JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

Sur la réflexion et la réfraction des ondes et des rayons

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 309-345.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_309_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur la réflexion et la réfraction des ondes et des rayons;

Par E. VESSIOT.

Le présent travail complète la théorie de la propagation par ondes que j'ai donnée autrefois dans une suite de mémoires [1]. Il contient la théorie de la réflexion et de la réfraction des ondes dans un milieu dont la nature ondulatoire est définie par la donnée de ses surfaces d'onde; ces surfaces d'onde peuvent être quelconques, différentes ou non d'un point à un autre du milieu, variables ou non avec le temps. La théorie est donc susceptible de s'appliquer aussi bien à des questions de mécanique (par exemple, ondes de discontinuité), et à des questions de physique (par exemple, ondes électromagnétiques, ou de gravitation), qu'à des questions de pure optique.

Les lois fondamentales obtenues sont d'une remarquable simplicité.

Si la surface réfléchissante (ou dirimante), est fixe, la différence géométrique des *vecteurs-indices* respectivement normaux à l'onde incidente et à l'onde réfléchie (ou réfractée) est parallèle à la normale à cette surface, en chaque point d'incidence. Les vecteurs-indices en question sont donnés par la surface d'onde au point d'incidence, dans le cas de la réflexion; ou, respectivement, par les surfaces d'onde des deux milieux dans le cas de la réfraction.

Si la surface réfléchissante (ou dirimante), est variable avec le temps,

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **34**, 1906, p. 230-269; *Annales de l'École normale supérieure* (3), t. **26**, 1909, p. 405-448; *Journal de mathématiques pures et appliquées* (6), t. **9**, 1913, p. 39-78; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **42**, 1914, p. 142-187.

les extrémités des deux vecteurs-indices et du gradient de cette surface sont en ligne droite.

De ces lois résultent, dans le cas où la surface réfléchissante (ou dirimante) est fixe, la *loi du plan d'incidence* et la *loi des sinus* pour les normales aux deux ondes.

De ces lois, relatives aux ondes, déduites de considérations générales très simples, par le rapprochement du *principe de l'instantanéité de la réflexion et de la réfraction* (1) avec ma théorie de la propagation, je conclus celles qui concernent les rayons.

Pour faciliter la lecture de ce travail, j'ai rappelé les points essentiels de ma théorie de la propagation, à la base de laquelle est le *principe d'Huygens*, en montrant comment la propagation s'exprime dans la transformation infinitésimale qui a pour symbole le crochet de Poisson $[\Pi, f]$, où la fonction $\Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3)$, homogène et de degré 1 par rapport aux p_i, donne, égalée à 1, l'équation aux dérivées partielles des ondes $\left(p_i = \dfrac{\partial t}{\partial x_i};\ i = 1, 2, 3\right)$.

Les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons peuvent aussi se déduire du *principe de Fermat*, à condition de généraliser d'abord la notion de *chemin optique*.

Je montre enfin comment le *théorème de Malus* peut s'étendre au cas général de propagation considéré.

J'ai traité toutes ces questions dans le cas le plus général des milieux de nature ondulatoire variable avec le temps, qui se présentera naturellement dans les applications à des phénomènes d'ordre mécanique. L'exposition serait beaucoup plus simple et plus rapide dans le cas des régimes permanents. Le cas des régimes variables nécessite, en effet, des discussions tenant à ce que, pour un mode de propagation donné, il peut y avoir, soit ∞^5 rayons, soit ∞^4 seulement. En régime permanent, il y en a toujours ∞^4.

Je me suis borné au cas de l'espace ordinaire, en employant des

(1) Dans beaucoup d'applications, ce principe ne devra être considéré que comme un principe limite, dont la réalité se rapproche plus ou moins; et les lois de la réflexion et de la réfraction devront être plus ou moins modifiées en conséquence; les lois que nous avons établies ne seront, comme toutes les lois physiques, que des lois approchées.

coordonnées rectangulaires. Il n'y aurait aucune difficulté à traiter le cas d'un espace à n dimensions, avec des coordonnées quelconques : ce qui permettrait des applications plus étendues à la théorie de la Relativité générale, par exemple.

Les résultats fondamentaux de ce travail ont été indiqués, pour le cas du régime permanent, dans une Note publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 198, 1934, p. 1120.

I. — Principes généraux.

1. Imaginons dans l'espace un milieu ($\mathcal{M}$) quelconque et une onde qui se propage dans ce milieu. Celle-ci sera supposée définie, dans un système quelconque de coordonnées rectangulaires $x_i (i=1, 2, 3)$, par une équation de la forme

$$t = F(x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

qui, pour chaque valeur du temps t, sera celle du front de l'onde. Je rappellerai d'abord comment la vitesse de l'onde s'en déduit.

Soit, à l'instant t, un point quelconque M du front d'onde. Par ce point passe une trajectoire orthogonale de l'onde, c'est-à-dire de la famille des surfaces (1). Imaginons un point mobile P qui décrive cette trajectoire de manière à être, à tout instant, sur le front de l'onde. A l'instant t, il est en M, et sa vitesse est alors, par définition, la *vitesse normale du front de l'onde* en ce point, ou *vitesse frontale* en M, ou simplement, par abréviation, la *vitesse de l'onde* en M.

Soient donc x_1, x_2, x_3 les coordonnées de P à l'instant t, et désignons par $p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, 3)$ les composantes du gradient $\vec{G}$ de la fonction F, que nous appellerons le *gradient de l'onde*. Le mouvement de P satisfait aux équations

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \frac{dx_3}{p_3} = \frac{\Sigma p_\alpha dx_\alpha}{\Sigma p_\alpha^2} = \frac{dF}{\Sigma p_\alpha^2} = \frac{dt}{\Sigma p_\alpha^2}.$$

La vitesse $\vec{V}$ de l'onde en M est donc le vecteur de composantes

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{\Sigma p_\alpha^2} \qquad (i=1, 2, 3). \tag{2}$$

D'après ces formules, il a même ligne d'action et même sens que le gradient $\vec{G}$, et le produit des longueurs V et G de ces deux vecteurs, qui est dès lors égal à leur produit scalaire $\Sigma p_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt}$, est égal à 1. Nous exprimerons cette relation réciproque entre les deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{G}$ en disant qu'ils sont *inverses* l'un de l'autre.

Nous concluons ainsi que *la vitesse de l'onde est le vecteur inverse de son gradient.*

2. Supposons que l'onde vienne rencontrer une surface S, séparant le milieu ($\mathfrak{M}$) d'un autre milieu ($\mathfrak{M}'$). Il pourra arriver qu'elle se réfléchisse sur S, c'est-à-dire donne naissance à une *onde réfléchie*, qui se propagera ensuite dans ($\mathfrak{M}$) en même temps que l'onde primitive (ou *incidente*). Il pourra aussi arriver qu'elle se réfracte à travers S, c'est-à-dire donne naissance à une *onde réfractée*, qui se propagera ensuite dans ($\mathfrak{M}'$) en même temps que l'onde incidente continuera à se propager dans ($\mathfrak{M}$).

Nous admettrons que réflexion et réfraction sont des phénomènes instantanés, de sorte que *la courbe d'intersection du front de l'onde incidente et de la surface réfléchissante* (ou *dirimante*) *appartient, à chaque instant, au front de l'onde réfléchie* (ou *réfractée*).

Cette seule hypothèse va nous fournir le principe des lois de la réflexion et de la réfraction.

3. Soit

$$t = F'(x_1, x_2, x_3) \tag{3}$$

l'équation de l'onde réfléchie (ou réfractée) et désignons par

$$p'_i = \frac{\partial F'}{dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

les composantes de son gradient $\vec{G'}$.

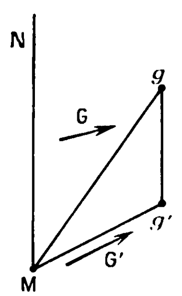
Si nous supposons d'abord que la surface S réfléchissante (ou dirimante) soit fixe, elle pourra être considérée comme le lieu de la courbe d'intersection des deux surfaces (1) et (3), et elle sera représentée par l'équation

$$F(x_1, x_2, x_3) - F'(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

La normale à S en un point d'incidence quelconque M, de coordonnées x_1, x_2, x_3, a donc pour coefficients de direction les différences $p_i - p'_i$ ($i = 1, 2, 3$) : de sorte qu'elle est parallèle à la différence géométrique $\vec{G} - \vec{G}'$. D'où la loi annoncée :

Lorsque la surface réfléchissante (ou *dirimante*) *est fixe, la normale à cette surface en tout point d'incidence est parallèle à la différence géométrique du gradient de l'onde incidente et du gradient de l'onde réfléchie* (ou *réfractée*).

Fig. 1.



4. Supposons, en second lieu, que la surface de séparation S soit variable, c'est-à-dire se déplace, en se déformant ou non, au cours du phénomène. Nous pourrons prendre son équation sous la forme

$$t = \Phi(x_1, x_2, x_3). \tag{4}$$

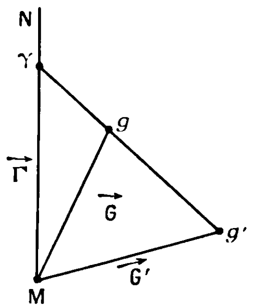
Nous dirons du gradient $\vec{\Gamma}$ de la fonction Φ que c'est le *gradient de la surface réfléchissante* (ou *dirimante*), et nous désignerons ses composantes par $q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$).

