JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

Sur les faisceaux de transformations infinitésimales associés aux équations aux dérivées partielles du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = o$

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 301-320.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__301_0>

Sur les faisceaux de transformations infinitésimales associés aux équations aux dérivées partielles du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;$$

Par E. VESSIOT.

J'ai montré, il y a quelques années, comment ma théorie des faisceaux de transformations infinitésimales ([1]) s'appliquait, en particulier, à l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue et deux variables indépendantes. Je retrouvais ainsi, par une voie uniforme et simple, les résultats essentiels auxquels, après Monge, Ampère et Darboux, M. Goursat a attaché son nom, et qu'il a rendus classiques.

A chaque équation du second ordre

$$r = \Phi(x, y, z, p, q, s, t)$$

est associé un faisceau F, de degré 4, à sept variables, dont les transformations de base sont

$$(\mathrm{F}) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \Phi\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial t}.$$

([1]) *Sur une théorie nouvelle des problèmes généraux d'intégration* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 42, 1924, p. 336-395); *Sur l'intégration des faisceaux de transformations infinitésimales, dans le cas où le degré du faisceau étant n, celui du faisceau dérivé est n + 1* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e^ série, t. 45, 1928, p. 189-253). Ces mémoires seront cités, dans le présent article, avec l'indication abrégée, M et M', respectivement.

Les caractéristiques sont les trajectoires de transformations qui font partie de certains sous-faisceaux de F, de degré 2, dits sous-faisceaux singuliers. Les invariants des systèmes de caractéristiques sont les invariants de ces sous-faisceaux; et l'existence de ces invariants tient à des propriétés de structure de ces sous-faisceaux dont l'énoncé est immédiat.

J'avais retrouvé, à l'égard des invariants et de leur utilisation, les résultats classiques en prenant le faisceau F tel quel. Mais la raison profonde des simplifications d'intégration que l'existence éventuelle de ces invariants entraîne doit être cherchée dans les formes canoniques auxquels le faisceau F peut, dans chaque hypothèse à envisager, être ramené par un changement de variables.

On est donc conduit à considérer comme associés à l'équation considérée, en même temps que le faisceau F, tous ceux qui lui sont semblables; c'est-à-dire qui s'en déduisent par un changement quelconque de variables

$$x_i = \varphi_i(x, y, z, p, q, s, t) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Et cela pose, comme problème préliminaire, celui de trouver la structure des faisceaux de degré 4, à sept variables, qui peuvent être ainsi associés à une équation du second ordre. C'est à ce problème que le présent travail est consacré. Un fait essentiel, qui domine toute la théorie, est que si un faisceau est associé à une équation du second ordre, il est également associé à une infinité de telles équations et que toutes celles-ci se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de contact de l'espace x, y, z.

Je donne d'abord les types généraux de structure des faisceaux de degré 4, à un nombre quelconque de variables, en supposant, comme cela a lieu pour les faisceaux F des équations du second ordre, que leur dérivé est de degré 6.

Je détermine ensuite les conditions qui caractérisent les faisceaux associés aux équations du second ordre; puis celles qui expriment que l'on a affaire à telle ou telle des diverses classes de ces équations, cataloguées par M. Goursat d'après le nombre des systèmes de caractéristiques, tant du second ordre que du premier ordre.

I. — Structure des faisceaux de degré 4, dont le dérivé est de degré 6.

1. Soit Φ un faisceau de degré 4, dont le dérivé Φ' soit de degré 6. Désignons par X_1, X_2, X_3, X_4 des *transformations de base* de Φ

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} \xi_{kj}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Le dérivé Φ' étant de degré 6, les *relations de structure* de Φ seront de la forme

$$(1) \qquad (X_i, X_k) \equiv b_{ik} Y + c_{ik} Z, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \qquad (\text{mod } \Phi).$$

Y et Z étant deux transformations qui formeront avec X_1, X_2, X_3, X_4 une base de Φ'.

Soit $A = \sum_1^4 a_\alpha X_\alpha$ une transformation quelconque de Φ. Nous lui donnerons pour image un point a de l'espace projectif à trois dimensions, ayant pour coordonnées tétraédriques a_1, a_2, a_3, a_4. A ce point correspondront inversement toutes les transformations mA, qui constituent le sous-faisceau, de degré 1, $\{A\}$.

Soit $A' = \sum_1^4 a'_\alpha X_\alpha$ une autre transformation non comprise dans ce faisceau, et a' son point représentatif. Nous désignerons par p_{ik} les coordonnées $p_{ik} = a_i a'_k - a_k a'_i$ de la droite aa'.

Les *conditions d'involution* $(AA') \equiv 0$, mod(Φ), de A et A' s'écriront ainsi

$$(2) \qquad \sum_{(\alpha,\beta)} b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0, \qquad \sum_{(\alpha,\beta)} c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0,$$

la sommation (α, β) s'étendant aux six combinaisons (α, β), $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$. Elles expriment que la droite aa' appartient à la congruence linéaire Γ définie par les deux complexes (2). D'où la classification suivante :

Premier type de structure. — Γ a *deux directrices rectilignes* Δ_1 et Δ_2.

