JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES GIRAUD

Sur un type d'équations à intégrales principales

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 193-205.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__193_0>

Sur un type d'équations à intégrales principales;

Par Georges GIRAUD.

INTRODUCTION.

Dans certaines questions se sont rencontrées des équations intégrales d'un type qui sera défini dans le présent travail. Indiquons seulement ici que ces équations ressemblent, au premier abord, à des équations de Fredholm; mais l'intégrale, qui figure dans une équation de Fredholm, est remplacée par une limite d'intégrale, étendue à un champ dont on exclut une certaine région infiniment petite. C'est qu'en effet *le noyau de ces équations n'est pas sommable :* si l'on exclut du champ d'intégration, qui est une variété close à m dimensions, une région qui contient à son intérieur le point par rapport auquel on n'intègre pas, le noyau est borné et intégrable dans la région restante et, en choisissant convenablement la région exclue, qu'on fait tendre vers zéro dans toutes ses dimensions, on parvient, pour ces intégrales, à une limite bien déterminée, qu'on nomme la *valeur principale* de l'intégrale considérée, ou encore *l'intégrale principale.* Or il a été établi que les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm s'étendent à ces équations à intégrales principales, pourvu que le paramètre λ, qui figure devant l'intégrale, ne reçoive aucune valeur située sur certaines coupures parfaitement définies, tracées dans le plan complexe [1]; ces coupures sont portées par l'axe purement imaginaire,

[1] *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application* (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, t. 51, 1934, p. 251-372), spécialement III, § 6 à § 8; ce travail sera désigné, dans les citations, par la lettre *i*. *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque* (non encore paru), spécialement III; ce travail sera désigné par *j*. La méthode suivie dans ce second article est

et elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine; en particulier, quand λ est réel, ces théorèmes sont valables.

Ce résultat n'est valable que pour un type particulier d'équations à intégrales principales. Pour un autre type, on a établi que la méthode qui réussit pour le premier type, échoue parfois, bien que toutes les données soient réelles (¹). C'est ce nouveau type qui va être étudié ici. On retrouve des coupures, tracées dans le plan de la variable complexe λ, et hors desquelles les théorèmes de Fredholm s'appliquent; mais ici ces coupures appartiennent à l'axe réel.

La méthode que nous suivrons rejoint celle qui a été suivie pour le premier type étudié, et il suffira de renvoyer à celle-ci pour la fin de la démonstration, qui est toute pareille dans les deux types. Cette méthode n'est autre que celle par laquelle M. Édouard Goursat a démontré les théorèmes fondamentaux pour les équations mêmes de Fredholm (²); une fonction qui se réduit à *zéro* dans le cas des équations de Fredholm, intervient dans nos démonstrations, et il suffit de remplacer partout cette fonction par zéro pour retrouver les raisonnements de M. Édouard Goursat.

Ce travail est divisé en deux chapitres, dont le premier est consacré à une question préliminaire, et le second à l'objet dont nous venons de parler.

CHAPITRE I.

COMPLÉMENT D'UNE ÉTUDE ANTÉRIEURE.

1. Rappel de résultats. — Soit $\mathcal{V}$ une variété *close* à m dimensions ($m \geqq 1$) : tout point de la variété est *intérieur* à une région $\mathcal{R}_\nu$, dont

---

résumée, principalement pour le cas des intégrales doubles, dans l'ouvrage : *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* par Georges Bouligand, Georges Giraud et Paul Delens (78 pages. Paris, 1935).

(¹) *i*, III, § 11.

(²) Édouard Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. 3, 2ᵉ édition (667 pages, Paris 1915), Chap. XXXI, Section II. *Voir* aussi Trajan Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales* (VIII + 152 pages, Paris, 1912), Chap. II.

chaque point est déterminé par m coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$, de façon que le point représentatif, dans l'espace euclidien, puisse varier dans un champ borné. Dans la partie commune à deux régions $\mathcal{R}_\mu$ et $\mathcal{R}_\nu$, on a deux systèmes de coordonnées ou représentations : on suppose que les coordonnées de chaque système sont fonctions continues et continûment dérivables des coordonnées de l'autre système, et que le jacobien est *positif* quand on range les coordonnées des deux systèmes dans leur ordre naturel; la variété $\mathcal{V}$ est donc *orientable*. Nous supposons que les dérivées des coordonnées d'un système, par rapport aux coordonnées de l'autre système, remplissent des conditions de Lipschitz d'exposant quelconque (¹). Enfin nous supposons qu'un nombre fini n de régions $\mathcal{R}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) suffit pour toute la variété $\mathcal{V}$.

