

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Surfaces réglées osculatrices à une surface le long d'une courbe

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 15 (1936), p. 151-162.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__151_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Surfaces réglées osculatrices à une surface
le long d'une courbe;*

PAR BERTRAND GAMBIER

(Lille).

1. M. Goursat a écrit une série de beaux Mémoires géométriques où l'intuition se substitue avantageusement au calcul. En reconnaissance pour l'influence que ses travaux ont eu sur les miens, je dédie ce Mémoire à mon professeur, M. Goursat.

Sur une surface quelconque S , traçons au hasard une courbe gauche Γ ; en chaque point M de Γ , traçons les deux tangentes asymptotiques de S , MA et MA' ; chacune engendre une surface R ou R' , réglée; R et R' sont osculatrices entre elles, ainsi qu'à S , tout le long de Γ ; je rappelle, pour éviter toute confusion sur le sens du mot « osculatrice », que deux surfaces S et S_1 sont osculatrices en un point M , si deux courbes Γ et Γ_1 , quelconques tracées sur S et S_1 respectivement, ayant même tangente en M et même plan osculateur en M , ont le même centre de courbure; il est nécessaire et suffisant que S et S_1 soient, d'abord tangentes en M , puis qu'elles y aient même indicatrice; $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ étant les coordonnées de M , puis les valeurs des dérivées partielles pour $x = x_0, y = y_0$ de la cote z d'un point pris sur S ou sur S_1 , les valeurs de $z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0$ sont les mêmes pour $x = x_0, y = y_0$ aussi bien sur S que sur S_1 ; le contact simple entraîne trois conditions, l'osculacion en un point six conditions.

Quand deux surfaces sont tangentes en un point M , le contact étant simple, les deux indicatrices au point M se coupent en quatre points répartis sur deux sécantes, MT, MT' , issues de M ; MT et MT' sont les

tangentes au point double M de l'intersection. Si les deux surfaces se raccordent (avec contact simple) le long d'une courbe gauche Γ , cette courbe compte dans l'intersection pour deux lignes confondues, de sorte qu'en chaque point M de Γ les deux indicatrices sont deux coniques concentriques bitangentes aux extrémités d'un diamètre commun.

Ces préliminaires rappelés, considérons notre surface S du début, la courbe Γ et la surface R , lieu de la tangente asymptotique MA suivie par continuité en faisant varier M sur Γ ; en M , les indicatrices relatives à S et R sont bitangentes aux extrémités du diamètre porté par la tangente MT à Γ , et de plus elles ont une asymptote commune MA : *donc elles coïncident, S et R sont osculatrices tout le long de Γ* ; pour la même raison S et R' sont osculatrices, de sorte que, finalement, *S , R , R' sont osculatrices tout du long de Γ et que Γ compte dans l'intersection de deux quelconques de ces trois surfaces pour trois lignes confondues.*

Nous montrerons bientôt qu'il existe un faisceau de quadriques Q se raccordant tout le long de MA à R , et tout le long de MA' à R' .

Je n'insiste pas sur les cas particuliers tels que le suivant : si Γ est une asymptotique de S , MA' étant la tangente à Γ , la surface R est encore osculatrice à S tout le long de Γ , mais R' se réduit à la développable des tangentes asymptotiques.

Un autre cas particulier est celui où S est réglée : R coïncide avec S ; si même Γ est une génératrice de S , R' est la quadrique osculatrice à R tout le long de Γ ; quant à R , elle se réduit à la génératrice Γ .

2. Voici maintenant un problème un peu moins simple qu'il ne le paraît à première vue. On donne, dans un plan P , deux droites G , G' se coupant au point O , puis le long de G une correspondance homographique point-plan (c'est-à-dire qu'à chaque point M de G correspond homographiquement un plan passant par G), cette correspondance étant telle qu'à O correspond le plan P ; on suppose, de même, donnée sur G' , une correspondance homographique, O ayant encore pour homologue le plan P : *à quelle condition existe-t-il une quadrique Q admettant G , G' pour génératrices, admettant en chaque point M*

(ou M') de G (ou G') comme *plan tangent celui qui a été attaché à M (ou M') dans la correspondance homographique en jeu?*

Une quadrique inconnue dépend de neuf coefficients non homogènes; les conditions imposées s'expriment par neuf relations linéaires (soit entre les coefficients de l'équation ponctuelle, soit entre ceux de l'équation tangentielle), comme on le voit en prenant sur G les points O, M, M_1 ; sur G' les points M', M'_1 .

