JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. HAAG

Théorie de la suspension élastique des pendules

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 14, nº 1-4 (1935), p. 113-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1935_9_14_1-4_113_0>

Théorie de la suspension élastique des pendules;

Par M. J. HAAG.

INTRODUCTION.

La théorie de la suspension élastique des pendules a été faite pour la première fois par Bessel (*Astron. Nachrichten*, 1843, p. 136 à 159), dans le cas où la lame électrique est à la fois *mince et courte*. Dans son Mémoire, l'illustre astronome se préoccupe uniquement d'évaluer la longueur du pendule synchrone, en fonction des caractéristiques de la lame et de l'amplitude θ_0 de l'oscillation. Il se borne d'ailleurs au calcul du terme constant et du terme en θ_0^2. Malheureusement, il se trompe dans ses approximations ([1]) et *ces deux termes sont faux*, comme on peut s'en rendre compte en passant au cas limite de la suspension par fil.

M. Keelhoff (*Journal Suisse d'Horlogerie*, janvier 1906) a également étudié la question, mais en se plaçant surtout au point de vue pratique de la fatigue de la lame et de la souplesse de la suspension.

M. Le Rolland (*Thèse de Doctorat*, 1922) semble être le premier

([1]) A la page 151, il remplace p et p' par $\frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}$. Il commet ainsi une erreur de l'ordre de $\varphi' - u$; ce qui se traduit par une erreur de l'ordre de θ^2 dans son équation (16), qui est l'intégrale des forces vives. Il remplace également φ' par u dans les crochets de ses formules (14); ce qui a une répercussion analogue. Ces erreurs influent sur le terme constant de sa formule (20).

A la page 150, il néglige le carré de $\varphi' - \varphi$, pour éviter les transcendantes elliptiques dans l'intégration de l'équation de la lame. Cette approximation a une répercussion sur le terme en θ_0^2.

auteur qui ait traité le problème d'une manière à la fois correcte et complète, en ce qui concerne la première approximation. Il a également donné le principe d'une méthode permettant d'atteindre la deuxième approximation. Mais, il n'a pas développé complètement ses calculs et s'est borné à en indiquer le résultat dans quelques cas particuliers ([1]).

En 1929, M. Tricomi (*Nuovo Cimento*, mars 1929) a publié une théorie de la première approximation, qui ne diffère pas essentiellement de celle de M. Le Rolland.

Trois mois après (*Comptes rendus*, 3 juin 1929), j'ai publié à mon tour une théorie analogue, sans connaître, bien entendu, les recherches de mes prédécesseurs ([2]).

Dans tous ces travaux, la lame est supposée *uniforme*. Or, il arrive dans la pratique qu'elle ne l'est pas, parce qu'on la perce par exemple d'un trou. Après avoir fait la théorie complète de la lame uniforme, j'ai essayé de l'étendre à la *lame non uniforme* ([3]) et je me suis aperçu immédiatement que le cas général est en somme plus simple que le cas particulier, parce qu'il évite le détail de certains calculs.

C'est cette théorie générale et complète ([4]) qui fait l'objet du présent Mémoire.

Dans un premier chapitre, j'étudie le mouvement en *première approximation*. Je mets en évidence le rôle fondamental des points que j'appelle les *foyers*. J'évalue *l'influence de la température* sur les deux périodes. J'examine les différents *modes de lancement* du pendule. J'étudie la *forme de la lame*, sa *fatigue* et sa *souplesse*. Je déter-

---

([1]) Ses calculs comportent d'ailleurs des erreurs, car, dans le cas de la suspension ordinaire (p. 206), sa formule (15) ne donne pas la correction classique $\frac{\theta_0^2}{16}$, lorsqu'on suppose une lame infiniment mince. *Cf.* n° **79** du présent Mémoire.

([2]) J'avais également esquissé la seconde approximation, mais sans poursuivre les calculs, de sorte que je n'ai rien publié à ce sujet.

([3]) *Cf.* J. HAAG, *Théorie générale de la suspension élastique des pendules* (*Comptes rendus*, 6 juin 1932, t. **194**, p. 2021).

([4]) J'ai fait aussi la théorie d'une *méthode d'approximations successives*, permettant d'obtenir l'approximation de n'importe quel rang. Mais la seconde approximation paraît largement suffisante dans la pratique.

mine enfin la position de l'axe de la fourchette pour le *meilleur fonctionnement de l'échappement.*

Le Chapitre II est consacré à la *théorie des perturbations.* J'applique cette théorie à *l'erreur d'isochronisme*, aux *erreurs d'encastrement*, à l'influence de *l'inertie et du poids de la lame*, aux *corrections de la loi de la flexion plane*, aux *frottements internes* et aux *dissymétries de la lame.*

Dans le Chapitre III, j'examine ce que deviennent tous ces résultats dans le cas de la *lame uniforme.*

Dans le Chapitre IV, je traite directement le cas de la *suspension par fil* et je vérifie que les résultats obtenus sont bien d'accord avec ce qu'on déduit du chapitre précédent, quand on suppose que l'épaisseur de la lame tend vers zéro.

Dans le Chapitre V, j'examine le cas particulier du *pendule ponctuel* et aussi le cas où l'on peut obtenir des *battements* entre les deux oscillations.

Le Chapitre VI est consacré au *pendule à lame courte.* Les formules de la théorie générale se simplifient par approximation.

