JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DELENS

Sur la théorie du potentiel et les congruences isothermes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 73-111.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_73_0>

Sur la théorie du potentiel et les congruences isothermes;

PAR PAUL DELENS.

PREMIÈRE PARTIE.

1. LE PROBLÈME EN CAUSE. — Les belles recherches de M. Georges Bouligand sur un problème de Neumann généralisé, relativement à l'équation de Laplace $\Delta_2 \Phi = 0$ (¹), l'ont conduit à l'étude de cas singuliers par rapport à une théorie générale que vient d'établir M. Georges Giraud (²). Certains de ces cas singuliers et l'étude d'un problème homogène $\mathfrak{T}_0$, sur lequel je reviens dans la Deuxième Partie de ce travail, ont amené M. G. Bouligand au problème $\mathcal{H}$ suivant :

Rechercher (dans le domaine réel) *les congruences* $u(x, y, z) = \alpha$, $v(x, y, z) = \beta$ (α, β constantes) *telles qu'il existe des fonctions* $\varphi(u, v)$, *harmoniques en* (x, y, z) *dans un tube de lignes de la congruence, les valeurs de* φ *à la surface de ce tube pouvant être arbitraires sur chaque ligne de la congruence.*

(¹) G. BOULIGAND, *Sur une extension du problème de Neumann* (*C. R. du Congrès des Sociétés savantes*, 1926) [1]. J'utilise les numéros entre crochets pour les références bibliographiques.

(²) G. BOULIGAND, *Sur les cas singuliers d'un problème aux limites de la théorie du potentiel* (*Ac. royale de Belgique*, *Bull. Cl. des Sciences*, 5ᵉ série, 9, nᵒˢ 10-11, 1933) [2].

L'exposé de M. G. GIRAUD vient de paraître au *Bull. de la Soc. Math. de France* (*Comptes rendus des séances*, 1933, p. 45 et 53). Pour plus de développements, se reporter au fascicule (sous presse) : G. BOULIGAND, G. GIRAUD, P. DELENS, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* (*Actualités scient. et ind.*, *Exposés de Géométrie*, direction E. CARTAN).

Ce problème met en jeu les fonctions $\varphi(u, v)$ de deux variables, déterminées dans une aire à deux dimensions du plan (u, v) (plan de représentation de la congruence) par leurs valeurs arbitraires sur le contour, ce qui peut soulever de délicates questions d'application; nous nous trouverons en effet ramenés, non seulement aux fonctions harmoniques du plan (ou d'une surface, d'après les propriétés de la la représentation conforme), mais plus généralement aux solutions de certaines équations linéaires du deuxième ordre, $\varepsilon_2(\varphi) = 0$, à deux variables et du type elliptique.

On peut rattacher aussi à ce problème et aux recherches de M. Bouligand la question de la classification des congruences de courbes d'après les familles isothermes de surfaces dont elles peuvent être capables; aucune classification de ce genre n'existe, à ma connaissance. Mais en commençant l'étude du problème posé, j'avais le tort d'ignorer un Mémoire fondamental de M. T. Levi-Civita (1), dans lequel l'illustre géomètre italien a complètement déterminé la classe importante des *congruences équipotentielles* — que j'appelle dans la suite *méga-isothermes* ou (H) — qui intéressent le problème $\mathcal{H}$. M. Levi-Civita a employé les puissantes méthodes des transformations infinitésimales de S. Lie et du calcul de Ricci. Cependant, ayant, suivant des indications de M. Bouligand, abordé le problème d'un autre point de vue, j'ai obtenu de nouvelles propriétés des congruences (H), complétant celles mises en évidence par M. Levi-Civita et permettant aussi *l'extension à des problèmes analogues où l'équation de Laplace serait remplacée par une équation plus générale comportant des termes linéaires en φ et ses dérivées du premier ordre*. C'est pourquoi il m'a semblé que la publication de mes résultats et leur comparaison avec ceux de M. Levi-Civita présentait encore quelque intérêt.

---

(1) T. Levi-Civita, *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate* (*Acc. reale delle scienze di Torino, série* II, **49**, 1899) [**3**]; voir aussi un bref résumé dans Ricci *et* Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* (*Math. Ann.*, **54**, 1900; réimpression A. Blanchard, 1923) [**3′**].

M. T. Levi-Civita m'a aimablement rappelé ses recherches après la publication de mes premiers résultats dans une Note aux *Comptes rendus*, **197**, 1933, p. 1163, accompagnant un résumé du Mémoire [2] de M. Bouligand, p. 1179.

2. J'emploierai, pour une fonction $u(x, y, z)$, les notations $\Delta_1 u$ et $\Delta_2 u$ des paramétres différentiels du premier et du deuxième ordre de Lamé, et $\Delta(u, v)$ pour le paramètre mixte du premier ordre relatif à deux fonctions u, v (1); le gradient spatial de la fonction u étant écrit $\nabla u (\nabla = \text{nabla})$, et le symbole $\times$ employé pour la multiplication scalaire, on a

$$\Delta_1 u = \nabla u \times \nabla u, \qquad \Delta(u, v) = \nabla u \times \nabla v, \qquad \Delta_2 u = \operatorname{div} \nabla u.$$

Des notations analogues en δ serviront pour les paramètres différentiels dans le plan (u, v). J'écrirai aussi simplement

$$\varphi(x, y, z) \qquad \text{pour} \qquad \Phi(x, y, z) \equiv \varphi[u(x, y, z), v(x, y, z)],$$

et utiliserai des indices pour les dérivées partielles.

Une fonction φ, harmonique spatiale, sera une solution de l'équation

$$(1) \qquad \Delta_2 \varphi \equiv \varphi_{uu} \Delta_1 u + 2\varphi_{uv} \Delta(u, v) + \varphi_{vv} \Delta_1 v + \varphi_u \Delta_2 u + \varphi_v \Delta_2 v = 0.$$

Une solution de cette équation, répondant aux conditions du problème $\mathcal{H}$, est bien connue : il s'agit des *congruences rectilignes isotropes de Ribaucour* (2) — ou congruences (IR) — pour lesquelles on peut poser

$$(2) \qquad \Delta_1 u = \Delta_1 v, \qquad \Delta(u, v) = 0, \qquad \Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$$

ou, avec les variables complexes conjuguées $U = u + iv$, $V = u - iv$,

$$(2') \qquad \Delta_1 U = \Delta_1 V = 0, \qquad \Delta_2 U = \Delta_2 V = 0.$$

On sait (*voir* par exemple les ouvrages de géométrie différentielle de Darboux, Bianchi, Blaschke) que toute congruence (IR) *réelle* est définie par les intersections de plans isotropes conjugués, appartenant à deux familles dépendant chacune d'un paramètre complexe, les paramètres des deux familles étant conjugués et les fonctions analy-

---

(1) A vrai dire, c'est $\sqrt{\Delta_1 u}$ dans les notations actuelles, et non $\Delta_1 u$, que Lamé appelait paramètre du premier ordre. On tiendra compte aussi que, dans la notation $\Delta(u, v)$, il ne s'agit pas en général d'une fonction de u, v seuls.

(2) M. T. Levi-Civita [3] fait remonter cette solution à Jacobi et Klein; *voir* aussi A. Alayrac, *Extension du procédé de la représentation conforme aux mouvements à trois dimensions* (*C. R. de l'Ac. des Sc.*, **191**, 1930, p. 290), et *Sur certains mouvements à trois dimensions* (*ibid.*, **192**, 1931, p 213).

tiques. Dans chaque famille les plans sont « parallèles » *au sens de la théorie des surfaces*, et l'on vérifie aussi que les familles sont isothermes (*cf.* n° **15**); ce sont les conditions (2'). A toute famille de surfaces (réglées) de la congruence correspondent une famille de surfaces orthogonales et des familles de surfaces isogonales suivant les droites de la congruence. Pour deux familles orthogonales et isothermes, les conditions (2), portées dans (1), donnent

$$\Delta_2\varphi \equiv (\varphi_{uu} + \varphi_{vv})\Delta_1 u \equiv \delta_2\varphi . \Delta_1 u = 0; \tag{3}$$

$\delta_2\varphi = 0$, *c'est-à-dire l'harmonicité en* u, v *de* $\varphi(u, v)$, *entraîne alors l'harmonicité spatiale de* $\varphi(x, y, z)$, *soit* $\Delta_2\varphi = 0$, *et réciproquement* (car $\Delta_1 u \neq 0$).

On peut passer de la représentation plane (u, v) de la congruence à sa représentation sphérique, ou utiliser d'autres images, en représentation conforme ou non sur la première (sur la surface moyenne, ou l'enveloppée moyenne, etc.); je reviendrai là-dessus au n° **29** avec un exemple particulier.

3. Propriétés géométriques des congruences isotropes générales (¹). — Les circonstances d'orthogonalité et d'isogonalité des surfaces d'une congruence (IR) suivant ses lignes $u = \alpha$, $v = \beta$, appartiennent aux *congruences isotropes* (I) *les plus générales*, que j'appelle (IC) quand il s'agit effectivement de congruences de *courbes*. Celles-ci ont une définition analogue aux congruences (IR), à ceci près qu'elles sont déterminées par deux familles de *développables isotropes générales* (conjuguées et à intersections réelles pour les congruences réelles) et non plus de plans. Mais les familles de développables à un paramètre complexe, ainsi introduites, ne sont plus isothermes, et ceci entraîne, comme on le verra, une dissociation des propriétés des fonctions harmoniques du plan (u, v) ou de l'espace.

Donnons des exemples simples de congruences (I): j'ai démontré [5]

(¹) En ajoutant aussi quelques compléments à l'étude précédente de M. Alayrac, j'ai introduit ces congruences et les ai étudiées dans : P. Delens, *Géométrie des congruences de courbes* (*Rendic. del circ. mat. di Palermo*, **56**, 1932, p. 289-352) [4], et *Géométrie conforme des congruences de courbes* (*Bull. de la Soc. math. de France*, **61**, 1933, p. 95-127) [5].

que *toute congruence* (I) *normale est formée des trajectoires orthogonales de* ∞^1 *sphères* (ou plans) et réciproquement.

On sait que l'étude des propriétés infinitésimales d'une congruence, au voisinage d'un de ses points M, conduit à la figuration de diverses surfaces ou courbes indicatrices. Pour les déplacements normaux en M à la courbe de la congruence issue de ce point, on introduit ainsi, dans le plan normal, deux coniques indicatrices des courbures et torsions normales; les directions asymptotiques de ces coniques définissent *les lignes asymptotiques* et *les lignes de courbure* de la congruence, généralisant celles qui, dans le cas d'une congruence normale, appartiennent aux surfaces orthogonales.

Le problème des *congruences à directions asymptotiques indéterminées*, traité par M. R. Garnier [1], admet deux types de solutions : 1° *les trajectoires d'un champ de moments* (*cf.* n° **33**); 2° *les trajectoires orthogonales de* ∞^1 *plans*, soit une famille de courbes parallèles, qu'on peut ordonner suivant des familles de surfaces parallèles, isogonales, etc. [2]; de telles congruences sont (I, N) (N = normal). En effet, en tout point d'une congruence (I), les directions du plan normal précisées ci-dessus sont isotropes, les indicatrices circulaires; l'indétermination imposée aux unes ou aux autres de ces directions conduit donc à des congruences (I).

La raison profonde de l'intérêt, pour notre sujet, des développables isotropes, laissant prévoir l'intervention des congruences (I), est d'ailleurs celle-ci :

Si l'on cherche à qualifier les congruences par les familles isothermes (de surfaces) pouvant leur appartenir, on peut considérer le problème de Cauchy pour l'équation $\Delta_2 \varphi = 0$ à partir des données sur une surface arbitraire, et en particulier sur une surface de la congruence. Or les *surfaces caractéristiques de l'équation de Laplace, variétés d'indétermination pour le problème de Cauchy, sont précisément les développables isotropes* $\Theta(x, y, z) = \text{const.}$, Θ *étant solution de* $\Delta_1 \Theta = 0$.

---

(1) R. Garnier, *Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, **48**, 1920, p. 106-108); *voir* aussi [4].

(2) Les ∞^1 plans normaux à une telle congruence enveloppent une même surface polaire, et la représentation (u, v) de la congruence se fait aussitôt par les traces, sur un de ces plans, des courbes de la congruence.

4. Les grandes lignes d'une classification des congruences. — Sans reprendre néanmoins le problème de Cauchy, nous allons, en utilisant des indications et certains exemples de M. Bouligand (nos **5**, **6**, **7**), que j'ai prolongés aux nos **8** et **9** par l'étude d'un cas intéressant, donner les premiers éléments d'une classification suffisants pour montrer les diverses circonstances qui peuvent se présenter. Nous allons vérifier : 1° qu'il existe des congruences (h_0) ne possédant aucune famille isotherme; 2° qu'il n'existe pas de congruences telles que chaque famille de ∞^1 surfaces leur appartenant soit isotherme. Entre ces cas extrêmes, sans nous arrêter aux catégories moins intéressantes pour notre problème $\mathcal{H}$, nous discernerons les caractères des congruences (H) que nous recherchons.