Si, *sans précaution* dans le choix des deux correspondances, il y avait une solution véritable, cette solution serait unique; or, si $Q^{(1)}$ est une quadrique effective répondant aux conditions, et $P = 0$ l'équation du plan G, G' , toutes les quadriques du faisceau $Q + \lambda P^2 = 0$ répondent aux conditions, et il n'existe que celles-là; donc, dans le cas général, il n'y aura que la quadrique dégénérée $P^2 = 0$; pour obtenir une véritable quadrique, il faut donc une condition exactement, réduisant les neuf équations à huit seulement, et alors il existe un faisceau de quadriques (faisceau tangentiel aussi bien que ponctuel). Il s'agit d'autre part de présenter cette condition sous forme projective; M. Vincensini m'a suggéré la méthode suivante :

Prenons dans le plan P un point μ quelconque (donc situé ni sur G ni sur G') et menons par μ une sécante arbitraire $\alpha MM'$ coupant G en M , G' en M' ; soit Q une quadrique effective, supposée existante, répondant aux conditions; les plans tangents en M et M' à Q se coupent suivant une droite Om , qui est conjuguée de $\mu MM'$ par rapport à Q ; donc Om , décrit le plan Π polaire de μ vis-à-vis de Q ; ce plan coupe P suivant la polaire Π de μ vis-à-vis des deux droites G, G' . Nous savons a priori qu'il existe une condition et une seule, nécessaire et suffisante; donc, peu importe le procédé par lequel on arrive à cette condition (sauf qualités de concision, précision, élégance, etc.). Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

On choisit dans le plan G, G' un point μ arbitraire; par la polaire ε de μ vis-à-vis du système G, G' , on fait passer un plan Π arbitraire; on

(¹) On sait a priori qu'il existe effectivement des cas où cette quadrique véritable existe; il suffit en effet de donner a priori une quadrique Q , de choisir sur elle deux génératrices G, G' de système opposé, d'où résultent les correspondances homographiques (point-plan) sur G et G' .

donne arbitrairement la correspondance point-plan homographique le long de G , en donnant par exemple le plan G, G' , qui correspond à O , puis les plans P_1, P_2 , qui correspondent à deux points M_1, M_2 , de G ; la droite μM_1 perce G' en M'_1 ; on fait correspondre à M'_1 le plan passant par G' et la droite commune à Π et P_1 ; mêmes opérations pour μM_2 ; on a ainsi défini la correspondance homographique (point-plan) relative à G' et associée à la correspondance analogue relative à G .

Ce qui précède prouve que si la vérification, faite pour un point μ du plan (G, G') réussit, elle réussit aussi pour tous les autres points du plan G, G' .

3. Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question soulevée en fin du paragraphe 1 :

Sur une surface S on a choisi une courbe gauche Γ arbitraire et de chaque point M de Γ on a mené les deux tangentes asymptotiques MA, MA' qui engendrent deux surfaces réglées R, R' , osculatrices entre elles ainsi qu'à S , tout le long de Γ ; il s'agit de montrer qu'il existe une quadrique Q se raccordant à R le long de MA et à R' le long de MA' (en réalité il existe même ∞^1 quadriques Q ; nous en choisisons une pour chaque point M).

On remarquera que, la proposition établie, l'enveloppe de la quadrique Q quand M décrit Γ est constituée : 1° par la surface réglée R ; 2° par la surface réglée R' ; 3° par une surface nouvelle B lieu de la conique C complétant la caractéristique de Q . Nous pouvons même remarquer que la conique C coupe G en M_1 , G' en M'_1 (G est la droite MA et G' la droite MA'); le lieu du point M_1 , quand A décrit Γ , est une courbe Γ_1 , tracée sur R et B simultanément; la quadrique Q a un contact simple avec R en tous les points de G , sauf en M et M_1 où elle est osculatrice à R et, de même, elle a un contact simple avec B tout le long de C , sauf aux points M_1 et M'_1 où elle est osculatrice à B ; de la sorte on voit qu'il y a osculation entre B et R tout le long de Γ , et, pour la même raison, osculation entre B et R' tout le long de la courbe analogue Γ'_1 lieu de M'_1 .