Le Chapitre VII contient la théorie complète du *pendule de gravité à suspension directe*, avec le calcul du *coefficient de sensibilité*, des *corrections de température*, de *l'erreur d'isochronisme*, des *erreurs d'encastrement* et de l'influence des *dissymétries.*

Le Chapitre VIII expose la théorie du *pendule de gravité à lame renversée*, qui se déduit de la théorie précédente par une modification très simple.

Enfin, le Chapitre IX étudie *deux exemples de lame non uniforme.*

J'aurais voulu consacrer un dixième chapitre à des exemples numériques concrets. Mais, j'ai craint de trop allonger ce Mémoire et je me réserve d'étudier les applications dans une publication plus technique.

CHAPITRE I.

PREMIÈRE APPROXIMATION.

1. Équations différentielles du problème. — Soit OA la partie libre de la lame, qui est encastrée en O dans le support fixe et en A dans la tige du pendule. Nous supposerons que la tangente Ox en O est verticale et que la tangente AT en A passe par le centre de gravité G du pendule. Nous poserons $\overline{AG} = a$.

A l'axe Ox, nous adjoignons l'axe Oy, perpendiculaire à Ox et dans le plan d'oscillation.

Appelons α, β les coordonnées de A et θ l'angle de Ox avec AT. Ce sont les inconnues dont dépend le mouvement du pendule.

Soient maintenant E le module de Young de la lame et I le moment d'inertie de sa section droite par rapport au plan neutre. Si la section droite est variable, ce moment d'inertie est une fonction quelconque de l'abscisse curviligne $s = \widehat{OM}$; et l'on pourrait aussi imaginer que E dépend de s.

Soit m la masse du pendule. Nous poserons

$$M = \frac{EI}{mg} \tag{1}$$

et nous considérerons M comme une *fonction connue de s*.

Appelons mgN le *couple d'encastrement* en A et mgX, mgY les composantes de la *réaction d'encastrement*. Soient x, y les coordonnées du point M de la fibre neutre et φ l'angle de Ox avec la tangente en ce point. On a, d'après la théorie bien connue de la flexion plane,

$$M\frac{d\varphi}{ds} = N + (\alpha - x)Y - (\beta - y)X. \tag{2}$$

En outre,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi. \tag{3}$$

Les forces agissant sur le pendule sont son poids mg, appliqué en G, le couple — N et la force (— X, — Y) appliquée en A.

Appliquons le théorème du centre de gravité; nous avons

$$m\alpha'' - ma\theta'^2\cos\theta - ma\theta''\sin\theta = mg(1 - X), \tag{4}$$

$$m\beta'' - ma\theta'^2\sin\theta + ma\theta''\cos\theta = - mgY. \tag{5}$$

Appliquons maintenant le théorème du moment cinétique par rapport à G :

$$\frac{R^2}{g}\theta'' = - N + a(Y\cos\theta - X\sin\theta), \tag{6}$$

en appelant R le rayon de gyration du pendule par rapport à l'axe passant par G et perpendiculaire au plan xOy.

Les équations (2) à (6) constituent les équations différentielles du problème.

2. Intégration de l'équation de la lame. — Dérivons l'équation (2) par rapport à s, en tenant compte de (3):

$$\frac{d}{ds}\left(\mathrm{M}\frac{d\varphi}{ds}\right) = \mathrm{X}\sin\varphi - \mathrm{Y}\cos\varphi. \tag{7}$$

Si l'on se borne aux *petites oscillations*, on a, en considérant θ et φ comme des infiniment petits du premier ordre et *négligeant le second ordre* dans (3) et (4),

$$\alpha = \lambda, \qquad \mathrm{X} = 1,$$

où λ désigne la *longueur de la lame*.

L'équation (7) se réduit à

$$\frac{d}{ds}(\mathrm{M}\varphi') = \varphi - \mathrm{Y}. \tag{8}$$

Considérons l'équation différentielle

$$\mathrm{M}v'' - v = 0. \tag{9}$$

Appelons v et w les solutions définies par les conditions suivantes :

$$v'_0 = v'_\lambda = -1, \qquad w'_0 = 0, \qquad w'_\lambda = 1. \tag{10}$$

Posons

$$\varphi_1 = 1 + v', \qquad \varphi_2 = w'; \tag{11}$$

de sorte que

$$\varphi_{10} = \varphi_{1\lambda} = 0, \qquad \varphi_{20} = 0, \qquad \varphi_{2\lambda} = 1. \tag{12}$$

Posons enfin

$$\varphi = \mathrm{Y}\varphi_1 + \theta\varphi_2. \tag{13}$$

D'où

$$\varphi' = \frac{\mathrm{Y}v + \theta w}{\mathrm{M}}. \tag{14}$$

On vérifie aisément quecette fonction satisfait à l'équation (8), quels que soient Y et θ. De plus, on a

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_\lambda = \theta,$$

conformément aux *conditions d'encastrement.*

3. Propriétés des fonctions v et w. — On a d'abord

$$\frac{d}{ds}(vw' - wv') = vw'' - wv'' = 0,$$

d'après (9). D'où

$$vw' - wv' = w_0, \tag{15}$$

d'après (10). En particulier,

$$v_\lambda + w_\lambda = w_0, \tag{16}$$

La fonction M est positive [1]. On en conclut que v'' a toujours le signe de v. Si, pour une certaine valeur s_1 de s, v et v' sont positifs, ces fonctions demeurent positives et croissantes pour $s > s_1$. Si elles sont négatives pour $s = s_1$, elles sont négatives et décroissantes pour $s > s_1$.