Pour les congruences (u, v) considérées, les fonctions $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ des coordonnées cartésiennes, les fonctions $\varphi(u, v)$ cherchées, seront supposées remplir les conditions de régularité suffisantes dans un certain domaine; c'est dans ce domaine, qui pourra être précisé ensuite, que nous opérerons.

Revenant à l'équation (1), je l'écrirai

$$(4)\quad a(x,y,z)\varphi_{uu} + 2b(x,y,z)\varphi_{uv} + c(x,y,z)\varphi_{vv} + p(x,y,z)\varphi_u + q(x,y,z)\varphi_v = 0;$$

ses coefficients a, b, c, p, q sont proportionnels à $\Delta_1 u$, $\Delta(u, v)$, $\Delta_1 v$, $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$; on peut les supposer débarrassés d'un facteur commun, s'il y a lieu.

J'adopterai systématiquement la méthode suivante : aux fonctions u, v données, j'adjoindrai une troisième fonction $w(x, y, z)$, convenablement choisie, indépendante de u, v, c'est-à-dire telle que $J \equiv \dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} \neq 0$.

Le changement de variables $(x, y, z \mid u, v, w)$ permet d'écrire (4) sous la forme

$$(5)\quad \begin{aligned} &A(u, v, w)\varphi_{uu} + 2B(u, v, w)\varphi_{uv} + C(u, v, w)\varphi_{vv} \\ &\quad + P(u, v, w)\varphi_u + Q(u, v, w)\varphi_v = 0; \end{aligned}$$

cette équation, devant être satisfaite par φ quel que soit w, dont ne dépendent pas les dérivées de $\varphi(u, v)$, conduira à un *système invariant* d'équations en u, v.

5. Congruences (h_0), ou anisothermes (¹). — Il suffit ici d'un exemple; soit

$$(6)\quad u = x^2 + y^3, \qquad v = y + z^2; \qquad \nabla u = (2x, 3y^2, 0), \qquad \nabla v = (0, 1, 2z).$$

Le calcul des coefficients de (4) conduit à prendre

$$w = y; \qquad \nabla w = (0, 1, 0), \qquad (J = 4xz);$$

d'où l'équation (5), soit ici

$$(7)\quad (4u - 4w^3 + 9w^4)\varphi_{uu} + 6w^2\varphi_{uv} + (1 + 4v - 4w)\varphi_{vv} + (2 + 6w)\varphi_u + 2\varphi_v = 0.$$

L'identification en w impose à φ les conditions

$$(8)\quad \varphi_{uu} = 0, \qquad \varphi_{uv} = 0, \qquad -2\varphi_{vv} + 3\varphi_u = 0, \qquad (1 + 4v)\varphi_{vv} + 2\varphi_u + 2\varphi_v = 0.$$

Ces équations n'ayant pas d'autre solution commune que $\varphi =$ const., qui ne définit aucune famille de surfaces, le cas prévu est bien réalisé. Ce cas doit être considéré comme le cas général pour une congruence arbitraire.

6. Congruences (h_1), ou mono-isothermes. — Il suffit encore d'un exemple assez général, à partir d'une fonction u, par exemple, harmonique; soit

$$(9)\quad u = x^2 - y^2, \qquad v = y - z^3, \qquad \text{puis} \qquad w = z;$$
$$\nabla u = (2x, -2y, 0), \qquad \nabla v = (0, 1, -3z^2), \qquad \nabla w = (0, 0, 1), \qquad (J = 2x).$$

L'équation (4), puis sa forme (5) sont

$$(4x^2 + 4y^2)\varphi_{uu} - 4y\varphi_{uv} + (1 + 9z^4)\varphi_{vv} - 6z\varphi_v = 0)$$
$$(10)\quad [4u + 8(v + w^3)^2]\varphi_{uu} - 4(v + w^3)\varphi_{uv} + (1 + 9w^4)\varphi_{vv} - 6w\varphi_v = 0;$$

(¹) J'emploie pour les familles de surfaces le mot *isotherme*, plutôt qu'*harmonique*, afin d'éviter toute confusion avec les fonctions ou paramètres harmoniques; u étant paramètre harmonique (ou isothermique, ou thermométrique) d'une famille isotherme, la substitution $(u/mu + n)$, avec m, n constantes arbitraires, définit le paramètre harmonique le plus général de la même famille. D'autre part, en Géométrie, les expressions surface *isothermique*, famille *isothermique*, sont réservées au cas où les lignes de courbure des surfaces forment sur celles-ci des réseaux isothermes.

d'où le système d'équations

$$(11)\qquad \varphi_{uu}=0,\qquad \varphi_{vv}=0,\qquad \varphi_{uv}=0,\qquad \varphi_v=0,$$

et la solution $\varphi = mu + n$; les cylindres $x^2 - y^2 = \text{const.}$ constituent la seule famille isotherme de la congruence (9).

7. Congruences (h_2), ou di-isothermes. — Partons cette fois de deux fonctions harmoniques

$$(12)\qquad u = x^2 - y^2,\qquad v = x^3 - 3xy^2 + z,\qquad \text{puis}\qquad w = x;$$

$$\nabla u = (2x, -2y, 0),\quad \nabla v = [3(x^2-y^2), -6xy, 1];\quad \nabla w = (1, 0, 0),\quad (J = -2y).$$

On obtient comme précédemment

$$4(x^2+y^2)\varphi_{uu} + 12x(x^2+y^2)\varphi_{uv} + [9(x^2+y^2)^2 + 1]\varphi_{vv} = 0,$$

$$(13)\qquad 4(2w^2 - u)\varphi_{uu} + 12w(2w^2 - u)\varphi_{uv} + [9(2w^2 - u)^2 + 1]\varphi_{vv} = 0,$$

$$(14)\qquad \varphi_{vv}=0,\qquad \varphi_{uv}=0,\qquad \varphi_{uu}=0,$$

$$(14')\qquad \varphi = mu + nv + k.$$

Il existe ici *un faisceau linéaire* $mu + nv = \text{const.}$ de familles isothermes; deux de ces familles, par exemple $u = \alpha$ et $v = \beta$, constituent une *base* de ce faisceau qu'on pourra représenter par $\{u, v\}$.

8. Congruences (h'), ou poly-isothermes; congruences (h_3), tri-isothermes. — Si nous supposons désormais qu'une congruence possède au moins deux familles isothermes $u = \alpha$, $v = \beta$, et par suite le faisceau $\{u, v\}$, il pourra arriver qu'elle possède aussi d'autre familles isothermes n'appartenant pas à ce faisceau; ce sera le cas quand (avec $\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$) l'équation (5), réduite à

$$(15)\qquad A\varphi_{uu} + 2B\varphi_{uv} + C\varphi_{vv} = 0,$$

n'exigera plus, pour être satisfaite, un système de conditions équivalent à (14). Prenons l'exemple de la *congruence des droites rencontrant orthogonalement une droite fixe*, ici Oz. Soit

$$(16)\qquad u = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},\qquad v = z,\qquad \text{puis}\qquad w = x^2 + y^2;$$

$$\nabla u = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right),\quad \nabla v = (0, 0, 1);\quad \nabla w = (2x, 2y, 0),\quad \left(J = \frac{2}{x^2+y^2}\right).$$

L'équation (5), ou (15), devient ici

$$\frac{1}{\omega}\varphi_{uu}+\varphi_{vv}=0; \tag{17}$$

d'où

$$\varphi_{uu}=0, \qquad \varphi_{vv}=0, \tag{18}$$

$$\varphi=luv+mu+nv+k. \tag{18'}$$

La congruence (16) possède un système linéaire dépendant essentiellement de deux constantes arbitraires, c'est-à-dire *un réseau linéaire* (au sens de la Géométrie algébrique) de familles isothermes; la base de ce réseau est $\{u, v, uv\}$ à partir des trois fonctions harmoniques u, v, uv définies par (16). On pourra désigner par (h_3) une telle congruence et l'appeler *tri-isotherme* (¹).

L'étude de ce cas montre que *l'introduction de la fonction harmonique uv tient au fait que les familles isothermes $u=\alpha$, $v=\beta$, sont orthogonales*. Pour deux fonctions arbitraires $\mathcal{U}(u, v)$, $\mathcal{V}(u, v)$, on a en effet

$$\Delta_2(\mathcal{U}\mathcal{V})=\mathcal{U}\Delta_2\mathcal{V}+\mathcal{V}\Delta_2\mathcal{U}+2\Delta(\mathcal{U}, \mathcal{V}); \tag{19}$$

donc les conditions $\Delta_2\mathcal{U}=\Delta_2\mathcal{V}=0$, $\Delta(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$ entraînent $\Delta_2(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.

J'ai appelé *orthoptique* [4], [5] une congruence capable de deux familles de surfaces orthogonales (²). On peut donc énoncer :

Toute congruence orthoptique et (h_2) par ses deux familles de surfaces orthogonales est une congruence (h_3) et réciproquement.

(¹) On pourrait dire *ortho-isotherme*, mais ce terme pourrait aussi être réservé pour une congruence normale à une famille isotherme de surfaces.

Ricci et Levi-Civita [3'] ont déjà donné un exemple analogue, celui de la congruence des cercles concentriques rencontrant (orthogonalement) une droite fixe issue du centre. D'ailleurs, les deux congruences considérées sont aussi (N).

(²) Dans le plan normal en M à la congruence, les surfaces de ces deux familles ont pour tangentes les bissectrices des directions asymptotiques; s'il existe une famille de surfaces orthogonales à la congruence, on retrouve ainsi le théorème de Dupin. Dans le cas (h_3, N), les surfaces de cette troisième famille sont *isothermiques* (*cf.* C. E. WEATHERBURN, *Differential Geometry of three dimensions*, II, Cambridge, 1930). Il s'ensuit bien qu'un système triple-orthogonal isotherme est nécessairement isothermique.

9. Le cas précédent présente un autre intérêt; une substitution harmonique du faisceau $\{u, v\}$

$$u' = eu + fv, \qquad v' = gu + hv \tag{20}$$

(e, f, g, h constantes, on néglige les constantes additives) donne à la solution (18′) la forme

$$\varphi = f' u'^2 + l' u' v' + g' v'^2 + m' u' + n' v' + k' \tag{21}$$

contenant six constantes arbitraires au lieu de quatre; réciproquement, de la forme générale (21) on peut revenir à la forme *réduite* (18′) (ou à d'autres formes réduites, selon les conditions de réalité et le signe de $l'^2 - 4f'g'$). Si la solution géométrique reste la même, sa traduction analytique a été modifiée, d'une formule à l'autre, par le choix des fonctions de départ u, v ou u', v', les premières correspondant à des surfaces orthogonales.

Le problème de la classification des congruences, comme il est posé ici, est finalement ramené aux conditions de compatibilité d'un système de $N \leqq 5$ équations linéaires aux dérivées partielles, du premier ou du deuxième ordre, de la forme (5), mais à coefficients fonctions de u, v seuls. La solution peut dépendre, sous forme extrêmement variée, de constantes ou de fonctions arbitraires de u, v [1]. Sans insister davantage, nous laisserons dans une même catégorie (h') les congruences poly-isothermes, dont les familles isothermes n'ont pas encore la généralité suffisante pour le problème $\mathcal{H}$.

10. Les congruences méga-isothermes (H). — Partant toujours de deux famille isothermes ($\Delta_2 u = \Delta_2 v = 0$), nous envisageons maintenant le cas où l'*équation* (15) *a ses coefficients* A, B, C *fonctions de* u, v *seuls*; donc s'écrit

$$\varepsilon_2(\varphi) \equiv A(u, v)\,\varphi_{uu} + 2B(u, v)\,\varphi_{uv} + C(u, v)\,\varphi_{vv} = 0; \tag{22}$$

ce cas laisse à la solution la plus grande indétermination possible.

---

[1] Le cas des numéros **8** et **9** pourrait sans doute être prolongé dans le sens des recherches de M. P. Montel, *Sur les solutions linéairement indépendantes des équations aux dérivées partielles* (*Journ. de math.*, **10**, 1931, p. 415-438).

Comme l'équation (15) équivaut à

$$(15') \qquad \varphi_{uu}\,\Delta_1 u + 2\varphi_{uv}\,\Delta(u, v) + \varphi_{vv}\,\Delta_1 v = 0,$$

après division, au besoin, des coefficients par un facteur commun, cela veut dire que les rapports mutuels de $\Delta_1 u$, $\Delta(u, v)$, $\Delta_1 v$ demeurent constants le long d'une ligne de la congruence, ou que *le triangle défini, en chaque point* M, *par les gradients* ∇u *et* ∇v *reste alors* (pour $u = \alpha$, $v = \beta$) *semblable à lui-même* (ou de *forme* invariable), ceci d'abord pour les familles isothermes initiales. M. G. Bouligand, qui avait eu l'obligeance de me soumettre le problème en question, m'a aussi communiqué ce résultat essentiel qu'il avait obtenu : je l'appellerai la propriété $\mathcal{B}$.

