JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Sur quelques points de théorie des enveloppes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 103-111.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__103_0>

Sur quelques points de théorie des enveloppes;

PAR GEORGES **BOULIGAND**.

---

1. L'hommage que je veux rendre ici à M. Édouard Goursat s'attache indissolublement au souvenir de l'une des toutes premières leçons de son cours de la Sorbonne, qui souleva l'enthousiasme unanime de ma promotion à l'École Normale, en novembre 1909. L'objet de cette leçon avait été d'établir sous quelle forme la méthode des approximations successives de M. Émile Picard conduit, dans les conditions ordinaires, au théorème local sur l'existence des fonctions implicites.

Il s'agissait là, en considérant une équation unique, du cas régulier d'un problème dont les cas singuliers les plus courants ont eux-mêmes une importance capitale : ils tiennent en effet sous leur dépendance la théorie classique des enveloppes (1).

Je me suis attaché, en 1918, à traiter d'une manière systématique les plus simples de ces cas singuliers (2). Mon principe de recherche se trouve exposé dans mon *Cours de Géométrie analytique* (3), en vue de ses applications les plus simples.

En 1922, j'ai donné par ces considérations l'explication appro-

---

(1) Ce fut M. Henri Lebesgue qui, dans une conférence d'agrégation faite en 1912 à l'École Normale, entretint de cette difficulté la promotion ci-dessus nommée.

(2) *Le cas singulier des fonctions implicites et les enveloppes dans le plan* (*Revue de l'enseignement des Sciences*, 12e année, nov.-déc. 1918, p. 225-237).

(3) *Voir* les nos 69, 70, 71 d'une part et les nos 140, 141, 142 d'autre part.

fondie du paradoxe qui se présente lorsqu'à un système

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad g(x, y, z, a) = 0,$$

définissant une famille de courbes gauches à un paramètre, famille en général dépourvue d'enveloppe, on substitue le système

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad R(x, y, z) = 0,$$

dont la dernière équation provient de l'élimination de a entre les deux équations du système précédent (1). En terminant ce dernier exposé, j'examinais sommairement le cas où les courbes $f = 0$, $g = 0$, admettent une enveloppe : sous des conditions appropriées, je montrais que la surface $R(x, y, z) = 0$ admet alors une arête de rebroussement.

Le présent exposé aura pour principal objet la solution du problème suivant :

Établir l'existence de l'arête de rebroussement pour l'enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre

$$f(x, y, z, a) = 0,$$

en précisant des conditions suffisantes en vue de cette existence.

Le rôle joué par cette catégorie d'enveloppes dans la génération des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, lorsqu'on en possède une intégrale complète, montre bien toute l'attention méritée par la question précédente (2).

---

(1) *Sur une notion d'équivalence locale apte à préciser certains points de la théorie des enveloppes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 1, 1923, p. 8-21).

(2) Il se présente à propos des équations différentielles ordinaires d'autres applications de la même théorie. *Cf.* S. K. Zaremba, *Sur l'allure des intégrales d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans le voisinage de l'intégrale singulière* (*Bulletin international de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres*, série A, année 1931, p. 228-321 ; *voir* notamment le théorème I). Relativement à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre et à la présence d'arêtes de rebroussement sur une surface intégrale passant par une courbe donnée, *voir* les exemples traités dans mon travail à l'impression au *Bull. des Sc. Math.* [*Sur le problème de Cauchy pour l'équation* $f(x, y, z, p, q) = 0$].

J'en rendrai l'exposé autonome : cela me donnera l'occasion de rappeler, dans un cas simple, le principe de la méthode commune à toutes les recherches précédentes, qui participent exclusivement du point de vue local.

2. J'étudie d'abord la résolution locale en u de l'équation

$$g(x, y, u) = 0,$$

connaissant une solution x_0, y_0, u_0 pour laquelle g'_u s'annule, tandis que g'_y et g''_{u^2} ne s'annulent pas. Soit P_0 le point qui dans le trièdre $Oxyu$ a pour coordonnées (x_0, y_0, u_0). J'introduirai chemin faisant, outre les dérivées déjà nommées, toutes dérivées utiles, en les supposant toutes continues par rapport à l'ensemble des variables x, y, u.