De cette simple remarque, on conclut d'abord que v_0 est nécessairement positif, sans quoi v' ne pourrait plus prendre la valeur -1 pour $s = \lambda$. De même, w_0 est positif, afin que w' puisse atteindre la valeur $+1$. En outre, $w_\lambda > w_0$.

De la propriété précédente résulte aussi que v'' s'annule au plus une fois; donc, v' ne peut avoir plus d'un maximum ou minimum. Comme $v''_0 > 0$, v' commence par croître et reste constamment supérieur à -1, quand s croît de 0 à λ. On en conclut que la fonction $s + w$ est croissante dans cet intervalle. Donc,

$$\beta_1 = \lambda + v_\lambda - v_0 > 0. \tag{17}$$

D'autre part, v' prenant la valeur -1 pour $s = 0$ et pour $s = \lambda$, v'' et par suite v s'annulent une fois et une seule dans l'intervalle. Il en résulte que $v_\lambda < 0$. L'inégalité (17) nous apprend ensuite que β_1, v_0 et $-v_\lambda$ sont inférieurs à λ.

---

[1] Sauf dans le cas de la lame renversée (n° **100**).

Voici encore une autre propriété, qui nous servira plus tard. L'identité (15) nous donne

$$\frac{v_0}{w_0}-\frac{v_\lambda}{w_\lambda}=\int_0^\lambda \frac{w_0}{w^2}\,ds>\frac{\lambda w_0}{w_\lambda^2},$$

puisque la fonction w est croissante. Cette inégalité s'écrit, en multipliant par $w_0 w_\lambda$ et en tenant compte de (16),

$$\beta_1 w_\lambda+v_\lambda^2<-\lambda v_\lambda\left(1+\frac{w_0}{w_\lambda}\right)<-2\lambda v_\lambda<2\lambda^2. \tag{18}$$

Voici enfin une dernière remarque. On a

$$1=\int_0^\lambda w''\,ds=\int_0^\lambda \frac{w}{M}\,ds.$$

Soient M_1 et $M_2=\mu M_1$ le minimum et le maximum de M, quand s croît de o à λ. On déduit de l'égalité ci-dessus

$$M_1<\lambda w_\lambda,\quad M_2>\lambda w_0$$

ou

$$M_2<\lambda\mu w_\lambda,\quad M_1>\frac{\lambda w_0}{\mu};$$

d'où

$$\frac{\lambda w_0}{\mu}<M<\lambda\mu w_\lambda. \tag{19}$$

4. Cas de la lame symétrique. — Supposons la lame symétrique par rapport à son milieu; autrement dit, M est une fonction paire de $s-\frac{\lambda}{2}$. Considérons la solution x de l'équation (9) qui s'annule pour $s=\frac{\lambda}{2}$ et dont la dérivée prend, pour cette même valeur de s, une valeur arbitraire A. Cette solution est une fonction impaire de $s-\frac{\lambda}{2}$. Déterminons A de telle manière que la dérivée x' ait la valeur -1 pour $s=0$. Comme cette dérivée est fonction paire de $s-\frac{\lambda}{2}$, elle prend aussi la valeur -1 pour $s=\lambda$. On en conclut que la fonction x n'est autre que *la fonction v*, laquelle *est* donc *une fonction impaire de $s-\frac{\lambda}{2}$*. En particulier, on a

$$v_\lambda = -v_0, \qquad \beta_1 = \lambda - 2v_0, \qquad w_\lambda = w_0 + v_0 \tag{20}$$

5. Calcul de Y et N en fonction de θ et β. — On a

$$\beta = \int_0^\lambda \varphi\, ds = Y\beta_1 + \theta\beta_2, \tag{21}$$

en posant

$$\beta_1 = \lambda + v_\lambda - v_0, \qquad \beta_2 = w_\lambda - w_0 = -v_\lambda. \tag{22}$$

D'après le n° **3**, ces deux coefficients β_1 et β_2 sont positifs.

De l'équation (21), on tire

$$Y = \frac{\beta + \theta v_\lambda}{\beta_1}. \tag{23}$$

On a ensuite, en faisant $s = \lambda$ dans l'équation (2) et tenant compte de (16) et (22),

$$N = M_\lambda \varphi'_\lambda = Y v_\lambda + \theta w_\lambda = \frac{\beta v_\lambda + \theta(v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda)}{\beta_1}. \tag{24}$$

6. Équations différentielles du mouvement. — Si l'on néglige le second ordre, les équations (5) et (6) se réduisent à

$$\beta'' + a\theta'' = -gY,$$
$$R^2\theta'' = g(-N + aY - a\theta)$$

ou, d'après (23) et (24),

$$\beta'' + a\theta'' = g\frac{\beta_2\theta - \beta}{\beta_1}, \tag{25}$$

$$R^2\theta'' = g\frac{\beta(a - v_\lambda) - \theta[a(\lambda - v_0) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda]}{\beta_1}. \tag{26}$$

7. Intégration des équations du mouvement. — Le système linéaire ci-dessus peut être intégré par diverses méthodes, élémentaires et bien connues. Nous adopterons la méthode des *variables canoniques*.