Ces hypothèses ne suffiraient pas pour employer la dérivation covariante de Christoffel. Nous nous servirons de certains tenseurs, mais sans employer les notations tensorielles : nous n'emploierons pas les indices supérieurs, et nous ne sous-entendrons aucun signe Σ.

Nous considérons, sur $\mathcal{V}$, un tenseur d'ordre m, alterné si m est $\geqq 2$; nous supposons que, quand les m indices sont les entiers $1, 2, \ldots, m$ rangés dans l'ordre naturel, la composante covariante Ω de ce tenseur est positive, et que Ω remplit une condition de Lipschitz (d'exposant quelconque, comme nous le sous-entendrons désormais) dans chaque région $\mathcal{R}_\nu$. Le produit $\Omega d(x_1, \ldots, x_m) = dV$ sera nommé l'élément de $\mathcal{V}$ (ou la mesure de l'élément).

Soient d'autre part $A_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$) les composantes covariantes d'un tenseur symétrique. On suppose que, en tout point X de $\mathcal{V}$, la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X) z_\alpha z_\beta$ est positivement définie. De plus on suppose que les $A_{\alpha,\beta}$ remplissent des conditions de Lipschitz.

Enfin soient c_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$) les composantes covariantes d'un

---

(¹) Ces conditions portent souvent le nom d'Otto Hölder, qui les employa en 1882 (*Beiträge zur Potentialtheorie*, Inauguraldisssertation, 71 pages, Tübingen). Mais R. Lipschitz les employa en 1864 [*De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrarium ... disquisitio* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 63, p. 296-308)].

tenseur simple. Ces composantes remplissent des conditions de Lipschitz.

Nous avons considéré antérieurement des équations à intégrales principales

$$(1) \qquad \rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A = f(X),$$

où l'intégrale est la limite, pour η tendant vers zéro, de l'intégrale étendue à ce qui reste de $\mathcal{V}$ quand on en retranche la région

$$(2) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - a_\alpha)(x_\beta - a_\beta) < \eta^2.$$

La fonction donnée $f(X)$ remplit une condition de Lipschitz. Quand A est assez voisin de X pour que les deux points appartiennent à une même région $\mathcal{R}_\nu$, on peut écrire

$$(3) \quad G(X, A) = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\pi^{-\frac{m+1}{2}} \Sigma_\alpha c_\alpha(X)(x_\alpha - a_\alpha) \times [\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)]^{-\frac{m+1}{2}} + G_2(X, A);$$

la fonction $G_2(X, A)$ vaut $O[L^{h-m}(X, A)]$ $(h > 0)$ [1], où la distance L est comptée dans l'espace euclidien correspondant à la région $\mathcal{R}_\nu$; de plus on suppose qu'on a

$$G_2(X, A) - G_2(Y, A) = O[L^h(X, Y)]\,l^{-m}(X, Y; A),$$

où $l(X, Y; A)$ est la plus courte distance de A au segment de droite XY, dans le même espace euclidien; enfin on suppose qu'on a

$$G_2(X, A) - G_2(X, B) = O[L^h(A, B)]\,l^{-m}(A, B; X).$$

Si les points X et A n'appartiennent pas à une même région $\mathcal{R}_\nu$, on suppose que G remplit une condition de Lipschitz relativement à chacun d'eux. L'inconnue ρ sera cherchée uniquement parmi les fonctions qui remplissent des conditions de Lipschitz; l'intégrale principale existe alors.

---

[1] O est le symbole de Landau : $z = O(y)$ signifie que $\frac{z}{y}$ est borné.

