JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Questions proposées relatives à la théorie des fonctions abéliennes et à celle des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 225-228.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__225_0>

Questions proposées relatives à la théorie des fonctions abéliennes et à celle des équations différentielles;

PAR ÉMILE PICARD.

Je me permets de proposer ici deux questions, qui ne sont peut-être pas indignes du géomètre éminent à qui est dédié ce tome du *Journal de Mathématiques*. Ce sera ma contribution au Volume de son Jubilé.

I.

1. On sait qu'on peut trouver sur une courbe algébrique une série de groupes de n points dépendant de n paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un groupe de points, et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système de valeurs des u, abstraction faite des périodes. Le nombre n, comme on sait, est égal au genre p de la courbe.

Une question analogue peut être posée pour les surfaces algébriques.

Est-il possible de trouver sur certaines surfaces algébriques des séries de groupes de n points, dépendant de $2n$ paramètres, et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de $2n$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, c'est-à-dire de telle manière qu'à un système de valeurs des u ne corresponde en général qu'un seul groupe de points, et que, inversement, à un groupe arbitraire de la série ne corresponde qu'un seul système des u, aux périodes près?

Cette circonstance se présente pour $n = 1$, et l'on a alors les surfaces hyperelliptiques. On aurait pu penser que pour d'autres valeurs de n, on aurait des classes de surfaces algébriques jouissant de la propriété indiquée. En réalité, il n'en existe pas, comme je l'ai montré autrefois dans un Mémoire inséré dans ce journal ([1]).

Une question analogue peut se poser pour une fonction algébrique de *trois* variables indépendantes donnée par une équation algébrique

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Existe-t-il pour certaines hypersurfaces algébriques de cette nature des séries de groupes de n points dépendant de $3n$ *paramètres et correspondant uniformément à des fonctions abéliennes (non dégénérescentes) de* $3n$ *paramètres ?*

La parité du nombre des variables indépendantes jouait un rôle important dans la démonstration du théorème indiqué plus haut. Avec *trois* variables indépendantes au lieu de *deux*, la démonstration du théorème correspondant (à supposer qu'il soit exact) devra être modifiée. La même question se pose pour les fonctions algébriques d'un nombre *impair* quelconque de variables indépendantes.

2. En restant dans le domaine d'une fonction algébrique de *deux* variables indépendantes, c'est-à-dire dans le cas d'une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

d'autres questions pourraient être examinées. Dans le théorème rappelé ci-dessus, il a été expressément mentionné que la série de groupes de n points devait correspondre uniformément à des fonctions abéliennes *non dégénérescentes*. On pourrait s'affranchir de cette dernière restriction. On serait alors conduit à envisager des intégrales de différentielles totales *mêlées* de l'ensemble des coordonnées $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_n, y_n, z_n)$ des n points, qui ne seraient pas des sommes d'intégrales de différentielles totales correspondant à chacun des n points, ce qui changerait notablement les raisonnements.

(1) *Sur l'impossibilité de certaines séries de groupes de points sur une surface algébrique* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IX, 1903).

II.

3. Passons à une question d'une autre nature. Dans mon Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables inséré jadis dans ce recueil ([1]), j'ai considéré incidemment une équation différentielle à laquelle conduit la théorie des fonctions elliptiques.

Désignons par ω et ω' les périodes de la fonction elliptique *sn* de Jacobi provenant ds l'inversion de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\Delta x} \quad \text{où} \quad \Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

L'expression

$$u = sn(a\omega + b\omega')$$

regardée comme fonction du module k, satisfait, quelles que soient les constantes a et b, à une équation différentielle du second ordre, que nous allons former. Posons

$$a\omega + b\omega' = y,$$

y, regardée comme fonction de k, satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$k(1-k^2)\frac{d^2y}{dk^2} + \frac{dy}{dk}(1-3k^2) - ky = 0. \tag{1}$$

Soit

$$\Omega = \int_0^u \frac{dx}{\Delta x},$$

u étant supposé constant, on peut regarder Ω comme fonction de k. Elle satisfait à l'équation

$$k(1-k^2)\frac{d^2\Omega}{dk^2} + \frac{d\Omega}{dk}(1-2k^2) - k\Omega + \frac{ku(1-u^2)}{(1-k^2u^2)\Delta u} = 0. \tag{2}$$

L'équation $u = sn(a\omega + b'\omega)$ revient à $\Omega = y$. Un calcul facile

---

([1]) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V, 1889).

donne

$$\frac{1}{\Delta u}\frac{du}{dk} + \frac{d\Omega}{dk} = \frac{dy}{dk}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{\Delta u}\frac{d^2 u}{dk^2} - \left(\frac{du}{dk}\right)^2 \frac{u(2k^2u^2 - 1 - k^2)}{\Delta u(1 - u^2)(1 - k^2u^2)} + 2\frac{du}{dk}\frac{ku^2}{\Delta u(1 - k^2u^2)} + \frac{d^2\Omega}{dk^2} = \frac{d^2 y}{dk^2}. \tag{4}$$