Vu la continuité, g'_y et g''_{u^2} restent non nulles et gardent un signe constant dans un parallélépipède Π de centre P_0 et d'arêtes parallèles aux axes qu'on peut toujours restreindre de manière que chaque parallèle à Oy le traversant coupe l'ensemble des points $g = 0$ en un point et un seul : cet ensemble est une surface $y = \varphi(x, u)$ dont la portion utile sera désignée par S. Moyennant l'existence et la continuité de g'_x (accompagnant celles de g'_u), S admet un plan tangent continûment réparti [1], lequel devient en P_0 parallèle à Ou.

Étudions maintenant au voisinage de P_0, l'ensemble Γ des points définis par le système

$$g(x, y, u) = 0, \qquad g'_u(x, y, u) = 0;$$

la seconde équation se résout localement par rapport à u sous la forme $u = \bar{u}(x, y)$, vu $g''_{u^2} \neq 0$. La fonction composée

$$\bar{g} = g[x, y, \bar{u}(x, y)]$$

donne, quand on la dérive par rapport à y en restant sur Γ

$$\bar{g}'_y = g'_y + g'_u \bar{u}'_y = g'_y.$$

Vu $\bar{g}'_y \neq 0$, l'équation $\bar{g} = 0$ définit dans le plan xOy, dans un parallélogramme de centre (x_0, y_0), un arc γ admettant la représentation

[1] Il y a planéité du paratingent en chaque point de S.

explicite

$$v = \psi(x),$$

d'où la représentation locale de Γ

$$y = \psi(x), \qquad u = \bar{u}[x, \psi(x)];$$

laquelle montre que Γ est un arc de courbe, doué d'une tangente continue si l'on étend l'hypothèse de continuité à g''_{ux}, g''_{uy} ([1]).

Notons maintenant qu'au voisinage de Γ, chaque section de S par un plan $x = x_0 + \varepsilon$, pour une valeur assez petite de la constante ε, possède un sens de concavité permanent. En effet, nous avons sur S la relation

$$g'_y \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + g''_{y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + 2 g''_{yu} \frac{\partial y}{\partial u} + g''_{u^2} = 0.$$

Sur la courbe Γ, jouant le rôle de contour apparent de S pour la direction de projection cylindrique Ou, nous avons

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

Donc, dans un voisinage suffisamment restreint de Γ (cela dans Π), la dérivée $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ gardera de par nos hypothèses un signe constant. Supposons par exemple que toutes les sections $x = x_0 + \varepsilon$ précédentes tournent, au voisinage de Γ, leur concavité vers les y positifs, ce qui permettra d'établir une figure ([2]).

Cela posé, la courbe $y = \psi(x)$ sépare dans le plan xOy son voisinage en deux régions : du côté $y > \psi(x)$, chaque système (x, y) suffisamment voisin de x_0, y_0 fournit pour u deux déterminations $u_1(x, y)$ et $u_2(x, y)$ se confondant sur γ avec $\bar{u}(x, y)$. Au contraire, du côté $y < \psi(x)$, l'équation $g = 0$ n'a pas de solution en u tendant vers u_0 quand $x - x_0$, $y - y_0$ tendent vers zéro ([3]).

([1]) Il y a unicité de la paratingente à Γ en chaque point.

([2]) Cf. *Cours de Géométrie analytique*, n° **142**.

([3]) La théorie peut s'étendre à la résolution locale d'une équation

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, u) = 0$$

autour d'une solution particulière $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y^0, u^0$, donnant lieu à $g'_{u^0} = 0$,

3. Si nous revenons au plan des xy et considérons la famille de courbes

$$g(x, y, a) = 0,$$

ces courbes, au voisinage du point (x_0, y_0), resteront du côté $y > \psi(x)$ de la séparatrice γ : par un point pris de ce côté, à distance suffisamment petite de (x_0, y_0), il passera deux courbes de la famille (alors qu'il n'en passe aucune, dans ces conditions, du côté $y < \psi(x)$. Démontrer que toutes ces courbes sont tangentes à γ ne soulève alors aucune difficulté, vu la résolubilité de g en y.

Nous sommes donc maintenant en possession des éléments essentiels qui, pour les courbes planes, permettent de résoudre le problème local des enveloppes, dans son cas régulier [1]. Et ces éléments nous seront utiles par la suite.

