JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. FAVARD

Sur la structure des continus rectifiables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 321-332.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__321_0>

Sur la structure des continus rectifiables;

Par J. FAVARD.

---

1. Jordan et Scheffer définirent la longueur d'un arc de courbe comme la limite (finie ou infinie) de la longueur d'un polygone tendant vers l'arc, puis, M. Lebesgue, pour des raisons qui ont prévalu depuis, préféra utiliser toutes les suites de polygones tendant uniformément vers l'arc et définir la longueur de l'arc comme la plus petite des limites vers lesquelles tendent les longueurs des polygones tendant uniformément vers l'arc.

Dans ces définitions est utilisé, non seulement l'ensemble des points de l'espace qui sert de support géométrique à l'arc, mais encore l'ordre de ces points; de sorte que deux points confondus dans l'espace peuvent être différents sur l'arc : ainsi un segment de droite peut servir de rapport à un arc de longueur aussi grande que l'on veut. Il est donc permis de regretter que les définitions précédentes n'aient pas une allure suffisamment géométrique.

Pour illustrer la différence entre les points de vue précédents et celui que nous allons adopter, considérons un graphe continu, image du réseau routier d'une contrée. Un automobiliste désirant parcourir toutes les routes de ce réseau calculera la quantité d'essence qui lui est nécessaire en partant de la longueur du trajet qu'il a choisi; dans ce parcours quelques tronçons de route seront peut-être parcourus plusieurs fois. Mais, pour trouver le nombre de tonneaux de goudron nécessaires pour goudronner tout ce réseau il faudra connaître le nombre suivant : ayant décomposé le réseau en arcs simples, sans autres points communs possibles que leurs extrémités, on fait la somme des longueurs de ces différents arcs. Ce nombre dépend seulement du réseau considéré comme ensemble de points et non plus de l'arc auquel il peut servir de support et nous venons de voir que sa connaissance n'est pas dénuée de tout intérêt; d'ailleurs, sur une route, les bornes kilométriques ne sont pas distribuées suivant une aimable fantaisie.

On peut même ajouter que la connaissance des abscisses curvilignes sur les différents arcs simples précédents permet de résoudre les problèmes relatifs à la longueur des arcs supportés par le réseau.

Le problème consistant à attacher un nombre, que nous appellerons la longueur, à un continu décomposable en arcs simples acquiert ainsi un aspect plus géométrique mais, quoique la notion d'arc simple soit depuis longtemps devenue géométrique, il reste cependant, dans la définition de sa longueur suivant les procédés précédents, des traces de la représentation paramétrique et il ne semble pas, au premier abord, qu'il y ait intérêt à faire disparaître l'ordre dans une telle définition car on renonce du même coup à la notion d'abscisse curviligne pour atteindre seulement un résultat global.

C'est cependant ce que nous ferons ici pour des raisons que je vais expliquer.

2. On a déjà donné plusieurs définitions de la longueur d'où toute notion d'ordre a été bannie; sans les citer disons seulement qu'elles ont en général pour objet d'étendre la notion de longueur à des ensembles qui ne sont pas forcément des continus.

Si l'on accepte alors l'une de ces définitions, une question se pose : *quelle est la structure topologique des continus rectifiables* (c'est-à-dire dont la longueur est finie)? *Tout continu rectifiable est-il un continu de Jordan?* ou encore un continu irréductible joignant deux points d'un tel continu est-il un arc simple?

Dans un travail sur les intégrales curvilignes [1] je pense avoir montré qu'on peut parfois, dans des questions d'intégration, tirer parti des continus qui ne sont pas de Jordan, il n'y a donc pas lieu de les rejeter *a priori* hors des considérations relatives à la longueur :

---

[1] J. Favard, *Sur les intégrales curvilignes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, 51, 1934, p. 1-46).

l'objet du présent Mémoire est précisément de conclure à leur rejet après examen et de justifier alors la théorie classique.

A mon avis une telle démonstration est d'autant plus nécessaire que, dans la théorie de l'aire d'une surface courbe, il semble peu naturel d'éliminer des considérations des ensembles qui méritent le nom de surfaces, quoiqu'ils ne soient pas des surfaces de Jordan, et à qui on peut attribuer une aire finie.