Les trois surfaces (1), (3), (4) ayant, quel que soit t, une courbe commune, la surface Σ lieu de cette courbe peut être représentée par l'une ou l'autre des deux équations

$$F(x_1, x_2, x_3) - \Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad F'(x_1, x_2, x_3) - \Phi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

En chaque point d'incidence $M(x_1, x_2, x_3)$, la normale à cette surface Σ est donc parallèle à l'un quelconque des deux vecteurs de composantes $p_i - q_i$ et $p'_i - q_i$. Les différences géométriques $\vec{G} - \vec{\Gamma}$, $\vec{G}' - \vec{\Gamma}$

Fig. 2.



ont donc même direction. Or, γ, g, g' étant les extrémités des trois gradients, $\vec{\Gamma}$, $\vec{G}$, $\vec{G}'$, d'origine commune M, ces différences sont les vecteurs $\overrightarrow{\gamma g}$ et $\overrightarrow{\gamma g'}$; et ceux-ci ont, par conséquent, même ligne d'action. D'où la loi cherchée, pour le cas d'une surface de séparation variable :

Lorsque la surface réfléchissante (ou *dirimante*) *varie avec le temps, l'extrémité de son gradient, en chaque point d'incidence, est en ligne droite avec les extrémités des gradients de l'onde incidente et de l'onde réfléchie* (ou *réfractée*).

5. Le gradient $\vec{\Gamma}$ est, par application du résultat du n° **1**, l'inverse de la *vitesse normale*, $\vec{W}$ *de la surface* S *en* M. Lorsque S est fixe, la longueur de Γ peut donc être considérée comme infinie, sa direction étant toujours celle de la normale à S. Avec cette convention, *on peut considérer la loi du* n° **3** (S *fixe*) *comme un cas particulier de la loi du* n° **4** (S *variable*).

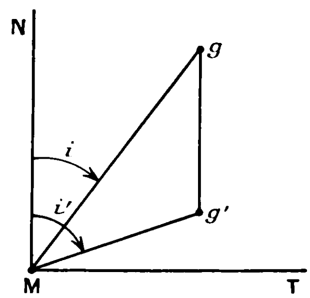
6. Il est facile de déduire des lois générales précédentes des énoncés analogues aux lois classiques de la réflexion et de la réfraction en optique élémentaire.

Ce sera d'abord la *loi du plan d'incidence*. Il résulte immédiatement des conclusions du n° **3** et du n° **4** que les vecteurs $\vec{G}$ et $\vec{G}'$ dirigés respectivement suivant les normales aux fronts de l'onde incidente et de l'onde réfléchie (ou réfractée) sont dans un même plan avec la normale MN à la surface S. Donc :

En tout point d'incidence, la normale à l'onde réfléchie (ou *réfractée*) *est dans le plan* (*plan d'incidence*), *déterminé par la normale à l'onde incidente et la normale à la surface réfléchissante* (ou *dirimante*).

7. Passons à la *loi des sinus*. Dans le plan d'incidence, soit MN une direction arbitrairement choisie de la normale, et MT une direction orthogonale à celle-là, c'est-à-dire tracée dans le plan tangent à S. Soient g et g' les extrémités des gradients $\vec{G}$ et $\vec{G}'$. Le plan d'incidence

Fig. 3.



étant orienté dans le sens de MN vers MT, soit i l'angle (MN, Mg) (*angle d'incidence*), et i l'angle (MN, Mg') (*angle de réflexion*, ou de *réfraction*, suivant le cas).

Dans le cas où S est fixe, gg' est normal à MT et, les projections sur MT de $\vec{G}'$ et de $\vec{G}$ sont égales, ce qui donne (*fig.* 3) :

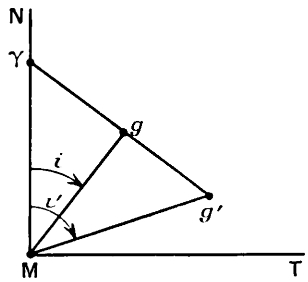
$$G' \sin i' = G \sin i \tag{5}$$

ou, en introduisant les vitesses $V = 1 : G$ et $V' = 1 : G'$ des deux ondes,

$$\frac{\sin i'}{V'} = \frac{\sin i}{V}. \tag{6}$$

8. Dans le cas où S est mobile, nous avons à écrire que les trois points γ, g, g' sont en ligne droite (*fig.* 4). On a immédiatement les

Fig. 4.



coordonnées de ces points par rapport aux axes MN, MT; d'où la condition

$$\begin{vmatrix} \Gamma & G\cos i & G'\cos i' \\ 0 & G\sin i & G'\sin i' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\Gamma(G'\sin i' - G\sin i) = GG'\sin(i' - i). \tag{7}$$

Si l'on introduit les vitesses au lieu des gradients, elle s'écrit

$$V\sin i' - V'\sin i = W\sin(i' - i), \tag{8}$$

ce qui redonnerait (6), pour $W = 0$.

II. — Les surfaces d'onde, le principe d'Huygens, et la transformation infinitésimale $[\Pi, f]$ définissant la propagation dans un milieu donné.

9. Les lois que nous venons d'établir font intervenir les vitesses des ondes considérées. Elles ne seront, par suite, applicables que si l'on peut déduire ces vitesses de la nature ondulatoire des milieux où les ondes se propagent. Il faudra, pour cela, faire appel à la théorie générale de la propagation des ondes. Je vais donc en rappeler les principes essentiels, que j'ai établis autrefois [1]. Je le ferai en les présentant sous une forme synthétique un peu différente, plus condensée, sous laquelle ils se rattachent plus immédiatement à la théorie des transformations infinitésimales de contact, fondamentale aussi en mécanique analytique. J'envisagerai immédiatement le cas général où la nature du milieu peut varier avec le temps : le cas des régimes permanents entraînerait diverses simplifications ou modifications que j'indiquerai chemin faisant, s'il y a lieu.

10. La nature ondulatoire d'un milieu $(\mathcal{M})$ est définie par la donnée, en chacun de ses points M et à chaque instant t, de la *surface d'onde* qui a le point M pour *origine*. Celle-ci est la forme limite du lieu des points du milieu auxquels se transmettrait, à l'instant $t+\delta t$ (δt infiniment petit positif), un ébranlement instantané produit en M à l'instant t. Ce lieu se déduirait, inversement, de la surface d'onde (à des infiniment petits près d'ordre supérieur), en prenant l'homothétique de la surface d'onde, dans le rapport δt, par rapport à son origine M.

Si le milieu est *homogène* à l'instant t, toutes les surfaces d'onde sont, pour cet instant t, égales et semblablement placées ; s'il est *isotrope*, les surfaces d'onde sont des sphères ayant pour centres leurs origines respectives. Si l'on est en *régime permanent*, la surface d'onde est la même, pour chaque origine M, quel que soit t.

Nous définissons analytiquement la surface d'onde qui a $M(x_1, x_2, x_3)$ pour origine, à l'instant t, en nous donnant son équation tangentielle par rapport au système local de coordonnées, $\xi_i = X_i - x_i$, qui a $M(x_1, x_2, x_3)$ comme origine et dont les axes sont parallèles à ceux du système général de référence. L'équation générale des plans, dans ce système local, étant prise sous la forme

$$(9) \qquad p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 - p_0 = 0,$$

nous prendrons l'*équation tangentielle générale des surfaces d'onde du*

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **34**, 1906, p. 230-269; *Annales de l'École normale supérieure* (3), t. **26**, 1909, p. 405-448.

milieu sous la forme résolue

$$p_0 = \Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3), \tag{10}$$

où la fonction Π dans laquelle t, x_1, x_2, x_3 figureront à titre de paramètres, sera homogène de degré 1 par rapport aux coordonnées de direction p_1, p_2 p_3. L'emploi de cette forme résolue pourra exiger que l'on limite la surface d'onde à une de ses nappes convenablement délimitée. Il pourra ainsi y avoir plusieurs modes de propagation d'ondes, dans le milieu, pour un système donné de surfaces d'onde, défini, par exemple, par une équation rationnelle et entière en p_1, p_2, p_3, p_0.

Si la nature du milieu est indépendante du temps, la variable t ne figurera pas dans la fonction Π.

11. *Si l'on admet le principe des ondes enveloppes d'Huygens, la propagation des ondes, dans le milieu dont les surfaces d'onde sont données,* comme il vient d'être expliqué, *par la fonction* Π, *est définie par la transformation infinitésimale dont le symbole est*

$$[\Pi, f] = \sum_\alpha \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right) \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right\}. \tag{11}$$

C'est ce que nous allons mettre en évidence.

Nous considérerons x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3 comme coordonnées de l'élément de contact obtenu en associant au point (x_1, x_2, x_3) le plan $\Sigma p_\alpha(X_\alpha - x_\alpha) = 0$ [1]. Les coordonnées de direction p_1, p_2, p_3 seront donc, en principe, des coordonnées homogènes. Cela est loisible, car les formules, résultant de la transformation en question,

$$\delta x_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \delta\tau, \qquad \delta \frac{p_i}{p_j} = \frac{p_i \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_i} - p_j \dfrac{\partial \Pi}{\partial x_j}}{p_j^2} \delta\tau,$$

ne dépendent que des rapports des p.

