JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FLORIN VASILESCO

Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de La Vallée Poussin, et le problème de Dirichlet généralisé

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 209-227.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_209_0>

Sur la méthode du balayage de Poincaré, son extension par M. de la Vallée Poussin, et le problème de Dirichlet généralisé ;

PAR M. FLORIN VASILESCO.

Introduction.

Dans une Note des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences ([1]), j'ai montré comment la méthode du balayage, donnée par Poincaré pour le domaine infini extérieur à un conducteur limité par une surface régulière, ou, du moins, pour laquelle le problème de Dirichlet est possible ([2]), s'applique sans changement, *si l'on remplace le conducteur par un ensemble fermé borné quelconque*. Seulement, comme la fonction harmonique obtenue par Poincaré, par suite du balayage, était continue sur le conducteur, il en résultait quelle était unique, de quelque manière que l'on opérât le balayage : c'était la fonction que l'on désigne, rujourd'hui par le nom de potentiel conducteur, à cause du fait quelle prend là valeur unité sur le conducteur. Mais, si à la place de celui-ci, on considère un ensemble fermé borné, la fonction obtenue par le balayage est-elle encore unique? Car elle ne prend plus la valeur unité sur la partie de l'ensemble qui constitue la frontière du domaine infini extérieur. J'ai démontré, dans la Note citée, qu'elle est encore unique, dans ce cas général, et qu'elle n'est autre que la solution du problème de Dirichlet généralisée pour ce domaine, c'est-à-dire, ce que l'on appelle aujourd'hui, *le potentiel conducteur de l'ensemble*.

([1]) Tome **193**, séance du 19 octobre 1931, p. 640.

([2]) *Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*Amer. Journ. of Math.*, **12**, 1890, 211).

On voit, par là, comment la méthode du balayage conduit, d'une façon immédiate, au problème de Dirichlet généralisé. En voulant résoudre le problème de Dirichlet ordinaire, Poincaré résout du même coup le problème de Dirichlet généralisé, du moins dans le cas où les valeurs données sur la frontière du domaine sont égales à l'unité.

Les recherches profondes de M. de La Vallée Poussin sur la méthode du balayage (1), m'ont permis de constater, une fois encore, le lien qui relie cette méthode avec le problème de Dirichlet généralisé.

M. de La Vallée Poussin s'est proposé de faire l'étude des masses balayées. D'une façon plus précise, considérant un domaine et une distribution de masse dans ce domaine, définie simplement comme une fonction positive complètement additive d'ensemble, il s'est proposé de faire le balayage de cette masse, sur la frontière du domaine, en partant du balayage, effectué par Poincaré, d'une sphère. En considérant d'abord, un domaine formé par la réunion d'un nombre fini de sphères, il réussit à faire le balayage d'un domaine limité par une surface régulière. Pour un tel domaine, il montre que la distribution obtenue par la masse balayée sur la surface frontière est unique, ce qui veut dire, que c'est la seule distribution possible dont le potentiel soit *égal au potentiel initial à l'extérieur du domaine, et inférieur, à l'intérieur*. C'est en vue de cette propriété que Poincaré avait imaginé sa méthode. M. de La Vallée Poussin restait donc bien dans l'esprit de la méthode, encore qu'il ait entrepris sa recherche d'un point de vue tout à fait général. Pour un tel domaine, le potentiel des masses balayées est égal, à l'intérieur du domaine, à la solution du problème de Dirichlet, correspondant aux valeurs du potentiel initial sur la frontière, supposé continu.

Ensuite, M. de La Vallée Poussin effectue le balayage d'un domaine limité par une surface irrégulière. Mais il ne peut plus affirmer, sans condition supplémentaire, que le potentiel de la distribution obtenue par le balayage soit continu à travers la surface, ni que cette distribution soit unique, dans le sens expliqué ci-dessus. Pour assurer ces résultats, il impose à la surface de satisfaire à la condition de

---

(1) *Annales de l'Institut Poincaré*, **3**, 1933, p. 175.

Poincaré ([1]), localement pour la continuité du potentiel, partout pour l'unicité de la distribution. Il donne ensuite d'autres conditions pour la continuité du potentiel.

C'est là que se placent une partie des résultats que nous exposons dans ce Mémoire. Ils consistent en ce que, d'une part, le potentiel de la distribution obtenue par le balayage est égal à la solution du problème de Dirichlet *généralisé*, correspondant aux valeurs du potentiel initial sur la frontière, et d'autre part, par suite du fait que cette solution est unique, que la distribution obtenue par le balayage est unique. La forme même de ces résultats, ainsi que les raisonnements utilisés pour les obtenir, n'impliquent en rien que l'on ait affaire à une surface. Ils s'appliquent donc aussi bien au cas d'un domaine général, dont M. de La Vallée Poussin a également effectué le balayage, sans rien dire de plus. Seulement, ce qui nous arrête de conclure entièrement pour le cas général, c'est que l'on ne peut plus appliquer le théorème de Gauss, sans une étude spéciale à son sujet. Nous réservons donc la question de l'unicité de la distribution, pour ce cas. On pourra voir dans la suite du Mémoire de M. de La Vallée Poussin la simplification que ces résultats apportent.