Pour une congruence (H) répondant à ces conditions, soient $\mathfrak{U}(u, v)$, $\mathfrak{V}(u, v)$ deux fonctions arbitraires de u, v; on aura

$$(23) \qquad \Delta_1 \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_u^2\,\Delta_1 u + 2\mathfrak{U}_u\mathfrak{U}_v\,\Delta(u, v) + \mathfrak{U}_v^2\,\Delta_1 v, \qquad \Delta_1\mathfrak{V} = \ldots.$$

$$(24) \qquad \Delta(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \mathfrak{U}_u\mathfrak{V}_u\,\Delta_1 u + (\mathfrak{U}_u\mathfrak{V}_v + \mathfrak{U}_v\mathfrak{V}_u)\,\Delta(u, v) + \mathfrak{U}_v\mathfrak{V}_v\,\Delta_1 v,$$

$$(25) \qquad \Delta_2 \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{uu}\,\Delta_1 u + 2\mathfrak{U}_{uv}\,\Delta(u, v) + \mathfrak{U}_{vv}\,\Delta_1 v, \qquad \Delta_2\mathfrak{V} = \ldots.$$

Les formules (23) et (24) montrent que deux familles *arbitraires* de la congruence possèdent la propriété $\mathcal{B}$ du triangle des gradients; complétées par (25), il s'ensuit que *les rapports mutuels des cinq quantités* $\Delta_1\mathfrak{U}$, $\Delta(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$, $\Delta_1\mathfrak{V}$, $\Delta_2\mathfrak{U}$, $\Delta_2\mathfrak{V}$ *restent constants suivant chaque ligne* (u, v), *propriété caractéristique* $\mathcal{B}'$ également obtenue par M. Bouligand.

Les formules (23) et (24) montrent aussi l'existence et précisent l'arbitraire de familles de surfaces $\mathfrak{U} =$ const., $\mathfrak{V} =$ const., se coupant sous des angles ayant une valeur constante, où pour lesquelles le rapport des grandeurs des gradients reste constant (ou les deux conditions réunies) pour toutes les lignes de congruence, c'est-à-dire dans l'espace (ou le domaine convenable). Bref, on est dans le cas des congruences isotropes, et la propriété $\mathcal{B}'$ complète les qualités de celles de ces congruences qui nous intéressent ici.

On retrouve en particulier les familles de développables isotropes des congruences (I) en résolvant l'équation $(23)_1$, ou $\Delta_1\Theta = 0$; si s, t sont deux solutions indépendantes, conjuguées complexes, de cette équation, les quantités $\Delta_1 u$, $\Delta(u, v)$, $\Delta_1 v$ ne pouvant être nulles simultanément, on aurait pour une troisième solution Θ,

$$\frac{D(\Theta, s)}{D(u, v)} \frac{D(\Theta, t)}{D(u, v)} = 0,$$

donc la solution générale est $\Theta = F(s)$ ou $\mathcal{F}(t)$, la fonction étant analytique.

11. *En général* les solutions d'équations telles que $\Delta_1 \mathcal{U} = 0$, ou $\Delta(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$, etc., ou des combinaisons de telles équations à coefficients fonctions de u, v, ne seront pas des fonctions harmoniques du plan (u, v), ni de l'espace. On retombe sur des conditions de compatibilité entre (22) et des équations aux dérivées partielles en u, v; d'où en général dissociation entre les conditions d'isogonalité, d'orthogonalité, etc. et celles d'isothermie dans le plan (u, v) et dans l'espace.

Ayant déjà cité le cas des congruences (IR), nous rappelons que :

Toute congruence (IR) *est* (H); alors une fonction harmonique en (u, v) définit une fonction harmonique spatiale; à deux fonctions harmoniques en (u, v) et conjuguées correspondent deux familles isothermes de surfaces orthogonales, etc. Ici l'on peut dire que *la représentation (u, v) de la congruence est conforme et conserve le caractère harmonique.*

Pour le cas général, on a seulement :

Toute congruence (H) *est* (I); *toute congruence* (I) *et déjà* (h_2) *est* (H) [une congruence (IR) était (h_2) par ses développables].

Précisons le dernier point. Soient $U = \text{const.}$, $V = \text{const.}$, les développables isotropes d'une congruence (I); on peut supposer U et V conjuguées complexes. Les relations (23) donnent, pour $\Delta_1 U = \Delta_1 V = 0$,

$$\frac{\Delta_1 u}{U_v V_v} = \frac{2\Delta(u, v)}{-(U_u V_v + U_v V_u)} = \frac{\Delta_1 v}{U_u V_u}; \tag{26}$$

les coefficients A, B, C de (15) sont donc bien fonctions de u, v seuls. Les fonctions harmoniques spatiales correspondant à la congruence (u, v) sont alors les solutions de l'équation (22) du type elliptique d'après $\Delta_1 u \Delta_1 v - \overline{\Delta(u, v)}^2 > 0$ (u, v réels).

12. On peut caractériser complètement les congruences (H) parmi les congruences (I). La propriété des développables isotropes donne les relations (26) : soit $\lambda(x, y, z)$ la valeur commune des rapports écrits. S'il existe pour la congruence deux fonctions u, v harmoniques, on tire de (24) et (25)

$$\Delta(U, V) = -\lambda(U_u V_v - U_v V_u)^2,$$
$$\Delta_2 U = \lambda[U_{uu} U_v V_v - U_{uv}(U_u V_v + U_v V_u) + U_{vv} U_u V_u], \qquad \Delta_2 V = \lambda[\ldots],$$

les expressions entre crochets sont d'ailleurs les invariants bilinéaires des formes $d^2 U$ et $dU\,dV$, ou $d^2 V$ et $dU\,dV$, quadratiques en du, dv. Il s'ensuit

$$(27) \qquad \frac{\Delta_2 U}{2\Delta(U, V)} = f(u, v) = F(U, V), \qquad \frac{\Delta_2 V}{2\Delta(U, V)} = g(u, v) = G(U, V)$$

et les fonctions harmoniques cherchées sont les solutions de l'équation

$$(28) \qquad \varphi_{UV} + F\varphi_U + G\varphi_V = 0.$$

Bref, *les congruences* (H) *sont définies par les conditions*

$$(29) \qquad \boxed{\Delta_1 U = 0, \ \Delta_1 V = 0, \ \left|\frac{\Delta_2 V}{\Delta(U, V)}, U, V\right|_{xyz} = 0, \ \left|\frac{\Delta_2 V}{\Delta(U, V)}, U, V\right|_{xyz} = 0,}$$

où la notation $|\ldots|_{xyz}$ désigne un déterminant fonctionnel par rapport à x, y, z.

Les exemples de congruences (H) de la Deuxième Partie préciseront les relations entre les familles de surfaces et les représentations (u, v).

Rappelons enfin qu'*il n'existe aucune congruence ne possédant que des familles isothermes;* à partir de deux fonctions u, v déjà harmoniques, il faudrait, dans (22), $A = B = C = 0$; or, deux vecteurs isotropes, orthogonaux entre eux, n'existent pas.

13. Il est entendu que toute congruence (IC) n'est pas (H), et l'on devra considérer encore ici comme général le cas (h_0) : l'exemple suivant le confirme.

Soit *la congruence paratactique* des cercles dont les foyers décrivent deux droites isotropes conjuguées, définie ici par

$$(x-\mathrm{U})^2+(y-i\mathrm{U})^2+(z-ic)^2=0 \tag{30}$$

et l'équation conjuguée pour V, que je n'écris pas; U et V sont conjuguées complexes, c constante réelle; d'où

$$x^2+y^2+z^2-c^2-2icz=2(x+iy)\mathrm{U}.$$

Par différentiation on obtient

$$(x-\mathrm{U})\nabla x+(y-i\mathrm{U})\nabla y+(z-ic)\nabla z=(x+iy)\nabla\mathrm{U}, \tag{31}$$

$$\Delta_1\mathrm{U}=\Delta_1\mathrm{V}=0,\qquad \Delta(\mathrm{U},\mathrm{V})=2\mathrm{UV}=\frac{(x^2+y^2+z^2-c^2)^2+4c^2z^2}{2(x^2+y^2)}, \tag{32}$$

$$x-\mathrm{U}=(x+iy)\Delta(x,\mathrm{U}),\qquad y-i\mathrm{U}=(x+iy)\Delta(y,\mathrm{U}),$$
$$z-ic=(x+iy)\Delta(z,\mathrm{U}),$$

d'où, à partir de (31) (et de l'équation en V non écrite),

$$\Delta_2\mathrm{U}=\frac{1}{x+iy},\qquad \Delta_2\mathrm{V}=\frac{1}{x-iy}. \tag{33}$$

Les déterminants fonctionnels de (29) ne sont pas nuls, et l'équation (1) s'écrit

$$4\mathrm{UV}\varphi_{\mathrm{UV}}+\frac{1}{x+iy}\varphi_{\mathrm{U}}+\frac{1}{x-iy}\varphi_{\mathrm{V}}=0. \tag{34}$$

En posant $x^2+y^2+z^2-c^2=2\sigma$, la relation $(32)_2$, quadratique en σ et z, permet leur expression en fonction rationnelle d'un paramètre w; U, V, w étant prises comme variables indépendantes, un calcul sans agrément montre que, pour $c\neq 0$, l'équation (34) n'a pas d'autre solution que $\varphi=$ const.

Le résultat est autre, et le calcul allégé, pour $c=0$, cas d'une *congruence de cercles tangents entre eux en un même point*, congruence (IC, N). Avec les variables U, V, σ, l'équation (34) est réduite à

$$2\sigma\mathrm{UV}\varphi_{\mathrm{UV}}+\mathrm{U}\varphi_{\mathrm{U}}+\mathrm{V}\varphi_{\mathrm{V}}=0, \tag{34'}$$

et les conditions $\varphi_{\mathrm{UV}}=0$, $\mathrm{U}\varphi_{\mathrm{U}}+\mathrm{V}\varphi_{\mathrm{V}}=0$ donnent la solution

$$\varphi=m\log\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}+n.$$

Cette congruence est (h_1), admettant la famille isotherme des plans passant par Oz.

14. Les résultats de M. T. Levi-Civita. — Dans son Mémoire fondamental de 1899 [3], M. Levi-Civita a obtenu la détermination complète des congruences (H) et des potentiels correspondants.

Partant du fait que le groupe des transformations qui conserve l'équation de Laplace est le groupe des similitudes, il a d'abord obtenu les solutions constituées par les congruences, que je désignerai par (H, S), des *trajectoires des groupes de similitudes à un paramètre*. Revenant ensuite à la recherche générale des fonctions φ pour lesquelles, avec les variables u, v, w, le système $\Delta_2\varphi = 0$, $\varphi_w = 0$ est *complet*, M. Levi-Civita caractérise, sous forme intrinsèque, les congruences (H); l'étude des conditions d'intégrabilité montre alors que *les seules solutions du problème sont les congruences* (IR) *et les congruences* (H, S) *précédentes, formées de cercles, d'hélices ou de spirales*. La classification est complétée par celle des équations $\varepsilon_2(\varphi) = 0$ à deux variables, du type elliptique, définissant les *potentiels binaires* donnant lieu aux potentiels spatiaux cherchés.

On voit que, dans la méthode suivie par M. Levi-Civita, les congruences (IR) et les congruences (H, S) semblent appartenir (malgré certaines interférences : congruences de droites parallèles ou concourantes) à des types distincts de solutions, sans qu'apparaisse leur caractère commun, *la classe des congruences* (I), qui jouera aussi nécessairement un rôle important dans les problèmes analogues.

Sans reprendre l'étude du savant géomètre italien, il nous sera maintenant facile, en continuant la méthode ici suivie, de retrouver ses résultats et d'y ajouter aussi de nouvelles propriétés géométriques. Une courte digression nous montrera d'abord l'importance de certains éléments géométriques dans la théorie des congruences.

15. Compléments, quelques propriétés générales. — J'emploie ici le calcul vectoriel, qui me semble le plus approprié; les notations seront semblables à celles de mon Mémoire [4]; les symboles $\times$ et $\wedge$ se lisent *scalaire* et *vectoriel*, et l'opérateur ∇ est appliqué aux scalaires et aux vecteurs (en lettres grasses), suivant le schème

$$du = d\mathrm{M} \times \nabla u, \qquad d\mathbf{l} = d\mathrm{M} \times \nabla \mathbf{l},$$

dM désignant le déplacement du point courant M.