Par tout point a, qui n'est ni sur Δ_1 ni sur Δ_2, passe une droite D de la congruence et une seule, qui s'appuie sur Δ_1 et sur Δ_2. Donc toute transformation générale A de Φ appartient à une involution de degré 2. Par un point a', pris en dehors de D, passe au plus une droite de la congruence rencontrant D. Donc pas d'involution de degré 3. Le faisceau Φ est de *genre* 2.

Par un point a de Δ_1 (ou de Δ_2), passent une infinité de droites de la congruence Γ, constituant le faisceau plan, de sommet a, dans le plan $a\Delta_2$ (ou $a\Delta_1$). Donc ces points représentent des transformations A *singulières*, pour lesquelles les transformations A' en involution avec l'une d'elles forment un sous-faisceau de degré 3 (qui n'est pas une involution).

Nous dirons que les sous-faisceaux de degré 2 (qui ne sont pas des involutions), représentés respectivement par les deux directrices Δ_1 et Δ_2 de la congruence sont des *sous-faisceaux singuliers* de Φ; et nous les désignerons par Φ_1 et Φ_2.

Pour aucun point a, les droites passant par a ne sont toutes des droites de la congruence. Donc *pas de transformation distinguée* dans Φ.

Un changement de base de Φ équivaut à un changement de coordonnées pour les points a représentatifs des transformations A de Φ. Par ailleurs, on peut remplacer Y et Z par des transformations quelconques du faisceau $\{Y, Z\}$, $Y' = \alpha Y + \alpha' Z$, $Z' = \beta Y + \beta' Z$, ce qui équivaut à remplacer les complexes (2) par deux autres complexes quelconques du faisceau qu'ils définissent. En prenant pour ces complexes les complexes singuliers qui ont respectivement pour directrices Δ_1 et Δ_2 (et dont les droites sont assujetties à rencontrer respectivement Δ_2 et Δ_1) et en prenant ces droites Δ_1 et Δ_2 pour arêtes opposées du tétraèdre de référence, on ramènera les conditions d'involution à la *forme canonique*

$$p_{13} = 0, \qquad p_{24} = 0; \tag{3}$$

et, par suite, les relations de structure seront ramenées à la forme canonique

$$(X_1, X_3) \equiv Z_1 \qquad (X_2, X_4) \equiv Z_2, \qquad \text{les autres } (X_i, X_k) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \Phi). \tag{4}$$

Les sous-faisceaux singuliers sont

$$(\Phi_1) \qquad \{X_1, \quad X_3\};$$
$$(\Phi_2) \qquad \{X_2, \quad X_4\}.$$

Ils sont en relation d'involution réciproque; aucun des deux n'est une involution. Les involutions du second degré peuvent être définies par des couples de points, pris respectivement sur Δ_1 et Δ_2; leur forme générale est donc, avec deux arbitraires u_1 et u_2,

$$(5) \qquad \{X_1 + u_1 X_3, \quad X_2 + u_2 X_4\}.$$

Deuxième type de structure. — Γ a *une seule directrice* (*double*), Δ. On appliquera sans peine la même méthode que ci-dessus. Les équations de Γ se ramènent à la forme canonique

$$(6) \qquad p_{13} = 0, \qquad p_{12} + p_{34} = 0,$$

à laquelle correspondent les formules canoniques de structure

$$(7) \quad (X_1, X_3) \equiv Y, \qquad (X_1, X_2) \equiv Z, \qquad (X_3, X_4) \equiv Z, \qquad \text{les autres } (X_i X_k) \equiv 0.$$

Pas de transformation distinguée; un sous-faisceau singulier double, $\{X_2, X_4\}$, représenté par la directrice Δ; c'est une involution. Le faisceau est de genre 2. Les involutions générales de degré 2 (l'involution singulière $\{X_2, X_4\}$ fait seule exception), sont, avec les arbitraires u et v

$$(8) \qquad \{X_4 + u X_2, \quad X_1 - u X_3 + v X_4\}.$$

Remarque. — Les crochets des transformations singulières avec toute autre transformation de Φ sont congrus à mZ. *Réciproquement*, si dans un faisceau Φ de degré 4, à dérivé de degré 6, deux transformations en involution, X_2 et X_4, donnent par leurs crochets avec toute autre transformation du faisceau des transformations congrues à mZ (Z étant une transformation n'appartenant pas à Φ), ce faisceau Φ appartient au deuxième type que nous considérons.

Troisième type de structure. — La congruence Γ est *dégénérée* en toutes les droites issues d'un point, et toutes les droites d'un plan passant par ce point. Forme canonique

(9) $p_{12} = 0, \quad p_{13} = 0 \quad (\text{d'où } p_{14} = 0, \text{ ou } p_{23} = 0);$

(10) $(X_1X_2) \equiv Y, \quad (X_1X_3) \equiv Z, \quad \text{les autres } (X_iX_k) \equiv 0.$

Il y a *une transformation distinguée* X_4, et une involution singulière de degré 3, $\{X_2, X_3, X_4\}$. Les involutions générales de degré 2 sont

(10) $$\{X_3 + u_1X_1 + u_2X_2, \quad X_4\},$$

et il y a des involutions de degré 2 singulières

(11) $$\{X_2 + uX_4, \quad X_3 + vX_4\}.$$

Remarque. — Si un faisceau Φ, de degré 4, à dérivé de degré 6, a une transformation distinguée, il est du troisième type, présentement considéré. Le cas de deux transformations distinguées n'est pas à considérer; car le dérivé ne peut, dans ce cas, qu'être de degré 5 au plus.