Nous savons (¹) qu'il existe un noyau résolvant $N(X, \Xi; \lambda)$, doué des propriétés suivantes. Si X et Ξ sont distincts, cette fonction est méromorphe par rapport à λ en dehors de deux coupures C tracées sur l'axe purement imaginaire, et les affixes des pôles sont indépendants de X et de Ξ. Pour définir les coupures C, définissons les quantités $a_{\alpha,\beta}$ à l'aide des relations

$$\Sigma_\gamma a_{\alpha,\gamma} A_{\beta,\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{pour} \quad \alpha = \beta \end{cases} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

et désignons par D le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$, qui est l'inverse de celui des $A_{\alpha,\beta}$; posons

$$\mu(X; \lambda) = \lambda \Omega \sqrt{D \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta}, \tag{4}$$

où toutes les fonctions du second membre sont prises en X; les coupures C sont l'ensemble des points λ tels que $\mu^2 + 1$ devienne négatif ou nul en au moins un point X de $\mathcal{V}$. Si X et Ξ n'appartiennent pas à une même région $\mathcal{R}_\nu$, et si λ a une valeur fixe, n'appartenant pas à C et ne coïncidant pas avec un pôle de N, ce noyau remplit une condition de Lipschitz par rapport à chacun des deux points. Si X et Ξ appartiennent à une même région $\mathcal{R}_\nu$, N est la somme d'une fonction N_2 qui, pour la valeur considérée de λ, remplit les conditions énoncées plus haut pour G_2, et d'une fonction de X et des différences $x_1 - \xi_1, \ldots, x_m - \xi_m$, cette fonction étant positivement homogène et d'ordre $-m$ par rapport à ces différences; cette dernière fonction est holomorphe par rapport à ces différences, supposées non simultanément nulles, et par rapport aux fonctions $\Omega(X)$, $A_{\alpha,\beta}(X)$, $c_\alpha(X)$, par l'intermédiaire desquelles elle dépend de X. La valeur nulle de λ n'est pas un pôle de N, et l'on a

$$N(X, \Xi; 0) = G(X, \Xi).$$

En changeant la notation du travail antérieur, nous nommons $\Phi(X; \lambda)$ une fonction qui dépend de X par l'intermédiaire des fonctions Ω, $A_{\alpha,\beta}$ et c_α, par rapport auxquelles et à λ elle est holomorphe tant que λ n'est

(¹) *i*, III, § 6 et § 7; *j*, III.

pas sur C, et qui est telle qu'on ait ([1])

$$(5)\qquad \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(A, \Xi)\rho(\Xi)\, dV_\Xi\, dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{V}}^{(m)} \rho(\Xi) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi - \Phi(X; \lambda)\, \rho(X),$$

quelle que soit la fonction donnée ρ, pourvu qu'elle remplisse une condition de Lipschitz; toutes les intégrales qui figurent dans cette identité sont prises en valeurs principales, et les régions infiniment petites qu'on exclut autour de A, de X ou de Ξ, sont toujours du type (2); on a aussi d'autres identités analogues à (5), et qui résultent de (5)(*i*, I, § 13); la fonction $\Phi(X; \lambda)$ est paire par rapport à λ, elle n'est jamais égale à λ^{-2} quand λ n'est pas sur C, et elle est comprise entre zéro et λ^{-2} quand λ est réel. Enfin, quels que soient les points distincts X et Ξ, situés sur $\mathcal{V}$, et quels que soient les paramètres λ et μ, distincts et non situés sur C, et qui ne coïncident pas avec des pôles de N, on a l'identité

$$(6)\qquad \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) N(A, \Xi; \mu)\, dV_A = \frac{N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu}$$
$$+ \mu\Phi(\Xi; \mu) N(X, \Xi; \lambda) + \lambda\Phi(X; \lambda) N(X, \Xi; \mu).$$

Quand λ, non situé sur C, n'est pas un pôle de N, l'équation (1) a une et une seule solution, qui est

$$(7)\qquad \rho(X) = f(X)[1 - \lambda^2\Phi(X; \lambda)] + \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A.$$

Si λ est un pôle, non situé sur C, on a deux autres propositions, tout à fait semblables aux théorèmes de Fredholm.