Cherchons, sur la tige du pendule, *un point* F *qui soit animé d'un mouvement sinusoïdal, quelles que soient les conditions initiales.* Posons $\overline{GF} = z$. L'ordonnée de F est

$$y = \beta + (a + z)\theta. \tag{27}$$

On a, d'après (25) et (26),

$$y'' = g\frac{\beta_2\theta - \beta}{\beta_1} + \frac{gz}{R^2}\,\frac{\beta(a - v_\lambda) - \theta[a(\lambda - v_0) + v_\lambda^2 + b_1 w_\lambda]}{\beta_1} = -n^2 y,$$

à condition que l'on ait

$$\frac{n^2}{g}\beta_1 = 1 - \frac{z}{R^2}(a - v_\lambda), \tag{28}$$

$$\frac{n^2}{g}(a + z)\beta_1 = -\beta_2 + \frac{z}{R^2}[a(\lambda - v_0) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda]. \tag{29}$$

Eliminons n^2 entre ces deux équations; il vient

$$z^2 + z\,\frac{a^2 + a\lambda - R^2 - a(v_0 + v_\lambda) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda}{a - v_\lambda} - R^2 = 0. \tag{30}$$

Cette équation a toujours deux racines réelles et de signes contraires. Donc, *il y a deux points répondant à la question.* Ces deux points, que nous appellerons les *foyers*, sont situés, *de part et d'autre, du centre de gravité.* Sauf avis contraire, nous désignerons par F le foyer inférieur et par F′ le foyer supérieur. Les racines correspondantes de (30) seront représentées par z et z'. Elles satisfont aux relations

$$zz' = -R^2, \tag{31}$$

$$(a - v_\lambda)(z + z') + a^2 + a\lambda - R^2 - a(v_0 + v_\lambda) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda = 0. \tag{32}$$

D'où l'on déduit, par addition, et pour éliminer R,

$$(a + z - v_\lambda)(a + z' - v_\lambda) = -\beta_1(a + w_\lambda). \tag{33}$$

En portant z ou z' dans (27), on obtient *les deux variables canoniques.*

8. Calcul des périodes. — La période de F est $\frac{2\pi}{n}$, et l'on a n par (28). En tenant compte de (31), on peut écrire

$$n^2 = -\frac{Kg}{z'}, \tag{34}$$

en posant

$$K = -\frac{a + z' - v_\lambda}{\beta_1}, \tag{35}$$

ou, d'après (33),

$$K = \frac{a + w_\lambda}{a + z - v_\lambda}. \tag{36}$$

On a des formules analogues pour n' et K′, en intervertissant z et z'. Signalons l'identité

$$KK' = -\frac{a + w_\lambda}{\beta_1}, \tag{37}$$

qui résulte de (33).

9. Condition d'existence des deux vibrations. — D'après (34), K doit être positif. Comme $\beta_1 > 0$, on doit avoir

$$a + z' - v_\lambda < 0. \tag{38}$$

Au contraire, K′ doit être négatif. Donc, on doit avoir

$$a + z - v_\lambda > 0. \tag{39}$$

D'après (33), on en conclut

$$a + w_\lambda > 0. \tag{40}$$

Réciproquement, si l'on a (40), les quantités (38) et (39) sont de signes contraires et, comme la première est la plus petite, les inégalités (38) et (39) sont vérifiées. Donc, pour que les deux vibrations existent, *il faut et il suffit que a soit algébriquement supérieur à la distance critique*

$$a_1 = -w_\lambda. \tag{41}$$

Si $a < a_1$, les quantitée (38) et (39) sont de même signe. D'autre part, on a $a < v_\lambda$, car $-w_\lambda < v_\lambda$, d'après (16). Donc, l'inégalité (38) est vérifiée et (39) ne l'est pas. Le foyer inférieur F peut seul vibrer; *le foyer supérieur* F′ *est en équilibre instable*. Comme on ne peut pas réaliser rigoureusement cet équilibre, *les oscillations du pendule sont pratiquement impossibles.*

10. Calcul des petites variations de période. — Il peut arriver que, pour une raison accidentelle quelconque, l'une des quantités a, R, λ varie légèrement. On peut aussi imaginer que la fonction M subisse un petit accroissement. Proposons-nous de calculer la ***répercussion de ces variations sur l'une ou l'autre des deux périodes.***

Nous avons, d'après (34),

$$\frac{dT}{T} = -\frac{dn}{n} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz'}{z'} - \frac{dK}{K}\right).$$

Si l'on calcule $\frac{dK}{K}$ au moyen de (35), on obtient

$$(42) \qquad 2\frac{dT}{T} = -\frac{dz'}{z'}\cdot\frac{a - v_\lambda}{K\beta_1} + \frac{da - dv_\lambda + K d\beta_1}{K\beta_1}.$$

On peut aussi calculer $\frac{dK}{K}$ au moyen de (36). D'autre part, on a, d'après (31),

$$\frac{dz}{z} + \frac{dz'}{z'} = 2\frac{dR}{R}.$$

En éliminant dz au moyen de cette relation, on trouve

$$(43) \qquad 2\frac{dT}{T} = \frac{dz'}{z'}K\frac{a - v_\lambda}{a - a_1} + \frac{-da - dw_\lambda + K(da - dv_\lambda) + 2Kz\frac{dR}{R}}{a - a_1}.$$

En éliminant $\frac{dz'}{z'}$ entre (42) et (43), il vient

$$(44) \quad 2Q\frac{dT}{T} = 2Kz\frac{dR}{R} + (2K - 1)da + K^2(d\lambda - dv_0) + K(K - 2)dv_\lambda - dw_\lambda,$$

en posant

$$(45) \qquad Q = a - a_1 + K^2\beta_1 = K(z - z').$$

11. Calcul de $\frac{dv_0}{d\lambda}$, $\frac{dv_\lambda}{d\lambda}$, $\frac{dw_\lambda}{d\lambda}$. — D'après sa définition, la fonction v est une fonction des deux variables s et λ. Posons

$$u = \frac{\partial v}{\partial \lambda}.$$

Cette fonction u satisfait évidemment à l'équation (9). En outre,

$$(46) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v'}{\partial \lambda}.$$

Pour $s = 0$, cette identité donne

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_0 = \frac{dv'_0}{d\lambda} = 0, \tag{47}$$

d'après (10).