2. *Dérivés partiels.* — Nous appellerons *dérivé partiel* d'un faisceau Φ par rapport à un sous-faisceau singulier le faisceau formé par les crochets des transformations de ce sous-faisceau singulier avec toutes les transformations de Φ.

Les faisceaux Φ du premier type ont deux dérivés partiels, de degré 5, qui sont avec les notations ci-dessus

$$\{X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad Z_1\}, \qquad \{X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad Z_2\}.$$

Les faisceaux Φ du deuxième type n'en ont qu'un, qui est

$$\{X_1 \quad X_2 \quad X_3, \quad X_4, \quad Z\}.$$

II. — Structure des faisceaux associés aux équations aux dérivées partielles du second ordre $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$.

3. L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, à une fonction inconnue et deux variables indépendantes, équivaut à celle d'un faisceau F de degré 4, à sept variables. Si par exemple (ce à quoi l'on peut toujours se ramener par un changement de variables préliminaires), l'équation est mise sous la forme

$$s = \sigma(x, y, z, p, q, r, t), \tag{1}$$

ce faisceau est

$$(\mathrm{F}) \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} + r\dfrac{\partial f}{\partial p} + \sigma\dfrac{\partial f}{\partial q}, \\ X_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} + \sigma\dfrac{\partial f}{\partial p} + t\dfrac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3 = \dfrac{\partial f}{\partial r}, \quad X_4 = \dfrac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

Nous dirons qu'un faisceau Φ, de degré 4, à sept variables x_0, x_1, ... x_6 est *associé* à cette équation (1), s'il est *semblable* à F; c'est-à-dire s'il peut se ramener à F par un changement de variables approprié

$$x_i = \varphi_i(x, y, z, p, q, r, t) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 6). \tag{2}$$

Pour qu'un faisceau Φ de degré 4, à sept variables, soit ainsi associé à une équation du second ordre, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux propriétés de structure suivantes, qui sont, par leur nature, invariantes vis-à-vis de tout changement de variables :

1° *Le dérivé Φ' de Φ est de degré* 6; 2° *Φ n'a pas de transformation distinguée;* 3° *Les transformations distinguées de Φ' forment un faisceau de degré* 2 *exactement, lequel est un sous-faisceau de Φ* ([1]).

Les formules de structure de F,

$$(3) \quad \begin{cases} (X_1, X_2) = X_1\sigma\dfrac{\partial f}{\partial p} - X_2\sigma\dfrac{\partial f}{\partial q}, \qquad (X_3, X_1) = \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial q}, \\ (X_4, X_1) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial q}, \quad (X_3, X_2) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial p}, \\ (X_4, X_2) = \dfrac{\partial\sigma}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial q}, \qquad (X_3, X_4) = 0, \end{cases}$$

([1]) Cet énoncé donne lieu à la remarque suivante, dont j'omets, pour abréger, la démonstration : *Φ' étant supposé de degré* 6, *il y a au moins deux transformations distinguées divergentes; et, s'il n'en a que deux, elles appartiennent à Φ*. La condition 3° de l'énoncé, non plus que la condition 2°, ne réduit donc pas la généralité de Φ, et l'on peut y faire abstraction des derniers mots (*lequel est un sous-faisceau de Φ*). Observons, par ailleurs, que, en vertu de la condition 2°, Φ aura deux sous-faisceaux singuliers, ou un sous-faisceau singulier unique (double).

permettent de vérifier sans difficulté que ces propriétés appartiennent à F.

Voici la démonstration de la réciproque. Le sous-faisceau distingué de Φ', étant nécessairement complet (M, n° 18, p. 374), a $7-2=5$ invariants indépendants, que nous prenons comme variables $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$, en même temps que deux autres variables u, v. Ceci ramène Φ' à la forme

$$\left\{ A_i f = \frac{\partial f}{\partial a_i} + \alpha_i(a_0, a_1, \ldots, a_4)\frac{\partial f}{\partial a_0}, \quad (i=1, 2, 3, 4), \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \right\},$$

Le faisceau $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ n'a pas de transformation distinguée car ce serait une transformation distinguée de Φ', non comprise dans le faisceau distingué $\left(\left\{\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right\}\right)$. Son dérivé est de degré 5 (puisqu'il ne dépend que de 5 variables) : donc de degré supérieur d'une unité à son propre degré. Sa forme canonique est donc (M', n° 7, p. 215)

$$(4) \qquad \left\{ D_x = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \quad D_y = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q} \right\},$$

et celle de Φ' est, dès lors,

$$(\Phi)' \qquad \left\{ D_x, \quad D_y, \quad P = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \right\}.$$

Rappelons que les transformations de contact en x, y, z, p, q sont, par définition, celles qui laissent invariant le faisceau (4) (M', n° 11, p. 224). Celles-ci laissent donc aussi invariante la forme canonique ci-dessus du dérivé Φ'.