2. Généralisation d'une identité. — D'après une propriété générale (*i*, I, § 11; *j*, I, § 10), il existe pour des valeurs λ et μ données, qui n'appartiennent pas à C, une fonction $\Phi^*(X)$ telle qu'on ait, pour toute

---

([1]) Avec la notation des articles *i* et *j*, il faudrait dans ce qui suit remplacer cette fonction Φ par $\dfrac{\Phi}{1 + \lambda^2\Phi}$.

fonction $f(X)$ remplissant une condition de Lipschitz,

$$(8)\quad \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(A, \Xi; \mu) f(\Xi)\, dV_\Xi\, dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{V}}^{(m)} f(\Xi) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) N(A, \Xi; \mu)\, dV_A\, dV_\Xi - \Phi^*(X) f(X).$$

Nous voulons donner une expression de Φ^*.

Remplaçons d'abord dans (6) μ par *zéro* et λ par μ :

$$\mu \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \mu) G(A, \Xi)\, dV_A = N(X, \Xi; \mu) - G(X, \Xi)[1 - \mu^2 \Phi(X; \mu)].$$

Dans cette identité, remplaçons X par B, multiplions les deux membres par $N(X, B; \lambda) dV_B$, et intégrons sur $\mathcal{V}$; en utilisant l'identité (6), nous obtenons

$$\mu \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(A, B; \mu) G(B, \Xi)\, dV_B\, dV_A$$
$$= \frac{N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} + \mu\Phi(\Xi; \mu) N(X, \Xi; \lambda) + \lambda\Phi(X; \lambda) N(X, \Xi; \mu)$$
$$- \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda)[1 - \mu^2\Phi(A; \mu)] G(A, \Xi)\, dV_A.$$

Le premier membre s'écrit aussi (même raisonnement que dans *i*, III, § 7)

$$\mu \int_{\mathcal{V}}^{(m)} G(B, \Xi) \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) N(A, B; \mu)\, dV_A\, dV_B$$
$$- \mu\Phi^*(X) G(X, \Xi) + \mu\Phi(\Xi; \mu) N(X, \Xi; \lambda).$$

Cette expression se transforme encore à l'aide de (6); après réduction des termes semblables, il vient

$$- \mu \frac{1 - \lambda(\lambda - \mu)\Phi(X; \lambda)}{\lambda - \mu} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, dV_A - \mu\Phi^*(X) G(X, \Xi)$$
$$= \frac{N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} + \lambda\Phi(X; \lambda) N(X, \Xi; \mu)$$
$$- \frac{\lambda}{\lambda - \mu} \int_{\mathcal{V}}^{(m)} N(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, dV_A.$$

Les deux intégrales se transforment encore au moyen de l'identité (6), où l'on remplace un des paramètres par zéro; après nouvelles réductions, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\mu\Phi^*(X)G(X,\Xi)\\&\quad=\mu G(X,\Xi)\frac{\lambda\Phi(X;\lambda)[1-\mu^2\Phi(X;\mu)]-\mu\Phi(X;\mu)[1-\lambda^2\Phi(X;\lambda)]}{\lambda-\mu}.\end{aligned}$$

Ce calcul suppose $\lambda-\mu\neq 0$; si en outre μ n'est pas nul, nous avons donc, en tout point X où $G(X, \Xi)$ n'est pas identiquement nul,

$$(9)\qquad \Phi^*(X)=\frac{\lambda\Phi(X;\lambda)-\mu\Phi(X;\mu)}{\lambda-\mu}+\lambda\mu\Phi(X;\lambda)\Phi(X;\mu)\qquad(\lambda\neq\mu).$$

En un point X où $G(X, \Xi)$ serait identiquement nul, $N(X, \Xi; \lambda)$ serait sommable par rapport à Ξ, et les fonctions $\Phi(X; \lambda)$ et $\Phi^*(X)$ seraient nulles, quels que fussent λ et μ; la formule (9) resterait donc valable. Elle reste valable pour $\mu=0$ et $\lambda\neq 0$, car elle se réduit à $\Phi^*(X)=\Phi(X; \lambda)$. Enfin pour $\lambda=\mu$, on voit par continuité [*i*, I, § 12, formule (33)] qu'on a

$$(9\ bis)\qquad \Phi^*(X)=\Phi(X;\lambda)+\lambda\Phi'_\lambda(X;\lambda)+\lambda^2\Phi^2(X;\lambda)\qquad(\mu=\lambda).$$

CHAPITRE II.