Préoccupés par l'étude du cas général, nous n'avons pas eu le loisir d'examiner, sous le nouvel aspect obtenu, les autres questions dont s'occupe l'auteur dans son Mémoire, nous réservant de les traiter d'emblée pour ce cas. Mais il nous apparaît certain que ces questions tiennent pour le cas général, et, en particulier, que l'intégrale au moyen de laquelle il exprime la solution du problème de Dirichlet, exprime aussi la solution du problème de Dirichlet généralisé.

Pour obtenir les résultats ci-dessus, nous avons eu besoin d'un certain nombre de propositions concernant les fonctions harmoniques. Nous avons démontré, en particulier, que la solution du problème de Dirichlet généralisé peut être obtenue au moyen d'une suite quelconque de domaines normaux tendant vers le domaine donné. A cet effet, nous nous sommes servi du lemme de Kellogg qu'a démontré

([1]) Un point d'une surface limitant un domaine est dit vérifier la condition de Poincaré, s'il peut être le sommet d'un cône de révolution dont la pointe soit extérieure au domaine.

récemment M. Evans ([1]). Comme la continuité du potentiel à travers les masses joue un rôle fondamental dans le Mémoire de M. de La Vallée Poussin, et est appelée à jouer un rôle analogue dans les recherches dont ce Mémoire ouvre la voie — puisque aussi bien, en permettant la résolution du lemme de Kellogg, il tire les recherches sur le problème de Dirichlet de l'impasse où elle étaient acculées — j'ai donné, dès le début de ce travail, un théorème général sur la continuité du potentiel à travers les masses, théorème qui contient, en particulier, le lemme de Kellogg, deux lemmes de M. Evans ([2]), ainsi que d'autres résultats, et qui est d'une application fréquente.

I. — Théorème sur la continuité du potentiel à travers les masses. Démonstration du lemme de Kellogg.

1. Ainsi que le fait M. de La Vallée Poussin, *une distribution de masse sera définie* simplement comme *une fonction complètement additive d'ensemble* et supposons-la *positive*. L'additivité complète conduit immédiatement, dès que l'on considère les ensembles fermés, à la famille des ensembles mesurables B. Elle nous suffit. Une distribution de masse est donc définie sur *les ensembles mesurables* B. Si l'on suppose la distribution positive, ce n'est pas pour restreindre la généralité, car toute distribution peut être considérée comme la différence entre deux telles distributions, mais pour simplifier le langage. D'ailleurs, dans les applications dont il sera question ici, on ne rencontrera que des distributions positives.

Considérons donc un ensemble fermé et une distribution positive sur lui. On sait qu'un tel ensemble est la somme d'un ensemble parfait et d'un ensemble dénombrable. Mais un ensemble dénombrable ne peut supporter aucune distribution positive de masse, dont le potentiel soit borné, tel que sera le cas par la suite. En effet, un point ne doit évidemment être le siège d'aucune masse, dans ces conditions, et il en sera de même d'un ensemble dénombrable. Toute la masse donnée

---

([1]) *Proc. of the Nat. Acad. of Sc.*, 19, 1933, p. 457.

([2]) *Loc. cit.*, p. 458 et suiv.

sur l'ensemble considéré se distribue donc sur l'ensemble parfait que celui-ci contient, et ce serait donner une généralité fictive que de considérer, dans le théorème qui suit, des ensembles fermés.

THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Soient* E *un ensemble parfait borné, et* $\mu(e)$ *une distribution positive sur lui.*

1° *Le potentiel de cette distribution*

$$V(P) = \int_E \frac{d\mu(e)}{r}$$

est continu, à travers la masse, en un point de E, *s'il est continu sur* E *en ce point.*

2° *L'ensemble des points de* E *où il est continu sur* E *est partout dense sur* E.

Vérifions tout de suite cette dernière propriété. On sait que le potentiel V est une fonction semi-continue inférieurement, à l'intérieur de la masse. Il est donc, comme on le sait encore, une fonction de la classe 1 de Baire. Par suite, il est ponctuellement discontinu sur tout ensemble parfait de E, et, en particulier, sur E lui-même. Les points où il est continu se trouvent donc répartis d'une manière dense sur E.

Passons donc à la démonstration de 1° (¹). Le potentiel V étant, par hypothèse, continu en un point Q de E, on peut trouver un voisinage sphérique de ce point, soit (ρ), de rayon ρ et de centre Q, tel que, pour tout point P, de E, qui s'y trouve, on ait, à la fois

$$V(P) < V(Q) + \frac{\varepsilon}{5}, \tag{1}$$

$$V_\rho(Q) < \frac{\varepsilon}{5},$$

la première inégalité résultant de la continuité et la seconde de ce que V(Q) est fini. V_ρ est le potentiel de la masse contenue dans (ρ). La quantité $V_{E-(\rho)}$, (Q), potentiel au point Q de la masse extérieure

(¹) La démonstration qui suit s'inspire de celle donnée par M. Evans pour son lemme I (*loc. cit.*, p. 458).