Dans la base de Φ on peut faire figurer $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, d'après l'hypothèse 3°; et l'on pourra la compléter par deux transformations de la forme

$$Af = a_1 D_x + a_2 D_y + a_3 P + a_4 Q, \qquad Bf = b_1 D_x + b_2 D_y + b_3 P + b_4 Q.$$

On reconnaît facilement que si le déterminant $a_1 b_2 - b_1 a_2$ est nul, on peut se ramener au cas où il ne l'est pas en utilisant, avec le changement éventuel de x en y, p en q, et inversement, la transformation de contact d'Ampère

$$x' = p, \qquad p' = -x, \qquad z' = z - px, \qquad y' = y, \qquad q' = q.$$

On peut donc prendre Af et Bf sous la forme

$$Af = D_x + a\frac{\partial f}{\partial p} + a'\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad Bf = D_y + b'\frac{\partial f}{\partial p} + b\frac{\partial f}{\partial q}.$$

La congruence

$$(Af, Bf) \equiv (a' - b')\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (\text{mod. } \Phi'),$$

exige alors $a' = b'$, puisque $\frac{\partial f}{\partial z}$ n'appartient pas à Φ', tandis que le crochet (A, B) en fait partie par définition. D'où, pour Φ, la forme

$$(5) \qquad \left\{ D_x + \rho_0\frac{\partial f}{\partial p} + \sigma_0\frac{\partial f}{\partial q}, \quad D_y + \sigma_0\frac{\partial f}{\partial p} + \tau_0\frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \right\},$$

ρ_0, σ_0, τ_0 étant trois fonctions des sept variables x, y, z, p, q, u, v.

Or, si les trois déterminants fonctionnels

$$(6) \qquad \frac{\partial(\sigma_0, \tau_0)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\tau_0, \rho_0)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(\rho_0, \sigma_0)}{\partial(u, v)}$$

étaient nuls tous les trois, on aurait des identités simultanées de la forme

$$m\frac{\partial\rho_0}{\partial u} + n\frac{\partial\rho_0}{\partial v} = m\frac{\partial\sigma_0}{\partial u} + n\frac{\partial\sigma_0}{\partial v} = m\frac{\partial\tau_0}{\partial u} + n\frac{\partial\tau_0}{\partial v} = 0,$$

d'où résulterait que $m\frac{\partial f}{\partial u} + n\frac{\partial f}{\partial v}$ serait une transformation distinguée de Φ : ce qui est exclu par l'hypothèse 2°.

On pourra donc remplacer u, v par deux des fonctions ρ_0, σ_0, τ_0, prises comme variables nouvelles. En posant, par exemple, $r = \rho_0$, $t = \tau_0$, on aura ramené Φ à la forme de F. Si ce changement de variables était impossible, on prendrait pour variables deux autres des trois fonctions ρ, σ, τ et l'on arriverait au faisceau fourni par une équation du second ordre de l'une des deux formes

$$r = \rho(x, y, z, p, q, s, t) \qquad \text{ou} \qquad t = \tau(x, y, z, p, q, r, s).$$

4. La réduction de Φ' à sa forme canonique se fait par un changement de variables qui n'est défini qu'à une transformation de contact près. Il en résulte ce fait fondamental que *si un faisceau Φ est associé à une équation du deuxième ordre, il est associé à une infinité de telles* *équations, qui se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les diverses transformations de contact en x, y, z, t, q.*

III. — Structure des faisceaux du premier type associés à des équations du second ordre linéaires.

5. Nous ne considérerons dans la suite, que des faisceaux Φ associés à des équations du second ordre; et nous appellerons, pour abréger, *transformations principales* d'un tel faisceau celles qui sont distinguées dans son dérivé. Nous allons chercher à quelles conditions l'une des équations ayant un tel faisceau pour associé est linéaire en r, s, t : les autres seront, d'après ce qui précède, des équations de Monge-Ampère, puisqu'elles se déduiront d'une équation linéaire par une transformation de contact. Et réciproquement, si un faisceau est associé à une équation de Monge-Ampère, il le sera aussi à une équation linéaire, puisque l'on sait que toute équation de Monge-Ampère peut se réduire à la forme linéaire par une transformation de contact convenablement choisie.