NOUVEAU TYPE D'ÉQUATIONS A INTÉGRALES PRINCIPALES.

1. Définition d'un nouveau type d'équations a intégrales principales. — Nous conservons à toutes les lettres leur signification du Chapitre précédent. Désignons par $H(X, \Xi)$ une fonction qui, quand X et Ξ appartiennent à une même région $\mathcal{R}_\nu$, est la somme de

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\omega(X)\Omega(X)\sqrt{D(X)}\{m[\Sigma_\alpha c_\alpha(X)(x_\alpha-\xi_\alpha)]^2\\&\qquad-\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}a_{\alpha,\beta}(X)c_\alpha(X)c_\beta(X)A_{\gamma,\delta}(X)(x_\gamma-\xi_\gamma)(x_\delta-\xi_\delta)\}\\&\qquad\times[\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)]^{-\frac{m+2}{2}}\end{aligned}$$

et d'une fonction $H_2(X, \Xi)$ qui satisfait aux hypothèses énoncées à propos de G_2; la fonction donnée $\omega(X)$ remplit une condition de Lipschitz; quand X et Ξ n'appartiennent pas à une même région $\mathcal{R}_\nu$, H remplit une condition de Lipschitz par rapport à chacun des deux points.

Nous considérons alors l'équation

$$\sigma(X) - \lambda \int_{\mathcal{V}}^{(m)} H(X, A)\sigma(A)\, dV_A = g(X), \tag{1}$$

où $g(X)$ est une fonction donnée, qui remplit une condition de Lipschitz; l'inconnue doit, elle aussi, remplir une condition, non donnée, de Lipschitz, et l'intégrale doit être prise en valeur principale. Pour $m = 1$, H serait identique à H_2, et la question n'aurait rien de nouveau; nous supposons en conséquence $m \geqq 2$.

Nous verrons que les trois théorèmes fondamentaux de Fredholm se généralisent comme pour les équations du Chapitre précédent; mais ici les coupures C sont portées par l'axe réel. Si m est $\geqq 3$, ces coupures ne sont pas nécessairement symétriques par rapport à l'origine.

2. Problème auxiliaire. — Soit $f(X)$ une fonction donnée dans l'espace euclidien à m dimensions. Nous supposons que f remplit une condition de Lipschitz, et que la plus grande limite de $\frac{\log |f(X)|}{\log L(O, X)}$, quand $L(O, X)$ augmente indéfiniment, est < -1. Posons

$$G(X, \Xi) = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \pi^{-\frac{m+1}{2}} (x_1 - \xi_1)\, L^{-m-1}(X, \Xi). \tag{2}$$

La fonction

$$G^{(2)}(X, \Xi) = \int_{\text{espace}}^{(m)} G(X, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A$$

a pour expression (i, II, § 3 à § 5)

$$G^{(2)}(X, \Xi) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \pi^{-\frac{m}{2}} [m(x_1 - \xi_1)^2 - L^2(X, \Xi)]\, L^{-m-2}(X, \Xi). \tag{3}$$

Nous voulons résoudre l'équation

$$\rho(X) - \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} G^{(2)}(X, A)\, \rho(A)\, dV_A = f(X), \tag{4}$$

où l'intégrale doit être prise en valeur principale, en excluant du champ une hypersphère infiniment petite dont le centre est X; nous exigeons qu'on ait

$$\varlimsup_{L(O,X)\to\infty} \frac{\log|\rho(X)|}{\log L(O,X)} < -1 \qquad (\overline{\lim} = \text{plus grande limite}),$$

et en outre ρ devra remplir quelque condition de Lipschitz.