---

mais à $g'_{y^0} \neq 0$, $g''_{a^2} \neq 0$. On suppose encore la continuité de toutes dérivées du second ordre de g par rapport à l'ensemble des $n + 2$ variables. La remarque de convexité faite au cours du raisonnement ci-dessus se portera dans le cas actuel sur les sections de la variété $g = 0$ par la variété linéaire bidimensionnelle

$$x_1 = x_1^0 + \varepsilon_1, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^0 + \varepsilon_n.$$

[1] Complétons la note précédente en observant qu'une simple modification d'écriture permettrait, dans l'espace à $(n + 1)$ dimensions lieu du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, de traiter du cas régulier de l'enveloppe pour une famille à un paramètre de variétés

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, a) = 0$$

au voisinage d'un système de valeurs $x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0, a^0$ annulant à la fois g et g'_a sans que g'_y et g''_{a^2} s'annulent pour ce système. On pourra d'ailleurs toujours raisonner en supposant l'équation $g = 0$ résolue par rapport à y sous la forme

$$y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a).$$

Si les sections envisagées dans la note ([3]), p. 106, tournent leurs concavités vers les y positifs, le domaine $y > \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pourra s'obtenir comme ***réunion*** des domaines $y > \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)$, du moins en se limitant aux environs du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y^0)$. En pareil cas, un point de contact d'une variété $y = \varphi$ avec l'enveloppe se trouve du côté des y négatifs par rapport aux variétés $y = \varphi$ provenant d'une autre valeur du paramètre : ce point occupe donc une position extrême par rapport à l'un des domaines $y > \varphi$, en ce sens qu'il se trouve sur sa frontière en restant extérieur aux autres domaines analogues. Son ordonnée ne

4. On pressent que la présence d'une arête de rebroussement pour l'enveloppe d'une famille de surfaces à un paramètre se produira dans des conditions généralisant celles où l'enveloppe d'une famille de courbes planes à un paramètre vient à présenter un point de rebroussement.

C'est à l'étude de cette éventualité que nous allons maintenant nous attacher. Les propriétés locales de Γ que nous avons établies au n° 2 seront modifiées si g''_{u^2} s'annule au point P_0 de cette courbe en tant que point isolé ([1]). En continuant à supposer que g'_y reste $\neq 0$ en P_0, nous pourrons raisonner sur les équations particularisées

$$g = y - \varphi(x, u) = 0, \qquad g'_u = -\varphi'_u = 0$$

avec

$$\varphi''_{u^2}(x_0, u_0) = 0, \qquad \varphi'''_{u^3}(x_0, u_0) \neq 0, \qquad \varphi''_{ux}(x_0, u_0) \neq 0.$$

Alors, il passe au point (x_0, u_0) un arc $x = X(u)$ de la courbe $\varphi'_u = 0$ du plan (x, u), arc sur lequel le point (x_0, u_0) n'a pas de rôle singulier. La tangente y est parallèle à l'axe des u. Dans l'espace (x, y, u), la tangente à Γ en P_0, dénué de rôle singulier sur cet arc, est aussi parallèle à l'axe des u. Toute difficulté est ici écartée de par la représentation paramétrique suivante de Γ

$$x = X(u), \qquad y = \varphi[X(u), u]$$

représentation qui donne pour les dérivées

$$x'_u = X'(u), \qquad y'_u = \varphi'_x X'(u)$$
$$x''_{u^2} = X''(u), \qquad y''_{u^2} = \varphi'_x X''(u) + \varphi''_{ux} x'(u) + \varphi''_{x^2} X'^2(u).$$

---

saurait dépasser en aucun cas la valeur de $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, a)$. La même circonstance se produit dans tout problème d'enveloppe, donnant naissance à une enveloppe *pouvant être regardée comme frontière d'un domaine, lequel soit la réunion de domaines limités aux enveloppées.* Le nombre de paramètres dont dépendent ces dernières est indifférent dans tous les cas possibles où l'hypothèse en italiques est réalisée, la recherche sera équivalente à celle de l'extremum, pour $x_1, \ldots, x_n$ donnés, d'une fonction qui dépend à la fois des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des paramètres de la famille (même si quelques-unes des dérivées mises ci-dessus en cause venaient à ne plus exister).

([1]) Le cas où g''_{u^2} s'annule tout le long de Γ pourrait s'étudier dans le même esprit (Cf. *Cours de Géométrie analytique*, p. 260).