au voisinage (ρ) considéré, vérifie donc l'inégalité

$$V_{E-(\rho)}(Q) > V(Q) - \frac{\varepsilon}{5}.$$

Comme ce potentiel est continu, on peut trouver un deuxième voisinage sphérique (δ), intérieur au précédent, $\delta < \rho$, tel que pour tout point de E s'y trouvant, on ait, de plus,

$$V_{E-(\rho)}(P) > V(Q) - \frac{2\varepsilon}{5}.$$

Il en résulte alors que, dans ce voisinage, on a

$$V_\rho(P) < V(Q) + \frac{\varepsilon}{5} - V_{E-(\rho)}(P) < \frac{3\varepsilon}{5}. \tag{2}$$

Faisons maintenant intervenir le voisinage de E qui appartient à son domaine complémentaire D. Appelons M_i une suite de points de D tendant vers Q et tels que la distance de M_i à Q, δ_i, soit inférieure à $\frac{\delta}{2}$. Désignant par Q_i le point de E à la distance minima de M_i, on voit qu'il est situé dans (δ), car $Q_iQ < Q_iM_i + M_iQ < \delta$ et, par conséquent, qu'il tend vers Q. Puisque nous voulons évaluer le potentiel en M_i et le comparer avec celui en Q_i, il nous sera utile d'évaluer la distance Q_iP, pour P dans (ρ) et dans $E-(\rho)$. Dans le premier cas on a

$$Q_iP < Q_iM_i + M_iP < 2\,M_iP,$$

et dans le second

$$Q_iP < \left(1 + \frac{\delta_i}{\rho - \delta}\right) M_iP,$$

car

$$Q_iP \leqq Q_iM_i + M_iP = \left(1 + \frac{Q_iM_i}{M_iP}\right) M_iP.$$

Nous pouvons écrire donc

$$\begin{aligned} V(M_i) = V_\rho(M_i) + V_{E-(\rho)}(M_i) &= \int_{(\rho)} + \int_{E-(\rho)} \frac{1}{Q_iP}\,\frac{Q_iP}{M_iP}\,d\mu(e) \\ &\leqq 2\,V_\rho(Q_i) + \left(1 + \frac{\delta_i}{\rho-\delta}\right) V_{E-(\rho)}(Q_i), \end{aligned}$$

$$V(M_i) \leqq V(Q_i) + V_\rho(Q_i) + \frac{\delta_i}{\rho - \delta} V_{E-(\rho)}(Q_i).$$

Mais, par l'hypothèse (1),

$$V(Q_i) < V(Q) + \frac{\varepsilon}{5},$$

et *a fortiori*

$$V_{E-(\rho)}(Q_i) < V(Q) + \frac{\varepsilon}{5}.$$

Par (2), on a donc

$$V(M_i) \leqq V(Q) + \frac{4\varepsilon}{5} + \frac{\delta_i}{\rho - \delta}\left[V(Q) + \frac{\varepsilon}{5}\right],$$

et, pour i assez grand pour que l'on ait

$$\frac{\delta_i}{\rho - \delta}\left[V(Q) + \frac{\varepsilon}{5}\right] < \frac{\varepsilon}{5},$$

on a finalement

$$V(M_i) < V(Q) + \varepsilon,$$

ou

$$\overline{\lim_{\substack{M \to Q \\ M \text{ dans } D}}} V(M) \leqq V(Q) + \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, cette inégalité exprime que le potentiel V est semi-continu supérieurement au point Q, puisqu'il est, par hypothèse, continu sur E. Mais il est aussi semi-continu inférieurement. Il est donc continu dans tout le voisinage de Q, ce qui démontre le théorème.

2. Cas particulier. — *Démonstration du lemme de Kellogg : Tout ensemble réduit borné, de capacité positive, a des points réguliers* (1).

Tel est l'énoncé de ce lemme, devenu célèbre, depuis que les recherches sur le problème de Dirichlet généralisé étaient arrêtées par sa non-résolution. Je dirai, dans un instant, quelques mots là-dessus.

C'est à M. Evans, comme je l'ai dit, que revient le mérite d'avoir résolu ce lemme. Il s'appuye, à cet effet, sur les recherches concernant le balayage de M. de La Vallée Poussin, sur ses propres recherches précédentes et sur mes résultats antérieurs, et donne, dans ce but,

(1) *Voir* pour ce qui suit Florin Vasilesco, *Journal de Villat*, t. IX, 1930, p. 93 et suiv.

deux lemmes qui sont contenus, du reste, dans le théorème général précédent.

Ce théorème simple, dont la démonstration directe est indépendante de toute considération relative au balayage, contient comme cas particulier ce lemme.