Soit, par exemple, l'ensemble défini de la façon suivante : dans un plan où ont été tracés deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oz considérons les segments de droites d'abscisses $x_i (i = 0, 1, \ldots)$

$$x_i > 0, \qquad x_i > x_{i+1}, \qquad -1 \leqq z \leqq +1, \qquad \lim_{i \to \infty} x_i = 0;$$

puis les segments de droites parallèles à Ox.

$$x_i \geqq x \geqq x_{i+1}, \qquad z = (-1)^i$$

et enfin le segment $(-1, +1)$ de l'axe des z.

L'ensemble de tous ces segments constitue un continu irréductible entre un point quelconque de ce dernier segment et le point $(x_0, -1)$; en faisant tourner cet ensemble autour de Oz, on obtient un nouvel ensemble auquel il semble difficile de refuser le nom de surface ayant pour bord le cercle engendré par le point $(x_0, -1)$. Cet ensemble est par ailleurs limite d'une suite de surfaces de Jordan, faciles à définir, ayant le même cercle pour bord.

On peut donc trouver une suite de surfaces polyédrales, homéomorphes à un carré et qui tendent vers l'ensemble; de plus, on voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse trouver une telle suite dont les aires soient bornées dans leur ensemble, il faut et il suffit que la série $\sum_0^\infty x_i$ soit convergente.

A notre surface on est alors conduit à attribuer l'aire.

$$\pi x_0^2 + 4\pi \sum_0^\infty x_i.$$

3. Nous indiquerons tout à l'heure les propriétés communes aux diverses définitions de la longueur qui ne tiennent pas compte de

l'ordre : nous allons d'abord ici donner une nouvelle définition dont le mérite est de se rapprocher de celle M. Lebesgue mais dont la portée n'excède pas les continus.

C'est dire que nous nous proposons d'effectuer le prolongement de la fonctionnelle longueur définie sur l'ensemble des continus formés d'un nombre fini de segments de droite, dans un espace euclidien, à tous les autres continus de cet espace. Pour cela il faut avant tout dire ce qu'on entend par distance de deux continus et en tirer une définition de la convergence.

Dans un espace métrique compact en soi, considérons deux ensembles E_1, E_2 ; soient a_1 un point de E_1, a_2 un point de E_2 et $d(a_1, a_2)$ la distance de ces deux points, posons

$$\delta(E_1, a_2) = \underset{a_1 \varepsilon E_1}{\text{borne inf.}}\, d(a_1, a_2),$$

puis

$$\rho(E_1, E_2) = \underset{a_2 \varepsilon E_2}{\text{borne sup.}}\, \delta(E_1, a_2)$$

et enfin [1], en définissant d'une manière analogue $\rho(E_2, E_1)$,

$$|E_1, E_2| = |E_2, E_1| = \max[\rho(E_1, E_2), \rho(E_2, E_1)].$$

Nous n'appliquerons cette notion que dans le cas des continus et nous dirons qu'une suite de continus $\{\mathcal{C}_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tend vers le continu $\mathcal{C}$ quand n augmente indéfiniment lorsque

$$\lim_{n \to \infty} |\mathcal{C}, \mathcal{C}_n| = 0.$$

Cela posé soit, dans un espace euclidien, un continu $\mathcal{C}$ borné, il est possible, puisque l'espace est séparable, de trouver un continu polygonal aussi voisin de $\mathcal{C}$ qu'on le veut ; il existe donc des suites $\{\pi_n\}$ de de tels continus tendant vers $\mathcal{C}$. Soit L_n la longueur de π_n, définie comme d'ordinaire, nous dirons que $\mathcal{C}$ est rectifiable s'il existe une suite $\{\pi_n\}$ telle que les longueurs L_n correspondantes soient bornées dans leur ensemble. La longueur L de $\mathcal{C}$ sera définie comme la plus petite de toutes les plus petites limites des longueurs L_n par toutes les

---

(1) HAUSDORFF, *Mengenlehre*, p. 145, 2e édition (*Walter de Gruyter*).

suites $\{\pi_n\}$ possibles tendant vers $\mathcal{C}$

$$L = \underline{\lim}\,\{\underline{\lim}\, L_n\} \quad (< +\infty).$$

Comme on le voit notre définition ne diffère de celle, classique, de M. Lebesgue que par une définition de la distance de deux continus plus extensive que celle de distance de deux continus de Jordan déjà paramétrés, ce qui permet l'abandon de la notion d'ordre.

4. Cela posé, les diverses définitions de la longueur possèdent en commun avec notre définition les propriétés que nous allons maintenant établir pour cette dernière.