Reprenons le faisceau F du n° 3. En vertu des formules de structure (3), les conditions d'involution sont, en posant

$$(1)\qquad a=\frac{\partial\sigma}{\partial r},\qquad b=\frac{\partial\sigma}{\partial t},\qquad h=X_1\sigma,\qquad k=X_2\sigma,$$

$$(2)\qquad hp_{12}-p_{13}-ap_{23}-bp_{24}=0,\qquad kp_{12}+ap_{13}+bp_{14}+p_{24}=0.$$

On en conclut que les complexes singuliers sont

$$(3)\qquad (h-\lambda k)p_{12}-(a\lambda+1)p_{13}-b\lambda p_{14}-ap_{23}-(\lambda+b)p_{24}=0,$$

λ étant une des racines de

$$(4)\qquad a\lambda^2+\lambda+b=0.$$

Supposons ces racines distinctes, et désignons-les par λ_1 et λ_2. En cherchant les directrices de ces deux complexes singuliers, on trouve les sous-faisceaux singuliers

$$(F_1)\qquad \{V_1=X_1+\lambda_1X_2+(\lambda_1+\lambda_2)(h-\lambda_2k)X_3,\qquad U_3=X_4+\lambda_2^2X_3\},$$
$$(F_2)\qquad \{V_2=X_1+\lambda_2X_2+(\lambda_1+\lambda_2)(h-\lambda_1k)X_3,\qquad U_4=X_4+\lambda_1^2X_3\}.$$

et l'on a ensuite, en posant

$$V_1 = \frac{\partial f}{\partial q} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad V_2 = \frac{\partial f}{\partial q} - \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial p}, \tag{5}$$

les formules

$$(U_3, U_1) \equiv (\lambda_1 - \lambda_2) V_2, \qquad (U_4, U_2) \equiv (\lambda_2 - \lambda_1) V_1 \qquad (\text{mod } F). \tag{6}$$

Le *dérivé partiel* relatif à F_1 s'obtient donc en adjoignant à la base de F la transformation V_2 ; et le dérivé partiel relatif à F_2 s'obtient en adjoignant V_1 à la base de F. Remarquons que U_3 et U_4 sont deux transformations principales de F, le faisceau de ses transformations principales étant $\{X_3, X_4\}$.

Ceci posé, supposons que l'équation (1), (nº **3**), soit linéaire. Alors λ_1 et λ_2 ne dépendent ni de r ni de t, et l'on a

$$(U_i, U_k) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \Phi) \qquad \text{pour} \quad (i = 3, 4;\ k = 1, 2).$$

En particulier $(U_3 U_2) \equiv 0$ exprime que U_3 est distinguée dans le dérivé partiel relatif à F_1. Donc :

Pour qu'un faisceau Φ soit associé à une équation linéaire, il faut que chacun de ses dérivés partiels ait pour transformation distinguée la transformation principale appartenant au sous-faisceau singulier correspondant.

Nous allons voir que *cette double condition est suffisante.*

6. Les conditions supposées sont, en effet,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \lambda_1^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} = 0, \tag{7}$$

λ_1 et λ_2 étant liées à σ par les équations

$$\lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \lambda_1 + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0, \qquad \lambda_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \lambda_2 + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Il s'agit donc d'intégrer ce système.

Premier cas : $\frac{\partial \lambda_1}{\partial r} \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} \neq 0$. — L'intégration de (7) donne

$$r - \lambda_1^2 t = \varphi_1(\lambda_1), \qquad r - \lambda_2^2 t = \varphi_2(\lambda_2). \tag{9}$$

L'intégration de (8) équivaut, d'autre part, à celle du faisceau

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}+\lambda_1^2\frac{\partial f}{\partial r}-\lambda_1\frac{\partial f}{\partial \sigma},\qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\lambda_2^2\frac{\partial f}{\partial r}-\lambda_2\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}. \tag{10}$$

Si l'on prend λ_1 et λ_2 pour variables au lieu de r et t, il devient

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}+\lambda_2\frac{2\lambda_1 t+\varphi_1'}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\frac{\partial f}{\partial \sigma},\qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}-\lambda_1\frac{2\lambda_2 t+\varphi_2'}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}, \tag{11}$$

et l'on a, en résolvant (9),

$$t=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2},\qquad r=\frac{\lambda_1^2\varphi_2-\lambda_2^2\varphi_1}{\lambda_1^2-\lambda_2^2}. \tag{12}$$

En exprimant que le faisceau (11) est complet, on trouve

$$2(\varphi_1-\varphi_2)-(\lambda_1+\lambda_2)(\varphi_1'-\varphi_2')=0. \tag{13}$$

En appliquant à cette condition la dérivation $\frac{\partial^2}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}$, on trouve

$$\varphi_1''=\varphi_2''=\text{const.}=2\alpha,\qquad \varphi_1=\alpha\lambda_1^2+2\beta_1\lambda_1+\gamma_1,\qquad \varphi_2=\alpha\lambda_2^2+2\beta_2\lambda_2+\gamma_2;$$

et en portant dans (13), on obtient

$$\beta_1+\beta_2=0,\qquad \gamma_1-\gamma_2=0.$$

Donc

$$\varphi_1=\alpha\lambda_1^2+2\beta\lambda_1+\gamma,\qquad \varphi_2=\alpha\gamma_2^2-2\beta\gamma_2+\gamma. \tag{14}$$

Les formules (12) deviennent alors

$$r=-2\beta\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}+\gamma,\qquad t=-2\beta\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}-\alpha, \tag{15}$$

et le faisceau (11) devient

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \lambda_1}-2\beta\frac{\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda^2)^2}\frac{\partial f}{\partial \sigma},\qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}+2\beta\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}. \tag{16}$$

Un invariant est

$$\sigma-\beta\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2},$$

et l'on obtient donc pour σ la formule

$$s=\sigma=\beta\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}+\delta. \tag{17}$$

Les formules (15) et (17) donnent, dès lors, l'*équation de Monge-Ampère* la plus générale,

$$(r-\gamma)(t+\alpha)-(s-\delta)^2=0,$$

ce qui démontre notre réciproque, dans ce cas $\frac{\partial\lambda_1}{\partial r}\,\frac{\partial\lambda_2}{\partial r}\neq 0$.