Si nous remarquons, d'autre part, que Π est un invariant de (11), car $[\Pi, \Pi] = 0$, nous voyons que l'on peut choisir, parmi tous les sys-

---

(1) La signification des lettres p_i n'est donc plus la même ici que dans le numéro précédent.

tèmes de valeurs des coordonnées p_i, celui qui satisfait à la condition

$$(12) \qquad \Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 1.$$

Chacune des transformations du groupe à un paramètre engendré par $[\Pi, f]$ fait ainsi correspondre à chaque élément de contact (x_i, p_i) pris à l'instant t, un élément de contact (x'_i, p'_i) pris à un autre instant t'. On a de plus, sous le bénéfice de (12), et en raison de l'homogénéité de Π,

$$\delta t = \sum p_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} \delta\tau = \Pi\,\delta\tau = \delta\tau;$$

de sorte que l'on a $t' = t + \tau$, τ étant le paramètre canonique du groupe.

Les transformations ainsi définies sont des *transformations de contact;* car on a, par la transformation infinitésimale $[\Pi, f]$, pour toute variation dx_i des x_i, et dt de t,

$$\begin{aligned}\delta(dt - \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha) &= d\,\delta t - \Sigma\, \delta p_\alpha\, dx_\alpha - \Sigma p_\alpha\, d\,\delta x_\alpha \\ &= d(\delta t - \Sigma p_\alpha\, \delta x_\alpha) - \Sigma\, \delta p_\alpha\, dx_\alpha + \Sigma\, \delta x_\alpha\, dp_\alpha.\end{aligned}$$

D'où, $\delta t - \Sigma p_\alpha \delta x_\alpha$ étant nul,

$$\delta(dt - \sum p_\alpha\, dx_\alpha) = \left(\sum \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \sum p_\alpha\, dx_\alpha + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} dp_\alpha\right)\delta\tau,$$

ce qui peut s'écrire

$$= \left[-\frac{\partial \Pi}{\partial t}(dt - \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha) + d\Pi\right]\delta\tau.$$

On a donc, en tenant compte de (12),

$$(13) \qquad \delta(dt - \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha) = -\frac{\partial \Pi}{\partial t}(dt - \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha)\,\delta\tau.$$

D'où l'on conclut que l'équation

$$(14) \qquad dt - \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha = 0$$

est invariante. Comme $\delta t = \delta\tau$, on a, d'autre part, $\delta\, dt = 0$, et l'équation $dt = 0$ est aussi invariante.

Or le système

$$dt = 0, \qquad \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha = 0,$$

qui est, dès lors, invariant, définit les *multiplicités* d'éléments de contact, prises à un même instant t. Ces multiplicités se changent donc, par toute transformation du groupe, en multiplicités d'éléments de contact, prises à l'instant $t+\tau$; et les contacts sont conservés.

12. On déduit ainsi de toute surface $\mathcal{F}_t$, prise à l'instant t, une surface $\mathcal{F}_{t+\tau}$, pour l'instant $t+\tau$; et nous pouvons considérer toute famille de surfaces ainsi définie (quand on donne à τ toutes les valeurs) comme une onde, dont on connaît le front à chaque instant. On a ainsi défini, par une *transformation de contact continue*, une *propagation d'ondes* bien déterminée.

Si, en particulier, on applique la transformation à tous les éléments de contact d'un point A_t, on obtiendra une surface $A_{t+\tau}$ qui sera le lieu des points qui auront été atteints, au bout du temps τ, par un ébranlement produit en A_t, à l'instant t. On a ainsi des ondes particulières, que nous appellerons *pseudo-sphériques*.

La transformation considérée étant une transformation de contact, le front d'une onde quelconque $\mathcal{F}_{t+\tau}$, à l'instant $t+\tau$, sera l'enveloppe des fronts des ondes pseudo-sphériques qui seraient émises, à l'instant t, des divers points de la surface qui constituait, à cet instant, le front $\mathcal{F}_t$ de l'onde considérée.

La propagation définie par $[\Pi, f]$ *satisfait donc au principe d'Huygens,* (*principe des ondes enveloppes*).

13. Quant aux *ondes élémentaires*, l'une quelconque d'entre elles est le lieu des points $x_i+\delta x_i$, supports des éléments de contact que la transformation infinitésimale $[\Pi, f]$ déduit de tous les éléments $(x_i; p_i)$ ayant pour support un même point quelconque (x_1, x_2, x_3) (à l'instant t). Dans le système de coordonnées local qui a ce point pour origine, elle est donc définie par les formules

$$\xi_i = \delta x_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i}\delta\tau \qquad (i=1, 2, 3), \tag{15}$$

qui en sont des équations paramétriques, puisque les $\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}$ ne dépendent que des rapports des p.

Cette onde élémentaire est donc homothétique, dans le rapport

$\delta\tau = \delta t$ et par rapport au point (x_1, x_2, x_3), de la surface définie par les équations

$$(16) \qquad \xi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire de la surface enveloppe du plan (9) assujetti à la condition (10).

La propagation définie par $[\Pi, f]$ *admet donc les surfaces définies par* (10) *comme surfaces d'onde.*

14. Nous avons ainsi défini une propagation d'ondes qui satisfait aux conditions posées : *surfaces d'onde données* et validité du *principe d'Huygens*. J'ai montré, dans mon mémoire de 1909, qu'il n'y en a qu'une et je n'y reviendrai pas ici. Je remarquerai seulement que si l'état du milieu est permanent, le temps disparaît dans les considérations précédentes, et l'on a alors affaire à une transformation infinitésimale de contact homogène (Π, f), Π étant indépendant de t et homogène de degré 1 par rapport aux p,

$$(17) \qquad (\Pi, f) = \sum \left(\frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \right).$$

Le temps t joue alors le rôle de paramètre canonique du groupe qu'elle engendre.

15. Revenons au cas général de la transformation $[\Pi, f]$ et considérons une onde, représentée par une équation

$$(18) \qquad t = F(x_1, x_2, x_3).$$

Le lieu des éléments de contact des fronts d'onde successifs est défini par les équations

$$(19) \quad t = F(x_1, x_2, x_3), \qquad p_i = m \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad \Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 1;$$

et pour que cette onde soit fournie par le mode de propagation défini par $[\Pi, f]$, il faut et il suffit que le système (19) demeure invariant par $[\Pi, f]$; c'est-à-dire que les équations (19) entraînent les suivantes, obtenues en leur appliquant l'opération $[\Pi, f]$,

$$\sum p_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} = \sum \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha}, \qquad -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} = [\Pi, m] \frac{\partial F}{\partial x_i} + m\left[\Pi \frac{\partial F}{\partial x_i}\right] = 0.$$

Nous n'avons pas écrit la dernière, $[\Pi, \Pi] = 0$, qui est une identité.

La première de ces conséquences équivaut à $m = 1$, et il reste alors

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

ce qui résulte de la dérivation de $\Pi = 1$ par rapport à x_i, puisque $m = 1$ entraîne

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_\alpha} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i}, \qquad p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i}.$$

On conclut donc que toute onde, dans le milieu considéré, est définie par un système de la forme

$$t = F(x_1, x_2, x_3), \qquad p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad \Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 1,$$

et réciproquement.

En d'autres termes, *dans la propagation* $[\Pi, f]$, *les ondes sont représentées par les équations* $t = F(x_1, x_2, x_3)$ *pour lesquelles la fonction* $t = F$ *est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles*

$$\Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 1 \qquad \left(p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i}\right), \tag{20}$$

les lettres p_i désignant ici à nouveau, comme au n° **1**, les dérivées partielles $\frac{\partial t}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

III. — Lois de la réflexion et de la réfraction des ondes.

16. Si l'on rapproche le dernier résultat obtenu de la conclusion du n° **1**, on voit que le gradient d'une onde est déterminé, dans un milieu $(\mathfrak{M})$ dont on connaît les surfaces d'onde, dès que l'on connaît, au point que l'on considère, la direction du plan tangent au front de l'onde. Si l'on se donne, par exemple, les cosinus directeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de la normale à ce front, et si l'on désigne par $\overline{G}$ la valeur algébrique correspondante du gradient, on aura $p_i = \overline{G}\lambda_i$ et, en portant dans (20),

$$\frac{1}{\overline{G}} = \Pi(t \mid x_1, x_2\, x_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{21}$$

Le sens $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sera celui de la propagation de l'onde si le second membre est positif. La formule donnera alors la longueur G du gradient de l'onde. Celui-ci ne dépend donc que de la direction de propagation de l'onde. Nous l'appelons [1] le *vecteur-indice* $\vec{N}$ du milieu, en M, à l'instant t, pour la direction considérée. Naturellement, la vitesse $\vec{V}$ de l'onde, qui est l'inverse de ce vecteur-indice, ne dépend aussi que de la direction de propagation de l'onde, au point et à l'instant considérés. Sa valeur algébrique, pour la direction $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, est donnée par

$$\overline{V} = \Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \tag{22}$$

Si nous nous rappelons que l'équation générale des plans tangents à la surface d'onde, dans le système local de coordonnées qui a l'origine (x_1, x_2, x_3) de cette surface pour origine, est (n° **10**)

$$\Sigma\lambda_\alpha\xi_\alpha = \Pi(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \tag{23}$$

nous voyons que le *lieu des extrémités des vecteurs-vitesses* des ondes passant en $M(x_1, x_2, x_3)$, à l'instant t, est la podaire de la surface d'onde qui a M pour origine (à cet instant).

Le *lieu des extrémités des vecteurs-indices* est l'inverse de cette polaire (pôle M, puissance 1); c'est-à-dire la polaire réciproque de la surface d'onde par rapport à la sphère de centre M et de rayon 1.