La longueur d'un continu $\mathcal{C}$, contenant deux points a et b, est au moins égale à la distance $|ab|$.

Soit en effet $\{\pi_n\}$ une suite quelconque de continus polygonaux tendant vers $\mathcal{C}$; si faible que soit le nombre ε positif, à partir d'une certaine valeur de n, il existe sur π_n deux points a_n et b_n respectivement distants de a et de b de moins de ε, on a alors

$$L_n \geqq |a_n b_n| \geqq |ab| - 2\varepsilon;$$

d'où, ε étant quelconque,

$$\underline{\lim}\, L_n \geqq |ab|,$$

de là l'expression de notre assertion

$$L \geqq |ab|.$$

En particulier la longueur d'un continu est au moins égale à son diamètre.

Supposons à présent, pour fixer les idées, que le continu polygonal π_n de longueur L_n soit plongé dans l'espace euclidien à trois dimensions. De chacun de ses points comme centre décrivons une sphère de rayon ρ donné et soit $V_\rho(\pi_n)$ le volume de l'ensemble des points intérieurs à l'axe de ces sphères au moins; je dis que l'on a

$$V_\rho(\pi_n) \leqq \pi\rho^2 L_n + \frac{4}{3}\pi\rho^3.$$

L'égalité a lieu en effet lorsque π_n est constitué par un seul segment de droite; or tout π_n peut être construit à partir d'un segment de droite par adjonctions successives d'autres segments et, à chaque adjonction, le segment introduit ayant au moins un point commun avec le continu déjà construit, les ensembles de points distants de moins de ρ de ce dernier continu et du nouveau segment ont en commun une sphère de rayon ρ au moins. Il y a donc lieu de retrancher au moins $\frac{4}{3}\pi\rho^3$ de la somme des volumes de ces deux ensembles pour obtenir le volume de l'ensemble final.

J'ai déjà démontré le résultat ci-dessus dans mon travail sur la longueur d'après Minkowski [1], ainsi que le suivant, facile à démontrer, et que nous utiliserons.

Soient a et b deux points d'un continu $\mathcal{C}$: avec des sphères de rayon ρ, contruisons le domaine ouvert analogue au précédent, soit $V_\rho(\mathcal{C})$ le volume de ce domaine; alors on a

$$V_\rho(\mathcal{C}) \geqq \pi\rho^2 |ab|.$$

Revenant maintenant à notre définition de la longueur, considérons *un continu $\mathcal{C}$ contenant deux continus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sans points communs*

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{C}_1 + C_2, \qquad \mathcal{C}_1\mathcal{C}_2 = 0,$$

soient a_1 et b_1 deux points de $\mathcal{C}_1$; a_2 et b_2 deux points de $\mathcal{C}_2$, je dis que l'on a

$$L(\mathcal{C}) \geqq |a_1 b_1| + |a_2 b_2|.$$

Soit en effet $\{\pi_n\}$ une suite de continus polygonaux qui tendent vers $\mathcal{C}$, considérons une suite de nombre ε_n tels que

$$\varepsilon_n > |\mathcal{C}, \pi_n| \qquad \left(\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0\right).$$

Le continu $\mathcal{C}$ est situé à l'intérieur des sphères centrées aux différents points de π_n et de rayon ε_n, il s'ensuit que, quel que soit ρ,

$$V_{\rho+\varepsilon_n}(\pi_n) \geqq V_\rho(\mathcal{C}).$$

Si nous prenons ρ inférieur à la plus courte distance de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$, on aura de plus

$$V_\rho(\mathcal{C}) \geqq V_\rho(\mathcal{C}_1) + V_\rho(\mathcal{C}_2).$$

---

(1) J. FAVARD, *La longueur et l'aire d'après Minkowski* (*Bull. Soc. math.*, t. 61, 1933, p. 63-84).