En effet, si E est un ensemble réduit borné de capacité positive, soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ une suite de surfaces régulières tendant, en le contenant, vers E. Soient, de même, $\mu_1(e), \mu_2(e), \ldots, \mu_n(e), \ldots$ les distributions de leurs capacités sur elles, obtenues, soit par le problème de Robin classique, soit par le balayage de M. de La Vallée Poussin, et qui donnent leurs potentiels conducteurs. D'après un important résultat de M. de La Vallée Poussin ([1]), concernant les fonctions d'ensemble qui nous préoccupent, il résulte que l'on peut extraire de la suite précédente une autre suite ayant une limite $\mu(e)$ distribuée sur E, dont le potentiel, d'ailleurs, est la limite des potentiels de la suite considérée. C'est dire, ainsi que M. de La Vallée Poussin l'a fait voir ([2]), qu'il existe une distribution de masse positive $\mu(e)$ sur E, de masse totale égale d'ailleurs à sa capacité, dont le potentiel est le potentiel conducteur de E.

Nous sommes donc dans les conditions de notre théorème général. Or, j'ai démontré antérieurement ([3]) que la borne supérieure de ce potentiel est égale à l'unité en tout point de E. Donc, d'après le théorème général, il y a des points de continuité du potentiel, et, d'après ce que l'on vient de dire, le potentiel doit être égal à l'unité en ces points. Comme on le sait ([3]), cela exprime que ces points sont réguliers. Le lemme est démontré.

3. C'est en 1926 que M. Kellogg a énoncé ce lemme, et, tout en disant que les difficultés soulevées par sa démonstration n'avaient pu être surmontées, il donne, comme conséquence du lemme, la proposition suivante : les points irréguliers d'un domaine forment un ensemble de capacité nulle. Or, j'ai montré ([3]) que cette proposition

---

([1]) *Loc. cit.*, note I, p. 219 et suiv.

([2]) *Loc. cit.*, p. 227.

([3]) *Voir* note page précédente.

était inexacte, en donnant un exemple de domaine dont les points irréguliers sont partout denses sur sa frontière, et forment, par là, un ensemble de capacité positive. L'exactitude du lemme même se trouvait ainsi mise en doute. Quelques auteurs, d'ailleurs, avaient énoncé des résultats s'appuyant sur le lemme. Par la suite, des recherches qui avaient été entreprises par d'autres auteurs, moi-même et Kellogg, en particuiler, se ramenaient toutes à ce lemme. De là venait son importance. Dans l'exemple dont j'ai parlé ci-dessus, l'ensemble des points irréguliers sur la frontière est impropre. La résolution du lemme permet de donner maintenant comme exactes les propositions suivantes, qui se trouvent démontrées par suite de la démonstration du lemme (1).

Si l'on considère la solution du problème de Dirichlet généralisé pour les valeurs continues $f(P)$ sur la frontière, l'ensemble des points de celle-ci, où quelque valeur limite de la solution en un point Q est extérieure à l'intervalle $[f(Q)-\varepsilon, f(Q)+\varepsilon]$, est de capacité nulle.

Cet énoncé est dû à M. Bouligand.

4. En considérant la fonction de Green généralisée, on conclut, comme je l'avais énoncé, que :

L'ensemble des points irréguliers de la frontière d'un domaine est impropre.

Ce fait, qui caractérise l'ensemble des points irréguliers de la frontière, entraîne des conséquences importantes que l'on verra dans la suite.

II. — Quelques théorèmes sur les fonctions harmoniques et le problème de Dirichlet généralisé.

5. *Il ne peut y avoir deux fonctions harmoniques distinctes et bornées dans un domaine Ω (ensemble ouvert), si leur différence tend vers zéro partout sur sa frontière Σ, sauf sur un ensemble impropre σ de celle-ci.*

(1) *Voir* notre Mémoire ci-dessus, p. 110.

En effet, l'ensemble σ' des points de Σ, où une limite de cette différence serait supérieure ou égale à ε, appartiendrait à σ, serait fermé, donc de capacité nulle (d'après la définition même des ensembles impropres). Enfermons alors σ' dans une surface régulière s_k dont le potentiel v_k soit aux points de Σ plus grand que $\frac{\varepsilon}{M}$, mais, en un point, au moins, Q de Σ, inférieur à $\frac{2\varepsilon}{M}$, M étant une borne supérieure de la valeur absolue de cette différence. Cela est possible, puisque par une déformation continue d'une surface régulière contenant σ', qui la fait rétrécir, son potentiel en un point extérieur diminue d'une façon continue et tend vers zéro. Dès lors, la valeur absolue de la différence des deux fonctions serait partout, dans $\Omega - s_k$, inférieure à Mv_k, puisqu'il en est ainsi sur la frontière de ce domaine. Si ρ est le diamètre de Σ et c_k la capacité de s_k on aurait, au point Q, l'inégalité suivante :

$$\frac{c_k}{2\rho} < v_k(Q) < \frac{2\varepsilon}{M},$$

qui montre que c_k tend vers zéro avec ε. Donc il en est de même de v_k, en tout point fixe de Ω, qui doit finir par se trouver extérieur à une s_k.

Il en résulte que la valeur absolue de la différence des deux fonctions est aussi petite que l'on voudra, donc nulle.

6. En conséquence, et d'après le résultat du n° **4**, il résulte que :

Si deux fonctions harmoniques bornées dans Ω coïncident aux points réguliers de Σ, elles sont identiques.