Deuxième cas : $\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=0$, $\frac{\partial\lambda_1}{\partial r}\neq 0$. — La première des équations (7) donne encore

$$r=\lambda_1^2 t+\varphi(\lambda_1), \tag{18}$$

et l'on prend pour variables λ_1, au lieu de r, en gardant t. Le faisceau (10) devient alors

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t}-\lambda_1\frac{\partial f}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial f}{\partial\lambda_1}-\frac{2\lambda_1 t+\varphi'}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}.$$

Le crochet de ces deux transformations de base est

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{\partial f}{\partial\sigma},$$

ce qui ne peut être nul. *Ce cas est donc à rejeter.*

Troisième cas : $\frac{\partial\lambda_1}{\partial r}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}=\frac{\partial\lambda_2}{\partial r}=\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=0$. — On tire de (8)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r}=-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2},\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{19}$$

D'où, pour l'équation du deuxième ordre,

$$s=\sigma=-\frac{r}{\lambda_1+\lambda_2}-\frac{\lambda_1\lambda_2 t}{\lambda_1+\lambda_2}+c, \tag{20}$$

qui est l'équation linéaire la plus générale. La réciproque à établir est donc entièrement démontrée.

7. La condition énoncée pour les faisceaux du premier type, associés aux équations linéaires, peut s'énoncer plus simplement : *Il faut et il suffit que chacun des dérivés partiels du faisceau ait une transformation distinguée.*

La condition est nécessaire d'après l'énoncé du n° **5**. Montrons qu'elle est suffisante. Soit Φ le faisceau, $\{X_1 X_3\}$ et $\{X_2 X_4\}$ ses sous-faisceaux singuliers Φ_1 et Φ_2. On a les formules de structure (4) du n° **1**, à savoir

$$(21) \qquad (X_1, X_3) = Z_1, \quad (X_2, X_4) = Z_2, \quad \text{les autres} \quad (X_i X_k) \equiv 0 \quad (\text{mod}\, \Phi).$$

Considérons le dérivé partiel relatif à Φ_1

$$(\Psi_1) \qquad \{X_1, X_2, X_3, X_4, Z_1\},$$

et supposons qu'une transformation de Φ_1, X_1, par exemple, soit distinguée dans Ψ_1. Je dis que c'est une transformation principale.

Il suffira, pour l'établir, de prouver que (X_1, Z_2) est congru à zéro (mod. Φ'). Or on a, par les formules (21),

$$(X_1, X_4) = b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_4 X_4.$$
$$(X_1, X_2) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4.$$

D'où

$$[X_4(X_1, X_2)] \equiv 0, \qquad [X_2(X_2, X_4)] \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \Phi').$$

L'identité de Jacobi, relative à X_1, X_2, X_4, donne alors

$$(X_1, Z_2) = [X_1(X_2, X_4)] \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \Phi'), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci posé, soit

$$X \equiv u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3 + u_4 X_4 + u X_1$$

la transformation distinguée de Ψ_1 dont l'existence est supposée : tout revient à prouver qu'elle appartient à Φ_1. Or les hypothèses

$$(X, X_2) \equiv (X, X_4) = 0 \qquad (\text{mod}\, \Psi_1),$$

donnent, d'après (21), $u_4 = u_2 = 0$. Les hypothèses

$$(X, X_1) = (X, X_3) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \Psi_1),$$

donnent

$$u(X_1, Z_1) \equiv u(X_3, Z_1) \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, \Psi_1),$$

d'où l'on doit conclure $u = 0$, sans quoi X_1 et X_3 seraient toutes deux principales, alors que Φ_1 ne contient qu'une transformation principale. Donc

$$X = u_1 X_1 + u_3 X_3, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV. — Structure des faisceaux du deuxième type associés à des équations du second ordre linéaires.