Passons maintenant à la démonstration; nous n'avons pas besoin de la surface S , mais simplement de la courbe Γ et de la surface R ; tout le long de Γ , la tangente asymptotique de R , autre que la

génératrice, engendre R' . Nous prenons donc comme variable indépendante s l'arc de Γ ; nous appelons (a, b, c) , (a', b', c') , (a'', b'', c'') les cosinus directeurs de la tangente MT , de la normale principale MN , de la binormale MB en M à Γ , puis (u, v, w) un système de paramètres directeurs de la droite G issue de M , génératrice de R paramètres calculés dans le trièdre M (TNB). Un point de R a donc des coordonnées, fonctions de s et d'un nouveau paramètre ρ .

$$(1) \quad \begin{cases} X = x + \rho(a u + a' v + a'' w), \\ Y = y + \rho(b u + b' v + b'' w), \quad Z = z + \rho(\dots). \end{cases}$$

On calcule les paramètres directeurs de la normale au point (X, Y, Z) à la surface R par les mineurs du tableau

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a + \rho \left[\frac{a'}{R} u - \left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T} \right) v + \frac{a'}{T} w + a \frac{du}{ds} + a' \frac{dv}{ds} + a'' \frac{dw}{ds} \right], & \dots \\ a u + a' v + a'' w, & \dots \end{vmatrix}$$

dont les deux lignes donnent $\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial \rho}, \dots$; pour $\rho = 0$ on trouve évidemment

$$(3) \quad a'' v - a' w, \quad b'' v - b' w, \quad c'' v - c' w.$$

Nous formons maintenant l'équation des directions asymptotiques en un point de R , en multipliant les mineurs du tableau (2) d'abord par $\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}$, puis $\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial \rho}, \frac{\partial^2 Y}{\partial s \partial \rho}, \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial \rho}$, et ajoutant à chaque fois; cela revient d'ailleurs à dériver les lignes de (2); nous nous bornons aux dérivées pour $\rho = 0$, de sorte que les dérivées $\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}, \dots, \frac{\partial^2 X}{\partial s \partial \rho}, \dots$ deviennent simplement, pour $\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}, \dots$,

$$(4) \quad \frac{a'}{R}, \quad \frac{b'}{R}, \quad \frac{c'}{R},$$

puis, pour $\frac{\partial^2 X}{\partial s \partial \rho}$,

$$(5) \quad \frac{a'}{R} u - \left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T} \right) v + \frac{a'}{T} w + a \frac{du}{ds} + a' \frac{dv}{ds} + a'' \frac{dw}{ds}, \quad \dots$$

Nous avons donc pour équation, toujours en M pour $\rho = 0$, $D ds^2 + 2D' ds d\rho = 0$, où D et D' sont les produits de la ligne (3) par

la ligne (4) ou la ligne (5); cela donne, en supprimant le facteur $ds = 0$ qui donne G, le résultat

$$-w \frac{ds}{R} + 2 \left[v \left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{T} \right) - w \left(\frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} + \frac{w}{T} \right) \right] d\rho = 0,$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad ds = \frac{2R}{w} \left[v \frac{dw}{ds} - w \frac{dv}{ds} - \frac{uw}{R} - \frac{v^2 + w^2}{T} \right] d\rho.$$

Comme paramètres directeurs de la tangente asymptotique autre que MG, c'est-à-dire de la droite appelée précédemment MG' qui doit engendrer R', on trouve $\frac{\partial X}{\partial s} ds + \frac{\partial X}{\partial \rho} d\rho, \dots$, nombres calculés pour $\rho = 0$, le quotient $ds : d\rho$ étant donné par (6); nous n'avons besoin d'ailleurs que des paramètres directeurs relatifs au trièdre M(TNB), de sorte qu'il suffit de prendre les coefficients de a, a', a'' dans

$$\frac{\partial X}{\partial s} \cdot \frac{ds}{d\rho} + \frac{\partial X}{\partial \rho};$$

on trouve ainsi

$$(7) \quad \frac{2R}{w} \left(v \frac{dw}{ds} - w \frac{dv}{ds} - \frac{v^2 + w^2}{T} \right) = u, v, w.$$