7. Voici maintenant un autre théorème sur les fonctions harmoniques :

Si une fonction harmonique bornée dans Ω est continue sur Σ, sauf aux points d'un ensemble fermé de capacité nulle, σ, elle admet, dans Ω, le même maximum et minimum que sur $\Sigma - \sigma$.

En effet, enfermons σ dans une surface régulière σ_k et considérons un domaine normal Ω_k, tendant vers Ω et intérieur à lui, dont la partie Σ'_k de la frontière, extérieure à σ_k, soit assez voisine de Σ pour que le maximum et le minimum de F(P), la fonction donnée, soient, sur elle, à $\frac{1}{k}$ près, les mêmes que sur la partie de Σ extérieure à σ_k. Complétons, ensuite, la définition d'une fonction continue F_k sur la frontière du domaine ω_k, commun à Ω_k et à l'extérieur de σ_k, égale à $F(P)$ sur Σ'_k, en ayant soin que ses bornes restent les mêmes, sur cette frontière, que sur Σ'_k. Cela est évidemment facile à réaliser. Si l'on appelle $F_k(P)$ la solution du problème de Dirichlet ordinaire pour le domaine ω_k et les valeurs F_k sur sa frontière, on peut écrire dans ω_k (1)

$$|F_k(P) - F(P)| \leqq 2M v_k(P),$$

$M - 1$ étant une borne supérieure de la valeur absolue de $F(P)$ dans Ω. Lorsque k tend vers l'infini, tout point de Ω finit par faire partie des ω_k, et *la suite des fonctions harmoniques* $F_k(P)$ *tend uniformément vers* $F(P)$, dans toute région intérieure à Ω. $F(P)$, dans Ω, est donc compris entre ses bornes sur $\Sigma - \sigma$, et comme ses bornes dans Ω sont les mêmes que sur Σ, le théorème est démontré. La démonstration réussit parce que $F(P)$ est bornée dans Ω.

8. Théorème. — *On peut définir la solution du problème de Dirichlet généralisé, dans un domaine Ω, au moyen de domaines normaux* (2) *tendant vers Ω d'une manière quelconque, et non plus seulement par son intérieur.*

Le mot « tendant » signifie que tout point intérieur à Ω finit par se trouver dans la suite de domaines considérés, à partir d'un certain indice, et, que tout point extérieur à Ω finit par en être exclu.

Soit $F(P)$ une fonction continue dans une région bornée R comprenant Σ et coïncidant avec les valeurs données sur Σ. Elle peut être approchée à ε près par un polynome, dans R, et ce dernier est la différence de deux polynomes sous-harmoniques. On peut donc se borner à

---

(1) *Voir* Florin Vasilesco, *Journ. de Math.*, 9, 1930, p. 95.

(2) C'est-à-dire, pour lesquels le problème de Dirichlet ordinaire est possible. La démonstration qui suit suppose, pour simplifier le langage, le domaine sans frontière intérieure (*voir* Florin Vasilesco, *Journ. de Math.* 9, 1930, p. 99). On voit comment il faudrait la compléter pour supprimer cette restriction.

raisonner [comme le fait M. Bouligand [1], pour démontrer l'unicité de la solution du problème de Dirichlet généralisé] sur le cas où F(P) est sous-harmonique. Cela ne sera avantageux, d'ailleurs, que pour le raisonnement qui va suivre. On voit alors tout de suite, en effet, que lorsqu'on s'approche de Ω au moyen de domaines extérieurs à Σ, on obtient une fonction limite unique, harmonique. Si donc celle-ci coïncidait avec celle obtenue au moyen de domaines intérieurs, qui est, par définition, la solution du problème de Dirichlet généralisé, on obtiendrait la même limite au moyen d'une suite quelconque de domaines, car, tout domaine d'une telle suite est compris entre un domaine extérieur et un autre intérieur, et il en est de même des fonctions harmoniques qu'ils définissent, à cause de la sous-harmonicité de F(P). Il suffira donc, pour démontrer le théorème, de prouver que la limite unique, obtenue au moyen de domaines extérieurs, coïncide avec la solution du problème de Dirichlet généralisé. D'après le théorème du n° **6**, il suffira encore de montrer que la première de ces deux fonctions prend la même valeur $F(p)$, que la seconde, en tout point régulier p de Σ.

Considérons donc un tel point p. On peut trouver un domaine normal D, contenant $\Omega + \Sigma$ à l'intérieur, mais dont la frontière f ait en commun avec Σ le point p, qui soit également régulier pour elle. Il suffit, en effet, de remarquer, d'une part, que l'on obtient un tel domaine au moyen de cubes d'un réseau, et que, d'autre part, un point régulier étant caractérisé par ce que la série de Wiener $\sum \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$ est divergente, elle le reste encore si l'on diminue chaque γ_n de moins de moitié. Cette diminution est possible.

