (n-k-m)\log\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1-c}} < -\frac{5}{8}\,\frac{\varepsilon^2(n-k)}{c(1-c)}. \end{aligned}$$

De plus,

$$-k\log(1-\delta) = k\left(\delta+\frac{\delta^2}{2}+\ldots\right) < \frac{k\delta}{1-\delta_1},$$

où

$$\delta_1 = \frac{(1-a)^2 c(1-c) - 2ac(3-2a)}{2(2-c)(2-a)}.$$

Donc

$$\frac{k\delta}{1-\delta_1} = n \frac{a(1-a)^2\varepsilon - a^2 c\left(\frac{3}{2}-a\right)}{\left(1-\frac{c}{2}\right)(1-a) + ac\left(\frac{3}{2}-a\right) - \frac{(1-a)^2 c(1-c)}{4}}.$$

Il suffit ainsi, pour démontrer (13), de vérifier que

$$\frac{5}{8}\varepsilon^2 \frac{1-a}{c(1-c)} + \frac{a^2 c\left(\frac{3}{2}-a\right) - \varepsilon a(1-a)^2}{\left(1-\frac{c}{2}\right)(2-a) + ac\left(\frac{3}{2}-a\right) - \frac{(1-a)^2 c(1-c)}{4}} > 0,$$

ce qui résulte de l'inégalité

$$\frac{5\left(\frac{3}{2}-a\right)}{2(1-c)} > \frac{(1-a)^3}{2-a-c+ac(2-a) - \frac{(1-a)^2 c^2(1-c)}{4}},$$

qui $\left(\text{à cause de } c(1-c) \leqq \frac{1}{4}\right)$ est une conséquence de

$$5\left(\frac{3}{2}-a\right)\left[2-a-c+ac(2-a) - \frac{c(1-a)^2}{16}\right] > 2(1-c)(1-a)^3.$$

Donc, quel que soit k,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[k]{\frac{\left|B_{n-k}\left[\Delta_k[f(c_k)]; \frac{n-k}{n}\right]\right| \left(n-\frac{k}{2}\right)^k}{k!}} \leqq \frac{1}{\rho\left(1-\frac{c}{2}\right)}.$$

Ainsi, à cause de (10) et (12), $B_n[f(x)]$ reste borné pour

$$|x-c| < \rho\left(1-\frac{c}{2}\right),$$

et, par conséquent, la région bicyclique $S_{\rho\rho_1}$ qui pour $\rho \geqq \rho_1 > \frac{\rho}{2}$ comprend tous les cercles de rayon $\rho\left(1-\frac{c}{2}\right)$ et de centre $c (0 < c < 1)$, appartient au domaine D des polynomes $B_n[f(x)]$.

THÉORÈME B*. — *Si $f(x)$ est régulière dans l'aire commune*

$$\sum_{\rho\rho_1}\left(\frac{\rho}{2} \leqq \rho_1 \leqq 2\rho\right)$$

de deux régions bicycliques $S_{2\rho_1,\rho_1}$ *et* $S_{\rho,2\rho}$ *le domaine* D *contient l'aire.*

Pour le voir, il suffit d'observer que l'on peut décomposer $f(x)$ en une somme de deux fonctions

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

où $f_1(x)$ possède des singularités seulement à l'extérieur de $S_{\rho,2\rho}$ et $f_2(x)$ ne possède de singularités qu'à l'extérieur de $S_{2\rho_1,\rho_1}$.

Remarquons que la région $\Sigma_{\rho\rho_1}$ est limitée par le contour convexe composé de l'arc extérieur de rayon ρ et centre o, de l'arc extérieur de la circonférence de rayon ρ_1 de centre 1, par les deux tangentes menées du point d'abscisse -1 à la première circonférence et par les deux tangentes à la seconde circonférence menée du point $(2,0)$.

Ainsi, pour qu'un point $M(x, y)$ (et son conjugué M') appartienne au domaine D, il suffit, lorsque $0 < x < 1$ que la fonction $f(x)$, soit régulière dans la région $\Sigma_{\rho\rho_1}$ (et sur son contour) ayant des points anguleux en M et M'; dans le cas, où $x \leqq 0$, il suffit que $f(x)$ soit régulière dans la région $S_{\rho,\frac{1}{2}\rho}$ où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; dans le cas, où $x \geqq 1$, il suffit que $f(x)$ soit régulière dans la région $S_{\frac{1}{2}\rho,\rho}$, où $\rho = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$.

Il en résulte, en particulier, que si l'un des sommets réels de l'ellipse de Tchebycheff est un point régulier de $f(x)$, il est *intérieur* au domaine D.