Nous partons de l'équation

$$\rho(X) - \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\, dV_A = \varphi(X), \tag{5}$$

où la fonction donnée φ satisfait aux mêmes hypothèses que f. Cette équation admet une et une seule solution quand $\mu^2 + 1$ n'est ni négatif ni nul (j, II, § 7 et § 8). Or (i, II, § 3 et § 8) cette solution appartient aussi à l'équation

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right)\rho(X) - \mu^2 \int_{\text{espace}}^{(m)} G^{(2)}(X, A)\rho(A)\, dV_A \\ = \varphi(X) + \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} G\ \ (X, A)\varphi(A)\, dV_A,\end{aligned} \tag{6}$$

qui se confond avec (4) si l'on a

$$m\mu^2 = \lambda(m + \mu^2), \tag{7}$$

$$\varphi(X) + \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} G(X, A)\varphi(A)\, dV_A = \left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right) f(X). \tag{8}$$

L'équation (7) donne pour μ deux valeurs opposées, et nous choisissons n'importe laquelle. Si λ est imaginaire, ou bien s'il est réel mais situé dans l'intervalle

$$-\frac{m}{m-1} < \lambda < m, \tag{9}$$

$\mu^2 + 1$ n'est ni négatif ni nul; nous écartons tout autre cas, car $\mu^2 + 1$ serait alors $\leqq 0$. Dans ces conditions, l'équation (8) nous donne une et une seule fonction φ,

$$\begin{aligned}\varphi(X) = \left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right)\Big\{ f(X)[1 - \mu^2\Phi(\mu)] \\ - \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; -\mu) f(A)\, dV_A \Big\},\end{aligned} \tag{10}$$

où le noyau résolvant N et la fonction Φ, ici indépendante de X, sont connus. L'équation (5) donne alors

$$(11) \qquad \rho(X) = \varphi(X)[1 - \mu^2\Phi(\mu)] + \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; \mu)\varphi(A)\, dV_A.$$

Entre (10) et (11), nous pouvons éliminer φ; en utilisant les formules (6) et (9) du Chapitre I, formules qui restent valables quoique le champ ne soit pas borné, nous trouvons

$$(12) \quad \rho(X) = \left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right) \Big\{ f(X)[1 - \mu^2\Phi(\mu)] + \frac{\mu}{2} \int_{\text{espace}}^{(m)} [N(X, A; \mu) - N(X, A; -\mu)] f(A)\, dV_A \Big\}.$$

D'autre part si, dans l'équation en $\sigma(X)$

$$(13) \qquad \sigma(X) - \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} G(X, A)\sigma(A)\, dV_A = \left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right) f(X),$$

nous posons

$$(14) \qquad \sigma(X) = \rho(X) + \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\, dV_A,$$

en choisissant μ comme ci-dessus, nous trouvons que toute solution ρ de l'équation (4), s'annulant à l'infini de la façon exigée, conduit, par la formule (14), à une solution σ de l'équation (13), s'annulant à l'infini de la même façon. Or (13) n'a qu'une seule telle solution, pour les valeurs admises de λ,

$$(15) \qquad \sigma(X) = \left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right) \Big\{ f(X)[1 - \mu^2\Phi(\mu)] + \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; \mu) f(A)\, dV_A \Big\};$$

d'autre part nous avons, d'après (14),

$$(16) \qquad \rho(X) = \sigma(X)[1 - \mu^2\Phi(\mu)] - \mu \int_{\text{espace}}^{(m)} N(X, A; -\mu)\sigma(A)\, dV_A;$$

en éliminant σ entre (15) et (16), nous retrouvons l'expression (12), qui est donc la seule solution.

Si nous posons

$$(17)\qquad N^*(X, A; \lambda) = \frac{\mu}{2\lambda}\left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right)[N(X, A; \mu) - N(X, A; -\mu)],$$

$$(18)\qquad 1 - \lambda^2\Psi(\lambda) = [1 - \mu^2\Phi(\mu)]\left(1 + \frac{\mu^2}{m}\right),$$

où μ satisfait à (7), l'équation (4) a, pour les valeurs indiquées de λ, une et une seule solution satisfaisant aux conditions exigées

$$(19)\qquad \rho(X) = f(X)[1 - \lambda^2\Psi(\lambda)] + \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} N^*(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A.$$