Soit $\mathbf{l} = \nabla u$ le vecteur gradient d'une famille de surfaces. Je dis qu'*une famille de plans* est caractérisée par la relation

$$\mathbf{l} \wedge \nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l} = 0. \tag{35}$$

En effet, $\mathbf{x}$ étant un vecteur arbitraire, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{l}$ représente un déplacement normal à $\mathbf{l}$; la variation $d\mathbf{l}$ ayant ici la direction de $\mathbf{l}$,

$$(\mathbf{x} \wedge \mathbf{l}) \times \nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l} \equiv \mathbf{x} \times (\mathbf{l} \wedge \nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l}) = 0;$$

comme $\mathbf{x}$ est arbitraire, la relation *caractéristique* (35) s'ensuit.

Pour *une famille de développables isotropes*, on a

$$\mathbf{l} \times \mathbf{l} = 0, \qquad \nabla \mathbf{l} \times \mathbf{l} = 0;$$

donc

$$(\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l}) \wedge \mathbf{l} \equiv (\nabla \mathbf{l} \times \mathbf{l})\mathbf{l} - (\mathbf{l} \times \mathbf{l})\nabla \mathbf{l} = 0. \tag{36}$$

Mais l'annulation du premier membre de (36) entraîne seulement, en faisant à droite le produit vectoriel par $\mathbf{l}$,

$$(\mathbf{l} \times \mathbf{l})\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l} = 0, \tag{36'}$$

relation équivalente à (36) qui caractérise donc une famille, *soit de développables isotropes*, *soit de plans parallèles* au sens de la Géométrie élémentaire; (36) équivaut encore à

$$\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l} = \mathbf{h}\mathbf{l}, \tag{36''}$$

$\mathbf{h}$ étant un vecteur auxiliaire. Considérons maintenant l'identité

$$(\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l})_\wedge \equiv \nabla \mathbf{l} \times \mathbf{l} - (\nabla \mathbf{l})_\times \mathbf{l} \equiv \frac{1}{2}\nabla \Delta_1 u - \Delta_2 u\, \mathbf{l}. \tag{37}$$

Si $u = $ const. représente une famille isotherme de surfaces (avec u harmonique), en même temps isotropes, il s'ensuit

$$(\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{l})_\wedge = \mathbf{h} \wedge \mathbf{l} = 0$$

et, en conséquence de (36″), la relation (35) est satisfaite; *toute* *famille isotherme de développables isotropes est constituée de plans.* De même, d'après (35) et (36″), on vérifie aussitôt, par (37), que *toute famille de plans isotropes est isotherme.* Cette seconde propriété est bien connue; la première semblait résulter de l'exposé de M. Alayrac (*loc. cit.*), mais j'ai cru nécessaire de l'établir complètement.

16. Il y aura souvent avantage à rapprocher de (37) et de la relation analogue pour $\mathbf{q} = \nabla v$, les identités

$$(38)\qquad (\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{q} + \nabla \mathbf{q} \wedge \mathbf{l})_\wedge \equiv \nabla \Delta(u, v) - \Delta_2 u\,\mathbf{q} - \Delta_2 v\,\mathbf{l},$$

$$(39)\qquad (\nabla \mathbf{l} \wedge \mathbf{q} - \nabla \mathbf{q} \wedge \mathbf{l})_\wedge \equiv [\nabla(\mathbf{l} \wedge \mathbf{q})]_\wedge \equiv \operatorname{rot} \mathbf{t},$$

le vecteur $\mathbf{t} = \mathbf{l} \wedge \mathbf{q}$ étant tangent à la courbe de la congruence (u, v) issue de M. Les formules précédentes sont valables pour des vecteurs $\mathbf{l}$, $\mathbf{q}$ isotropes et l'on voit aussitôt la simplification apportée dans le cas des congruences (H) avec les variables U, V des développables isotropes. La relation (37) généralise une relation {formule (104), [4]} complétant un résultat de M. Weatherburn (*loc. cit.*) relatif aux familles isothermes; d'après cet auteur, $\mathbf{a}$ étant le vecteur unitaire (donc non isotrope) de la congruence normale à une famille de surfaces, et avec

$$(40)\qquad \mathbf{w} \equiv (\nabla \mathbf{a} \wedge \mathbf{a})_\wedge \equiv -(\mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{a}) \equiv \mathbf{k} - \operatorname{div} \mathbf{a}.\mathbf{a},$$

la condition d'isothermie de la famille est $\operatorname{rot} \mathbf{w} = 0$. Comme $\mathbf{k}$ est le vecteur de courbure de la congruence ($\mathbf{a}$), on peut donner à cette condition la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{k} - 2\mathbf{a} \wedge (\nabla \mathrm{H} - \mathrm{H}\mathbf{k}) = 0,$$

H étant la courbure moyenne de la surface de la famille passant en M.

17. Détermination des congruences (H) et nouvelles propriétés. — Il s'agit de déterminer les congruences satisfaisant aux conditions (29) du n° **12**; soient U et V = U′ les paramètres conjugués complexes des développables isotropes, l'accent étant employé en général pour indiquer la conjugaison complexe. Je poserai encore

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathbf{l} = \nabla \mathrm{U}, \quad \mathbf{l}' = \nabla \mathrm{V}, \quad \omega = \Delta(\mathrm{U}, \mathrm{V}), \quad \nu = \Delta_2 \mathrm{U}, \quad \rho = \dfrac{\nu}{\omega}, \quad \ldots, \\ \mathbf{l} \wedge \mathbf{l}' = i\omega\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{l} = i\mathbf{l}, \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{l}' = -i\mathbf{l}'; \end{cases}$$

d'où les tenseurs dérivés

$$(42) \qquad \nabla\mathbf{l} = \mathbf{ql} + \mathbf{ra}, \qquad \nabla\mathbf{l}' = \ldots, \qquad -\omega\nabla\mathbf{a} = \mathbf{r}'\mathbf{l} + \mathbf{rl}',$$

avec les vecteurs auxiliaires

$$\mathbf{q} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{l}, \qquad \mathbf{r} = \nu\mathbf{a} + \lambda\mathbf{l} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{q} + \mathbf{q}' = \nabla \log\omega$$

(je n'écris pas en général les formules se déduisant des autres par conjugaison complexe). Ces relations comprennent les conditions $\operatorname{rot}\mathbf{l} = \operatorname{rot}\mathbf{l}' = 0$. Les conditions d'intégrabilité sont

$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{q} = -\frac{1}{\omega}\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}' \qquad (\text{et conj.}),$$

$\mathbf{a}$ est le vecteur unitaire tangent de la congruence (u, v), désignée aussi par $(\mathbf{a})$; pour le vecteur de courbure $\mathbf{k}$, on obtient la formule remarquable, qui est aussi une forme de (38),

$$(43) \qquad -\mathbf{k} \equiv -\mathbf{a} \times \nabla\mathbf{a} = \rho'\mathbf{l} + \rho\mathbf{l}'.$$

18. Tout ce qui précède n'intéressait que les congruences (I). Les dernières conditions (29), ou

$$(44) \qquad \mathbf{a} \times \nabla\rho = 0, \qquad \mathbf{a} \times \nabla\rho' = 0,$$

sont bien *nouvelles*, c'est-à-dire indépendantes des conditions d'intégrabilité relatives aux congruences (I). Elles entraînent pour $\mathbf{k} \neq 0$ la normalité de la congruence $(\mathbf{k})$; en effet,

$$-\operatorname{rot}\mathbf{k} = \nabla\rho' \wedge \mathbf{l} + \nabla\rho \wedge \mathbf{l}', \qquad \mathbf{k} \times \operatorname{rot}\mathbf{k} = i\omega(\rho\nabla\rho' - \rho'\nabla\rho) \times \mathbf{a} = 0.$$

La famille de surfaces $(\perp\mathbf{k})$ est accompagnée de la famille orthogonale $(\perp\mathbf{b})$, où $\mathbf{b}$ est le vecteur binormal unitaire, et des familles isogonales. Mais la condition $\mathbf{k} \times \operatorname{rot}\mathbf{k} = 0$ n'est pas suffisante; d'après $\mathbf{k} = \chi\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ unitaire), la courbure χ est donnée par $\chi^2 = 2\omega\rho\rho'$, et ceci permettrait de compléter la première condition par

$$\mathbf{a} \times \nabla\left(\frac{\chi^2}{2\omega}\right) = \mathbf{a} \times (\rho\nabla\rho + \rho'\nabla\rho') = 0.$$

Il est plus simple de traduire les relations (44) par

$$(45) \qquad \boxed{\mathbf{a} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{k} \equiv (\mathbf{a} \times \nabla\rho')\mathbf{l} + (\mathbf{a} \times \nabla\rho)\mathbf{l}' = 0;}$$

donc : *Les congruences* (H) *sont les congruences* (I) *telles que le rotationnel du vecteur de courbure* $\mathbf{k}$ *n'ait pas de composante normale à la congruence*. Les courbes de la congruence sont géodésiques sur les surfaces $(\perp \mathbf{k})$, asymptotiques sur les surfaces $(\perp \mathbf{b})$. La condition (45) comprend le cas $\mathbf{k} = 0$ des congruences (IR), sur lequel nous ne reviendrons pas en général, et aussi celui où $\operatorname{rot} \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k}$ gradient.

19. Il est indiqué désormais d'employer le repère normal *principal* $M\mathbf{a}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, où $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$; les indices 0, 1, 2 caractérisent les congruences $(\mathbf{a})$, $(\mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_2)$, mais l'indice 0 sera généralement supprimé s'il est seul. J'emploie les relations et notations de mon Mémoire [4],

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{lll} \nabla \mathbf{a}_i = \mathbf{c}_j \mathbf{a}_k - \mathbf{c}_k \mathbf{a}_j, & \operatorname{rot} \mathbf{a}_i = \mathbf{c}_j \wedge \mathbf{a}_k - \mathbf{c}_k \wedge \mathbf{a}_j, & \mathbf{e}_i = \mathbf{c}_j \wedge \mathbf{c}_k, \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{c}_j \wedge \mathbf{a}_j + \mathbf{c}_k \wedge \mathbf{a}_k, & N_i = \mathbf{c}_j \times \mathbf{a}_j + \mathbf{c}_k \times \mathbf{a}_k, & 2S = \sum_i N_i \end{array}\right.$$

$(i, j, k = 0, 1, 2$ par permutation circulaire). Or j'ai caractérisé les congruences (I) réelles par

$$(47)\qquad \boxed{\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 \wedge \mathbf{a},}$$

et je détaille les formules correspondantes en

$$(48)\quad \left\{\begin{array}{lllll} \mathbf{c} = & -\tau \mathbf{a} & + x \mathbf{a}_1 & + y \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{c}_1 = & & \xi \mathbf{a}_1 & + \eta \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{c}_2 = & -\chi \mathbf{a} & + \eta \mathbf{a}_1 & + \xi \mathbf{a}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} = & 2\xi \mathbf{a} & & + \chi \mathbf{a}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 = & -x \mathbf{a} + (\xi - \tau) + \mathbf{a}_1 & & + \eta \mathbf{a}_2, \\ \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = & -y \mathbf{a} & - \eta \mathbf{a}_1 & + (\xi - \tau) \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{e} = & (\xi^2 + \eta^2) \mathbf{a} & - \chi\eta \mathbf{a}_1 & + \chi\xi \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{e}_1 = & -(x\xi + y\eta) \mathbf{a} & - (\tau\xi - y\chi) \mathbf{a}_1 & - (x\chi + \tau\eta) \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{e}_2 = & (x\eta - y\xi) \mathbf{a} & + \tau\eta \mathbf{a}_1 & - \tau\xi \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{w} = & -2\eta \mathbf{a} & + \chi \mathbf{a}_1, & \\ \mathbf{w}_1 = & -\eta \mathbf{a} + (y + \chi) \mathbf{a}_1 & & - x \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{w}_2 = & -\eta \mathbf{a} & + y \mathbf{a}_1 & - x \mathbf{a}_2, \\ \multicolumn{4}{l}{N = 2\xi, \qquad N_1 = N_2 = \xi - \tau, \qquad S = 2\xi - \tau.} \end{array}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i, \tag{49}$$

où j'emploie pour les dérivées pfaffiennes les notations

$$f_i \equiv \mathbf{a}_i \times \nabla f \equiv \frac{d}{ds_i} f, \qquad f_{ij} - f_{ji} = (\mathrm{S}\mathbf{a}_k - \mathbf{c}_k) \times \nabla f,$$

donnent, pour les congruences (I), le système

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\begin{array}{r} x_2 - y_1 + \xi^2 + \eta^2 + 2\tau\xi + x^2 + y^2 = 0, \\ \xi_2 - \eta_1 = 0, \\ \eta_2 + \xi_1 - 2\chi\xi = 0, \end{array}\right| \begin{array}{r} \tau_2 + y_0 + \eta(y - \chi) = 0, \\ \eta_0 - \xi^2 + \eta^2 + y\chi = 0, \\ \chi_2 + \xi_0 + 2\xi\eta = 0, \end{array} \\ \qquad\qquad \left|\begin{array}{r} \tau_1 + x_0 + y(\xi - \tau) - \chi(\xi + \tau) = 0, \\ \xi_0 + x\chi + 2\eta\xi = 0, \\ -\chi_1 + \eta_0 + \chi^2 + \eta^2 - \xi^2 = 0. \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{50}$$

20. Revenons aux congruences (H). La condition (45) pour $\mathbf{k} = \chi\mathbf{a}_1$ donne

$$\xi = \tau \text{ (torsion)}, \qquad \eta = -(\log\chi)_0. \tag{51}$$

Le système (50), avec les réductions correspondantes, est alors le système en χ, η, τ, x, y considéré par M. Levi-Civita [3] [avec les notations ρ, q_1, $-\tau$, $-r_1$, $-r_2$, et la congruence ($\mathbf{a}$) étant affectée de l'indice 3]. Il n'y a pas lieu de reprendre les calculs de cet auteur, caractérisant finalement les congruences (H, S), pour $\chi \neq 0$, par le système complet en χ, η, τ

$$\left\{\left|\begin{array}{l} \chi_0 = -\chi\eta, \\ \chi_1 = \chi^2 - \tau^2, \\ \chi_2 = -\eta\tau; \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} \eta_0 = -\eta^2, \\ \eta_1 = \eta\chi, \\ \eta_2 = 0; \end{array}\right.\left|\begin{array}{l} \tau_0 = -\tau\eta \\ \tau_1 = 2\tau\chi \\ \tau_2 = \chi\eta \end{array}\right.\right. \qquad \left(x = -\frac{\eta\tau}{\chi},\ y = \frac{\tau^2}{\chi}\right); \tag{52}$$

d'où les solutions *cercles* $\eta = 0$, $\tau = 0$; *hélices* $\eta = 0$; *spirales*.