Alors, en vertu des résultats que nous venon de rappeler,

$$\frac{4}{3}\pi(\rho+\varepsilon_n)^3+\pi(\rho+\varepsilon_n)^2 L_n \geqq V_{\rho+\varepsilon_n}(\pi_n) \geqq V_\rho(\mathcal{C}_1)+V_\rho(\mathcal{C}_2)=\pi\rho^2[|a_1b_1|+|a_2b_2|].$$

et, par suite,

$$L_n \geqq \left(\frac{\rho}{\rho+\varepsilon_n}\right)^2 [|a_1b_1|+|a_2b_2|] - \frac{4}{3}(\rho+\varepsilon_n).$$

Donc, ρ restant fixe, et n augmentant indéfiniment,

$$\underline{\lim}\, L_n \geqq |a_1b_1|+|a_2b_2| - \frac{4}{3}\rho.$$

Cette inégalité a lieu pourvu que ρ soit suffisamment petit, par suite on a bien ([1])

$$(1) \qquad L(\mathcal{C}) \geqq |a_1b_1|+|a_2b_2|.$$

Plus généralement, et par le même procédé, on voit que, si $\mathcal{C}$ contient n continus $\mathcal{C}_i(i=1, 2, \ldots, n)$ sans point commun deux à deux, et si a_i et b_i désignent un couple de points appartenant à $\mathcal{C}_i$, on a

$$(2) \qquad L(\mathcal{C}) \geqq \sum_{i=1}^{n} |a_ib_i|.$$

Considérons enfin un continu $\mathcal{C}$ contenant deux continus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ayant un seul point commun a_1 et soit a_0 un point de $\mathcal{C}_1$ et a_2 un point de $\mathcal{C}_2$, je dis que l'on a

$$L(\mathcal{C}) \geqq |a_0a_1|+|a_1a_2|.$$

Ce théorème est vrai lorsque a_0, ou a_2, coïncide avec a_1 ; dans le cas général il suffit de remarquer qu'étant donné un cercle de rayon ε, suffisamment petit pour ne contenir ni a_0 ni a_2, il existe, d'après une proposition de Janiszewski, deux continus, continus respectivement dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et contenant respectivement a_0, ou a_2, et un point a'_0, ou a'_2, du cercle considéré.

D'après le résultat précédent on aura alors

$$L(\mathcal{C}) \geqq |a_0a'_0|+|a_2a'_2| \geqq |a_0a_1|+|a_1a_2| - 2\varepsilon$$

([1]) Une démonstration de ce résultat ne faisant pas intervenir les volumes V_ρ serait souhaitable, mais je n'ai pu en trouver.

et cette inégalité exprime notre résultat car ε est aussi petit que l'on veut.

Comme auparavant, nous avons la généralisation suivante :

Si $\mathcal{C}$ contient n continus $\mathcal{C}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_i\mathcal{C}_j &= 0 \qquad (i \neq j, |j - i| \neq 1), \\ \mathcal{C}_i\mathcal{C}_{i+1} &= a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned}$$

où par a_i nous désignons des points différents, et si l'on choisit un point a_0 dans $\mathcal{C}_1$ et un point a_n dans $\mathcal{C}_n$, on a

$$\mathrm{L}(\mathcal{C}) \geqq \sum_{1}^{n} |a_{i+1} a_i|. \tag{3}$$

Enfin, par le même procédé, on voit également que si un continu $\mathcal{C}$ contient un nombre fini de continus $\mathcal{C}_i$, chacun d'eux ayant avec tous les autres au plus deux points communs, et si l'on distingue dans chacun des $\mathcal{C}_i$ deux points, parmi lesquelles figurent obligatoirement le ou les points communs de $\mathcal{C}_i$ avec les autres continus, s'il y en a, la somme des distances des points choisis dans chaque $\mathcal{C}_i$ donnera une borne inférieure de $\mathrm{L}(\mathcal{C})$.

5. Suivant M. Zarankiewicz [1] nous appellerons continu de convergence d'un continu $\mathcal{C}$ un continu K, contenant plus d'un point, et tel qu'il existe dans $\mathcal{C}$ une suite infinie de continus $\{\mathrm{K}_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ satisfaisant à

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_i\mathrm{K}_j &= 0 \qquad (i \neq j), \\ \mathrm{K}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{K}_i\right) &= 0 \qquad (\mathrm{K} = \lim \mathrm{K}_n). \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}$ un continu, contenant un continu limite K, je dis que $\mathcal{C}$ ne peut être rectifiable.