17. L'analyse précédente doit être légèrement modifiée si la fonction Π, au lieu d'avoir une homogénéité complète, n'a qu'une *homogénéité positive*, comme c'est le cas, par exemple, pour les milieux permanents, isotropes et homogènes, pour lesquels $\Pi = a\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, ($a$ étant une longueur donnée). $\Pi(mp_1, mp_2, mp_3)$ n'est alors égal

---

[1] *Voir* notre Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France*, n° **2**, **42**, 1914, p. 7.

à $m\Pi(p_1, p_2, p_3)$ qui si m est positif. Pour m négatif, on écrira $mp_i = (-m)(-p_i)$, et l'on obtiendra $-m\Pi(-p_1, -p_2, -p_3)$.

Si l'on se borne à considérer la valeur absolue de la vitesse et de l'indice, elles seront données par

$$(24) \qquad V = \frac{1}{N} = |\,\Pi(t\,|\,x_1, x_2, x_3\,|\,\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\,|.$$

18. Les résultats que l'on vient d'obtenir permettent de remplacer, dans les énoncés des deux *lois des sinus*, établies au nos **7** et **8** pour la *réflexion* et la *réfraction*, les gradients des ondes par les indices du milieu pour les directions de propagation (normale) de ces ondes.

Pour le cas d'une surface réfléchissante, ou dirimante, fixe, on retrouve, avec une valeur absolument générale, la loi de Descartes,

$$(25) \qquad N' \sin i' = N \sin i.$$

Pour le cas d'une surface réfléchissante, ou dirimante, variable, dont la vitesse normale est W, *la loi devient*

$$(26) \qquad N' \sin i' - N \sin i = NN'W \sin(i' - i).$$

19. Ces lois ne sont, du reste, que des conséquences de celles qu'on déduit de même des énoncés des nos **3** et **4**, en y remplaçant les gradients des ondes par les indices du milieu. A savoir :

Soient $\vec{N}$ *et* $\vec{N'}$ *les vecteurs-indices du milieu pour les directions de propagation* (normale) *respectives de l'onde incidente et de l'onde réfléchie* (ou *réfractée*), (*au point d'incidence et à l'instant considérés*) :

1° *Si la surface réfléchissante* (ou *dirimante*) *est fixe, la différence géométrique* $\vec{N'} - \vec{N}$ *est parallèle à la normale à cette surface au point d'incidence considéré;*

2° *Si la surface réfléchissante* (ou *dirimante*) *est variable, soit* $\vec{W}$ *sa vitesse normale, au point d'incidence et à l'instant considérés : les extrémités de* $\vec{N}$ *et de* $\vec{N'}$ *sont en ligne droite avec l'extrémité de* $\vec{W}$. Les trois vecteurs $\vec{N}$, $\vec{N'}$ et $\vec{W}$ sont supposés, bien entendu, avoir le point d'incidence pour origine commune.

20. Ces énoncés contiennent la loi complète des phénomènes de réflexion et de réfraction des ondes, sous les hypothèses faites : *loi de Huygens* pour la propagation, *instantanéité* pour la réflexion et la réfraction (nos **11** et **2**).

Ils s'appliquent, en particulier, aux *ondes de discontinuité* de la mécanique et de la physique. Celles-ci sont, en effet, définies par des équations aux dérivées partielles du premier ordre, à savoir les *équations aux caractéristiques* des systèmes différentiels qui régissent les phénomènes considérés (*mouvement d'un fluide parfait, mouvements dans un milieu élastique, électromagnétisme*, etc.). Or toute équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\mathrm{H}(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 0 \qquad \left(p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i}\right), \tag{27}$$

a pour intégrales $t = \mathrm{F}(x_1, x_2, x_3)$, d'après ce que nous avons rappelé, les ondes qui peuvent se propager dans un milieu dont les surfaces d'onde ont pour équation générale tangentielle

$$\mathrm{H}(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid p_1, p_2, p_3) = 0, \tag{28}$$

par rapport à des axes locaux, d'origine (x_1, x_2, x_3), vis-à-vis desquels l'équation générale des plans est

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 - 1 = 0. \tag{29}$$

La fonction Π relative à cette propagation d'ondes s'obtiendrait en remplaçant dans (28) les p_i par $p_i : p_0$ et en résolvant par rapport à p_0 l'équation ainsi obtenue.

J'ai déjà eu l'occasion de faire remarquer (1) que *la formule* (22) *donne, dans tous ces cas, sans intégration, les vitesses de propagation des ondes dans chaque direction*. Ce qui est la généralisation la plus large d'un célèbre *théorème d'Hugoniot* (2).

Elle permet aussi, d'après ce qui précède, de résoudre, dans tous ces cas, le problème de la réflexion et de la réfraction des ondes, sous l'hypo-

(1) *Voir*, sur ce point, ma *Notice* sur mes travaux (Paris, Librairie Eyrolles, 1932), p. 39 et p. 115.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **101**, 1885, p. 1118 et 1229.

thèse d'instantanéité précisée au n° **2**. On doit y joindre cependant l'hypothèse que le contact des deux milieux considérés n'est pas de nature à modifier les systèmes différentiels fournissant les équations aux caractéristiques qui régissent la propagation des ondes dans l'un ou dans l'autre, hypothèse qu'il y aura lieu de discuter dans chaque cas particulier.

IV. — Réflexion et réfraction des rayons.

21. Toute propagation d'ondes se faisant par une transformation de contact continue, se fait par élément de contact. On peut considérer chaque élément de contact d'une onde comme se déplaçant individuellement dans la propagation. Celle-ci étant définie par la transformation infinitésimale $[\Pi, f]$, le déplacement de chaque élément de contact correspond à l'une des *trajectoires* du groupe à un paramètre qu'elle engendre, c'est-à-dire à l'une des intégrales du système différentiel mixte

$$dx_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dt, \qquad dp_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dt \tag{30}$$
$$(i = 1, 2, 3;\quad \Pi = 1).$$

Le lieu géométrique du point (x_1, x_2, x_3) qui porte l'élément est un *rayon* de la propagation. Le plan de l'élément est entraîné par le point, de manière qu'il y ait constamment, entre la direction du rayon et celle de l'élément, la relation de *pseudo-orthogonalité* définie par les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{31}$$

D'après ce qu'on a vu au n° **13**, cette relation consiste en ce que le plan de l'élément est parallèle au plan qui est tangent à la surface d'onde (relative à l'instant t considéré et ayant pour origine le point M considéré) au point m où elle est percée par la direction du rayon.

Cette pseudo-orthogonalité définit inversement la direction du rayon quand on se donne l'élément de contact (1). Pour une onde particulière donnée, $t = F(x_1, x_2, x_3)$, les rayons sont ainsi les *trajectoires pseudo-orthogonales des fronts de l'onde* : on les déterminera analytiquement par l'intégration du système

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial \Pi}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial \Pi}{\partial p_2}} = \frac{dx_3}{\frac{\partial \Pi}{\partial p_3}}, \tag{32}$$

où l'on aura remplacé t par F et les p_i par les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

22. *La réflexion et la réfraction peuvent être considérées comme se faisant par rayons.* Car nous avons vu au paragraphe précédent que la direction de l'onde réfléchie, ou réfractée, ne dépend, en un point d'incidence et à un instant donnés, que de la direction de l'onde incidente. Or, la direction du rayon de l'onde incidente, au point d'incidence, est pseudo-orthogonale à l'onde : elle détermine donc, pour chaque instant t, celle de l'onde incidente, et par suite, celle de l'onde réfléchie, ou réfractée. Et de cette nouvelle direction résultera inversement, par pseudo-orthogonalité, celle du rayon, réfléchi ou réfracté, défini par l'élément de contact constitué par le point d'incidence et le plan tangent à l'onde, réfléchie ou réfractée, cet élément étant considéré à l'instant t.

Il reste seulement, pour trouver la loi de la réflexion et de la réfraction des rayons, à éliminer l'intermédiaire des ondes, incidente et refléchie (ou réfractée).

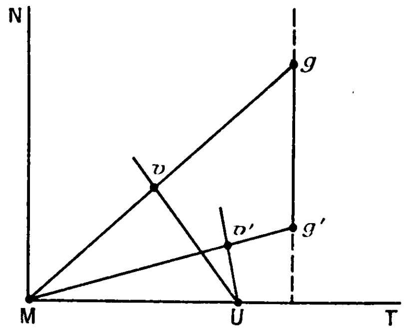
23. Prenons pour plan de la figure (*fig.* 5) le plan d'incidence, et considérons d'abord le cas où la surface S de séparation des deux milieux est fixe. Nous gardons les notations des figures 1 et 3. La droite gg' a pour inverse (pôle M, puissance 1) un cercle dont le

(1) Cette relation n'est univoque, dans les deux sens, que si la surface d'onde, ou la partie qu'on en considère, possède la double propriété de n'avoir qu'un plan tangent parallèle à un plan P mené par son origine et situé d'un côté donné de ce plan P, et de n'être percée qu'en un point par une demi-droite issue de son origine.

centre est sur MT et qui passe par M et par les extrémités v et v' des vecteurs vitesses de l'onde incidente et de l'onde réfléchie (ou réfractée). Les perpendiculaires à Mg en v et à Mg' en v' se coupent donc en un point U de MT (*fig.* 5).

Or MT est la trace sur le plan d'incidence du plan P_0, tangent à S au point d'incidence M; Uv est celle du plan P, tangent à la surface d'onde du milieu ($\mathcal{M}$), (d'origine M et relative à l'instant t),

Fig. 5.



mené parallèlement au plan tangent en M à l'onde incidente; et Uv' est de même celle du plan P', tangent à la même surface d'onde dans le cas de la réflexion, ou à la surface d'onde du milieu ($\mathcal{M}'$), (d'origine M et relative à l'instant t), dans le cas de la réfraction, mené parallèlement au plan tangent en M à l'onde réfléchie, ou réfractée. Les trois plans P_0, P et P', tous trois perpendiculaires au plan d'incidence, se coupent donc suivant une même droite, perpendiculaire en U au plan de la figure.