Pour $s = \lambda$, on a

$$\left(\frac{\partial v'}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s}\right)_\lambda = \frac{dv'_\lambda}{d\lambda} = 0,$$

d'après (10). D'autre part,

$$\frac{\partial v'}{\partial s} = v'' = \frac{v}{M}.$$

On a donc

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_\lambda = -\frac{v_\lambda}{M_\lambda}. \tag{48}$$

La fonction u est une solution de l'équation (9), définie par les conditions (47) et (48), analogues à (10). On en conclut que

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{v_\lambda}{M_\lambda} w. \tag{49}$$

De même,

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = -\frac{w_\lambda}{M_\lambda} w. \tag{50}$$

On en déduit

$$\frac{dv_0}{d\lambda} = \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_0 = -\frac{v_\lambda w_0}{M_\lambda}, \qquad \frac{dw_0}{d\lambda} = -\frac{w_\lambda w_0}{M_\lambda}. \tag{51}$$

Puis,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dv_\lambda}{d\lambda} &= \left(\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)_\lambda = -1 - \frac{v_\lambda w_\lambda}{M_\lambda}, \\ \frac{dw_\lambda}{d\lambda} &= \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)_\lambda = 1 - \frac{w_\lambda^2}{M_\lambda}. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Comme vérification, la formule obtenue en dérivant (16) par rapport à λ est vérifiée identiquement.

12. Calcul de dv_0, dv_λ, dw_λ pour un petit accroissement de la fonction M. — Supposons que la fonction M subisse le petit accroissement εM, où ε désigne une très petite fonction de s. Soit x l'accroissement subi par la fonction v. On a

$$Mx'' - x = -\varepsilon M v'' \tag{53}$$

et

$$x'_0 = x'_\lambda = 0.$$

En appliquant la méthode de la variation des constantes et tenant compte de (15), on trouve

$$x = A v + (B + A_\lambda - B_\lambda) w, \tag{54}$$

en posant

$$A = \frac{1}{w_0} \int_0^s \varepsilon w v'' \, ds, \qquad B = \frac{-1}{w_0} \int_0^s \varepsilon v v'' \, ds. \tag{55}$$

On a des formules analogues pour les accroissements subis par la fonction w; il suffit simplement de remplacer v'' par w'' dans les formules (55).

Nous avons maintenant

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} & dv_0 = x_0 = (A_\lambda - B_\lambda) w_0 = \int_0^\lambda \frac{\varepsilon}{M} (v + w) v \, ds, \\ & dw_0 = \int_0^\lambda \frac{\varepsilon}{M} (v + w) w \, ds; \end{aligned} \right.$$

puis, en tenant compte de (16),

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} & dv_\lambda = x_\lambda = A_\lambda w_0 = \int_0^\lambda \frac{\varepsilon}{M} w v \, ds, \\ & dw_\lambda = \int_0^\lambda \frac{\varepsilon}{M} w^2 \, ds. \end{aligned} \right.$$

Comme vérification, l'équation obtenue en différentiant (16) est satisfaite identiquement.

13. Calcul explicite de $\frac{dT}{T}$. — Portons (51), (52), (56), (57) dans (44); il vient, après un calcul facile,

$$2 Q \frac{dT}{T} = 2 K z \frac{dR}{R} + (2K - 1)(da + d\lambda) + P_\lambda \, d\lambda - \int_0^\lambda \varepsilon P \, ds, \tag{58}$$

en posant

$$P = \frac{(K v + w)^2}{M}. \tag{59}$$

14. Influence d'une variation de température. — Appelons α et α' les coefficients de dilatation linéaire de la lame et du pendule, ce dernier étant supposé homogène. Soit, d'autre part, β le coefficient thermo-élastique de la lame. Si la température augmente de 1°, on a les accroissements suivants :

$$\frac{da}{a} = \frac{dR}{R} = \alpha', \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = \alpha, \qquad \frac{dE}{E} = \beta, \qquad \frac{dI}{I} = 4\alpha, \qquad \varepsilon = \beta + 4\alpha.$$

Portant dans (58), on obtient

$$(60) \qquad 2Q\frac{dT}{T} = 2Kz\alpha' + (2K - 1)(\alpha' a + \alpha\lambda) + \alpha\lambda P_\lambda - (\beta + 4\alpha)G_2,$$

en adoptant la notation définie par (79).