On va employer ici un raisonnement analogue à celui utilisé par Kellogg [2] pour démontrer la continuité de la solution du problème de Dirichlet généralisé en un point régulier. Il est inutile de supposer F(P) sous-harmonique. Soit r la distance $\overline{pq}$ du point p à un point q de la frontière f de D, et désignons par $v(p, P)$ la fonction barrière pour D, en p, égale à la solution du problème de Dirichlet, dans D, pour les valeurs r sur f. Soit σ une sphère de centre p dans laquelle on

---

(1) *An. Soc. polonaise de Math.* 1925, p. 75.

(2) *Foundations of potential theory*, Springer, 1929, p. 327.

ait $|F(P)-F(p)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit, de même, σ_n une sphère de rayon ε_n tendant vers zéro, centrée également en p, et appelons $v_n(p, P)$ la solution du problème de Dirichlet dans le domaine $D_n = D+\sigma_n$ pour les mêmes valeurs r sur sa frontière. Cette fonction tend vers $v(p, P)$ dans D, car dans $D-\sigma_n$ leur différence, en valeur absolue, est majorée par $2M'V_n$, V_n étant le potentiel conducteur de σ_n qui tend vers zéro, et M′ une borne supérieure de ces fonctions ([1]).

Désignons par M une borne supérieure du rapport $\frac{|F(P)-F(p)|}{r}$, où $r=pP$ en dehors de σ, et par b une borne inférieure des rapports $\frac{v_n(p, P)}{r}$ également à l'extérieur de σ. On a donc $Mr \leqq \frac{M}{b} v_n$, d'où, également,

$$F(P) \leqq F(p)+\frac{M}{b} v_n(p, P)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F(P) \geqq F(p)-\frac{M}{b} v_n(p, P)-\frac{\varepsilon}{2},$$

inégalités qui ont lieu dans *tout* le domaine $D_n = D+\sigma_n$, σ incluse.

Mais, les domaines Ω_k, au moyen desquels on approche Ω par l'extérieur, sont, à partir d'un certain indice, intérieurs à D_n, et les fonctions harmoniques qu'il comportent, prenant les valeurs $F(P)$ sur leurs frontières, sont, partout, dans ces domaines, comprises entre les fonctions harmoniques, seconds membres des inégalités précédentes. Il en est donc de même de leur limite, la limite par l'extérieur. Et ceci a lieu pour toute valeur de n. Comme, d'ailleurs, les v_n tendent vers $v(p, P)$, cette limite par l'extérieur, définie dans Ω, est donc comprise entre les fonctions

$$F(p)+\frac{M}{b} v(p, P)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad F(p)-\frac{M}{b} v(p, P)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte que, dans un voisinage de p, intérieur à σ, dans lequel on a $\frac{M}{b} v(p, P)<\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est possible puisque v tend vers zéro en p, la limite par l'extérieur est comprise entre $F(p)+\varepsilon$ et $F(p)-\varepsilon$, ce qui démontre sa continuité vers $F(p)$, en p. Le théorème est démontré. Si le domaine Ω est non borné, il y a quelques précautions à prendre

([1]) *Voir* Florin Vasilesco, *loc. cit.*, p. 95.

quant aux fonctions v_n et v, mais le raisonnement reste le même (*voir* Kellogg, *loc. cit.*).

III. — Résultats relatifs au balayage.

DOMAINES BORNÉS.

9. *Si* S *est une surface irrégulière* (¹) (en correspondance bicontinue et biuniforme, s'étendant au voisinage où se fait le balayage, avec une surface régulière), *le balayage d'une masse située dans le domaine intérieur* A, *qu'elle limite, masse dont le potentiel* U *est continu sur* S, *donne une distribution* $\mu(S)$ *dont le potentiel* V *est égal à* U *à l'extérieur de* S, *est déterminé sur* S, *et est égal à la solution du problème de Dirichlet généralisé dans le domaine* A, *pour les valeurs* U *sur* S.

En effet, si la masse était « intérieure » à A, les surfaces Σ_n, sommes d'un nombre fini de sphères, au moyen desquelles on fait le balayage sont extérieures à la masse. Leurs potentiels V_n sont égaux à U à l'extérieur des Σ_n, et à la fonction harmonique prenant les valeurs U sur Σ_n, à l'intérieur. Donc les V_n tendent vers la solution du problème de Dirichlet généralisé dans A, en même temps que vers V.

Si la masse va jusqu'à S, les surfaces seront prises à l'extérieur de S, et le raisonnement est encore valable, d'après nº **8** (²).

10. Théorème d'unicité. — *Il n'y a qu'une distribution sur* S, *dont le potentiel à l'extérieur soit égal à* U, *et soit inférieur à* U, *à l'intérieur de* S : *la distribution* $\mu(S)$.

(¹) *Voir* M. de La Vallée Poussin, *loc. cit.*, p. 196. Le savant auteur ayant fait le balayage d'un domaine général (p. 125), l'énoncé et la démonstration de ce théorème tiennent, sans aucun changement, pour un tel domaine.

(²) Si une partie de S est frontière « intérieure » du domaine et que la masse aille jusqu'à S, on se ramènera au cas précédent. En effet, on n'aura qu'à considérer la masse située à une distance supérieure à un nombre arbitraire ε, de la frontière, qu'à faire son balayage et à passer à la limite ensuite. Le résultat est évidemment le même.