Pour le point P_0, nous avons $X'(u) = 0$. D'autre part, la projection de Γ sur le plan des (u, x) étant définie par l'équation

$$\varphi'_u(x, u) = 0,$$

nous aurons le long de Γ

$$\varphi'_u X'(u) + \varphi''_{u^2} = 0$$
$$\varphi''_{ux} X''(u) + \varphi'''_{ux^2} X'^2(u) + 2\varphi'''_{u^2x} X'(u) + \varphi'''_{u^3} = 0.$$

Lorsqu'on l'applique en P_0, la seconde de ces relations nous donne pour $X''(u)$ une valeur finie et non nulle. Nous sommes donc ici dans les conditions (1) où la projection γ de Γ sur le plan des xy présente un rebroussement au point (x_0, y_0).

3. Notre étude préliminaire est terminée. L'extension à l'espace va maintenant se faire très immédiate, si nous supposons que l'équation de notre famille de surfaces, soit

$$f(x, y, z, a) = 0,$$

est résoluble, au moins localement, par rapport à une des coordonnées et peut s'écrire par exemple (2) :

$$z - G(x, y, a) = 0.$$

Nous allons tirer parti des considérations développées au n° **2**. Pour faire correspondre les notations, il sera commode d'appeler g la dérivée de G par rapport à a.

Supposons que, pour le système de valeurs x_0, y_0, a_0, nous ayons

$$g(x_0, y_0, a_0) = 0, \qquad g'_a(x_0, y_0, a_0) = 0,$$
$$g'_y(x_0, y_0, a_0) \neq 0, \qquad g''_{a^2}(x_0, y_0, a_0) \neq 0.$$

Si nous considérons le trièdre $Oxya$, les hypothèses ci-dessus cor-

(1) *Cours de Géométrie analytique*, n° 51.

(2) Il en est ainsi dans un parallélépipède pourvu que le plan tangent d'une surface de la famille passant en un point intérieur à ce parallélépipède ne soit jamais parallèle à l'axe de coordonnées en question.

respondent pour la famille de courbes

$$g(x, y, a) = 0$$

à ce que nous avons appelé cas régulier de la théorie des enveloppes dans le plan (fin du n° **3**). Cela nous conduit à tracer dans le plan des xy une courbe $y = \psi(x)$ d'un côté de laquelle exclusivement nous aurons deux déterminations $a_1(x, y)$ et $a_2(x, y)$ de la fonction a soumise à $g = 0$, déterminations qui se raccordent sur $y = \psi(x)$. A chacune de ces déterminations de a, toujours du côté indiqué de $y = \psi(x)$, l'équation $z = G$ attache une détermination de z. Nous aurons donc deux nappes de l'enveloppe, soudées le long de la courbe

$$y = \psi(x), \qquad z = G[x, y, \bar{a}(x, y)]$$

($\bar{a}$ jouant ici le même rôle que $\bar{u}$ au n° **2**).

Cette courbe est bien une arête de rebroussement de la surface enveloppe, car elle est lieu de points de rebroussement pour les sections $x = x_0 + \varepsilon$ de l'enveloppe : en effet, si l'on donne à x une valeur constante, on se ramène à un problème d'enveloppe d'une famille de courbes planes, dans les conditions envisagées au n° **4**.

L'existence de l'arête de rebroussement est donc établie, moyennant des hypothèses qui mettent en cause les dérivées du troisième ordre de G, donc aussi bien celles de f. Cette arête de reboussement sera définie par le système des trois relations.

$$\begin{aligned} f(x, y, z, a) &= 0, \\ f'_a &= 0, \\ f''_{a^2} &= 0, \end{aligned}$$

au voisinage des valeurs x_0, y_0, z_0, a_0 annulant les trois premiers membres et répondant en outre aux conditions

$$f'_z \neq 0, \qquad f''_{ay} \neq 0, \qquad f'''_{a^3} \neq 0.$$

6. Toutes les circonstances spéciales susceptibles d'affecter les propriétés de l'enveloppe des courbes planes

$$g(x, y, a) = 0$$

exerceraient une répercussion évidente sur la recherche de l'enveloppe des surfaces

$$z - G(x, y, a) = 0 \qquad (\text{avec } g = G'_a).$$

Par exemple, si les courbes $g = 0$, le long d'un arc de leur enveloppe γ, avaient avec celle-ci le contact du second ordre mentionné note [1], p. 108, la courbe de la surface enveloppe des $z - G = 0$ projetée suivant γ perdrait, en ce qui concerne la géométrie visuelle, son rôle d'arête de rebroussement pour cette dernière surface (tout en conservant cependant le rôle de ligne singulière en cas de données algébriques).