15. Influence d'une variation de g. — On a

$$\varepsilon = -\frac{dg}{g}.$$

De plus, en différentiant (34), il faut tenir compte du facteur g, ce qui ajoute $-\frac{1}{2}\frac{dg}{g}$ à $\frac{dT}{T}$. On obtient ainsi

$$(61) \qquad \frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{dg}{g}G,$$

en posant

$$(62) \qquad G = -1 + \frac{G_2}{Q}.$$

Le coefficient G sera appelé le *coefficient de sensibilité.*

En rapprochant cette formule de la formule (80), on a la formule remarquable

$$(63) \qquad G = -1 + \frac{2W}{mgQ},$$

où W représente l'*énergie de déformation de la lame pour une élongation d'un radian.*

16. Oscillation principale et vibration parasite. — Nous appellerons *oscillation principale* le mouvement du pendule quand *le foyer* *supérieur* F′ *reste fixe* ([1]). On a, dans ce cas,

(64) $$\beta + (a + z')\theta = 0.$$

Portant dans (23), il vient

(65) $$Y = K\theta.$$

Portant dans (13) et (14), on a ensuite

(66) $$\left\{\begin{aligned} \varphi &= \theta(K\varphi_1 + \varphi_2), \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \theta\,\frac{Kv + w}{M}. \end{aligned}\right.$$

Nous appellerons *vibration parasite* le mouvement du pendule quand *le foyer inférieur* F *reste fixe*. Il est déterminé par les équations précédentes, où l'on doit simplement intervertir les racines z et z'.

Le mouvement le plus général résulte de la *superposition de l'oscillation principale et de la vibration parasite.*

17. Détermination du mouvement par les conditions initiales. — Les mouvements des deux foyers se déterminent séparément si l'on connaît la position et la vitesse de chacun d'eux au temps zéro. Ces positions et vitesses résultent elles-mêmes de la connaissance de la position initiale et de la vitesse initiale du pendule. Le mouvement de chaque foyer étant obtenu, on en déduit le mouvement du pendule.

Nous allons examiner explicitement quelques cas particuliers, correspondant à des manières concrètes de lancer le pendule.

18. Le pendule est abandonné sans vitesse initiale. — Imaginons que l'écart initial soit réalisé en exerçant une force Q perpendiculairement à la tige, en un certain point B, défini par $\overline{AB} = b$. La réaction exercée par la lame se compose du couple — N et de la force (— X, — Y). En annulant la somme des projections des forces extérieures sur Oy et leur moment résultant par rapport à B, on obtient, au second ordre près, les valeurs initiales suivantes de θ et de β :

(67) $$\theta_0 = \frac{Q}{mg}\,\frac{b - v_\lambda}{a - a_1}, \qquad \beta_0 = \frac{Q}{mg}\left(\beta_1 - v_\lambda\,\frac{b - v_\lambda}{a - a_1}\right).$$

([1]) En première approximation, bien entendu.

L'amplitude A du mouvement de F est la valeur initiale de l'ordonnée y donnée par (27). En tenant compte de (35) et (36), on trouve

$$A = \frac{Q}{Kmg}\,\overline{F'B}. \tag{68}$$

On voit que *l'amplitude du mouvement de* F *est proportionnelle à la distance* F'B [1].

On a l'amplitude A' du mouvement de F', en remplaçant F' par F et K par K' dans (68). Elle est proportionnelle à la distance FB [2].

En divisant les deux formules membre à membre et tenant compte de (35) et (36), on obtient

$$\frac{A}{A'} = -\frac{\overline{F'B}}{\overline{FB}}\,\frac{(a+z-v_\lambda)^2}{\beta_1(a-a_1)}. \tag{69}$$

Cette formule nous permettra de *comparer les amplitudes* de l'oscillation principale et de la vibration parasite.

La formule (68) nous apprend que, *pour que l'un des foyers ne bouge pas, il faut attaquer le pendule à l'autre foyer.* En particulier, *pour éviter la vibration parasite, il faut attaquer en* F.

19. Le pendule est lancé par un choc. — Supposons que le choc s'exerce au point B précédent. Écrivons la conservation du moment cinétique par rapport à ce point [3] :

$$(\beta'_0 + a\theta'_0)(a-b) + R^2\theta'_0 = 0. \tag{70}$$

On en déduit la *vitesse du foyer* F :

$$v_0 = \theta'_0\, z\, \frac{\overline{BF'}}{\overline{BG}}. \tag{71}$$

La vitesse de F' est donnée par une formule analogue.

---

[1] Remarquer aussi que A a le signe de $\overline{F'B}$. Donc, le point F va du côté de Q ou du côté opposé, suivant que B est au-dessous ou au-dessus de F'.

[2] A' a le signe de $\overline{BF}$. Donc, F' va du côté de Q ou du côté opposé, suivant que B est au-dessus ou au-dessous de F.

[3] La percussion de réaction de la lame doit être considérée comme nulle. La réaction qui s'exerce en A ne dépend, en effet, que de la déformation de la lame et cette déformation est très petite, *si le choc est très sec.* Tout se passe comme si le pendule était libre.