8. Pour une équation linéaire à un seul sous-faisceau singulier (double) les formules (1) et (4), où a et b ne dépendent que de x, y, z, p, q, donnent, en désignant par λ la racine double de (4),

$$(1) \qquad 2a\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda + 2b = 0, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial r} = -\frac{1}{2\lambda}, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\frac{\lambda}{2};$$

d'où

$$(2) \qquad s = \sigma = -\frac{r}{2\lambda} - \frac{\lambda t}{2} + c_0,$$

c'est-à-dire, en posant $c = 2\lambda c_0$, l'équation du second ordre

$$(3) \qquad r + 2\lambda s + \lambda^2 t = c.$$

Nous poserons

$$(4) \qquad s + \lambda t = u; \qquad \text{d'où} \quad r + \lambda s = c - \lambda u,$$

et prendrons pour variables x, y, z, p, q, t, u. La base du faisceau F associé à (3) sera

$$X_1 = D_x + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + \lambda\left(D_y + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}\right),$$

$$X_2 = D_y + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial u},$$

ou, plus explicitement,

$$(\mathrm{F}) \quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + (p + \lambda q)\frac{\partial f}{\partial z} + (c - \lambda u)\frac{\partial f}{\partial p} + u\frac{\partial f}{\partial q}, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + (u - \lambda t)\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Les formules de structure seront, en posant, pour abréger,

$$(5) \qquad h = X_2\lambda, \qquad k = 2uX_2\lambda - tX_1\lambda - X_2 c, \qquad Af = \frac{\partial f}{\partial q} - \lambda\frac{\partial f}{\partial p},$$

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} &(X_1, X_2) = -hX_2 + htA + k\frac{\partial f}{\partial p}, \qquad (X_3, X_2) = A, \qquad (X_4, X_1) = A, \\ &(X_4, X_2) = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad (X_3, X_1) = 0, \qquad (X_3, X_4) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'où les conditions d'involution

$$(7)\qquad ht.p_{12}+p_{32}+p_{41}=0,\qquad k.p_{12}+p_{42}=0.$$

On vérifie sans peine que le faisceau de complexes correspondant ne contient qu'un seul complexe singulier, qui est le second des complexes (7), et dont la directrice, définie par $\frac{p_{34}}{k}=\frac{p_{13}}{1}$ fournit le sous-faisceau singulier double

$$(F_1)\qquad \{U=X_1-kX_4,\qquad X_3\}.$$

Comme

$$(X_3, A)=\left(X_3, \frac{\partial f}{\partial p}\right)=(X_4, A)=\left(X_4, \frac{\partial f}{\partial p}\right)=0,$$

les transformations principales sont X_3 et X_4.

9. Pour tout faisceau du second type, nous appellerons *sous-faisceau principal*, le sous-faisceau de degré 3 qui contient le sous-faisceau singulier et les transformations principales. C'est ici le sous-faisceau

$$(F_0)\qquad \{X_1, X_3, X_4\}.$$

Le dérivé de ce sous-faisceau principal est, d'après (6),

$$(F'_0)\qquad \{X_1, A, X_3, X_4\},$$

et comme l'on a

$$(X_3, X_1)=(X_3, A)=(X_4, X_3)=0,\qquad (X_4, A)=0,\qquad (X_4, X_1)=A,$$

X_3 et X_4 sont distinguées, dans ce dérivé. Donc :

Pour qu'un faisceau du second type soit associé à une équation linéaire, il faut que ses transformations principales soient des transformations distinguées de son sous-faisceau principal.

Nous allons voir que *cette condition est suffisante*.

10. Nous constaterons, en effet, que si cette condition est vérifiée pour une équation non linéaire, celle-ci est une équation de Monge-Ampère. Nous reprenons, à cette effet, les équations (1) où λ ne sera plus indépendant de r et t. La détermination de $s=\sigma$ dépend de l'intégration du faisceau

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\lambda}{2}\frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial s}\right\}. \tag{8}$$

La condition pour qu'il soit complet est

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \lambda^2 \frac{\partial \lambda}{\partial r} = 0. \tag{9}$$

On retrouve le type des équations (7) du n° **6**. On a donc

$$r - \lambda^2 t = \psi(\lambda). \tag{10}$$

En prenant λ comme variable à la place de r, (8) devient

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda\frac{\partial f}{\partial s}, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{2\lambda t + \psi'}{2\lambda}\frac{\partial f}{\partial s}\right\}, \tag{11}$$

et l'on a l'invariant

$$s + \lambda t - \chi(\lambda) \quad \text{avec} \quad \psi' = -2\lambda\chi'.$$

On posera donc $\chi = \varphi'(\lambda)$, ce qui donnera $\psi = 2(\varphi - \lambda\varphi')$; et l'on aura

$$s + \lambda t = \varphi', \qquad r - \lambda^2 t = 2(\varphi - \lambda\varphi'). \tag{12}$$

Les équations du second ordre à sous-faisceau singulier double se présentent donc sous la forme

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t = \varphi(x, y, z, p, q, \lambda), \qquad s + \lambda t = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}, \tag{13}$$

ce qui est un résultat bien connu.

