JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARNAUD DENJOY

Le facteur primaire de Weierstrass

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 285-292.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__285_0>

Le facteur primaire de Weierstrass ;

PAR ARNAUD DENJOY.

Par son enseignement oral et son *Traité d'Analyse*, M. Goursat s'est fait, après Hermite, le propagandiste fervent et très écouté des conceptions de Cauchy dans la théorie des fonctions de variables complexes. Je me rappelle un éminent géomètre allemand me disant il y a près de trente ans : « C'est grâce au livre de M. Goursat que j'ai parfaitement compris pour la première fois ce qu'est une fonction analytique. »

Cauchy traita comme étant indissolublement liées l'une à l'autre, la partie réelle et la partie imaginaire, aussi bien dans la fonction que dans la variable indépendante. Cette méthode synthétique conduisit son créateur à des succès immédiats éclatants, comme l'histoire des mathématiques n'en avait pas enregistré de pareils depuis l'invention du calcul infinitésimal. Les continuateurs de Cauchy, Weierstrass et les représentants de l'école française après 1870, ont montré la richesse et la fécondité des idées de Cauchy. Mais la synthèse systématique favorise souvent le goût stérile des raisonnements formels. Les progrès de la théorie des fonctions analytiques auraient pu se ralentir et s'arrêter si la recherche ne s'était engagée dans la voie ouverte par Riemann. Avec celui-ci, la dissociation des variables complexes en leurs éléments réels, particulièrement l'application de la théorie des fonctions harmoniques au logarithme du module d'une fonction analytique, a de beaucoup reculé les bornes où s'arrêtaient les méthodes de Cauchy. La brillante école des pays scandinaves s'inspirant de la pensée de Riemann, ne cesse pas d'en démontrer la profondeur.

La théorie des fonctions entières est l'un des domaines où les deux sortes de conceptions se sont tour à tour essayées. L'étude en fut inaugurée par le célèbre développement de Weierstrass mettant en évidence les zéros de la fonction. Le produit de Weierstrass fut l'objet ou l'origine de nombreux travaux parmi lesquels on doit citer ceux de Laguerre, H. Poincaré, E. Borel, P. Boutroux, E. Lindelöf. La notion du produit canonique fut précisée. J'y ai moi-même consacré ma Thèse de doctorat. Ces sujets ne suscitent plus le même intérêt depuis qu'à l'examen externe des représentations formelles s'est substituée, avec une efficacité incomparablement supérieure, l'estimation directe des nombres, dans l'esprit de Riemann. L'initiative incontestable des géomètres scandinaves dans ce sujet ne doit pas faire oublier leurs précurseurs lointains, et tout d'abord M. Hadamard.

Je voudrais, en hommage à la théorie de Cauchy que M. Goursat aura si admirablement servie, ajouter un très bref complément à l'étude déjà si poussée qui a été faite du facteur primaire de Weierstrass.

Suivant la notation habituelle, désignons ce facteur par

$$E(x, p) = (1 - x)e^{x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^p}{p}}.$$

On a

$$\log E(x, p) = \int_0^x \frac{x^p}{x-1}\,dx. \tag{1}$$

Nous supposons l'intégrale prise le long d'un chemin évitant le point 1 et ne tournant pas autour de lui. Par exemple, x n'atteindra jamais le bord inférieur de la coupure rectiligne $1, +\infty$.

Proposons-nous d'obtenir des expressions approchées de $\log E(x, p)$, valables pour toute valeur entière positive de p, en vue de leur application à la théorie des fonctions d'ordre infini.

Choisissant pour $\operatorname{Log} x = \log|x| + i \arg x$ la détermination *principale* définie par $-\pi \leqq \arg x \leqq \pi$, (d'où $\operatorname{Log} 1 = 0$), considérons la fonction $h(x)$ définie par

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\operatorname{Log} x} + h(x),$$

$h(x)$ est holomorphe dans le plan diminué de la coupure formée de l'axe réel négatif. $|h(x)|$ est borné dans ce domaine. Soit A son maximum qui est celui de

$$\left|\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{\log\rho+i\pi}\right|=m(\rho).$$

On a $\mathrm{A}=1$. Car

$$\begin{aligned} m^2(\rho) &= \left(\frac{1}{\rho+1}+\frac{\log\rho}{\log^2\rho+\pi^2}\right)^2+\frac{\pi^2}{(\log^2\rho+\pi^2)^2} \\ &= \frac{1}{(\rho+1)^2}+\frac{2\log\rho+\rho+1}{(\rho+1)[\log^2\rho+\pi^2]}. \end{aligned}$$