Comme P a pour point de contact le point m où la surface d'onde du milieu ($\mathcal{M}$) est percée par la direction du rayon incident, et que P' a, de même, pour point de contact le point m' où la direction du rayon réfléchi perce cette même surface d'onde (dans le cas de la réflexion), ou bien le point m' où la direction du rayon réfracté perce la surface d'onde du milieu ($\mathcal{M}'$) (dans le cas de la réfraction), on conclut les énoncés suivants [1] :

[1] Ces lois ne conduisent à un rayon réfléchi, ou réfracté, unique que si les surfaces d'onde satisfont à la double condition énoncée dans la note du n° 21.

1° *Dans le cas d'une surface réfléchissante fixe, la direction du rayon réfléchi est liée à celle du rayon incident par la loi suivante : Soit* **m** *le point où la direction du rayon incident perce la surface d'onde du milieu* ($\mathfrak{M}$) *ayant, à l'instant t, le point d'incidence pour origine; et soit de même, m′ le point où la direction du rayon réfléchi perce la même surface d'onde; les plans tangents à la surface d'onde en m et m′ se coupent dans le plan tangent, au point d'incidence, à la surface réfléchissante.*

2° *Dans le cas de la réfraction à travers une surface fixe, on aura à considérer les surfaces d'onde des deux milieux* ($\mathfrak{M}$) *et* ($\mathfrak{M}'$) (auxquels le rayon incident et le rayon réfracté appartiennent respectivement), *ayant, à l'instant t où arrive le rayon incident au point d'incidence* M, *ce point pour origine commune : le plan tangent à la première au point m où elle est percée par la direction du rayon incident, et le plan tangent à la seconde au point m′ où elle est percée par la direction du rayon réfracté se coupent dans le plan tangent, au point d'incidence, à la surface dirimante.*

24. Dans le cas d'une surface de séparation S variable, on aura à considérer, entre les points v et v' de la figure 5, le point w extrémité de la vitesse normale de cette surface S (voir *fig.* 2 et *fig.* 6). La

Fig. 6.

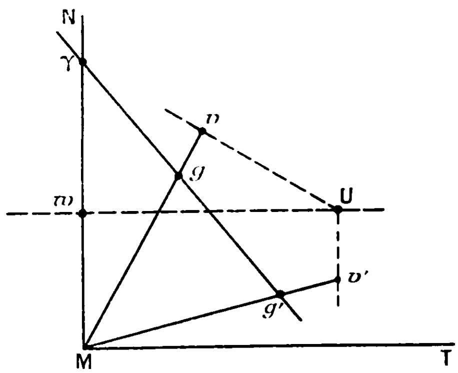


figure inverse de la droite $\gamma g g'$ (pôle M, puissance 1) est un cercle qui passe par M, w, v, v'. Les perpendiculaires à Mg en v et à Mg'

en v' se coupent donc au point U, diamétralement opposé à M sur ce cercle; et ce point se trouvera sur la parallèle à MT menée par w.

On conclut donc que les plans tangents à la surface d'onde du milieu ($\mathfrak{M}$) (cas de la réflexion), ou aux deux surfaces d'onde relatives respectivement aux deux milieux ($\mathfrak{M}$) et ($\mathfrak{M}'$) (cas de la réfraction), se coupent dans le plan mené, parallèlement au plan tangent en M à la surface S, par l'extrémité du vecteur vitesse-normale de cette surface.

De là les énoncés suivants, où nous donnons un peu moins de précisions que pour ceux du n° **23**, aucune ambiguïté n'étant maintenant à craindre dans leur interprétation [1] :

1° *Dans le cas de la réflexion sur une surface variable, les points où la surface d'onde est percée par la direction du rayon incident et par la direction du rayon réfléchi sont tels que les plans tangents à cette surface d'onde en ces points se coupent dans le plan mené, parallèlement au plan tangent à la surface réfléchissante, par l'extrémité du vecteur vitesse-normale de cette surface.*

2° *Dans le cas de la réfraction à travers une surface variable, les points où les surfaces d'onde des deux milieux sont percées respectivement par la direction du rayon incident et par celle du rayon réfracté se coupent dans le plan, parallèle au plan tangent à la surface dirimante, qui passe par l'extrémité du vecteur vitesse-normale de cette surface.*

25. Les lois précédentes ne font intervenir que la direction des rayons; et celle du rayon réfléchi (ou réfracté) dépend, en régime variable, de l'instant t auquel la réflexion, ou la réfraction, se produit. Supposons que l'on se donne le rayon incident lui-même, et voyons si le rayon réfléchi (ou réfracté) sera déterminé par ces lois.

Il faudra revenir, à cet effet, sur la définition des rayons, donnée au n° **21**. Les *trajectoires* de la propagation étant définies par les équations (30), les *rayons* seront définis par le système qu'on en déduira par élimination des p_i et de t. J'ai exposé dans mon Mémoire

---

[1] Même remarque que dans la note du n° 23 relativement à l'unicité de la construction du rayon réfléchi, ou réfracté, qui traduira ces énoncés.

de 1909 (*Annales de l'École normale supérieure*, 3e série, t. 26, p. 432-435) comment se fait celle des p_i.

Les équations

$$\xi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3; \quad \Pi = 1) \tag{33}$$

expriment que (ξ_1, ξ_2, ξ_3) est le point de contact du plan

$$\Sigma p_\alpha \Xi_\alpha = 1,$$

supposé tangent à la surface d'onde. Si l'on introduit l'équation ponctuelle

$$\Omega(t \mid x_1, x_2, x_0 \mid \xi_1, \xi_2, \xi_3) = 1 \tag{34}$$

de cette surface d'onde, en supposant que Ω soit homogène de degré 1 par rapport aux ξ_i (ce qui s'obtient par résolution par rapport à une coordonnée d'homogénéité), l'équation du plan tangent en ce point sera

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_\alpha} \Xi_\alpha = 1,$$

d'où l'on conclut les formules

$$p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{35}$$

Le système (34), (35) est donc équivalent au système (33).

Si l'on remplace les ξ_i par $\xi_i = \dfrac{dx_i}{dt}$ et si l'on pose

$$\overline{\Omega} = \Omega(t \mid x_1, x_2, x_3 \mid dx_1, dx_2, dx_3), \tag{36}$$

les formules (34), (35) deviendront, compte tenu de l'homogénéité de Ω et de ses dérivées :

$$p_i = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \, dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{37}$$

$$dt = \overline{\Omega}. \tag{38}$$

Si l'on porte les valeurs (37) dans les équations

$$dp_i = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Pi}{\partial t}\right) dt \qquad (i = 1, 2, 3),$$

l'élimination des p_i sera faite, grâce aux relations (voir *loc. cit.*, p. 434)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0,$$

et donnera le système

$$(39) \qquad d\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t}\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial\, dx_i} - \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dont une combinaison se réduit (voir *loc. cit.*, p. 435) à

$$(40) \qquad \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t}(dt - \overline{\Omega}) = 0.$$

En régime permanent, $\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial t} \equiv 0$, le système obtenu (38), (39) se réduit donc à deux des équations (39) (les deux premières, E_1 et E_2, par exemple), et à (38). E_1 et E_2 définissent alors les rayons : il y en a donc ∞^4 et chacun est défini par la donnée d'un de ses points et de sa tangente en ce point.

En régime variable, on peut substituer (38) à l'une des équations (39), de sorte que le système sera encore formé de deux des équations (39) (soit E_1 et E_2) et de (38). Dans les équations E_1 et E_2, on fera disparaître dt au moyen de (38). Cela fait, deux cas peuvent se produire : ou bien t disparaît de E_1 et de E_2, ou bien on peut tirer t de l'une d'elles, E_1 par exemple, et l'on aura à porter son expression dans E_2 et dans (38).

Dans le premier cas [1] il n'y a encore que ∞^4 rayons, dont chacun est défini par la donnée d'un de ses points et de sa direction en ce point; dans le second cas il y a ∞^5 rayons, et cette donnée convient à ∞^1 rayons.

Si l'on cherche à déduire des *rayons* les *trajectoires* de $[\Pi, f]$ correspondantes, il faut d'abord *dater* les points du rayon considéré. Dans le cas de ∞^4 rayons (que le régime soit permanent ou variable), cela

---

[1] Ce serait le cas, par exemple, pour $\Omega = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \theta\xi_3$, θ étant fonction de t seul. Les surfaces d'onde seraient des ellipsoïdes de révolution, ayant leur origine à leur intérieur, si $|\theta| \leqq 1$: par exemple pour $\theta = \sin t$.

exige l'intégration de (38) : il a ∞^1 solutions, dont chacune est déterminée par le choix de la date pour l'un des points du rayon. Dans le cas de ∞^5 rayons, la date est déterminée, sans intégration ni constante arbitraire, par l'expression de t tirée de E_1.

Le rayon une fois daté, le vecteur indice (p_1, p_2, p_3) est défini, en chaque point du rayon, par les formules (37).

Remarquons enfin qu'un rayon est toujours défini par la donnée d'un de ses points, de sa direction en ce point, et de la date t qui lui est attribuée; car cela définit complètement la trajectoire correspondante, puisque les valeurs initiales des x_i et des p_i sont ainsi connues pour la valeur de t fixée; ce qui détermine une solution du système (30).