D'autre part, la forme suivante du tenseur dérivé $\nabla\mathbf{a}$ d'une congruence (H)

$$\boxed{\nabla\mathbf{a} = -\tau\mathbf{a} \wedge \mathcal{U} + \eta\mathcal{U} + \mathbf{a}(\mathbf{k} - \eta\mathbf{a})} \qquad \left(\mathcal{U} = \sum_i \mathbf{a}_i'\mathbf{a}_i\right), \tag{53}$$

où $\mathbf{a} \wedge \mathfrak{U} = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ est alterné, donne pour $\mathbf{t} = \zeta\mathbf{a}$

$$\nabla\mathbf{t} = \zeta\,\nabla\mathbf{a} + \nabla\zeta\,\mathbf{a}.$$

La partie symétrique de $\nabla\mathbf{t}$ ne sera un multiple du tenseur unité $\mathfrak{U}$, propriété caractéristique des congruences (H, S) [3], que pour

$$(54)\qquad \chi\mathbf{a}_1 - \eta\mathbf{a} \equiv \mathbf{k} - \eta\mathbf{a} = -\nabla\log\zeta.$$

Or, d'après le système $(52)_2$, pour $\eta \neq 0$,

$$(55)\qquad \eta = -(\log\eta)_0, \qquad \chi = (\log\eta)_1, \qquad \mathbf{k} - \eta\mathbf{a} = \nabla\log\eta;$$

pour $\eta = 0$, $\tau \neq 0$, l'on a

$$(56)\qquad \nabla\chi = (\chi^2 - \tau^2)\mathbf{a}_1, \qquad \nabla\log\tau = 2\chi\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{k};$$

d'où aussi $(\chi^2 + \tau^2)\tau^{-1}$ constant et $\mathbf{k} = \frac{1}{2}\nabla\log(\chi^2 + \tau^2)$; pour $\eta = 0$, $\tau = 0$,

$$(57)\qquad \nabla\log\chi = \chi\mathbf{a}_1 = \mathbf{k}.$$

On retrouve bien, dans tous ces cas, la propriété établie par M. Levi-Civita, avec la valeur du coefficient ζ correspondant.

21. On constate facilement, avec les formules (48) et (52), que $\operatorname{rot}\mathbf{w}_1 = 0$, ce qui traduit que *les surfaces* $(\perp\mathbf{p})$ *ou* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *forment une famille isotherme* $(\mathbf{p} = \mathbf{a}_1, \mathbf{b} = \mathbf{a}_2)$.

On peut d'ailleurs écrire ici

$$(58)\qquad \mathbf{w}_1 = 2(\mathbf{k} - \eta\mathbf{a}) - \nabla\log\chi;$$

d'où la propriété, $\mathbf{k} - \eta\mathbf{a}$ étant un gradient évalué par (55), (56) ou (57). Par contre, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{k}$ ne sera un gradient qu'avec $\mathbf{k}$, donc *pour* $\eta = 0$ [hélices et cercles [1]]; *alors les surfaces* $(\perp\mathbf{b})$ *ou* $(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ *forment une seconde famille isotherme*. On sait aussi que pour un para-

---

[1] Je continue à laisser de côté le cas $\chi = 0$ des congruences de droites, qu'on peut toujours considérer comme (IR).

Pour $\eta = 0$, $\mathbf{w}$ est aussi un gradient, mais si $\tau \neq 0$, la congruence $(\mathbf{a})$ n'est pas normale.

mètre u_i harmonique, $\mathbf{w}_i = \frac{1}{2}\nabla \log \Delta_1 u_i$; d'où le retour au paramètre harmonique dans chacun des cas indiqués.

On sait évidemment, et nous y reviendrons, former les équations finies des trajectoires (H, S) des différents cas, et l'on pourrait se contenter d'en tirer les résultats que nous passons en revue. Mais il nous semble préférable de les déduire des formules générales, et nous procéderons encore ainsi pour les propriétés des lignes ou surfaces *isoclines* [4].

Le vecteur $\mathbf{e}$ [formules (48) et (51)] s'annule pour $\eta = 0$, $\tau = 0$; les surfaces isoclines sont alors les surfaces $(\mathbf{a}, \mathbf{p})$ (réduites aux plans d'un faisceau).

Si $\mathbf{e} \not\equiv 0$, on forme facilement $\nabla\mathbf{e}$ ou le tenseur dérivé du vecteur unitaire correspondant, et l'on reconnaît que la congruence d'isoclines $(\mathbf{e})$ est formée de droites concourantes ou parallèles. On a ensuite

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{e}\wedge\mathbf{a} = \chi(\tau\mathbf{a}_1 + \eta\mathbf{a}_2) = \chi\mathbf{c}_1, \qquad (\mathbf{e}\wedge\mathbf{a})\times\operatorname{rot}(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a}) = \chi^2\mathbf{c}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{c}_1,\\ &\mathbf{c}_1\times\operatorname{rot}\mathbf{c}_1 = (\tau\mathbf{a}_1)\times\operatorname{rot}(\eta\mathbf{a}_2) + (\eta\mathbf{a}_2)\times\operatorname{rot}(\tau\mathbf{a}_1)\\ &\qquad = \mathbf{a}\times(\eta\nabla\tau - \tau\nabla\eta) = 0,\end{aligned}\right.$$

d'après les formules (52). Il existe donc une famille de surfaces *isoclinales* $(\mathbf{e}, \mathbf{a})$ (cônes ou cylindres), et ceci traduit que *le déplacement du repère principal dépend seulement de deux paramètres* [4]. Calculons alors le vecteur $\overline{\mathbf{w}}$ relatif à la congruence $(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a})$; soit α, donné par $\operatorname{tg}\alpha = \eta/\tau$, l'angle des surfaces $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ et $(\mathbf{a}, \mathbf{e})$. Il vient (*cf.* [4]),

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{\mathbf{w}} &= \mathbf{a}\wedge\nabla\alpha + \mathbf{w}_1\cos^2\alpha + \mathbf{w}_2\sin^2\alpha - (\mathbf{c}_1\wedge\mathbf{a}_2 + \mathbf{c}_2\wedge\mathbf{a}_1)\sin\alpha\cos\alpha\\ &= \mathbf{a}\wedge\nabla\alpha + \frac{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2}{2} + \frac{\chi}{2}(\mathbf{a}_1\cos 2\alpha + \mathbf{a}_2\sin 2\alpha) = \mathbf{w}_1.\end{aligned}\right.$$

Pour $\eta \not\equiv 0$, les congruences $(\mathbf{p})$ et $(\mathbf{e}\wedge\mathbf{a})$ sont distinctes, et $\overline{\overline{\mathbf{w}}} = \mathbf{w}_1$ étant gradient, *les surfaces* $(\mathbf{e}, \mathbf{a})$ *forment une nouvelle famille isotherme*. On obtient en même temps *un exemple intéressant de congruences de même vecteur* $\mathbf{w}$.

22. Les propriétés angulaires; les équations a invariants égaux. — Les propriétés angulaires des congruences (H) sont celles des congruences (I). Ceci résulte encore des relations qui suivent. Nous avons obtenu pour les congruences (H)une identité de forme

$$(61)\qquad \Delta_2\varphi(x, y, z) \equiv \Lambda(x, y, z)\varepsilon_2[\varphi(u, v)];$$

les variétés caractéristiques de $\Delta_2\varphi = 0$ et de $\varepsilon_2(\varphi) = 0$ sont données par les fonctions U, V satisfaisant à $\Delta_1\Theta = 0$ ou $\varepsilon_1(\Theta) = 0$ avec

$$(62)\qquad \Delta_1\Theta(x, y, z) \equiv \Lambda(x, y, z)\varepsilon_1[\Theta(u, v)];$$

ces expressions $\Delta_1\Theta$, $\varepsilon_1(\Theta)$ sont en effet obtenues en substituant dans $\Delta_2\varphi$ et $\varepsilon_2(\varphi)$, aux dérivées secondes φ_{uu}, φ_{uv}, φ_{vv}, les produits Θ_u^2, $\Theta_u\Theta_v$, Θ_v^2, et négligeant les termes en φ_u et φ_v. *Je regarderai un système de variables caractéristiques* U, V, *conjuguées complexes, comme des coordonnées isotropes* (ou symétriques) *du plan de réprésentation* (u, v); les paramètres différentiels de premier ordre de ce plan étant

$$\delta_1\Theta \equiv 4\Theta_U\Theta_V, \qquad \delta(\Theta, \Psi) \equiv 2(\Theta_U\Psi_V + \Theta_V\Psi_U),$$

on aura, d'après (62),

$$(63)\quad \Delta_1\Theta = \Lambda\mu(u, v)\delta_1\Theta, \qquad \Delta(\Theta, \Psi) = \Lambda\mu(u, v)\delta(\Theta, \Psi) \qquad (\omega = 2\Lambda\mu);$$

donc (avec la convention précédente) *correspondance conforme entre une congruence* (H) *et sa représentation* (u, v). Pour une congruence (H) normale, les surfaces caractéristiques isotropes découpent, sur les surfaces orthogonales, les lignes minima; c'est aussi une propriété des congruences (I, N).

L'équation $\varepsilon_2(\varphi) = 0$ a été écrite en coordonnées isotropes U, V,

$$(28)\qquad \varphi_{UV} + F\varphi_U + G\varphi_V = 0,$$

où, d'après (27), 2F et 2G sont les rapports ρ et ρ' des formules (41). La théorie des invariants de l'équation (28) conduit à la forme invariante

$$(64)\qquad -2(G\,dU + F\,dV) \equiv d\mathrm{M} \times \mathbf{k},$$

d'après (43). *Le cas où l'équation* (28) *a ses invariants égaux*, $F_U = G_V$, *est donc celui où le vecteur de courbure* $\mathbf{k}$ *est un gradient;* ce cas, étudié au n° **20** pour $\mathbf{k} \neq 0$, donne $\eta\tau = 0$ et la condition *nécessaire* (et suffisante) $\eta = 0$. Pour $\mathbf{k} = 0$, la congruence est (IR), $F = G = 0$.