Pour $\rho>1$,

$$m^2(\rho)<\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{\pi^2}<\frac{5}{9}<1.$$

Pour $\rho<e^{-1}$,

$$m^2(\rho)<\frac{1}{(\rho+1)^2}<1.$$

Pour $e^{-1}<\rho<1$,

$$m^2(\rho)<\frac{1}{(e^{-1}+1)^2}+\frac{1}{\pi^2}<\frac{2}{3}<1.$$

Donc $\mathrm{A}=1$. Finalement $|h(x)|<1$ quel que soit x, et

$$\log \mathrm{E}(x, p)=\int_0^x \frac{t^p\,dt}{\mathrm{Log}\,t}+\delta\,\frac{x^{p+1}}{p+1} \qquad (|\delta|<1).$$

Posons

$$\int_0^s \frac{ds}{\log s}=\varphi(s).$$

$\varphi(s)$ est le logarithme intégral de s. La surface de Riemann Σ de $\log s$ se compose d'une infinité de feuillets se raccordant par exemple suivant le demi-axe réel négatif et sur chacun desquels $\arg s$ est compris entre deux multiples impairs consécutifs de π. Le point $s=1$ est pôle de $\log s$ sur un seul de ces feuillets ($\arg s=0$). Sur ce dernier feuillet, introduisons la coupure rectiligne réelle $1, +\infty$. Dès lors $\varphi(s)$ est uniforme sur Σ.

Posons $s=x^{p+1}$, avec $-\pi\leqq\arg x\leqq\pi$ et x étranger à la coupure supplémentaire $1, +\infty$ (ou tout au moins à son bord inférieur). Donc $-(p+1)\pi\leqq\arg s\leqq(p+1)\pi$. Le domaine de variation de s est formé de $2(p+1)$ feuillets de Σ, le feuillet médian étant muni de la coupure complémentaire $1, +\infty$. C'est avec ces précisions sur $\varphi(s) = li(s)$ que nous pouvons écrire, quel que soit x,

$$\log E(x, p) = li(x^{p+1}) + \delta \frac{x^{p+1}}{p+1} \qquad (|\delta| < 1). \tag{2}$$

Cela étant 1° supposons que, p croissant indéfiniment, $p(x-1)$ tende vers une limite finie $y = \xi + i\eta$. Alors x^{p+1} tend vers e^y. Si $x = ue^{i\theta}$, u tend vers 1 et θ vers zéro. u^{p+1} tend vers e^ξ et η est la limite de $(p+1)\theta$. Mais η est *a priori* un nombre réel quelconque si grand que l'on veut en valeur absolue. D'après la formule (2),

$$\lim_{p\,\infty} \log E(x, p) = li(e^y) = e^{i\eta} \int_0^{e^\xi} \frac{dw}{\log w + i\eta} \tag{3}$$
$$[y = \xi + i\eta = \lim (p+1) \operatorname{Log} x],$$

l'intégration étant effectuée suivant l'axe réel positif.

2° Supposons que $p\,|x-1|$ croisse indéfiniment. Nous distinguons deux cas suivant la position de x dans le plan complexe. Désignons par Δ la région finie délimitée par : a, la partie de la circonférence de centre 1, de rayon 3, située dans $R(x) < 0$; b, les demi-cercles de diamètres $(2\sqrt{2i}, 1)$ et $(1, -2\sqrt{2i})$ situés dans $R(x) > 0$. Quand x est intérieur à Δ, la plus courte distance d du point 1 au segment rectiligne $(0, x)$ vérifie la condition $1 \geqq \frac{d}{|x-1|} > \frac{1}{3}$. Or

$$\log E(x, p) = \frac{x^{p+1}}{(p+1)(x-1)} + \int_0^x \frac{t^{p+1}}{(p+1)(t-1)^2} dt.$$

Remplaçant dans la seconde intégrale $|t-1|$ par d, nous bornons son module par $\frac{9|x|^{p+2}}{|x-1|^2(p+1)(p+2)}$. Donc

$$\log E(x, p) = \frac{x^{p+1}}{(p+1)(x-1)} \left[1 + \frac{9\delta x}{(p+2)(x-1)}\right]$$
$$(|\delta| < 1, \text{ pour } x \text{ dans } \Delta).$$

3° Soit maintenant x dans la région Δ' complémentaire de Δ. On a $|x| > 1$. Si $R(x) < 0$, $\frac{|x|}{|x|-1}$ et *a fortiori* $\left|\frac{x}{x-1}\right|$ est compris entre 1 et 2.

Si $R(x) > 0$ $\frac{|x-1|}{|x|-1}$ est compris entre 1 et $\frac{3}{2\sqrt{2}-1} < 2$.