Comme au numéro précédent, on voit que, *pour que l'un des foyers reste au repos, il faut exercer le choc à l'autre foyer.*

Les amplitudes des mouvements vibratoires pris par F et F′ consécutivement au choc sont

(72) $$A = \frac{v_0}{n}, \qquad A' = \frac{v'_0}{n'}.$$

Leur rapport est

(73) $$\frac{A}{A'} = \frac{(a + z - v_\lambda)R}{z'\sqrt{\beta_1(a - a_1)}} \frac{\overline{BF'}}{\overline{BF}}.$$

20. Supposons que le choc soit produit par une *masse m', lancée horizontalement contre la tige, avec la vitesse* V. Soient V′ la vitesse de cette masse après le choc et h le coefficient de restitution, qui est compris entre zéro (choc mou) et *un* (choc élastique). On a

$$-V' + \beta'_0 + b\theta'_0 = hV,$$
$$m(\beta'_0 + a\theta'_0) + m'V' = m'V.$$

En résolvant le système formé par ces équations et l'équation (70), on trouve

(74) $$\theta'_0 = (1 + h)V \frac{b - a}{(a - b)^2 + R^2\left(1 + \dfrac{m}{m'}\right)},$$

(75) $$V' = V \frac{(a - b)^2 + R^2\left(1 - h\dfrac{m}{m'}\right)}{(a - b)^2 + R^2\left(1 + h\dfrac{m}{m'}\right)}.$$

En portant (74) dans (71), il vient

(76) $$v_0 = (1 + h)V \frac{z.\overline{F'B}}{(a - b)^2 + R^2\left(1 + \dfrac{m}{m'}\right)}.$$

On a une formule analogue pour v'_0.

Le coefficient h peut être déterminé expérimentalement au moyen de la formule (75).

21. Forme de la lame. — Son équation approchée se déduit de (13):

(77) $$y = Y(x + v - v_0) + \theta(w - w_0),$$

où l'on remplace s par x.

En remplaçant Y par la valeur (23), on voit que *la forme de la lame dépend uniquement* de β et de θ, c'est-à-dire *de la position de son extrémité* A *et de la tangente en ce point*.

Nous reviendrons sur cette question, avec plus de détails, au Chapitre VI.

22. Fatigue de la lame. — L'effort au cisaillement est pratiquement toujours très faible; nous ne nous en occuperons pas.

L'effort à la traction comprend d'abord la tension T, due au poids du pendule. On a en outre la tension T' provenant de la flexion. Cette tension s'ajoute à T, sur la surface de la lame qui se trouve *du côté de la convexité*. Elle a pour valeur

$$T' = E\frac{e}{2}\frac{d\varphi}{ds},$$

en appelant e l'épaisseur de la lame au point considéré. D'après (14) et (1), on a

$$T' = E\frac{e}{2}\frac{Y v + \theta w}{M} = \frac{mge}{2I}(Y v + \Theta w). \tag{78}$$

On ne peut évidemment étudier la variation de T' le long de la lame que si l'on connaît la forme de celle-ci d'une manière explicite.

23. Souplesse de la suspension. — La souplesse de la suspension est une qualité assez difficile à évaluer mathématiquement. On peut toutefois, avec M. Keelhoff (*loc. cit.*), raisonner comme il suit.

Une suspension peut être considérée comme souple, si elle amortit très peu les oscillations du pendule. D'après M. Le Rolland (*loc. cit.*, p. 113), l'énergie absorbée par les frottements internes à chaque oscillation est proportionnelle à l'énergie de déformation maximum de la lame. D'autre part, cette perte d'énergie ne doit pas être considérée d'une manière absolue, mais comparativement à l'énergie emmagasinée dans le pendule. Ceci nous conduit à mesurer la souplesse de la suspension par le rapport

$$S = \frac{W'}{W},$$

où W' et W désignent respectivement l'énergie du pendule et l'énergie de déformation de la lame.

L'énergie W', pour l'élongation θ, est

$$W' = \frac{mg}{2}\left(a\theta^2 + \int_0^\lambda \varphi^2 ds\right).$$

On a ensuite

$$W = \frac{mg}{2}\int_0^\lambda M\varphi'^2 ds.$$

Nous poserons, d'une manière générale,

$$(79)\qquad \begin{cases} F_n = \displaystyle\int_0^\lambda (K\varphi_1 + \varphi_2)^n ds, \\ G_n = \displaystyle\int_0^\lambda \frac{(Kv + w)^n}{M^{n-1}} ds. \end{cases}$$

Nous avons alors, en supposant qu'il n'y a *pas de vibration parasite*.

$$W' = \frac{mg\theta^2}{2}(a + F_2),$$

$$(80)\qquad W = \frac{mg\theta^2}{2} G_2.$$

D'où

$$S = \frac{a + F_2}{G_2}.$$

On peut écrire, d'autre part, d'après (11) et (9),

$$\begin{aligned} F_2 + G_2 = {} & K^2\int_0^\lambda (1 + 2v' + v'^2 + vv'')\, ds \\ & + 2K\int_0^\lambda (w' + v'w' + vw'')ds + \int_0^\lambda (w'^2 + ww'')ds \\ = {} & K^2(s + 2v + vv')_0^\lambda + 2K(w + vw')_0^\lambda + (ww')_0^\lambda \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (10) et (16),

$$(81)\qquad F_2 + G_2 = K^2\beta_1 + w_\lambda.$$

Donc,

$$(82)\qquad S = \frac{a + w_\lambda + K^2\beta_1}{G_2} - 1.$$

24. Centre de flexion. — On appelle habituellement *centre de flexion* le point *fixe* autour duquel le pendule semble osciller. Si l'on néglige la vibration parasite, *ce point n'est autre que le foyer* F′ (n° **16**). Sa position sur la verticale Ox est déterminée par

$$\overline{OF'} = \lambda + \overline{AF'} = \lambda + a + z'. \tag{83}$$

Il faut bien remarquer que *ce point n'est fixe qu'au second ordre près en* θ. La même propriété appartient d'ailleurs au point de rencontre de Ox avec la tangente en un point quelconque de l'arc OA ([1]).