23. Une propriété importante des équations $\varepsilon_2(\varphi) = 0$ à invariants égaux se rattache à la recherche suivante, où je laisse de côté le cas de l'équation $\delta_2\varphi = 0$. Existe-t-il des solutions φ, ψ, donnant des familles de surfaces orthogonales, autrement dit une *configuration* (h_3) de solutions, au sens du n° **8** ? On aurait alors

$$\frac{\psi_U}{\varphi_V} = -\frac{\psi_V}{\varphi_V} = -i\sqrt{\frac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varphi}} = e^{2\theta}$$

et φ et θ devraient satisfaire au système formé de (28) et

$$\varphi_{UV} + \theta_V\varphi_U + \theta_U\varphi_V = 0, \qquad (\theta_V + F)\varphi_U - (\theta_U + G)\varphi_V = 0.$$

Je ne discute pas complètement ce système, l'équation (28) n'étant pas arbitraire, et l'interprétation de ses coefficients résultant de (64). Je traite seulement le cas, qui se présente effectivement dans notre problème (¹), où (28) ayant ses invariants égaux, on peut prendre $\theta_V = F$, $\theta_U = G$. Le système est alors réduit à (28) et $\varphi = \varphi(\theta)$; d'où

$$\psi = \int e^{2\theta}\varphi'(\theta)(\theta_U\, dU - \theta_V\, dV).$$

Prenons alors $u = \varphi$, $v = \psi$ comme variables indépendantes; on reconnaît aussitôt, d'après la signification des coefficients de l'équation de Laplace $\Delta_2\Phi = 0$, que l'équation $\varepsilon_2(\Phi) = 0$ prendra la forme canonique particulière

$$(66) \qquad \Phi_{uu} - e^{4\theta}\Phi_{vv} = 0, \qquad \text{où} \qquad \theta = \theta(u).$$

24. Une généralisation de M. U. Amaldi. — La méthode des images de Lord Kelvin a conduit M. Amaldi (²) à la recherche des cas où l'équation $\Delta_2(m\varphi) = 0$ peut être ramenée, comme précédemment $\Delta_2\varphi = 0$, à une équation à deux variables u, v, le multiplicateur $m(x, y, z)$ ne dépendant pas de la solution φ. M. Amaldi a

---

(¹) D'ailleurs encore sous forme particulière, car $\left(\log\frac{F}{G}\right)_{UV} = 0$; donc un choix convenable de variables U, V permet de prendre $F = G$.

(²) U. Amaldi, *Tipi di potenziali che, divisi per una funzione fissa, si possono far dipendere da due sole variabili* (*Rendic. del circ. mat. di Palermo*, 16, 1902).

montré dans ce problème l'intervention du groupe conforme au lieu de celui des similitudes; à côté des types de congruences obtenus par M. Levi-Civita, ou s'y ramenant par des inversions *réelles*, il a étudié la congruence des *loxodromies d'un faisceau de tores*, trajectoires d'un groupe de ∞^1 transformations conformes, avec le cas particulier des cercles axiaux à un cercle fixe. Ce cas ne diffère pas essentiellement de celui des cercles de même axe, mais M. Amaldi a montré qu'alors l'équation $\Delta_2(m\varphi) = 0$ peut être ramenée à une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre.

Étendant le problème de M. Amaldi, on pourrait aussi étudier la classification des congruences *pseudo-isothermes;* on reconnaîtra encore ici l'importance des congruences (I), les développables isotropes restant variétés caractéristiques de Cauchy pour le nouveau problème. Si l'on s'en tient au problème de M. Amaldi, l'équation $\Delta_2(m\varphi) = 0$ écrite, avec $\mu = \log m$,

$$\Delta_2\varphi + 2\Delta(\varphi, \mu) + (\Delta_2\mu + \Delta_1\mu)\varphi = 0$$

montre que, pour les congruences solutions, $\mathcal{U} = \text{const.}$, $\mathcal{V} = \text{const.}$, ce seront maintenant les quantités

$$\Delta_1\mathcal{U}, \quad \Delta(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \Delta_1\mathcal{V}, \quad \Delta_2\mathcal{U} + 2\Delta(\mathcal{U}, \mu), \quad \Delta_2\mathcal{V} + 2\Delta(\mathcal{V}, \mu), \quad \Delta_2\mu + \Delta_1\mu,$$

dont les rapports resteront constants le long des lignes de la congruence. On détermine bien ainsi une nouvelle classe de congruences (I), à laquelle appartiendront aussi, d'après la méthode des images, les transformées conformes des congruences (IR); celles-ci seront sans doute les seules nouvelles solutions si l'on fait intervenir aussi les inversions imaginaires.

25. Une autre méthode d'étude. — La méthode précédemment suivie pour l'esquisse d'une classification des congruences isothermes, avec les variables u, v, w, peut se rattacher à l'emploi d'un repère mobile *naturel*. On peut aussi poser le problème avec un repère normal $\mathbf{M}\mathbf{a}\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ sans préciser au début les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$.

Une famille isotherme de surfaces de la congruence étudiée serait définie par un vecteur $\mathbf{v}$, normal en M à la congruence ($\mathbf{a}$), pour lequel

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = 0, \qquad \text{div}\,\mathbf{v} = 0. \tag{67}$$

Je poserai, gardant en général les notations (46),

$$\mathbf{v} = e^{\beta}\mathbf{a}_\alpha = e^{\beta}(c\mathbf{a}_1 + s\mathbf{a}_2) \quad \text{avec} \quad c = \cos\alpha, \quad s = \sin\alpha,$$

l'indice α se rapportant à la congruence $(\mathbf{a}_\alpha)$ ou $(\mathbf{v})$. Aux conditions (67) on peut substituer (*cf.* [4], n^{os} **24** à **30**)

$$(68) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v} \wedge \text{rot}\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\,\text{div}\,\mathbf{v} \equiv (\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\nabla\beta - \mathbf{w}_\alpha) = 0, \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v}) \wedge \text{rot}\,\mathbf{v} + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{v})\,\text{div}\,\mathbf{v} \equiv -(\mathbf{v} \times \mathbf{v})\{(\nabla\beta - \mathbf{w}_\alpha) \wedge \mathbf{a} + N_\alpha \mathbf{a}\} = 0, \end{array} \right.$$

soit

$$\nabla\beta - (c^2\mathbf{w}_1 + s^2\mathbf{w}_2) + \{\nabla\alpha - sc(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)\} \wedge \mathbf{a} + sc(N_2 - N_1)\mathbf{a} = 0, \tag{69}$$

$$\nabla\alpha - sc(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) - \{\nabla\beta - (c^2\mathbf{w}_1 + s^2\mathbf{w}_2)\} \wedge \mathbf{a} - (c^2 N_1 + s^2 N_2)\mathbf{a} = 0. \tag{70}$$

Mais les équations (69) et (70), équivalentes à quatre équations scalaires, sont dépendantes, et l'on peut remplacer leur système par un de ceux formés de (69) et (70′), ou (70) et (69′), c'est-à-dire

$$(\nabla\beta - \mathbf{w}_\alpha) \times \mathbf{a} \equiv \{\nabla\beta - (c^2\mathbf{w}_1 + s^2\mathbf{w}_2)\} \times a + sc(N_2 - N_1) = 0, \tag{69′}$$

$$-N_\alpha \equiv -\mathbf{a}_\alpha \times \text{rot}\,\mathbf{a}_\alpha \equiv \{\nabla\alpha - sc(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)\} \times \mathbf{a} - (c^2 N_1 + s^2 N_2) = 0. \tag{70′}$$

Un système de solutions α, β donnerait

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi, \qquad \mathbf{w} = \nabla\beta = \frac{1}{2}\nabla \log \Delta_1\varphi.$$

Une simplification est toujours possible par le choix d'un repère *primaire* donnant $N_1 = N_2$. Si l'on emploie le système (69′), (70), on peut résoudre (69′) par rapport à $\text{tang}^2\alpha$ et reporter cette valeur dans (70). Avec (70′), (69), l'équation (70′) en α ou $\text{tang}\,\alpha$ détermine les surfaces de la congruence $(\mathbf{a})$; on revient ensuite à (69) pour β. Tout cela ne va pas sans calculs et il semble difficile de tirer de ces systèmes plus que les résultats déjà obtenus. On reconnaît de nouveau l'importance des congruences (I); alors $(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) \times \mathbf{a} = 0$, et le repère primaire étant indéterminé, on peut revenir au repère principal [indéterminé aussi pour une congruence (IR)], avec $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{k}$. Nous retrouvons alors les calculs et les résultats des n^{os} **19** à **21** sous une forme assez avantageuse; *pour une congruence* (H),

$N_1 = N_2 = 0$, *les vecteurs* $\nabla\alpha - sc(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)$ et $\nabla\beta - (c^2\mathbf{w}_1 + s^2\mathbf{w}_2)$, *normaux à* $\mathbf{a}$, *sont égaux et rectangulaires.*

DEUXIÈME PARTIE.

26. Le problème homogène de M. G. Bouligand. — Dans le problème homogène $\mathcal{T}_0$ de M. Bouligand, on se propose de *déterminer une fonction* $\varphi(x, y, z)$, *harmonique spatiale dans un domaine* Ω *et sur sa frontière* Σ, *telle en outre qu'en tout point* S *de* Σ *la dérivée de* φ *suivant une direction d donnée en ce point soit nulle.* On suppose que la direction d varie continûment sur Σ, et que cette frontière présente certaines conditions de régularité. Pour mettre en échec (dans les conditions de [2], exemple du n° **2** *bis*) la théorie générale de M. G. Giraud, Σ devra satisfaire à la condition C_1 : *posséder une ligne* Γ *de points où la direction d lui soit tangente.*

Une congruence (u, v) de courbes, telle que la tangente en S à la courbe de la congruence issue de ce point ait la direction d, satisfera, *pour* Σ *convenable*, au problème $\mathcal{T}_0$, dans le cas des fonctions $\varphi(u, v)$ définies au n° **1**, c'est-à-dire si la congruence est (H). Pour simplifier, nous supposerons remplie une condition C_2; la représentation $\mathcal{C}$, dans le plan (u, v), du *contour apparent* Γ *de* Σ *pour la congruence en jeu* sera une courbe analytique (ou formée d'un nombre fini d'arcs analytiques) limitant une aire $\mathcal{D}$ *simplement connexe;* j'appellerai $\mathcal{C}$ *contour apparent réduit de* Σ.

La condition C_1 *est essentielle;* C_2, c'est-à-dire l'intersection en deux points au plus des lignes de la congruence et de Σ, n'a pas ce caractère de nécessité : le cas des fonctions harmoniques du plan, dans lequel on traite des aires de différentes connexions, suffit à le montrer. Ces conditions sont celles dans lesquelles s'est placé M. Bouligand pour les exemples simples que nous rappelons brièvement.

27. Congruences de droites parallèles ou concourantes. — **A.** Soit la congruence des droites D parallèles à une direction fixe, disons Oz. Cette congruence des trajectoires orthogonales des plans perpendiculaires à Oz est (IR, N); elle est (H, S) pour le groupe des translations parallèles à Oz. Avec $u=x$, $v=y$, on emploie la représentation plane des traces des droites D sur le plan Oxy, et $\mathcal{C}$ est le contour apparent projeté de Σ; la fonction $\varphi(x, y)$ est harmonique plane.

B. Pour la congruence des droites D issues d'un point fixe O, extérieur à Ω, on suppose la condition C_1 remplie pour les *demi-droites* D′ d'origine O. Cette congruence (IR, N) est celle des trajectoires orthogonales des sphères de centre O; elle est (H, S) pour le groupe des homothéties de centre O. Ici encore, la fonction $\varphi(u, v)$ est harmonique plane, mais à l'aire $\mathcal{D}$ du plan (u, v), de frontière $\mathcal{C}$, on peut, par représentation conforme, substituer le domaine $\mathcal{D}'$ limité sur une sphère du centre O par le contour apparent $\mathcal{C}'$, les projetantes étant les demi-droites D′ : c'est utiliser la représentation sphérique de la congruence.

28. Un exemple de congruence isotrope rectiligne. — Après les précédents, le cas le plus simple des congruences (IR) est celui des *axes focaux de Reye* d'un faisceau de quadriques homofocales, autrement dit des génératrices des quadriques réglées de la famille; on se limitera d'ailleurs aux génératrices d'un seul système. Nous traiterons le cas **C** des *axes focaux d'un cercle*, au sens de M. P. Robert, donc des génératrices (d'un système) de ∞^1 hyperboloïdes de révolution homofocaux. Cette congruence est d'un grand intérêt pour la génération des congruences (IR) les plus générales, car *toute congruence* (IR) *possède, le long de chaque rayon régulier, une congruence* **C** *osculatrice* (avec contact du deuxième ordre); la propriété (H) d'une congruence **C** s'étend au cas (IR) général.

C. Soit le cercle ω, d'équations $x^2+y^2-R^2=0$, $z=0$. La congruence est définie par les plans isotropes passant par les foyers $(0, 0, \pm iR)$ de ω

$$(1-U^2)x+i(1+U^2)y-2U(z-iR)=0, \tag{71}$$

et l'équation conjuguée, U et V étant conjugués complexes, R réel.

On vérifie que

$$\Delta_1 U = \Delta_1 V = 0, \qquad \Delta(U, V) = \frac{(1+UV)^2}{2\sqrt{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2+4R^2z^2}},$$
$$\Delta_2 U = \Delta_2 V = 0,$$

ramenant l'équation $\Delta_2 \varphi = 0$ à la forme $\varphi_{UV} = 0$.