Prenant comme variables $x, y, z, p, q, t, \lambda$, nous aurons comme base du faisceau associé à l'équation

$$X_1 = D_z + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + \lambda\left(D_y + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}\right),$$

$$X_2 = D_y + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial \lambda},$$

c'est-à-dire

$$\text{(F)} \quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + (p + \lambda q)\frac{\partial f}{\partial z} + (2\varphi - \lambda\varphi')\frac{\partial f}{\partial p} + \varphi'\frac{\partial f}{\partial q}, \\ X_2 &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + (\varphi' - \lambda t)\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}, \qquad X_3 = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad X_4 = \frac{\partial f}{\partial \lambda}.\end{aligned}\right.$$

Les relations de structure seront, en posant

$$(14)\qquad h=\varphi''-t,\qquad k=X_1\varphi'-2X_2\varphi,\qquad l=-X_2\varphi',\qquad Af=\frac{\partial f}{\partial q}-\lambda\frac{\partial f}{\partial p},$$

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{lll}(X_1,X_2)=k\dfrac{\partial f}{\partial p}-lA, & (X_3,X_2)=A, & (X_4,X_1)=X_2+hA,\\ (X_4,X_2)=h\dfrac{\partial f}{\partial p}, & (X_3,X_4)=0, & (X_3,X_1)=0;\end{array}\right.$$

et les conditions d'involution sont, par suite,

$$(16)\qquad k.p_{12}+hp_{42}=0,\qquad l.p_{12}+p_{32}+hp_{41}=0.$$

Il n'y a dans le faisceau de complexes linéaires défini par ces deux complexes de base qu'un seul complexe singulier (double) qui est le premier de ces deux complexes (16). Sa directrice donne le sous-faisceau singulier double

$$(F_1)\qquad \{U=X_1-k_0X_4,X_3\},\qquad k_0=\frac{k}{h}=\frac{2X_2\varphi-X_1\varphi'}{t-\varphi''}.$$

et le sous-faisceau principal (n° **9**) de F est

$$(F_0)\qquad \{X_1,X_3,X_4\}.$$

Son dérivé est, d'après (15)

$$(F'_0)\qquad \{X_1,B,X_3,X_4\},\qquad Bf=\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+(\varphi'-\lambda\varphi'')\frac{\partial f}{\partial p}+\varphi''\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Et l'on a

$$\begin{array}{lll}(X_3,X_1)=0, & (X_3,X_4)=0, & (X_3,B)=0,\\ (X_4,X_1)=B, & (X_4,X_3)=0, & (X_4,B)=\varphi'''A.\end{array}$$

Donc X_3 est toujours distinguée dans F'_0; mais X_4 ne l'est que si, $\varphi'''=0$, c'est-à-dire si φ est un trinome du second degré en λ,

$$\varphi=\alpha\lambda^2+2\beta\lambda+\gamma,\qquad (\alpha,\beta,\gamma \text{ fonctions de } x,y,z,p,q).$$

Les équations (12) deviennent alors

$$(17)\qquad s-\lambda t=2(\alpha\lambda+\beta),\qquad r-\lambda^2t=2(\alpha\lambda^2-\gamma),$$

et l'élimination de λ donne, pour l'équation du second ordre en question,

$$(18)\qquad (r-2\gamma)(t-2\alpha)-(s+2\beta)^2=0.$$

C'est donc l'équation de Monge-Ampère la plus générale dont l'interprétation géométrique en r, s, t soit un cône du second degré, équipollent au cône $rt - s^2 = 0$. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

11. Revenons sur le cas des faisceaux du premier type, ayant un sous-faisceau de transformations principales de degré 2, en supposant que la condition énoncée à la fin du n° **6** ne soit remplie que pour un seul des dérivés partiels.

On a alors, par exemple,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \lambda_1^2 \frac{\partial \lambda_1}{\partial r} = 0, \qquad \lambda_1^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \lambda_1 = 0. \tag{19}$$

Premier cas : $\frac{\partial \lambda_1}{\partial r}$ *et* $\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}$ *ne sont pas nuls tous les deux.* — Alors

$$r - \lambda_1^2 i = \varphi(\lambda_1), \tag{20}$$

et la détermination de $s = \sigma$ se ramène à l'intégration de

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \lambda_1^2 \frac{\partial f}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial s} = 0, \tag{21}$$

qui se réduit, si l'on prend λ_1 et t pour variables, eu égard à (19), à

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial s} = 0.$$

D'où la solution, avec deux fonctions arbitraires ψ et χ, donnée par le système

$$r - \lambda_1^2 t = \psi(\lambda_1), \qquad s + \lambda_1 t = \chi(\lambda_1), \tag{22}$$

qui représente en r, s, t la surface réglée la plus générale ayant $rt - s^2 = 0$ pour cône directeur.

Cette surface ne peut pas être développable; car on aurait alors $\psi' = -2\lambda_1 \chi'$; et l'on retomberait, comme au n° **10**, sur une équation du deuxième ordre à sous-faisceau singulier double.

Deuxième cas : $\frac{\partial \lambda_1}{\partial r} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = 0$. — La solution est alors, (21) ayant pour intégrales $r - \lambda_1^2$ et $s + \lambda_1 t$ où λ_1 ne dépend que de x, y, z, p, q.

$$s + \lambda_1 t \equiv \Phi(r - \lambda_1^2 t). \tag{23}$$

Cette équation définit un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à une des génératrices du cône $rt - s^2 = 0$.

On retrouve donc ici les deux cas où l'équation du second ordre a *une seule famille de caractéristiques du premier ordre*. Ce cas est donc caractérisé par la condition que l'*un* (*et un seul*) *des dérivés partiels du faisceau associé a une transformation distinguée*.