26. Ces précisions données, je reviens à la réflexion et à la réfraction des rayons, en supposant que l'on se donne le rayon incident. Je supposerai d'abord la surface de séparation S fixe : le point d'incidence est, par suite, connu. Si donc il y a ∞^5 rayons dans le milieu $(\mathcal{M})$, la date de l'incidence est aussi connue, et le rayon réfléchi, ou réfracté, dont on connaîtra un point, la date correspondante, et la direction (par application des lois trouvées), est entièrement défini. Si, au contraire, il y a ∞^4 rayons seulement, la date de l'incidence reste inconnue.

Si alors il s'agit de réflexion, la direction du rayon réfléchi, et, par suite, le rayon réfléchi lui-même, seront déterminés si le milieu $(\mathcal{M})$ est de nature permanente, ou si, du moins, les surfaces d'onde restent homothétiques à elles-mêmes, par rapport à leur origine, lorsque le temps varie (cas où t ne figure dans Ω que par un facteur fonction de t). Sinon, à chaque date choisie comme étant celle de l'incidence, correspondra un rayon réfléchi.

S'il s'agit de réfraction, la conclusion dépend du milieu $(\mathcal{M})$ et du milieu $(\mathcal{M}')$; car la construction de la direction du rayon réfracté fait intervenir les surfaces d'onde des deux milieux. Cette direction ne sera donc indépendante du temps que s'il y a permanence pour la nature ondulatoire des deux milieux; ou si, tout au moins, Ω et Ω' ne dépendent de t que par un même facteur, fonction de t. Dans ces deux hypothèses, il n'y a que ∞^4 rayons dans le milieu $(\mathcal{M})$, et le rayon réfracté est, par conséquent, le même quelle que soit la date adoptée pour l'incidence.

En définitive, la connaissance du rayon incident ne donne rien de plus que la donnée de sa direction et du point d'incidence, lorsqu'il y a ∞^4 trajectoires dans le milieu $(\mathcal{M})$; et elle détermine l'instant de l'incidence et, par conséquent, toute la suite du phénomène, lorsqu'il y a ∞^5 trajectoires dans ce milieu. De plus, dans tous les cas où la direction du rayon réfléchi, ou réfracté, est déterminée par les données relatives au rayon incident, il en est de même du rayon réfléchi, ou réfracté, lui-même.

27. Il n'y a pas lieu de recommencer une discussion dans le cas où la surface S est variable. En effet, s'il y a seulement ∞^4 rayons dans le milieu $(\mathcal{M})$, la donnée du rayon incident ne détermine le point d'incidence que si l'on se donne la position de S, c'est-à-dire l'instant de l'incidence.

Si au contraire il y a ∞^5 rayons, les dates associées aux divers points du rayon incident donné définissent le mouvement d'un point, $x_i = \psi_i(t)$, qui, au moment de l'incidence, devra se trouver sur S, dont l'équation $t = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ est donnée. L'instant de l'incidence dépend ainsi de l'équation $t = \Phi[\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)]$: ou bien il sera déterminé par elle, ou bien il restera indéterminé (si cette équation est une identité), et l'on devra se le donner pour définir le phénomène. Dans les deux cas, l'instant de l'incidence sera, en définitive, une donnée de la question.

Dès lors, le rayon réfléchi ou réfracté sera alors entièrement déterminé par les lois énoncées.

V. — Le principe de Fermat.

28. Les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons que nous avons obtenues et d'où l'on peut, en reprenant en sens inverse l'analyse géométrique des nos **23** et **24**, remonter à celles de la réflexion et de la réfraction des ondes, peuvent s'établir directement en partant du *principe de Fermat*, ou principe du *chemin optique minimum*.

Je rappelle d'abord, à cet effet, la notion de *chemin optique*, telle que je l'ai généralisée, dans mes anciens Mémoires (¹), sous le nom de *durée de propagation le long d'un arc donné* $\widehat{AB}$.

En chaque point $M(x_1, x_2, x_3)$ de l'arc, on considère l'élément de contact pseudo-orthogonal à la direction (dx_1, dx_2, dx_3) de l'arc, et le vecteur-indice $\vec{N}$ relatif à cet élément. Les composantes p_1, p_2, p_3 de ce vecteur sont données par les formules (37)

$$(41)\qquad p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En régime variable, ce sont, en général, des fonctions de t, en même temps que du paramètre de position sur l'arc, la longueur d'arc $s = \widehat{AM}$ par exemple.

L'équation

$$(42)\qquad dt = \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha + \cos\left(\vec{N}, ds\right) N\, ds = \overline{\Omega}$$

définit la marche, sur $\widehat{AB}$, d'un ébranlement se propageant, par cheminement, le long de cet arc, si l'on se donne l'instant t_0 du départ (de cet ébranlement) de A. Soit t_1 l'instant auquel cet ébranlement arrive à l'extrémité B de l'arc. La différence $t_1 - t_0$ est la durée correspondant au trajet; c'est elle qui est le *chemin optique*. C'est le travail du vecteur indice considéré, et correspondant à l'instant t du passage de l'ébranlement, en chaque point M de l'arc. En régime variable, il dépend de l'instant t_0 auquel on le calcule.

En abrégé, *le chemin optique de* A *en* B, *le long de l'arc* $\overrightarrow{\widehat{AB}}$ *est la différence* $t_1 - t_0$, t_1 *se calculant par l'intégration, le long de* $\overrightarrow{\widehat{AB}}$, *de l'équation*

$$(42')\qquad dt = \Sigma p_\alpha\, dx_\alpha = \overline{\Omega}$$

avec la condition $t = t_0$ *en* A.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. **26**, 1909, p. 440-443; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **24**, 1906, p. 257; *Ibidem*, t. **42**, 1914, p. 152.

Ce calcul est une quadrature, $\int_{\overrightarrow{AB}} \Sigma p_\alpha dx_\alpha$, en régime permanent, et l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à deux variables, en régime variable. Le résultat est indépendant de t_0 en régime permanent.

29. J'ai montré, dans les mémoires cités, que le *chemin optique entre deux points quelconques* A *et* B *est minimum pour le rayon qui joint les deux points. Cette condition de minimum*, qui constitue le *principe de Fermat*, *définit les rayons de la propagation*, car elle conduit au système différentiel (39), (38).

Remarquons que lorsqu'il y a ∞^4 rayons, il y en a un seul (dans des champs convenablement bornés), passant par deux points donnés A et B; lorsqu'il y a ∞^5, il y en a ∞^1 joignant A et B; mais un seul dont la *date* associée à A soit la date donnée t_0.

C'est le principe précédent qu'il s'agit de généraliser, en supposant que le trajet de A en B se décompose en deux successifs, AC et BC, le point C étant assujetti à se trouver sur une surface S, fixe ou variable, et les deux trajets se faisant, soit dans un même milieu $(\mathcal{M})$ (cas de la réflexion), soit dans deux milieux $(\mathcal{M})$ et $(\mathcal{M}')$ séparés par S (cas de la réfraction).

Je me bornerai, pour cette généralisation, à exiger que le chemin optique soit *stationnaire* pour le trajet cherché, sans discuter s'il y aura effectivement minimum pour le trajet trouvé. J'emploierai la méthode qui m'a servi, pour le cas de la propagation directe dans un seul milieu, dans mon Mémoire de 1909 déjà cité (*voir* n° **20**, p. 443, de ce Mémoire).

30. En raisonnant comme on l'a fait au n° **25**, mais pour repasser ici de l'équation ponctuelle des surfaces d'onde à leur équation tangentielle, on pourra remplacer les équations (41) et $dt = \overline{\Omega}$ par

$$(43) \qquad dx_i = \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} dt, \qquad \Pi = 1 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

d'où résulte, pour le calcul du chemin optique, l'équation

$$(43') \qquad dt = \Sigma p_\alpha dx_\alpha.$$

Soit δ la caractéristique de variation. On déduit de (43')

$$\delta dt = d\delta t = \Sigma \delta p_\alpha \, dx_\alpha + \Sigma p_\alpha \, \delta dx_\alpha = \Sigma \delta p_\alpha \, dx_\alpha + \Sigma p_\alpha \, d\delta x_\alpha ;$$

d'où, compte tenu de (43),

$$d\delta t = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha \, dt + d\Sigma p_\alpha \, \delta x_\alpha - \Sigma dp_\alpha \, \delta x_\alpha .$$

On a d'autre part, à cause de $\Pi = 1$,

$$0 = \delta \Pi = \sum \frac{\partial \Pi}{\partial p_\alpha} \delta p_\alpha + \sum \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial t} \delta t .$$

On conclut donc la formule

$$d(\delta t - \Sigma p_\alpha \, \delta x_\alpha) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} (\delta t - \Sigma p_\alpha \delta x_\alpha) \, dt + \mathcal{B} \, dt \tag{44}$$

avec

$$\mathcal{B} = - \Sigma \delta x_\alpha \left(\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right). \tag{44'}$$

Cette formule préliminaire étant établie, je l'intègre successivement le long de AC et le long de CB : t et les p_i y sont définis, en fonction du paramètre de position sur l'arc, s par exemple, comme il a été dit pour le calcul du chemin optique (n° **28**), pourvu que l'on se donne la valeur de t au point de départ.

Le calcul est ici celui de l'intégration d'une équation différentielle linéaire : il se fera en écrivant (39) sous la forme

$$d\left[(\delta t - \Sigma p_\alpha \delta x_\alpha) \, e^{-\int \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt} \right] = \mathcal{B} e^{-\int \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt} \, dt. \tag{45}$$

Les variations δx_i sont des fonctions données, dans les conditions d'arbitraire classiques, du paramètre de position; la variation δt est seule inconnue.