Une droite D de la congruence a pour paramètres directeurs

$$(72) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{U+V}{1+UV} = \sin\theta\cos\psi, \qquad B = i\,\frac{V-U}{1+UV} = \sin\theta\sin\psi, \\ C &= \frac{1-UV}{1+UV} = \cos\theta, \end{aligned} \right.$$

θ et ψ étant les coordonnées géographiques, et

$$U = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\,e^{i\psi}, \qquad V = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\,e^{-i\psi}.$$

Le point J, de coordonnées (A, B, C), qui décrit la représentation sphérique, a pour projection sur Oxy un point K (A, B, 0), de coordonnées symétriques planes

$$(73) \qquad \sigma = A + iB = \frac{2U}{1+UV} = \sin\theta\,e^{i\psi}, \qquad \tau = A - iB = \ldots$$

ou d'affixe σ dans le plan de Cauchy. Le point L, de coordonnées symétriques U, V ou d'affixe U dans le même plan, décrit la représentation obtenue par projection stéréographique à partir du point (0, 0, — 1), de la représentation sphérique précédente.

La trace P d'une droite D sur le plan Oxy a pour coordonnées symétriques (¹)

$$(74) \qquad s = x_0 + iy_0 = -\frac{2iRU}{1+UV} = -iR\sigma, \qquad t = x_0 - iy_0 = \ldots.$$

Ces formules permettent de vérifier l'identité des droites D avec

(¹) Les formules (74) sont obtenues après suppression du facteur $1 - UV$; pour $1 - UV = 0$, donc $C = 0$, la droite D appartient au plan Oxy et est tangente au cercle ω au point P; ce point sera, dans ce cas encore, considéré comme la trace de D.

les droites

$$\frac{x}{\sin\theta} - \frac{z}{\cos\theta} = \lambda\left(1 - \frac{y}{\sin\theta}\right), \qquad \frac{x}{\sin\theta} + \frac{z}{\cos\theta} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{y}{\sin\theta}\right),$$

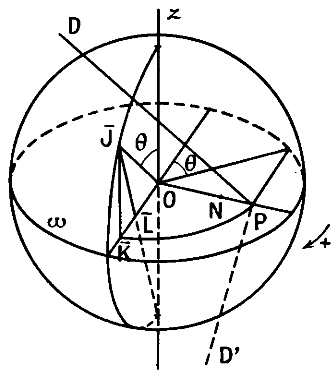
génératrices d'un système des hyperboloïdes

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{R^2-a^2} = 1, \qquad \left(a = R\sin\theta,\ \lambda = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\right).$$

Pour la condition C_1, *le cercle* ω *ne devra pas être intérieur à* Σ; nous supposerons aussi remplie la condition C_2, le contour apparent réduit $\mathcal{C}$ enfermant l'aire simplement connexe $\mathcal{D}$ parcourue par L. On peut dans les mêmes conditions utiliser le contour $\mathcal{C}'$ et le domaine $\mathcal{D}'$ de la représentation sphérique décrite par J.

29. Les formules (74) traduisent une relation importante entre la représentation sphérique et l'image de la congruence tracée par P sur

Fig. 1.



le *plan moyen* Oxy; ces propriétés sont du reste faciles à établir par la Géométrie élémentaire [1].

(1) Depuis une dizaine d'années, d'assez nombreux travaux géométriques relatifs à la parataxie ont été publiés en France par MM. A. Bloch, J. Hadamard, P. Robert, B. Gambier et moi-même dans le *Journ. de Math.*, les *Nouvelles Annales de Math.*, *L'Enseignement scientifique* et les *Comptes rendus.* Les propriétés utilisées remontent à Laguerre et Darboux. Ces études peuvent être considérées comme une préface à la théorie des congruences (I) générales.

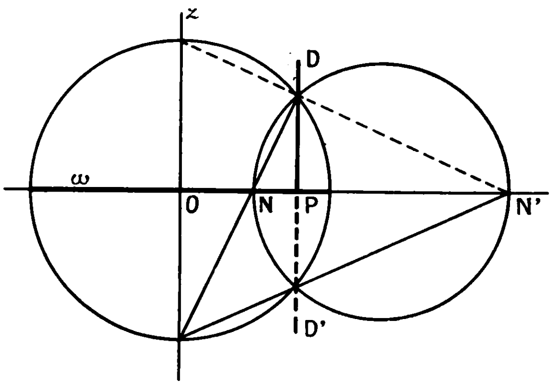
Substituons à la représentation sur la sphère de centre O, de rayon 1, celle effectuée sur la sphère de grand cercle ω; le point J(A, B, C) est remplacé par $\bar{J}$(AR, BR, CR), et de même K et L par $\bar{K}$(AR, BR, o) et $\bar{L}$, de coordonnées symétriques RU, RV.

D'après (74), $\bar{K}$ se déduit de P par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de Oz; les déplacements de P et de $\bar{K}$ sont rectangulaires, donc aussi ceux de P et $\bar{J}$, d'où la *correspondance par éléments orthogonaux* entre l'image tracée par P sur le plan moyen Oxy et la représentation sphérique (*fig.* 1).

Soit N, de la demi-droite OP, le point déduit de $\bar{L}$ par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz; N a pour coordonnées symétriques

$$\mu = \xi + i\eta = -i\text{RU}, \qquad \nu = \xi - i\eta = i\text{RV}, \tag{75}$$

Fig. 2.



d'où

$$s = \frac{2\mu \text{R}^2}{\text{R}^2 + \mu\nu}, \qquad t = \frac{2\nu \text{R}^2}{\text{R}^2 + \mu\nu}, \tag{76}$$

ou en coordonnées cartésiennes

$$\frac{x_0}{\xi} = \frac{y_0}{\eta} = \frac{2\text{R}^2}{\xi^2 + \eta^2 + \text{R}^2}. \tag{76'}$$

Ces relations définissent *dans le plan* une transformation *remarquable* de Darboux (*Principes de Géométrie analytique*, livre V, Chap. VII) (*fig.* 2); la correspondance $P(x_0, y_0) | N(\xi, \eta)$ est (1, 2), mais *elle fait correspondre à l'angle euclidien de deux courbes en* N *un angle égal pour les courbes correspondantes en* P, *celui-ci étant mesuré dans la géométrie cayleyenne* (hyperbolique) *dont l'absolu est le cercle* ω (¹).

Les expressions de ξ, η en fonction de x_0, y_0 sont fournies en écrivant la valeur commune des rapports (76′) sous la forme

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{R(R \pm \sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2})}.$$

30. Nous avions précédemment choisi les droites D d'un système d'hyperboloïdes homofocaux et orienté ces droites, pour la représentation sphérique, de sorte qu'elles portent des axes de moment positif par rapport à Oz

$$N = x_0 B - y_0 A = \frac{4RUV}{(1 + UV)^2}.$$

La représentation de la congruence par les traces P des droites D ne permet plus en général, à partir de ces traces, la séparation des deux systèmes de génératrices. *Pour employer sans ambiguïté cette représentation*, utiliser le domaine $\mathcal{D}''$ parcouru par P et son contour $\mathcal{C}''$, auxquels correspondraient pour N domaine et contour bien définis — et non simultanément leurs inverses par rapport à ω — d'où aussi les domaines et contours en résultant pour J et L, *il faut imposer au domaine* Ω *et à sa frontière* Σ *la condition supplémentaire de ne contenir aucun point du cercle* ω *ou de la région du plan* Oxy *extérieure à* ω.

En exprimant avec les variables s, t la fonction $\varphi(U, V)$, d'après

$$\varphi_{UV} = s_U s_V \varphi_{ss} + (s_U t_V + s_V t_U)\varphi_{st} + t_U t_V \varphi_{tt} + s_{UV}\varphi_s + t_{UV}\varphi_t,$$

l'équation $\varphi_{UV} = 0$ est ramenée, après quelques calculs, à l'équation

$$(77) \qquad s^2\varphi_{ss} + (4R^2 - 2st)\varphi_{st} + t^2\varphi_{tt} - s\varphi_s - t\varphi_t = 0,$$

du type elliptique dans les conditions envisagées ($R^2 - st > 0$), permettant la détermination de la fonction réelle $\varphi(s, t)$ dans $\mathcal{D}''$ par ses

(¹) *Cf.* aussi E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, Paris, 1928, p. 149.

valeurs sur $\mathcal{C}''$ [ou de la fonction $\varphi(x_0, y_0)$ des variables réelles x_0, y_0 dans les mêmes conditions].

On peut, grâce à la transformation précédente, comprendre dans le cas **C**, par passage à la limite convenable, les exemples **A** et **B** du n° **27**. On obtient **B** en faisant tendre R vers zéro. Pour **A**, il faut passer aux limites $R\infty$, $U = V = 0$, mais $s = -2i\mathrm{UR}$, $t = 2i\mathrm{VR}$ restant déterminés; alors l'équation (77) est bien réduite à $\varphi_{st} = 0$ ou $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, la géométrique cayleyenne envisagée au n° **29** étant euclidienne à la limite.

31. La congruence des cercles de même axe. — **D.** Il s'agit ici d'une congruence (IC, N), (h_3) par les familles de plans parallèles et de cylindres de révolution coaxiaux qu'elle contient, donc (H); ceci résultant aussi de la remarque $\mathcal{B}'$. Cette congruence est (H, S) pour le groupe des rotations autour de l'axe considéré. Soit Oz cet axe; les systèmes de variables

$$u = \lambda = \log r. \quad (r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}), \qquad v = z; \qquad \text{ou} \qquad u = r, \qquad v = z$$

donnent à l'équation de Laplace les formes

$$\Delta_2\varphi \equiv e^{-2\lambda}\varphi_{\lambda\lambda} + \varphi_{zz} = 0, \tag{78}$$

$$\Delta_2\varphi \equiv \varphi_{rr} + \varphi_{zz} + \frac{1}{r}\varphi_r \equiv \delta_2\varphi + \frac{1}{r}\varphi_r = 0. \tag{78'}$$

Cet exemple est bien connu; l'équation (78') a été l'objet de remarques importantes de M. Bouligand, portant plus généralement sur des équations du type elliptique dont les coefficients présentent des singularités (1). Il en résulte que le domaine Ω et sa frontière Σ ne devront contenir, pour l'application régulière des conditions du problème $\mathfrak{T}_0$, aucun point de l'axe Oz. Le contour apparent réduit $\mathcal{C}$ sera donc tracé dans un demi-plan méridien $r > 0$ par les cercles d'axe Oz tangents à Σ, et la solution $\varphi(r, z)$ dans le domaine $\mathcal{D}$ ainsi

(1) *Cf.* les Mémoires et Notes de M. G. Bouligand à l'*Acad. royale de Belgique* (*Bull. de la classe des Sciences*), en particulier : *Sur les ensembles impropres dans le problème de Dirichlet...*, (5e série, **17**, n° **1**, 1931); *Sur certaines équations du type elliptique à coefficients singuliers* (5e série, **18**, n° **10**, 1932).

limité résulte alors des données sur $\mathcal{C}$. M. Bouligand a montré que si $\mathcal{C}$ était prolongé jusqu'à inclure un segment de l'axe Oz, ce segment jouerait le rôle d'*ensemble impropre*, les données qu'il porte n'intervenant pas pour la détermination de φ.

L'étude en cause de M. G. Bouligand se rapporte, non au problème homogène $\mathfrak{T}_0$, mais au problème de Dirichlet harmonique relatif à un domaine Ω' de révolution autour de Oz, la distribution des valeurs sur la frontière Σ' ayant les cercles parallèles pour lignes de niveau. On peut rapprocher les deux problèmes; partons d'un domaine Ω' et pratiquons une coupure suivant une section demi-méridienne, par exemple, puis décollons les faces de la coupure, amincissons les deux bouts du domaine Ω ainsi obtenu jusqu'à ce que sa frontière Σ satisfasse à la condition C_2. De même, le problème $\mathfrak{T}_0$, résolu pour Σ à partir de (78′), permet le retour au problème de Dirichlet pour Σ' après les opérations inverses des précédentes et suppression de la coupure, avec répartition des données de parallèle à parallèle.

Cet exemple **D** met en jeu, pour Ω et Ω', des domaines finis. Des domaines infinis interviendraient pour les cas **A** et **B** : domaine cylindrique Ω' pour **A**; angle solide Ω' limité par une nappe conique, sommet exclu, pour **B**. Et de même pour le cas général des congruences (IR), comme pour les autres congruences (H, S).

32. Pour ce qui, dans les applications, concerne les singularités, on devra naturellement tenir compte du facteur de proportionnalité Λ mis en évidence, en (61), dans le passage de l'équation $\Delta_2\varphi = 0$ à $\varepsilon_2(\varphi) = 0$, comme aussi de ceux que peuvent introduire les changements de variables suivants ayant pour but de ramener, par exemple, l'équation à deux variables à la forme canonique

$$\varepsilon_2^*(\varphi) \equiv \delta_2\varphi - \mathbf{k}^*.\delta\varphi = 0 \tag{79}$$

à laquelle conduit la formule (64). J'entends par $\delta_2\varphi$ le paramètre différentiel du deuxième ordre du plan de représentation, où le gradient est indiqué par le symbole δ (petit nabla) et la multiplication scalaire par le point $.$; $\mathbf{k}^*$ est alors le vecteur de courbure $\mathbf{k}$ *ou son image dans la représentation conforme au point considéré;* dans (78′), $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}$.