Un calcul élémentaire montre que, x étant dans Δ', et si

$$\log E(x, p) = \frac{x^{p+1}}{p(x-1)}[1 + h(x, p)];$$

d'où

$$h(x, p) = -p\left[\frac{1}{(p-k)(p-k-1)x^{k+1}} + \frac{(x-1)}{x^{p+1}}\log(x-1)\right],$$

$h(x, p)$ converge uniformément vers zéro quand $p(x-1)$ croît indéfiniment (x dans Δ'). Finalement

$$(4) \qquad \log E(x, p) = \frac{x^{p+1}}{(p+1)(x-1)}[1 + \varepsilon(x)] \qquad (x \text{ dans } \Delta),$$

$$(5) \qquad \log E(x, p) = \frac{x^{p+1}}{p(x-1)}[1 + \varepsilon'(x)] \qquad (x \text{ dans } \Delta'),$$

ε et ε' tendant vers zéro quand respectivement $\frac{p(x-1)}{x}$ et $p(x-1)$ deviennent infiniment grands.

L'expression (3) de $\log E(x, p)$ rejoindra respectivement (4) et (5) sur le cercle $p|x-1| = \omega(p)$, $\omega(p)$ croissant indéfiniment avec assez de lenteur. L'intérieur υ de ce cercle joint au reste de Δ et de Δ' décompose le plan des x en trois régions dans chacune desquelles vaut l'une des trois expressions obtenues. Celles-ci résolvent le problème de l'approximation de $\log E(x, p)$ avec une erreur infiniment petite quand $p + |x| + \frac{1}{|x|}$ croît indéfiniment. Leur précision ne saurait donc être surpassée si l'on veut s'en tenir à la partie principale de $\log E(x, p)$. Mais elles offrent l'inconvénient que les frontières de leurs zones de validité dépendent de p. L'expérience de ces sujets montre au contraire qu'il peut y avoir avantage à sacrifier la précision des formules si, en contre-partie, leur champ d'application dans le plan des x devient indépendant de p.

C'est en ce sens que nous désirons remplacer la région υ par un cercle indépendant de p et entourant le point 1. Hors de ce cercle, dans Δ et Δ', les expressions (4) et (5) donnent $\log E(x, p)$ avec des erreurs relatives infiniment petites quand p croît. Dans les expressions (4) et (5), équivalentes si p est infiniment grand, remplaçons $\frac{1}{x-1}$ par $\frac{1}{\operatorname{Log} x}+\delta$. On trouve

$$(6)\quad \log \mathrm{E}(x, p)=\frac{x^{p+1}}{(p+1) \operatorname{Log} x}(1+\delta' \eta), \qquad \overline{\lim_{p\,\infty}}\,|\delta'|<1 \text{ si } |\operatorname{Log} x|<\eta<1,$$

formule pouvant se substituer à (3).

En particulier si $\left|\frac{x-1}{x}\right|<\frac{1}{2}$, $|\operatorname{Log} x|$ est inférieur à $\log 2$, et

$$(6\, bis)\quad \log \mathrm{E}(x, p)=\frac{x^{p+1}}{(p+1) \operatorname{Log} x}(1+\delta' \log 2) \qquad \text{pour } 2|x-1|<|x|.$$

La limitation du module de $\mathrm{E}(x, p)$ peut également s'effectuer en partant des formules que j'ai données dans ma Thèse.

Désignons par $\mathrm{M}(u, p)$ le maximum pour $|x|=u$ de $\log|\mathrm{E}(x, p)|$. J'ai montré que, si

$$\mu_1(u)=\frac{u^{p+1}}{(p+1)(u-1)} \qquad \text{pour } u<1,$$
$$\mu_2(u)=u^\tau \qquad (p \leqq \tau \leqq p+1,\ u \text{ quelconque}),$$
$$\mu_3(u)=\frac{u^{p+1}}{p(u-1)} \qquad \text{pour } u>1.$$

$\mathrm{M}(p, u)$ est inférieur à $\mu_1(u)$ pour $u<1$, à $\mu_2(u)$ quel que soit u, à $2\mu_3(u)$ pour $u>1$, et que le rapport de $\mathrm{M}(u, p)$ au plus petit de $\mu_1(u)$ et de u^{p+1} pour $u<1$ et au plus petit de $\mu_3(u)$ et de u^p pour $u>1$ surpasse un nombre positif indépendant de u et de p (une constante universelle). En outre ce rapport tend vers 1 quand $p|u-1|+\frac{1}{u}$ croît indéfiniment.