Cette forme montre clairement l'avantage de supposer $v^2 + w^2 = 1$, chose toujours possible en raison de l'homogénéité, en excluant toutefois le cas où le plan MTG' serait isotrope; je pose donc

$$(8) \quad v = \cos \omega, \quad w = \sin \omega,$$

où ω est une fonction de s et nous avons pour paramètres directeurs de MG et MG'

$$(9) \quad \begin{cases} (\text{MG}) & u & \cos \omega & \sin \omega; \\ (\text{MG}') & \frac{2R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) - u & \cos \omega & \sin \omega. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(10) \quad \begin{cases} u + u_1 = \frac{2R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right), \\ u = \frac{R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) + h(s), \\ u_1 = \frac{R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) - h(s), \end{cases}$$

où ω , h sont deux fonctions arbitraires de s , on voit que la relation $u + u_1 = \frac{2R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right)$ est symétrique en u et u_1 , de sorte que, si la droite de paramètres relatifs $(u, \cos \omega \sin \omega)$ est la génératrice MG et $MG'(u_1, \cos \omega, \sin \omega)$ la direction asymptotique de la surface R lieu de MG, inversement la droite $MG'(u_1, \cos \omega, \sin \omega)$ considérée comme génératrice d'une nouvelle surface R' donne comme direction asymptotique précisément MG : c'est la démonstration analytique de ce fait que R et R' sont osculatrices entre elles le long de Γ . En particulier, si la projection de MG sur le plan normal MBN est choisie de façon à obtenir une surface développable, on a $\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} = 0$ et par suite MG, MG' sont symétriques par rapport au plan normal.

Cela posé, considérons la surface R et les plans tangents aux divers points de MG; on a l'équation du plan tangent au point ρ sur MG, dans le système de référence MTNB en égalant à zéro le déterminant

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} + \frac{du}{ds} - \frac{v}{R} & \frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} + \frac{w}{T} & \frac{dw}{ds} - \frac{v}{T} \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

où la première ligne s'obtient en prenant le coefficient de a , a' , a'' dans le terme explicité à la première ligne de (2) et en divisant par ρ , où la seconde ligne s'obtient de même en prenant les coefficients de a , a' , a'' dans la seconde ligne (2); x_1 , y_1 , z_1 désigneraient les coordonnées courantes. Cette équation s'écrit

$$(11') \quad \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v}{R} \right) (v z_1 - w y_1) + \begin{vmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} + \frac{w}{T} & \frac{dw}{ds} - \frac{v}{T} \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient l'équation du plan tangent au point, de même ρ sur MG [nous rappelons les formules

$$\begin{aligned} (MG) \quad & x + (au + a' \cos \omega + a'' \cos \omega) \rho, \dots \\ (MG') \quad & x + (au_1 + a' \cos \omega + a'' \cos \omega) \rho, \dots \end{aligned}$$

en remplaçant u par u_1 , de sorte que l'intersection des deux plans

tangents a pour lieu, quand ρ varie, le plan défini par l'équation

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{dv}{ds} + \frac{u}{R} + \frac{w}{T} & \frac{dw}{ds} - \frac{v}{T} \\ u & v & w \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{du_1}{ds} & \frac{dv_1}{ds} + \frac{u_1}{R} + \frac{w_1}{T} & \frac{dw_1}{ds} - \frac{v_1}{T} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}.$$

Nous remarquons que, si ρ varie, les points de contact M_1 sur G , M'_1 sur G' varient de sorte que la droite $M_1 M'_1$ reste parallèle à une direction fixe de paramètres directeurs relatifs $u - u_1, 0, 0$; le point μ du paragraphe 2 est rejeté à l'infini dans cette direction. Nous prenons maintenant la trace du plan (12) sur le plan MGG' ou $vz_1 - wy_1 = 0$ et nous n'avons qu'à vérifier qu'elle est la polaire du point μ par rapport au couple de droites MG, MG' .