Intégrons d'abord le long de AC. L'exponentielle $e^{-\int \frac{\partial \Pi}{\partial t} dt}$ est une fonction positive $\mathcal{A}(s)$, et l'on peut supposer que s est nul en A. Comme δt et les δx_i sont nuls en A, on obtient, en désignant par s_1 la longueur de l'arc AC, et par t_1 la valeur de t en C,

$$\delta t_1 - (\Sigma p_\alpha \, \delta x_\alpha)_C = \frac{1}{\mathcal{A}(s_1)} \int_0^{s_1} \mathcal{B} \mathcal{A}(s) \, dt. \tag{46}$$

On aura de même, en accentuant les lettres relatives au second trajet ([1]), et désignant par t_2 la valeur de t en B,

$$\mathfrak{A}'(s'_1)\,\delta t_2 = \delta t_1 - (\Sigma p'_\alpha\,\delta x_\alpha)_{\mathrm{C}} + \int_0^{s'_1} \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'(s')\,dt. \tag{47}$$

D'où, par addition,

$$\mathfrak{A}'(s'_1)\,\delta t_2 = [\Sigma(p_\alpha - p'_\alpha)\,\delta x_\alpha]_{\mathrm{C}} + \frac{1}{\mathfrak{A}(s_1)}\int_0^{s_1} \mathfrak{B}\mathfrak{A}(s)\,dt + \int_0^{s'_1} \mathfrak{B}'\mathfrak{A}'(s')\,dt. \tag{48}$$

31. Nous avons maintenant à exprimer que la variation δt, ainsi calculée, est nulle pour tout choix loisible des δx_i.

Nous pouvons supposer d'abord ces variations nulles en C et le long de CB. Le second membre de (48) se réduit alors au deuxième terme. Si donc $\mathfrak{B}$ n'est pas identiquement nul, par rapport aux δx_i, on pourra disposer de ceux-ci de manière que $\mathfrak{B}$ soit de signe constant sur AC ([2]), et δt_2 ne pourra pas être nul pour ce choix des δx_i.

On doit donc avoir, le long de AC,

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - p_i\frac{\partial \Pi}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{49}$$

ce qui, rapproché des formules (43), exprime que AC est un rayon du milieu $(\mathfrak{M})$, issu de A à l'instant t_0.

On démontrera de même que CB est un rayon du milieu $(\mathfrak{M}')$ [lequel est le même que $(\mathfrak{M})$ dans le cas de la réflexion], issu de C à l'instant t_1 où se produit la réflexion, ou la réfraction, du rayon incident AC.

La formule (48) est dès lors réduite à

$$\mathfrak{A}'(s'_1)\,\delta t_2 = [\Sigma(p_\alpha - p'_\alpha)\,\delta x_\alpha]_{\mathrm{C}}, \tag{50}$$

dans laquelle n'interviennent plus que les vecteurs indices $\vec{\mathrm{N}}$ et $\vec{\mathrm{N}}'$, de

([1]) Dans le cas de la réflexion, Π' ne différera pas de Π; mais cela n'influe en rien sur la forme des formules que nous allons écrire.

([2]) Il faut entendre par là, pour plus de rigueur, qu'on pourra faire en sorte que $\mathfrak{B}'$ soit de signe constant sur au moins une partie de l'arc, et nul sur la partie restante. Ceci suppose la continuité de la fonction Π, que nous avons implicitement admise dès le début.

composantes (p_i) et (p'_i), relatifs aux directions respectives des deux rayons au point d'incidence C, et la variation (δx_i) de ce point C sur la surface S. Cette formule (50) va nous redonner les lois de la réflexion et de la réfraction du n° **19**.

32. 1° Si la surface S est fixe, la variation (δx_i) est seulement assujettie à la condition d'être tangente à S. Celle-ci doit donc avoir pour conséquence, δt_2 devant être nul sous cette seule condition, à appliquer, en C,

$$\Sigma(p_\alpha - p'_\alpha)\,\delta x_\alpha = 0; \tag{51}$$

ce qui exprime que le vecteur $\vec{\mathrm{N}} - \vec{\mathrm{N}}'$ est parallèle à la normale à la surface S en C.

2° Si la surface S est mobile, soit

$$t = \Phi(x_1, x_2, x_3)$$

son équation. Si x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées de C, on aura

$$t_1 = \Phi(x_1, x_2, x_3)$$

et, par suite,

$$\delta t_1 = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha}\,\delta x_\alpha. \tag{52}$$

La variation δt_1 étant définie, d'autre part, par la formule (46), qui se réduit, $\mathcal{B}$ étant nul, à

$$\delta t_1 = \Sigma p_\alpha\,\delta x_\alpha, \tag{53}$$

on voit que les δx_i sont assujettis à la seule condition

$$\Sigma(q_\alpha - p_\alpha)\,\delta x_\alpha = 0 \qquad \left(q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right). \tag{54}$$

L'équation (51) en devant être une conséquence, les vecteurs $\vec{\mathrm{N}} - \vec{\mathrm{N}}'$ et $\vec{\Gamma} - \vec{\mathrm{N}}$ $\left(\vec{\Gamma}\right.$ étant, comme au n° **4**, le gradient de la surface $\left.\mathrm{S}\right)$ doivent avoir même ligne d'action; ce qui exprime que les extrémités des trois vecteurs $\vec{\mathrm{N}}$, $\vec{\mathrm{N}}'$ et $\vec{\Gamma}$ doivent être en ligne droite.

Nous avons ainsi retrouvé, comme conséquences du ***principe de***

Fermat (ou du *chemin optique minimum*), les lois fondamentales de la réflexion et de la réfraction des rayons dans le cas général de milieux à surfaces d'onde quelconques, indépendantes du temps ou non.

VI. — Le théorème de Malus.

33. A toute onde se propageant dans un milieu, sont associés ∞^2 rayons, dits *rayons de l'onde*, que nous avons appris à déterminer (n° **21**), connaissant l'équation de l'onde

$$t = F(x_1, x_2, x_3), \tag{55}$$

par la condition qu'ils sont *pseudo-orthogonaux* aux fronts successifs de l'onde. En régime variable, cette pseudo-orthogonalité est, sur tout le front d'onde, celle qui correspond à l'instant t où ce front apparaît. Les rayons de l'onde sont *datés*, en chacun de leurs points, de cette valeur de t relative au front d'onde sur lequel se trouve ce point.

Supposons qne l'on se donne inversement les rayons de l'onde, qui forment une congruence de ∞^2 courbes. Par chaque point (x_1, x_2, x_3) de l'espace passe un de ces rayons, de sorte que les coefficients de direction de ce rayon sont des fonctions connues

$$\frac{dx_1}{\alpha_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{\alpha_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{\alpha_3(x_1, x_2, x_3)} \tag{56}$$

de x_1, x_2, x_3. Les composantes p_1, p_2, p_3 du gradient de l'onde à son passage en ce point, cette onde étant pseudo-orthogonale au rayon, satisferont aux formules

$$p_i = \frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{57}$$

qui, sous le bénéfice des équations (56), auront pour seconds membres des fonctions connues de x_1, x_2, x_3) et de l'instant t auquel l'angle passe au point (x_1, x_2, x_3) : instant qui est la fonction inconnue (55) définissant l'onde. Soient $p_i = \varphi_i(t, x_1, x_2, x_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ ces fonctions.

Si (x_1, x_2, x_3) se déplace dans la direction du rayon, on a, par les équations différentielles (30) de celui-ci,

$$(58) \qquad dt = \Sigma p_\alpha dx_\alpha, \qquad p_i = \varphi_i(t, x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La même équation reste vraie, pour la fonction (55), si le point se déplace sur le front d'onde dans une direction quelconque; car on a alors $dt = 0$ et $\Sigma p_\alpha dx_\alpha = 0$.

Comme tout déplacement infinitésimal dx_1, dx_2, dx_3 est la résultante de deux déplacements appartenant, respectivement, aux deux variétés ainsi envisagées, on en conclut que la fonction (55) est une intégrale de l'équation de Pfaff (58).

34. Le calcul précédent peut s'appliquer en partant de ∞^2 courbes (C) quelconques données. Si l'équation (58) a une intégrale (55), celle-ci aura pour dérivées les fonctions $p_i = \varphi_i(F, x_1, x_2, x_3)$. Or les fonctions φ_i, définies par les formules (57) (équations paramétriques tangentielles de la surface d'onde générale), satisfont à l'équation tangentielle $\Pi = 1$ de cette surface d'onde. L'intégrale supposée de l'équation (58) sera donc une intégrale de l'équation aux dérivées partielles, $\Pi = 1$, des ondes; et l'équation (55) définira une onde (O).

Alors, en vertu des équations (57), la direction (dx_1, dx_2, dx_3) de l'une quelconque des courbes (C), en un quelconque de ses points, sera pseudo-orthogonale au front d'onde qui passe par ce point à l'instant défini par (55). Les courbes (C) seront donc les rayons de l'onde (O).

Si l'équation (58) a une infinité de solutions, elle en a ∞^1. C'est toujours le cas, en régime permanent, dès qu'elle en a une. Les surfaces qui sont les fronts d'onde successifs sont, dans ce cas, les mêmes pour ces ∞^1 ondes; on passe de l'une à l'autre de ces ondes en ajoutant une même constante à la date de chaque front d'onde; que le régime soit permanent ou non, ces ∞^1 ondes ont les mêmes rayons, mais datés différemment.