Supposons qu'il y en aurait une autre $\mu'(S)$. Soit alors S'_k une suite de surfaces régulières extérieures à S et tendant vers elle [1]. Le balayage de la masse $\mu'(S)$ sur S'_k donnera une distribution $\mu'(S'_k)$, dont le potentiel V'_k sera égal à U à l'extérieur de S'_k et inférieur à V', le potentiel de $\mu'(S)$, à l'intérieur de S'_k, donc dans A. Mais, à la limite, V'_k tend, dans A, vers V. Donc dans A, V *est inférieur à* V'. Ainsi, l'on y a

$$V < V' < U,$$

V' étant inférieur à U, par hypothèse.

En considérant alors dans A une suite de domaines normaux tendant vers A, par exemple, ceux que limitent les surfaces Σ_n, les fonctions harmoniques prenant les valeurs U sur Σ_n sont supérieures à V' et tendent vers V. Donc, V' *coïncide avec* V, et la distribution $\mu(S)$ est unique, à cause du théorème de Gauss.

Ce raisonnement suppose que la masse est « intérieure » à A, donc que U est continu au voisinage de S, dans A. Si la masse allait jusqu'à S, U serait certainement continu aux points de S, par hypothèse. Mais, en ce cas, on peut construire une fonction continue majorant U dans A et lui étant égale sur S. Le raisonnement tient dès lors, *a fortiori*.

Voici comment on peut construire une telle fonction. U étant continu sur S est borné dans son voisinage intérieur, le seul qui nous intéresse. On considère alors un quadrillage de l'espace et, situés dans ce voisinage, successivement ceux des cubes ne contenant pas de points de S, et extérieurs entre eux. On définit une fonction majorante égale dans chaque cube, au maximum de U dedans. On rétablit la continuité, sur les faces des cubes, au moyen de raccords allant du maximum le plus grand au plus petit, raccords dont l'amplitude tend vers zéro avec les côtés des cubes dans lesquels il a lieu.

11. VALEUR DU POTENTIEL SUR S. CONTINUITÉ. — *Le potentiel dû à la*

---

[1] La démonstration suppose que le domaine est dépourvu de frontière intérieure, comme c'est le cas pour les domaines considérés par M. de La Vallée Poussin.

distribution $\mu(S)$ *prend, en tout point* Q *de* S, *pour valeur, la plus petite limite* $U(Q) - \lambda$ *de ses valeurs intérieures de* S, *en ce point.*

Il est donc continu en tout point de S *où sa limite par l'intérieur est unique, donc égale à* $U(Q)$. *Ces points contiennent tous les points réguliers de* S, *et par conséquent, les points où* S *satisfait à la condition de Poincaré* (¹).

En effet, le potentiel V est continu par l'intérieur en tout point régulier de S et y prend la valeur U, comme étant solution du problème de Dirichlet généralisé. L'ensemble de ces points est partout dense sur S. Et comme le potentiel est majoré par U, il admet comme plus grande limite, sur S, U. Considérons alors un voisinage du point Q dans lequel les valeurs de V, aux points *non situés* sur S, soient comprises entre $U(Q) - \lambda - \varepsilon$ et $U(Q) + \varepsilon$. Traçons-y une surface Σ autour de Q, régulière sauf sur son intersection L avec S, qui soit de capacité nulle (²).

On voit que $V(Q)$ ne peut pas être inférieur à $U(Q) - \lambda$, sans quoi, en choisissant ε assez petit, il serait aussi inférieur à $U(Q) - \lambda - \varepsilon$. En balayant alors les masses dans Σ, V diminue encore, devient harmonique, prend sur $\Sigma - L$ ses propres valeurs et y est continu. Il est, d'ailleurs, borné à l'intérieur de Σ. Or, d'après n° **7**, il résulte qu'à l'intérieur de Σ il devrait être compris entre les mêmes limites que sur $\Sigma - \lambda$, ce qui est contradictoire.

$V(Q)$ est donc égal à $U(Q) - \lambda$, car il est semi-continu inférieurement.

12. Exemple. — *Le balayage d'une masse unité concentrée en un point* P, *intérieur au domaine, conduit à une distribution unique* $\mu(S, P)$, *dont le potentiel, égal à* $\frac{1}{r}$ *à l'extérieur de* S, *est, à son intérieur, inférieur à* $\frac{1}{r}$ *et égal à* $\frac{1}{r} - G(M, P)$, $G(M, P)$ *étant la fonction de Green généralisée du domaine.*

(¹) Le potentiel est donc continu sur S, sauf aux points d'un ensemble impropre.

(²) Supposons, pour l'instant, ces conditions réalisées, ce qui n'a rien d'excessif si l'on se souvient des exemples d'ensembles de capacité nulle.

En tout point régulier de S, G est continue et prend la valeur zéro. Par contre, en tout point irrégulier, G n'est pas continue et admet une plus grande limite λ. Le potentiel de $\mu(S, P)$ est donc continu et égal à $\frac{1}{r}$ aux points réguliers et discontinu et égal à $\frac{1}{r} - \lambda$ aux points irréguliers.