5. Considérons à présent nos polynomes $B_n[f(x), b]$ en y faisant tendre b vers zéro.

Posons

$$\begin{aligned}(14)\quad A_n[f(x)] &= \lim_{b=0} B_n[f(x), b)] \\ &= \lim_{b=0}\left[f(0) + n\Delta\left(f(0), \frac{b}{n}\right)\frac{x}{b} + \ldots + C_n^k \Delta_k\left(f(0), \frac{b}{n}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^k + \ldots\right] \\ &= \overline{f(0)} + xf'(0) + \ldots + C_n^k f^{(k)}(0)\left(\frac{x}{n}\right)^k + \ldots.\end{aligned}$$

Puisque les coefficients du polynome $A_n[f(x)]$ sont inférieurs aux coefficients de Taylor le domaine de convergence D_0 de ces polynomes comprend évidemment le cercle de convergence. Pour étudier ce domaine il est utile de présenter $A_n[f(x)]$ sous la forme d'une intégrale, en utilisant le théorème de Cauchy. En supposant que $f(x)$ est holomorphe dans une certaine aire limitée par le contour C entourant l'origine nous aurons

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{k+1}}.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad A_n[f(x)] &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)\,n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{n}\right)^k \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \sum_0^n \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}\left(\frac{x}{n}\right)^k \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_C \left(\frac{x}{n}\right)^n \sum_0^n \frac{z^k}{k!}\left(\frac{n}{x}\right)^k \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\left(\frac{x}{n}\right)^n \int_C \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{nz}{x}\right)^k}{k!}\,\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\left(\frac{x}{n}\right)^n \int_C \frac{e^{\frac{nz}{x}} f(z)\,dz}{z^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

En appliquant la formule de Stirling, on en déduit l'égalité asymptotique pour $n \to \infty$:

$$(15)\qquad A_n f(x) \sim \frac{x^n}{i}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_C \frac{e^{n\left(\frac{z}{x}-1\right)}}{z^{n+1}} f(z)\,dz.$$

Posons $\frac{z}{x} = u = a + bi$ et considérons la courbe F_1 ayant pour équation

$$(16)\qquad e^{a-1} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

qui aura une boucle F entourant l'origine avec le point double $(1, 0)$, où les tangentes forment des angles $\pm\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des x, car en posant $a - 1 = \alpha$, on met (16) sous la forme

$$b^2 = e^{2\alpha} - \alpha^2 - 2\alpha - 1 = \alpha^2 + \frac{(2\alpha)^3}{3!} + \ldots + \frac{(2\alpha)^n}{n!} + \ldots.$$

On a manifestement

$$\left| e^{\frac{z}{x}-1} \right| < \left| \frac{z}{x} \right|$$

pour $\frac{z}{x}$ extérieur à la boucle F, si $\alpha = a - 1 \leq 0$. Or, par le changement $u = \frac{z}{x}$, la formule (15) se transforme en

$$(17) \qquad A_n[f(x)] \sim \frac{1}{i}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{C_1} \frac{e^{n(u-1)} f(ux)\,du}{u^{n+1}},$$

où C_1 est le contour transformé de C. Donc, si le contour C_1 est extérieur à la boucle F pour $\alpha < 0$ et, n'ayant avec F d'autres points communs que son point double, se réduit dans le voisinage de ce point à un petit segment perpendiculaire à l'axe réel, on voit que

$$\begin{aligned} A_n[f(x)] &\sim \frac{1}{i}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{1-\varepsilon i}^{1+\varepsilon i} \frac{e^{n(u-1)} f(ux)}{u^{n+1}}\,du \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{nti}}{(1+ti)^{n+1}} f(x + xti)\,dt, \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant un nombre donné. Il ne serait pas long à présent de montrer que $A_n[f(x)] \sim f(x)$, mais puisque cela résultera déjà du fait $A_n[f(x)]$ est borné, il suffira d'observer que si $|f(z)| < M$ sur C, le second membre est inférieur en module à

$$M\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{m+1}} = \frac{1.3\ldots 2m-1}{2.4\ldots 2m} M\sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sim M,$$

où $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Donc, en observant que la distance $\sqrt{a^2+b^2}$ des points de la boucle F à l'origine augmente de gauche à droite, nous arrivons au théorème suivant :

THÉORÈME C. — *Si le rayon du cercle de convergence à l'origine est égal à* R, *le point réel* R *étant un point régulier de* $f(z)$, *les polynomes* $A_n[f(x)]$ *convergent uniformément vers* $f(x)$ *pour toute valeur réelle de* $x > R$, *telle que la boucle* F_x *homothétique à* F *avec le rapport d'homothétie* x *ne contienne pas de singularités de* $f(z)$.

En particulier, si $f(z)$ ne possède des singularités que sur son cercle de convergence et que $f(z)$ soit régulière pour $z = Re^{i\theta}$, où $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ le point réel $x_0 > R$, le plus éloigné, où la convergence de $A_n[f(x)]$ est assurée, sera déterminé par l'équation

$$x_0 e^{\frac{R\cos\theta_0}{x_0}} = Re.$$

Par exemple, pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ on a $x_0 = Re$; on trouvera la plus grande valeur pour x_0, lorsque $\theta_0 = \pi$, dans ce cas on a

$$x_0 e^{-\frac{R}{x_0}} = Re; \qquad \text{d'où} \quad x_0 \neq 3,6R.$$

Bien entendu la conclusion est la même pour *toutes les directions.*