35. Si l'équation de Pfaff (58) a une intégrale (55), et si l'on connaît la valeur t_0 de celle-ci en un point particulier quelconque A, on aura sa valeur t en un point quelconque B en intégrant l'équation (58) le long d'un arc de courbe arbitraire $\overset{\frown}{AB}$ avec la valeur initiale t_0 en A. Le résultat sera indépendant de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ choisi.

Réciproquement, si l'intégration le long de $\overset{\frown}{AB}$, avec une valeur t_0 initiale choisie en A, donne, pour une équation (58), un résultat indépendant du chemin, et cela pour tout point B, la valeur de t obtenue est une fonction des coordonnées x_1, x_2, x_3 de B, et cette fonction est une intégrale de l'équation, prenant en A la valeur t_0. Ces considérations sont classiques.

Ce *critérium d'intégrabilité* se modifie lorsque l'on sait que les courbes (C) données sont des rayons de la propagation. Il suffit alors que la condition énoncée soit réalisée quand on se borne aux points B_1 d'une surface quelconque $\mathfrak{S}_1$ passant en A et aux chemins $\overset{\frown}{AB}$ tracés sur cette surface.

L'intégration le long de ces chemins définit alors une fonction de point sur $\mathfrak{S}_1$, soit $t_1 = \psi(B_1)$. Dans le cas où la propagation a ∞^5 rayons, on devra supposer que t_0 ait été pris égal à la date de A sur le rayon (C) qui y passe, et que $t_1 = \psi(B_1)$ soit alors égal à la date de B_1 sur le rayon (C) qui y passe.

Ceci posé, soient B un point quelconque de l'espace et B_1 le pied sur $\mathfrak{S}_1$ du rayon (C) passant en B. De la valeur $t_1 = \psi(B_1)$ nous déduirons une valeur t en intégrant l'équation (58), le long de l'arc de rayon $\overset{\frown}{B_1B}$, avec la valeur initiale t_1 en B_1 [1]. Nous avons ainsi défini une fonction de point $t = F(B)$, ou $t = F(x_1, x_2, x_3)$, si x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées de B. Nous allons montrer que c'est une intégrale de l'équation (58); comme elle est, par définition, égale à t_0 en A, le critérium d'intégrabilité en question sera établi.

36. Remarquons d'abord que la fonction considérée, $t = F(B)$, satisfait à (58) en chaque point B_1 de $\mathfrak{S}_1$; car elle y satisfait pour tout déplacement infinitésimal effectué sur $\mathfrak{S}_1$ à partir de B_1, d'après la définition de $\psi(B_1)$; et elle y satisfait aussi pour un déplacement infi-

(1) Cela revient à *dater* les points B de chaque rayon avec la *date* t_1 en son pied B_1 sur $\mathfrak{S}_1$.

nitésimal effectué à partir de B_1 sur le rayon (C) passant par ce point, d'après la définition des valeurs $t = F(B)$ sur ce rayon. Tout déplacement infinitésimal de B_1 étant la résultante de deux déplacements, effectués l'un sur $\mathfrak{S}_1$ et l'autre sur le rayon (C) passant en B_1, l'équation (58), vérifiée pour les déplacements composants, le sera aussi pour le déplacement résultant, en vertu de sa forme linéaire en dx_1, dx_2, dx_3 et dt. C'est ce que nous avions annoncé.

Ce premier point établi, soient B un point quelconque et B_1 le pied sur $\mathfrak{S}_1$ du rayon (C) passant en B; et considérons celle des transformations du groupe à un paramètre $[\Pi, f]$ qui correspond à la valeur $\tau = t - t_1 = F(B) - \psi(B_1) = F(B) - F(B_1)$ du paramètre (*voir* n° **12**). Elle change t_1 en t, et l'élément $x_i^{(1)}$, $p_i^{(1)} = \varphi_i(t_1, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})$, pseudo-orthogonal en B_1 au rayon BB_1, à l'instant t_1, en l'élément x_i, $p_i = \varphi_i(t, x_1, x_2, x_3)$, qui est pseudo-orthogonal au même rayon, en B, à l'instant t, d'après la construction des fonctions φ_i (n° **33**).

Or nous avons vu au n° **11** que l'équation $dt = \Sigma p_\alpha dx_\alpha$ est invariante pour le groupe (Π, f). Étant vérifiée en B_1, elle est donc vérifiée en B, ce qui démontre le théorème.

37. Si l'on suppose, en particulier, que $\mathfrak{S}_1$ soit pseudo-orthogonal (pour un même instant t) à ∞^2 rayons (C), la fonction $t_1 = t_0$ satisfera aux conditions imposées dans ce qui précède à $t_1 = \psi(B_1)$. On retrouve donc ce théorème qui, si ∞^2 rayons sont pseudo-orthogonaux à une surface, ils le sont à ∞^1 surfaces et sont les rayons d'une onde ([1]).

Il convient de rappeler qu'en régime permanent la condition de pseudo-orthogonalité est de nature purement géométrique.

38. Les résultats qui précèdent vont nous fournir la généralisation du *théorème de Malus*, que nous énoncerons ainsi : *Pour que ∞^2 rayons se réfléchissent, ou se réfractent, suivant les ∞^2 rayons d'une onde, il faut et il suffit qu'ils soient eux-mêmes les ∞^2 rayons d'une onde incidente.*

La seconde partie du théorème (il suffit) est intuitive dans notre

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, (3), t. **26**, 1909, p. 436.

exposition, puisque nous avons supposé que toute onde incidente donne naissance à une onde réfléchie, ou réfractée, et que c'est de là que nous avons déduit les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons.

Nous nous plaçons ici à un point de vue différent, indépendant de l'analyse des paragraphes I, II, III et IV. Nous supposons données les lois de la réflexion et de la réfraction des rayons établies, par exemple, au moyen du principe de Fermat, et nous examinons, en appliquant le critérium du n° **35**, à quelle condition ∞^2 rayons réfléchis, ou réfractés, sont les rayons d'une onde.

Nous prendrons, à cet effet, pour la surface $\mathfrak{S}_1$ des n^{os} **35** et **36**, la surface S réfléchissante, ou dirimante.

Supposons d'abord qu'elle soit fixe. Si les rayons incidents sont les rayons d'une onde, ils sont datés, de ce fait, en chacun de leurs points, et les dates $t = \psi(B_1)$ des points d'incidence satisfont, pour tout déplacement infinitésimal effectué sur S, à l'équation

$$dt = \Sigma p_\alpha \, dx_\alpha, \tag{58}$$

où les p_i sont définis par la condition de pseudo-orthogonalité au rayon incident en chaque point B_1 d'incidence.

Mais les dx_i sont assujettis à la condition

$$\Sigma q_\alpha \, dx_\alpha = 0, \tag{59}$$

les q_i étant les coefficients de direction de la normale à S en B.

Et d'après la loi fondamentale de la réflexion, ou de la réfraction, on a (*voir* n° **32**)

$$p_i - p'_i = m q_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{60}$$

les p'_i étant définis par la condition de pseudo-orthogonalité au rayon réfléchi, ou réfracté.

De là résulte que la fonction $t = \psi(B)$ satisfait aussi à l'équation

$$dt = \Sigma p'_\alpha \, dx_\alpha, \tag{61}$$

conséquence de (60), (58) et (59), pour tout déplacement infinitésimal effectué sur S.

Or cette fonction donne aussi les dates des points B_1 sur les rayons réfléchis, et réfractés, la réflexion et la réfraction étant supposées instantanées.

Il en résulte, d'après le critérium du n° 35, que les rayons réfléchis, ou réfractés, sont les rayons d'une onde.

Il est clair que l'analyse précédente, à cause de la symétrie des relations (60) par rapport aux deux vecteurs (p_1, p_2, p_3) et (p'_1, p'_2, p'_3) permettra de prouver qu'inversement les rayons incidents seront ceux d'une onde s'il en est ainsi des rayons ∞^2 rayons réfléchis, ou réfractés. Car (58) est conséquence de (60), (61) et (59).

Le théorème de Malus est ainsi établi pour le cas où la surface réfléchissante, ou dirimante, est fixe.

39. La démonstration se fera d'une manière toute pareille dans le cas où S est variable. Les q_i seront alors les composantes du gradient de la surface S, et la loi fondamentale de la réflexion, ou de la réfraction, s'écrira (*voir* n° **32**)

$$q_i = \frac{p_i + mp'_i}{1+m} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{62}$$

Les dx_i sont ici assujettis à la condition

$$dt = \Sigma q_\alpha \, dx_\alpha. \tag{63}$$

On a donc, identiquement,

$$dt - \Sigma p_\alpha \, dx_\alpha + m\,(dt - \Sigma p'_\alpha \, dx_\alpha) = (1+m)\,(dt - \Sigma q_\alpha dx_\alpha); \tag{64}$$

d'où, à cause de (63),

$$dt - \Sigma p_\alpha \, dx_\alpha = - m(dt - \Sigma p'_\alpha \, dx_\alpha). \tag{64'}$$

Chacune des équations (58), (61) entraîne donc l'autre; et de là résulte, d'après le raisonnement du n° 39, que si les rayons incidents sont les rayons d'une onde (incidente), les rayons réfléchis, ou réfractés, seront aussi les rayons d'une onde (réfléchie, ou réfractée) et réciproquement.

Le théorème de Malus est donc vrai aussi pour le cas où la surface réfléchissante, ou dirimante, varie avec le temps.