Cette fonction $N^*(X, A; \lambda)$ ne dépend de X et de A que par les différences $x_\alpha - a_\alpha$, par rapport auxquelles elle est positivement homogène et d'ordre $-m$; elle est en outre holomorphe par rapport à l'ensemble des $m+1$ variables λ et $x_\alpha - a_\alpha$, pourvu que les m dernières ne soient pas simultanément nulles, et que λ reste dans le champ indiqué. Le fait que la formule (19) résout l'équation (4), entraîne les identités

$$(20)\qquad \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} N^*(X, A; \lambda)\, G^{(2)}(A, \Xi)\, dV_A = \lambda \int_{\text{espace}}^{(m)} G^{(2)}(X, A)\, N^*(A, \Xi; \lambda)\, dV_A$$
$$= N^*(X, \Xi; \lambda) - G^{(2)}(X, \Xi)[1 - \lambda^2\Psi(\lambda)].$$

$$(21)\qquad \int_{\text{espace}}^{(m)} N^*(X, A; \lambda) \int_{\text{espace}}^{(m)} G^{(2)}(A, \Xi) f(\Xi)\, dV_\Xi\, dV_A$$
$$= \int_{\text{espace}}^{(m)} f(\Xi) \int_{\text{espace}}^{(m)} N^*(X, A; \lambda)\, G^{(2)}(A, \Xi)\, dV_A\, dV_\Xi - \Psi(\lambda) f(X),$$

$$(22)\qquad \int_{\text{espace}}^{(m)} G^{(2)}(X, A) \int_{\text{espace}}^{(m)} N^*(A, \Xi; \lambda) f(\Xi)\, dV_\Xi\, dV_A$$
$$= \int_{\text{espace}}^{(m)} f(\Xi) \int_{\text{espace}}^{(m)} G^{(2)}(X, A)\, N^*(A, \Xi; \lambda)\, dV_A\, dV_\Xi - \Psi(\lambda) f(X).$$

Les identités (20) équivalent aux identités

$$(23)\qquad N^*(X, \Xi; 0) = G^{(2)}(X, \Xi),$$

$$(24)\qquad \int_{\text{espace}}^{(m)} N^*(X, A; \lambda_1)\, N^*(A, \Xi; \lambda_2)\, dV_A$$
$$= \frac{N^*(X, \Xi; \lambda_1) - N^*(X, \Xi; \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2\Psi(\lambda_2)\, N(X, \Xi; \lambda_1)$$
$$+ \lambda_1\Psi(\lambda_1)\, N(X, \Xi; \lambda_2),$$

où λ_1 et λ_2 sont arbitraires.

3. Solution de l'équation donnée. — Pour un point donné X, on peut trouver un changement linéaire de variables, conférant à ce point des coordonnées nulles, et qui ramène la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ de $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}$ en ce point à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\pi^{\frac{m}{2}}}\omega\Omega^2 \mathrm{D}\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}c_\alpha c_\beta \frac{ma_1^2 - \mathrm{L}^2(\mathrm{O}, \mathrm{A})}{\mathrm{L}^{m+2}(\mathrm{O}, \mathrm{A})} d(a_1, \ldots, a_m).$$

Posons

$$\lambda_1 = \lambda\omega\Omega^2 \mathrm{D}\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}c_\alpha c_\beta,$$

où toutes les fonctions du second membre sont prises au point X donné. Nommons C l'ensemble des valeurs réelles de λ, telles qu'en au moins un point X de $\mathcal{V}$, l'une des inégalités

$$\lambda_1 \leqq -\frac{m}{m-1}, \qquad \lambda_1 \geqq m,$$

soit valable, et supposons que λ n'appartient pas à C. Dans les variables transformées, la partie positivement homogène et d'ordre $-m$ d'un noyau auxiliaire, qui jouera le même rôle que pour les équations déjà étudiées, sera

$$\frac{\mathrm{N}^*(\mathrm{O}, \mathrm{A}; \lambda_1)}{1 - \lambda_1^2 \Psi(\lambda_1)};$$

on remarque, d'après (18), que le dénominateur n'est pas nul. Cela permet de construire un tel noyau auxiliaire, et les raisonnements sont ensuite identiques à ceux qui convenaient pour le type déjà traité. On voit que C se compose ici des points réels non intérieurs à un certain intervalle $(-a, b)$, et qu'on a

$$0 < a \leqq (m-1)\, b \leqq (m-1)^2 a.$$