De là résulte que le rapport de $\mathrm{M}(u, p)$ à $\mu(u)=\frac{u^{p+1}}{1+p|u-1|}$ est compris entre deux constantes universelles positives et que ce rapport tend vers 1 quand $\frac{1}{u}+p|u-1|$ croît indéfiniment.

Mais si $u+\frac{1}{u}$ reste borné, il en est de même de $\frac{u-1}{\log u}$. Posons $\psi(s)=\frac{s}{1+|\log s|}$, $\psi(s)$ est croissant avec s.

Si $\frac{1}{2}<u<2$, le rapport de $\mu(u)$ à $\psi(u^{p+1})$ reste compris entre deux constantes universelles positives.

Dès lors nous évaluons $M(u, p)$ par $\frac{u^{p+1}}{p+1}$ pour $u < \frac{1}{2}$, par $\psi(u^{p+1})$ pour $\frac{1}{2} < u < 2$, par $\frac{u^p}{p}$ pour $u > 2$, et ces valeurs sont exactes à un facteur près compris entre deux constantes universelles positives.

Le problème fondamental de Weierstrass pour la formation des fonctions entières ayant pour zéros une suite donnée a_n, à modules positifs ($r_n = |a_n|$) non décroissants, est la construction d'un produit canonique, c'est-à-dire de croissance minimum

$$Q(z) = \prod E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right).$$

Il s'agit de trouver la loi des p_n. Soit $M(r)$ le maximum de $\log|Q(z)|$ pour $|z| = r$, pour tous les arguments possibles des a_n, leurs modules étant conservés. Donc $M(r) = \Sigma M\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$. On cherche à choisir les p_n de façon que la croissance de $M(r)$ soit le moins rapide possible.

J'ai résolu ce problème en supposant que les r_n croissaient avec une régularité suffisante, et alors les expressions de p_n et de $M(r)$ sont d'une grande précision. Mais pour appliquer ces résultats à une suite donnée r_n quelconque, il faut d'abord substituer à celle-ci une suite régulière approchée $r'_n (\leqq r_n)$. L'écart irréductible des deux suites sera d'autant plus considérable, leurs contacts seront d'autant plus rares que les conditions exigées de r'_n seront plus rigoureuses. Mais alors la divergence de la vraie fonction $M(r)$ et de la fonction approchée $M'(r)$ relative à r'_n pourra être très notable. Aussi peut-il être préférable d'avoir des évaluations de p_n et de $M(r)$ moins précises, mais compatibles avec des croissances d'une régularité beaucoup moins stricte. Le champ d'application des formules obtenues sera plus vaste et la déformation à faire subir à une suite quelconque r_n pour l'introduire dans le domaine de validité de ces formules sera moins accusée.

Soient par exemple r et r' deux nombres positifs ($r < r'$) et n, n' les rangs où ils s'intercalent respectivement dans la suite $r_n = |a_n|$. Soient p, p' les valeurs correspondantes de l'exposant de convergence.

Supposons r fonction de n telle qu'il existe un entier $p(r)$ et des fonctions

$$A = A(r) \geqq 1, \qquad B = B(r) \geqq 1, \qquad \varepsilon = \varepsilon(r) > 0, \qquad \eta = \eta(r) > 0$$
$$[B' = B(r'),\ \eta' = \eta(r')]$$

vérifiant les conditions :

1° Si $r < r' \leqq 2r$,

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^{p'+1} < A\,\frac{n}{n'}\left[1 + \left|\log\frac{n'}{An}\right|\right]^{-\varepsilon}$$

et

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^{p+1} < B'\,\frac{n'}{n}\left[1 + \log B'\frac{n'}{n}\right]^{-\eta'};$$

2° Si $2r < r'$,

$$\frac{1}{p'+1}\left(\frac{r}{r'}\right)^{p'+1} < A\,\frac{n}{n'}\left[1 + \left|\log\frac{n'}{An}\right|\right]^{-1-\varepsilon}$$

et

$$\frac{1}{p}\left(\frac{r'}{r}\right)^{p} < B'\,\frac{n'}{n}\left[1 + \log B'\frac{n'}{n}\right]^{-1-\eta'}.$$

On déduit de là l'évaluation des sommes $M_1(r)$, $M_2(r)$, $M_3(r)$ des $M\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ correspondant respectivement à $r_n < \frac{r}{2}$, $\frac{r}{2} < r_n < 2r$, $r_n > 2r$.

On trouve

$$M(r) < hn\left(\frac{A}{\varepsilon} + \frac{B}{\eta}\right),$$

h étant une constante universelle.

L'étude des relations de croissance entre un produit canonique et la suite des modules de ses zéros telle que je l'avais entreprise dans ma Thèse pourrait ainsi être poursuivie avec des hypothèses beaucoup plus larges.