Soient en effet a et b deux points distincts de K, d leur distance, de

---

[1] C. Zarankiewicz. *Sur les points de division dans les ensembles connexes* (*Fund. Math.*, t. 9, 1927, p. 124-171).

chacun de ces points décrivons une sphère de rayon $\frac{d}{4}$; à partir d'une certaine valeur de i, soit n, les continus K_i ont des points a_i et b_i intérieurs respectivement à chacune de ces sphères, on a donc

$$|a_i b_i| \geqq \frac{d}{2} \qquad (i \geqq n);$$

d'où, d'après (2), et quel que soit p entier positif,

$$L(\mathcal{C}) \geqq \sum_{i=n}^{n+p} |a_i b_i| \geqq (p+1)\frac{d}{2},$$

$L(\mathcal{C})$ surpasse donc toute quantité donnée à l'avance : $\mathcal{C}$ n'est pas rectifiable. *Un continu rectifiable ne contient donc aucun continu limite, d'après un théorème de M. Zarankiewicz* [1], *c'est un continu de Jordan ne contenant que des continus de Jordan.*

D'après un théorème de M. Whyburn [2], un tel continu, plongé dans un espace euclidien, a tous ses points de dimensions 1, c'est donc ce qu'on appelle une courbe, et de plus une courbe rationnelle au sens de M. Menger [3].

6. Ayant caractérisé topologiquement les continus rectifiables il nous reste à indiquer comment on peut calculer la longueur d'un continu rectifiable.

De l'inégalité (3) il résulte que, quand $\mathcal{C}$ est un arc simple $\mathcal{A}$, sa longueur est au moins égale à celle de tout polygone inscrit dans cet arc, les points ayant été rangés suivant l'un des deux ordres naturels. Or, parmi ces polygones, il existe des suites qui tendent vers $\mathcal{A}$, la longueur de $\mathcal{A}$ est donc la limite des longueurs des polygones inscrits qui tendent vers lui : nous retrouvons la définition de Jordan et Scheffer et, par surcroît, nous avons démontré que la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites tendant vers $\mathcal{A}$ est unique. Considérons à présent un continu $\mathcal{C}$ pouvant être décomposé en un nombre fini d'arcs simples $\mathcal{A}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, chacun d'eux n'ayant

(1) *Loc. cit.*, en note, p. 328.

(2) G. T. Whyburn (*Ann. Journ. of Math.*, t. **53**, 1931, p. 374).

(3) K. Menger, *Kurventheorie* (Teubner).

en commun avec les autres qu'un nombre fini de points

$$\mathcal{C} = \sum_{i}^{n} \mathcal{A}_i; \qquad (\mathcal{A}_i \mathcal{A}_j)' = 0 \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

En appliquant le résultat obtenu à la fin du paragraphe **4**, nous voyons que la longueur du continu $\mathcal{C}$ est la limite des longueurs des polygones inscrits dans $\mathcal{C}$, tendant vers lui, et ayant les points communs aux divers arcs $\mathcal{A}_i$ parmi leurs sommets, de sorte que

$$L(\mathcal{C}) = \sum_{1}^{n} L(\mathcal{A}_i).$$

Passons maintenant au cas général, soient $\mathcal{C}$ un continu rectifiable et a_0 et a_1 deux de ses points. Traçons dans $\mathcal{C}$ un continu irréductible allant de a_0 à a_1, ce sera un arc simple rectifiable $\mathcal{A}_1$. Si $\mathcal{C}$ ne se réduit pas à cet arc, soit a_2 un point choisi parmi les plus éloignés de $\mathcal{A}_1$, traçons dans $\mathcal{C}$ un arc simple joignant a_2 à $\mathcal{A}_1$ et n'ayant par suite qu'un seul point commun avec $\mathcal{A}_1$ et ainsi de suite : en général, les arcs $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_{n-1}$ ayant été tracés, de sorte que leur somme soit un continu, nous choisissons dans $\mathcal{C}$ un point a_n parmi les plus éloignés de la somme $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_{n-1}$ et nous le joindrons au continu précédent par un continu irréductible qui sera un arc simple rectifiable $\mathcal{A}_n$ n'ayant qu'un seul point commun avec la somme précédente. D'autre part, on peut inscrire dans la somme

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_n,$$

une ligne polygonale dont la longueur diffère de la somme des longueurs de ces arcs d'aussi peu qu'on le veut; d'après le résultat de la fin du paragraphe **4**, nous pouvons donc conclure que l'on a

$$L(\mathcal{C}) \geqq \sum_{1}^{n} L(\mathcal{A}_i).$$

Cette inégalité ayant lieu quel que soit n, aura lieu à l'infini si l'opération précédente doit être continuée jusque là, donc