Nous développons donc l'équation (12) en supprimant le terme $\left(\frac{du}{ds} - \frac{du_1}{ds}\right)(vz_1 - wy_1)$; dans l'ensemble des termes restants nous supprimons le facteur $u_1 - u$ et il reste

$$(13) \quad \left(\frac{dv}{ds} + \frac{w}{T}\right)z_1 - \frac{wx_1}{R} + \frac{z_1}{R}(u_1 + u) - \left(\frac{dw}{ds} - \frac{v}{T}\right)y_1 = 0.$$

Pour obtenir la trace $M\pi$ de ce plan sur le plan MGG' , nous n'avons qu'à prendre $y_1 = v = \cos \omega$, $z_1 = w = \sin \omega$ et l'équation (13) nous donne la valeur de x_1 ; on a

$$(14) \quad x_1 = \left(\frac{1}{T} - \frac{d\omega}{ds}\right) \frac{R}{\sin \omega} + u + u_1 = \frac{R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right).$$

Les paramètres directeurs des droites $MG, MG', M\mu, M\pi$ sont donc

$$(15) \quad \begin{cases} u & \cos \omega & \sin \omega \\ u_1 & \cos \omega & \sin \omega \\ u - u_1 & 0 & 0 \\ \frac{R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right) & \cos \omega & \sin \omega \end{cases}$$

La question revient alors à vérifier que le birapport

$$(16) \quad \left[u, u_1, \infty, \frac{R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T}\right) \right]$$

est égal à -1 ; c'est évident, car le dernier nombre est la demi-somme des deux premiers.

Nous allons maintenant écrire l'équation ponctuelle des quadriques Q se raccordant aux surfaces réglées R, R' le long de MG et MG' . Il est commode pour cela de prendre un nouveau système de référence obtenu en gardant MT pour axe des X , le plan MGG' devenant le plan $MX Y$; cela revient à poser

$$(17) \quad x_1 = X, \quad Y = y_1 \cos \omega + z_1 \sin \omega, \quad Z = -y_1 \sin \omega + z_1 \cos \omega,$$

et l'équation du plan tangent à R au point ρ de MG se déduit de (11), dans le nouveau système, par des combinaisons évidentes sur les deux dernières colonnes; on a ainsi (on remplace v par $\cos \omega$, ω par $\sin \omega$)

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} + \frac{du}{ds} - \frac{\cos \omega}{R} & \frac{u}{R} \cos \omega & -\frac{u}{R} \sin \omega + \frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \\ u & 1 & 0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part, le quadrique a une équation de la forme

$$(19) \quad (X - uY)(X - u_1Y) + \lambda Z^2 + Z(\mu X + \nu Y + \sigma) = 0,$$

où $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ sont certaines constantes; le plan tangent au point $(\rho u, \rho, 0)$ pris sur MG a pour équation

$$(20) \quad \rho(X - uY)(u - u_1) + Z(\mu \rho u + \nu \rho + \sigma) = 0.$$

Ce plan contient le vecteur $(u, 1, 0)$ porté par MG ; il doit contenir le vecteur défini par la première ligne du déterminant (18); on a ainsi une relation, *identique par rapport à*, ρ

$$\begin{aligned} & \rho \left[\frac{1}{\rho} + \frac{du}{ds} - \frac{\cos \omega}{R} - \frac{u^2}{R} \cos \omega \right] (u - u_1) \\ & + \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} - \frac{u}{R} \sin \omega \right) (\mu \rho u + \nu \rho + \sigma) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne les deux conditions

$$(21) \quad \begin{cases} u - u_1 + \sigma \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} - \frac{u}{R} \sin \omega \right) = 0, \\ \left[\frac{du}{ds} - \frac{\cos \omega}{R} (1 + u^2) \right] (u - u_1) + \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} - \frac{u}{R} \sin \omega \right) (\mu u + \nu) = 0, \end{cases}$$

La génératrice MG' fournit les équations analogues, obtenues en remplaçant u par u_1 et inversement; la première équation (21) confrontée avec celle qui en dérive ainsi conduit immédiatement à la condition de compatibilité qui est la première équation (10); ceci serait d'ailleurs la démonstration directe de l'existence des quadriques Q , mais il était intéressant de signaler le critérium de M. Vincensini. Comme on suppose $u - u_1 \neq 0$, c'est-à-dire R non développable et par suite distincte de R' , on peut remplacer la seconde équation par

$$(22) \quad \mu u + \nu = \left[\frac{du}{ds} - \frac{\cos \omega}{R} (1 + u^2) \right] \sigma,$$

on a aussi

$$(22') \quad \mu u_1 + \nu = \left[\frac{du_1}{ds} - \frac{\cos \omega}{R} (1 + u_1^2) \right] \sigma.$$