Remarques. — De ce qui précède, on voit que l'unicité de la distribution est due, non pas à la continuité de son potentiel à la frontière, mais à l'unicité de celui-ci à l'intérieur, unicité qui apparaît lorsque l'on aperçoit qu'il est la solution du problème deDirichlet généralisé.

Le potentiel d'une distribution issue du balayage est une solution très particulière d'un tel problème, car il admet la fonction continue U, à laquelle il est attaché sur S, comme plus grande limite sur S. On peut, dès lors, se demander ce qui caractérise une telle solution-potentiel.

On peut également se demander si le potentiel n'a pas d'autres points de continuité sur S, que les points réguliers de celle-ci.

Enfin, il est bien évident que toutes ces considérations s'appliquent au balayage plan.

BALAYAGE D'UN DOMAINE NON BORNÉ.

13. Soit A un domaine extérieur à une surface simple ou multiple S. Une masse est répartie dans ce domaine, mais à distance finie, pour fixer les idées. On suppose qu'elle donne un potentiel continu sur S.

Pour balayer le domaine A, on considère une sphère Γ_n contenant, à l'intérieur, S et la masse, et tendant vers l'infini. Le balayage du domaine c_n, compris entre S et Γ_n, donne une distribution $\mu_n(S)$, sur S, et une autre ε_n sur Γ_n. Le potentiel V'_n de ces deux distributions est égal à U à l'intérieur de S, et à la solution du problème de Dirichlet généralisé, pour les valeurs U sur S et Γ_n, dans c_n. Les valeurs de U sur Γ_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc, lorsque n tend vers l'infini, V'_n tend, à l'extérieur de S, vers la solution du problème de Dirichlet extérieur à S, pour les valeurs U. C'est là la raison pour laquelle on a fait ici le balayage d'une manière légèrement différente de celle donnée par M. de La Vallée Poussin.

Dans ces conditions, les distributions ont, et ne peuvent avoir, qu'une limite, car le potentiel limite V de ceux des distributions $\mu_n(S)$ est unique à l'extérieur de S, alors que ceux des ε_n tendent vers zéro. Le potentiel V est inférieur à U à l'extérieur de S.

Les résultats précédemment obtenus sont donc valables pour les domaines non bornés.

A la différence, toutefois, que *la masse balayée ne vient pas tout entière sur* S, une partie pouvant être rejetée à l'infini. Témoin ce cas étudié ci-après.

Une masse unité est répartie uniformément sur deux sphères de grandeur différente, contenant S. Leurs potentiels, constants à l'intérieur, sont différents. Le balayage de l'extérieur de S donne, sur S, deux distributions dont les potentiels à l'intérieur de S sont constants mais différents. Par multiplication par une constante d'une d'entre elles, on obtient l'autre. Elles ne peuvent donc pas avoir la même masse totale (voir le résultat ci-après).

La différence que ce fait exprime entre le cas du plan et celui de l'espace tient à la présence du $\log \frac{1}{r}$ dans le premier cas. *Le balayage ajoute alors une constante au potentiel intérieur à* S *et conserve la masse, au lieu qu'ici, il conserve le potentiel, mais change la masse.*

14. Problème de Robin. — Distribuons une masse unité sur une sphère extérieure à S, uniformément, et balayons ensuite l'extérieur de S. En multipliant par un facteur constant, on voit que :

On peut trouver, à volonté, une distribution sur S, *dont la masse soit donnée et produise un potentiel constant dans* S, *ou bien, dont la masse produise un potentiel constant donné dans* S.

La masse, la distribution et la constante du potentiel sont ici positives, en même temps.

Ces distributions sont telles que leur potentiel à l'extérieur est la solution du problème de Dirichlet généralisé extérieur, pour une valeur constante sur S.

Si la constante est l'unité, la distribution est dite d'équilibre et donne le potentiel conducteur.

Problème d'unicité. — Dans le cas actuel, il est moins précis que dans les cas précédents, où l'unicité résultait de ce que le potentiel de la distribution que l'on considérait devait satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Être égal à U en dehors de A;
2° Être inférieur à U dans A.

Ici, il n'y a que la première de ces conditions qui intervient.

Il n'y a qu'une distribution $\mu(S)$ *provenant du balayage d'une masse extérieure à* S, *qui donne un potentiel constant donné dans* S.

Car ce potentiel est la solution du problème de Dirichlet généralisé extérieur. Il semble que l'on peut enlever la restriction *provenant du balayage*. S'il y avait une autre distribution possible sur S, donnant le même potentiel dans S, on peut affirmer que son potentiel à l'extérieur est *supérieur* à celui de $\mu(S)$.

Il en serait ainsi, par exemple, si l'on pouvait prouver que le potentiel de toute distribution qui serait constant à l'intérieur de S reste, à l'extérieur, inférieur à une fonction continue égale, sur S, à la même constante.

Il n'y a qu'une distribution d'une masse donnée, provenant du balayage d'une masse extérieure à S, *qui donne un potentiel constant dans* S. Car, en multipliant par une constante, on est ramené au cas précédent.