On remarquera que (78) est, d'autre part, la forme canonique (66). D'ailleurs l'exemple **D** montre bien la dissociation annoncée entre les propriétés angulaires et les propriétés harmoniques du plan (r, z) et de l'espace. Tandis que z est harmonique dans l'espace et dans ce plan, pour λ on a

$$\Delta_2\lambda = 0, \qquad \Delta_1\lambda = \delta_1\lambda = -\delta_2\lambda = e^{-2\lambda}$$

et, pour r,

$$\delta_2 r = 0, \qquad \Delta_2 r = \frac{1}{r}, \qquad \Delta_1 r = \delta_1 r = 1.$$

Les paramètres harmoniques pour l'espace et le plan (r, z), satisfaisant à (78′) et $\delta_2\varphi = 0$, sont donnés seulement par $\delta_2\varphi = 0$, $\varphi_r = 0$, ou $\varphi_r = 0$, $\varphi_{zz} = 0$, soit $\varphi = az + b$. Mais si l'on cherche les faisceaux isothermes de courbes du plan (r, z) engendrant, par révolution autour de Oz, des familles isothermes de surfaces, on devra faire un changement de paramètre; avec $\Phi(\varphi)$, on aura à résoudre le système $\Delta_2\Phi = 0$, $\delta_2\varphi = 0$, soit

$$\delta_2\varphi = 0, \qquad \delta_1\varphi - \frac{1}{r}\varphi_r f(\varphi) = 0 \qquad (f \text{ fonction arbitraire}).$$

Or $\varphi_r = \delta(\varphi, r)$, donc la seconde équation s'écrit $\dfrac{r\,\delta_1\varphi}{\delta(\varphi, r)} = f(\varphi)$. Soient $\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \delta\varphi$, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ le vecteur normal à la courbe $\varphi = \text{const.}$, limité à l'axe Oz; cette équation traduit que *le produit* $\overline{\mathrm{MI}}.\overline{\mathrm{MN}}$ *reste constant avec* φ, d'où les solutions : droites parallèles à Or et à Oz, droites issues d'un point de Oz et cercles orthogonaux, ellipses et hyperboles homofocales, d'axe focal Oz (1).

(1) D'après la propriété : les axes d'une conique à centre déterminent sur la normale des segments dont le rapport est celui des carrés des longueurs (réelles ou imaginaires) des axes. On retombe d'ailleurs sur un problème de solutions orthogonales, posé au n° **23**. La question ci-dessus a déjà été traitée par M. V. Volterra, *Supra alcuni problemi della teoria del potenziale* (*Annali della Scuola Normale di Pisa*, 1883).

On retrouve aussi ici des systèmes triple-orthogonaux isothermes; ces systèmes ont été déterminés complètement par Lamé, Combescure et Darboux. Dans presque tous les exemples que nous donnons apparaissent des congruences ou des familles de surfaces appartenant à de tels systèmes.

33. Les hélices circulaires de même axe et même pas. — **E**. Il s'agit d'une congruence (H, S) pour un groupe de ∞^1 déplacements hélicoïdaux. Les autres criteriums donnés permettaient aussi de reconnaître son caractère; on peut en effet définir cette congruence par les familles de surfaces, cylindres et hélicoïdes d'axe Oz,

$$x^2+y^2=\text{const.},\qquad z-h\omega=\text{const.},\qquad \left(\text{tang}\,\omega=\frac{y}{x}\right),$$

h étant le quotient par 2π du pas commun. Nous pourrons supposer $h\geqq 0$ et nous poserons $h=\frac{n}{m}$ pour obtenir, pour $n=0$, les cercles du cas **D**, et pour $m=0$, les droites du cas **A**. Avec $r^2=x^2+y^2$, $\lambda=\log r$ est, comme précédemment, paramètre harmonique spatial, et l'on a aussi $\Delta_2(z-h\omega)=0$. Les variables

$$r=u=\pm\sqrt{x^2+y^2},\qquad v=n\omega-mz\qquad\text{ou}\qquad v\ \text{et}\ \lambda=\log r$$

donnent l'équation de Laplace sous les formes

$$(80)\qquad \Delta_2\varphi\equiv\varphi_{rr}+\left(m^2+\frac{n^2}{r^2}\right)\varphi_{vv}+\frac{1}{r}\varphi_r\equiv e^{-2\lambda}\{\varphi_{\lambda\lambda}+(m^2e^{2\lambda}+n^2)\varphi_{vv}\}=0;$$

on y reconnaît la configuration (h_3) des deux familles de surfaces employées, ainsi que la forme canonique (66) des équations à invariants égaux.

Pour $n=0$, $m=1$, donc $h=0$, $v=-z$, les hélices sont réduites aux cercles d'axe Oz; on retrouve les équations (78) et (78′) du cas **D**. Pour $m=0$, $n=1$, donc $h\infty$, $v=\omega$, on obtient les droites parallèles à Oz du cas **A** et $\Delta_2\varphi$ se réduit à $\delta_2\varphi$ du plan Oxy.

L'équation (80) en r, v, a ses coefficients réguliers sauf pour $r=0$. Déterminons d'abord les variables caractéristiques par

$$(81)\qquad \Theta_r^2+\left(m^2+\frac{n^2}{r^2}\right)\Theta_v^2=0,\qquad\text{ou}\qquad \Theta_r=\pm i\sqrt{m^2+\frac{n^2}{r^2}}\,\Theta_v.$$

On pourra prendre

$$(82)\qquad \text{U}=\int\mathcal{R}\,dr+iv,\qquad \text{V}=\int\mathcal{R}\,dr-iv\qquad\text{avec}\qquad \mathcal{R}\equiv\frac{\sqrt{m^2r^2+n^2}}{r}=\frac{\rho}{r};$$

d'où

$$U_r = V_r = \mathcal{R}, \qquad U_{rr} = V_{rr} = \mathcal{R}', \qquad U_\nu = -V_\nu = i, \qquad \ldots,$$

puis

$$(83)\quad \Delta_2\varphi \equiv 4\mathcal{R}^2\varphi_{UV} + \left(\mathcal{R}' + \frac{\mathcal{R}}{r}\right)(\varphi_U + \varphi_V) = 0, \qquad \left(\mathcal{R}' + \frac{\mathcal{R}}{r} = \frac{m^2}{\rho}\right).$$

34. L'équation (83) n'a pas ses coefficients réguliers pour $r = 0$, mais les formules (82) montrent qu'alors, si $n \neq 0$, les variables U, V deviennent infinies. Les cas **A** et **D** ayant été étudiés, nous ferons désormais $n = 1$, $m = h^{-1} > 0$. D'après

$$\int \mathcal{R}\,dr = \mathcal{R}r + \frac{1}{2}\log\frac{\mathcal{R}r - 1}{\mathcal{R}r + 1} = \rho + \frac{1}{2}\log\frac{\rho - 1}{\rho + 1},$$

on est conduit au nouveau choix de variables caractéristiques

$$(84)\qquad s = e^U = e^{\rho + i\nu}\sqrt{\frac{\rho - 1}{\rho + 1}}, \qquad t = e^V = e^{\rho - i\nu}\sqrt{\frac{\rho - 1}{\rho + 1}},$$

qui restent régulières pour un point M à distance finie et s'annulent avec $r(\rho = 1)$. On obtient ainsi l'équation

$$(85)\qquad h^2\Delta_2\varphi \equiv \left(\frac{2\rho}{\rho + 1}\right)^2 e^{2\rho}\varphi_{st} + \frac{1}{\rho}(s\varphi_s + t\varphi_t) = 0.$$

Dans le plan des variables isotropes s, t, les coordonnées polaires sont

$$(86)\qquad R = e^\rho\sqrt{\frac{\rho - 1}{\rho + 1}}, \qquad \Phi = \nu = \omega - mz;$$

elles sont liées aux coordonnées géographiques θ, ψ (du n° **28**) de la représentation sphérique par

$$(87)\quad \psi = \omega + \frac{\pi}{2}, \qquad \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{1}{\rho}; \qquad \text{donc} \qquad R = e^{\frac{1}{\cos\theta}}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2};$$

d'où aussi, pour l'équation (83) et les changements de variables précédents,

$$r = h\operatorname{tang}\theta, \qquad \mathcal{R} = \frac{1}{h\sin\theta}, \qquad \mathcal{R}' + \frac{\mathcal{R}}{r} = \frac{\cos\theta}{h^2},$$

$$(83')\qquad h^2\sin^2\theta\,\Delta_2\varphi \equiv \delta_2\varphi + \sin^2\theta\cos\theta\varphi_N = 0,$$

où

$$\delta_2 \varphi = 4\varphi_{UV}, \qquad \varphi_N = \varphi_U + \varphi_V.$$

L'équation (85) est régulière, ρ étant essentiellement positif. Les travaux sur les équations du deuxième ordre, du type elliptique, permettent alors d'affirmer *l'existence et l'unicité* d'une fonction réelle $\varphi(s, t)$, solution de (85), dans une aire $\mathcal{D}$ limitée par un contour $\mathcal{C}$, à partir de ses valeurs arbitraires sur ce contour (¹).

Comme on pouvait le prévoir, l'axe Oz n'entraîne aucune singularité pour une congruence **E** d'hélices, de pas différent de zéro. Nous continuerons à imposer à la frontière Σ du domaine spatial Ω la condition C_2; ceci permet encore de se rendre compte de la différence entre les cas **E** (hélices, ou droites du cas **A**) et **D**. Imaginons, Ω ayant une épaisseur e parallèlement à Oz, que le pas réduit h tende vers zéro; pour $2\pi h < e$, la frontière Σ sera rencontrée plus de deux fois par les hélices, le nombre des points d'intersection augmentant indéfiniment quand h *tend* vers zéro. Mais pour $h = 0$, les hélices se fermant suivant des cercles, les suites de points de rencontre voisins sur Σ se condensent en points séparés et l'épaisseur e parallèle à Oz perd toute importance au point de vue considéré.

On vérifie facilement, sur (83) comme sur (80), la propriété des invariants égaux; désignons par F, G, comme en (28), les coefficients de (83), fonctions de r seul; on a

$$F = G, \qquad F_\rho = i(F_U - F_V) = i(F_U - G_V) = 0.$$

On retrouve aussi, en (83′), la forme canonique (82); le module de la représentation conforme est $h \sin\theta$, et les mesures des vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}^*$ sont respectivement, au signe près, $\dfrac{\sin^2\theta}{r} = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{h}$ et $\sin^2\theta\cos\theta$; on pourra donc écrire, dans les conditions indiquées,

$$\sin^2\theta\cos\theta\,\varphi_N = -\,\mathbf{k}^*.\mathcal{G}\varphi.$$

(¹) *Cf.* le Mémoire cité de M. Volterra, et E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des Équations différentielles* (*Cahiers scientifiques*, V, Paris, 1930). — Mauro Picone, *Sopra alcuni problemi d'Analisi matematica...* (*Circ. mat. di Catania*, 2, 1922).

On constate enfin, avec M. Levi-Civita, que le paramètre h n'est pas essentiel pour l'équation $\varepsilon_2(\varphi) = 0$.

35. Les spirales de même axe, même centre et même paramètre. — **F**. Cette congruence de spirales tracées sur les cônes de révolution de même axe et même sommet est (H, S) et formée des trajectoires d'un groupe de ∞^1 similitudes. L'axe étant Oz, le centre O, on peut définir la congruence par les familles de surfaces orthogonales

$$u = \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \text{const.}, \qquad v = n\omega - m \log \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \text{const.},$$

$\left(\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}\right)$, $h = \frac{n}{m}$ étant le paramètre commun. On obtient pour $n = 0$ les cercles du cas **D**, pour $m = 0$ les droites du cas **B**, cas qu'on pourra écarter ensuite. Les cônes $u = \text{const.}$ forment une famille isotherme, $\cos u$ étant la variable harmonique; la famille $v = \text{const.}$ n'est pas isotherme, mais nous avons indiqué, au n° **21**, une seconde famille isotherme, celle des surfaces normales à la congruence (**k**), qui n'est d'ailleurs pas orthogonale à la première. Après les travaux de M. Levi-Civita [3], qui a montré que le paramètre h est ici essentiel, et les développements précédents, il ne semble pas nécessaire de former l'équation $\varepsilon_2(\varphi) = 0$ pour conclure : le cas **D** exclu, l'axe Oz n'est pas singulier à l'exception du point O qui ne devra pas appartenir à Ω ou Σ; on pourra alors, pour les spirales **F**, satisfaire aux conditions du problème $\mathfrak{T}_0$.