En tenant compte de (10), on a donc

$$(23) \quad \sigma = \frac{2R}{\sin \omega}, \quad u - u_1 = 2h, \quad \mu = \frac{2R}{\sin \omega} \left[\frac{1}{h} \frac{dh}{ds} - 2 \cos \omega \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

Pour avoir ν , il y a avantage à additionner les équations (22) et (22'); on a ainsi

$$(24) \quad \nu \frac{\sin \omega}{R} = \frac{d}{ds} \left\{ \frac{2R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) \right\} - \frac{2 \cos \omega}{R} + \frac{2 \cos \omega}{R} \left\{ \frac{R^2}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right)^2 - h^2 \right\} - \frac{2R}{\sin \omega} \left(\frac{d\omega}{ds} - \frac{1}{T} \right) \frac{1}{h} \frac{dh}{ds}.$$

Le coefficient λ est resté arbitraire; nous avons donc obtenu notre faisceau.

Nous avons donc obtenu, sans signes de quadratures, l'équation explicite de la quadrique Q à un paramètre dont la caractéristique se compose de deux droites sécantes et d'une conique; cette quadrique dépend de cinq fonctions d'un argument; la courbe Γ fait en effet intervenir les coordonnées y, z de M comme fonctions de x , puis les fonctions u, ω qui définissent MG , puis le coefficient λ (si c'était même nécessaire, on sait que x, y, z, s sur Γ peuvent s'exprimer explicitement, sans signes de quadratures en fonction d'un paramètre auxiliaire, l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - ds^2 = 0$ étant de celles que l'on sait résoudre explicitement).

L'enveloppe de Q comprend les deux surfaces réglées non développables R, R' , puis une surface B engendrée par la conique C , complément de la caractéristique. Cette surface B , ainsi obtenue explicitement par nous, au moyen de cinq fonctions d'un paramètre auxiliaire, est la surface *générale* définie par M. Blutel (*Annales de l'École Normale*, t. 7, 1890) comme lieu d'une conique mobile C avec cône du second degré circonscrit le long de chaque conique.

M. Blutel et moi étudions de nouveau ces surfaces B dans les *Annales de Toulouse* (t. 27, 1935).

Le fait que la surface B trouvée ici est bien la surface B *générale*, découle de deux raisons complémentaires :

a. La surface B *générale* dépend de cinq fonctions d'un argument servant de paramètre variable;

b. La surface B *générale* conduit effectivement à une quadrique de l'espèce étudiée ici.

Pour obtenir ce dernier résultat, il suffit de considérer le cône S circonscrit à B le long de C ; la caractéristique de S se décompose en deux génératrices et la conique C ; on peut donc écrire, l'équation $S = 0$ dépendant d'un paramètre μ ,

$$(25) \quad \frac{dS}{d\mu} \equiv (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1),$$

où $P \equiv \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ est l'équation du plan de C et $P_1 \equiv \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0$ celle du plan des deux génératrices [le résultat (25) est exact pourvu que le premier membre de S ait été, au préalable, remplacé par $S \varphi(\mu)$, où φ est une fonction convenable]. Si l'on considère la quadrique

$$(26) \quad Q \equiv S + \lambda (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2,$$

on a

$$(27) \quad \frac{dQ}{d\mu} \equiv P \left[P_1 + \frac{d\lambda}{d\mu} P + 2\lambda \frac{dP}{d\mu} \right].$$

On peut déterminer λ de sorte que le plan

$$(28) \quad P_1 + \frac{d\lambda}{d\mu} P + 2\lambda \frac{dP}{d\mu} = 0$$

soit tangent à Q ; on a une équation différentielle

$$(29) \quad \lambda^2 f(\mu) + \lambda \frac{d\lambda}{d\mu} f_1(\mu) + \left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2 f_2(\mu) + \lambda f_3(\mu) + \frac{d\lambda}{d\mu} f_4(\mu) = 0,$$

qui a des solutions autres que $\lambda = 0$; chacune d'elles détermine une quadrique Q de l'espèce étudiée ici, on voit même que chaque surface B détermine ∞^1 familles de quadriques de l'espèce étudiée ici.