$$L(\mathcal{C}) \geqq \sum_{1}^{\infty} L(\mathcal{A}_i).$$

La série du second membre est donc convergente et $L(\mathfrak{A}_n)$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; mais ce nombre est au moins égal à la distance de a_n au continu $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_{n-1}$, donc cette distance tend elle aussi vers zéro. Par suite, quel que soit ε positif, il existe un nombre N tel que, si $n \geqq N$, on peut trouver un polygone inscrit dans $\sum_1^n \mathfrak{A}_i$ dont la distance à $\mathcal{C}$ soit inférieure à ε. De là, sans difficulté, l'inégalité suivante

$$L(\mathcal{C}) \leqq \sum_1^\infty L(\mathfrak{A}_i)$$

est, en définitive, par comparaison avec l'inégalité précédente :

$$L(\mathcal{C}) = \sum_1^\infty L(\mathfrak{A}_i).$$

Comme on le voit cette inégalité aura lieu quelle que soit la décomposition de $\mathcal{C}$ en arcs simples $\mathfrak{A}_n$ pourvu que

$$\mathfrak{A}_n \sum_1^{n-1} \mathfrak{A}_i \neq 0; \qquad \left\{ \mathfrak{A}_n \sum_1^{n-1} \mathfrak{A}_i \right\}' = 0; \qquad \left(\sum_1^\infty \mathfrak{A}_n \right)' = \mathcal{C}.$$

Enfin nous pouvons maintenant montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant deux continus, la relation

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$$

entraîne, $\mathcal{C}_1$ étant supposé rectifiable,

$$L(\mathcal{C}_1) \leqq L(\mathcal{C}_2),$$

le signe d'égalité ayant lieu seulement si

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2,$$

ce que l'on exprime en disant que *la longueur est une fonctionnelle croissante de continus.*

Soit en effet, lorsque $\mathcal{C}_2$ n'est pas identique à $\mathcal{C}_1$, a' un point de $\mathcal{C}_2$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, joignons ce point à $\mathcal{C}$ par un arc $\mathfrak{A}'$ n'ayant qu'un point a_0 commun avec $\mathcal{C}$; prenant a_0 comme point de départ, effectuons la décomposition de $\mathcal{C}$ suivant la méthode précédente; nous pouvons déterminer un nombre n tel que

$$\sum_{n+1}^{\infty} \mathrm{L}(\mathfrak{a}_i) < \mathrm{L}(\mathfrak{a}');$$

d'où

$$\mathrm{L}(\mathcal{C}_1) = \sum_{1}^{n} \mathrm{L}(\mathfrak{a}_i) + \sum_{n-1}^{\infty} \mathrm{L}(\mathfrak{a}_i) < \sum_{1}^{n} \mathrm{L}(\mathfrak{a}_i) + \mathrm{L}(\mathfrak{a}') \leqq \mathrm{L}(\mathcal{C}_1).$$

Notre fonctionnelle possède aussi la propriété d'additivité suivante, que l'on établira facilement grâce aux méthodes précédentes :

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux continus tels que

$$\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2 \neq 0, \qquad (\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2)' = 0,$$

alors on a

$$\mathrm{L}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2) = \mathrm{L}(\mathcal{C}_1) + \mathrm{L}(\mathcal{C}_2).$$

Il est alors très facile de revenir à la notion *d'abscisse curviligne* sur un arc simple en employant la notion d'ordre naturel : le raccord entre notre théorie et la théorie classique est ainsi achevé.

Enfin une question, que nous n'avons pas examinée, mais qui vient naturellement à l'esprit, est la suivante : un continu rectifiable peut-il toujours servir de support à un arc rectifiable ?

7. Le point de vue qui nous a occupé ici est susceptible d'extensions diverses, nous n'en retiendrons qu'une dont nous voudrions souligner les difficultés : celle relative à la quadrature des surfaces courbes.

Si l'on veut prolonger tout d'abord la définition de M. Lebesgue pour l'aire, de façon à la rendre applicable à des surfaces qui ne sont pas de Jordan, on est amené, dans les cas les plus simples, à une analyse de la notion de bord d'une surface et à la recherche d'une notion destinée à remplacer celle de genre pour les surfaces de Jordan; l'extension pourrait se faire, sans trop de peine semble-t-il, pour les ensembles que j'ai appelés feuilles dans un travail sur ce sujet.

D'autre part, en adoptant pour l'aire l'une des définitions employées jusqu'ici, on doit s'attendre à trouver, parmi les types simples de surfaces, des surfaces quarrables qui ne sont pas de Jordan (*voir* § **2**) et dont les caractères topologiques seront sans doute difficiles à analyser.