25. Emplacement optimum de l'axe de la fourchette. — Voici maintenant un autre point de vue. Soient C l'axe de la fourchette et CM $=$ L sa longueur. Cherchons à *rendre minimum le glissement* de M *sur la tige*, c'est-à-dire la variation de $\overline{AM} = r$.

Posons $\overline{OC} = c$. On a

$$L^2 = (\alpha + r\cos\theta - c)^2 + (\beta + r\sin\theta)^2$$

ou

$$r^2 + 2r[(\alpha - c)\cos\theta + \beta\sin\theta] + (\alpha - c)^2 + \beta^2 - L^2 = 0. \tag{84}$$

D'autre part, si l'on suppose qu'il n'y a pas de vibration parasite, on a (64) et

$$\alpha = \lambda - \frac{F^2}{2}\theta^2. \tag{85}$$

La formule (64) est exacte au troisième ordre près en θ et la formule (85) l'est au quatrième ordre près ([2]). Portant dans (84), nous obtenons, *au quatrième ordre près*,

$$r^2 + 2r(\lambda - c) + (\lambda - c)^2 - L^2 = A\theta^2,$$

en posant

$$A = r[\lambda - c + F_2 + 2(a + z')] - (a + z')^2 + (\lambda - c)F_2.$$

([1]) Cela résulte de ce que les différentes positions de la courbe, pendant l'oscillation, se déduisent de la position extrême par simple réduction des ordonnées dans un rapport constant, comme il résulte des équations (77) et (65).

([2]) Remarquer que β est une fonction impaire de θ et α une fonction paire.

On en tire, toujours au quatrième ordre près,

$$r = L + c - \lambda + \frac{A}{2L}\theta^2, \tag{86}$$

en remplaçant, dans A, r par $L + c - \lambda$.

Cette formule nous montre que, *si l'on choisit arbitrairement la position de l'axe de la fourchette, le glissement de celle-ci sur la tige du pendule est du second ordre en* θ (1). Mais, *il peut être abaissé au quatrième ordre, en choisissant convenablement la position de l'axe.* Il suffit, en effet, d'annuler A, ce qui donne, en posant $\lambda - c = x$,

$$(L - x)[x + F_2 + 2(a + z')] - (a + z')^2 + xF_2 = 0. \tag{87}$$

On peut se donner L *a priori* et calculer x par cette équation du second degré; ou bien se donner la position de l'axe, c'est-à-dire x et calculer L. Nous verrons, au n° 77, la formule pratique à employer dans le cas du pendule ordinaire.

CHAPITRE II.

DEUXIÈME APPROXIMATION ET THÉORIE DES PERTURBATIONS.

26. Théorie générale des perturbations. — Supposons le pendule soumis à des *forces perturbatrices quelconques*. Soient $mg\varepsilon_1$, $mg\varepsilon_2$ et $mg\varepsilon_3$ leurs projections sur Ox, Oy et leur moment résultant par rapport à G. Supposons en outre *que la lame soit, elle aussi, soumise à des forces perturbatrices* et appelons $mg\varepsilon_4$ l'accroissement subi, de ce fait, par le moment fléchissant.

Nous admettrons que *toutes ces forces perturbatrices sont très petites* vis-à-vis des forces considérées dans la première approximation et nous nous proposons de calculer leur influence sur la durée de l'oscillation.

---

(1) Le glissement entre la position verticale et la position extrême est $\frac{A}{2L}\theta_0^2$, en appelant θ_0 l'amplitude de l'oscillation.

Les équations (4), (5), (6) doivent être remplacées par les suivantes [1] :

(88) $$1 - X + \varepsilon_1 = 0,$$

(89) $$\beta'' + a\theta'' = g(-Y + \varepsilon_2),$$

(90) $$R^2\theta'' = g(-N + aY - a\theta X + \varepsilon_3).$$

Au premier abord, on peut être tenté de calculer l'accélération perturbatrice $\Delta\theta''$ au moyen de l'équation (90), en évaluant le second membre à partir de la première approximation. Connaissant cette accélération, on en déduit la perturbation de marche par la théorie générale des perturbations. Mais, une objection vient immédiatement à l'esprit. Rien n'empêche de faire le même calcul avec l'équation (89) et l'on n'est pas sûr d'aboutir au même résultat [2].

Le point faible de ce raisonnement est *qu'on ne peut pas calculer les seconds membres de* (89) *et* (90) *à partir de la première approximation.* On ne connaît, en effet, par cette approximation, que la relation (64) entre β et θ. Cette relation comporte une erreur du même ordre que ce que l'on calcule.

J'ai indiqué [3] une méthode générale permettant de trouver la correction à faire subir à l'équation (64). Mais j'ai démontré aussi qu'on pouvait ne pas tenir compte de cette correction, en *calculant l'accélération perturbatrice de la variable canonique.* Cette dernière méthode étant la plus simple, nous allons l'employer ici.

La variable canonique de l'oscillation principale est définie par la formule (27). Son accélération perturbatrice est

$$f = y'' + n^2 y = \beta'' + a\theta'' + z\theta'' + n^2 y$$

ou, d'après (89) et (90),

(91) $$f = g\left(-\Delta Y + \varepsilon_2 + \frac{\Delta N - a\,\Delta Y + a\theta\,\Delta X - \varepsilon_3}{z'}\right),$$

---

[1] Nous négligeons toujours les termes du second ordre en θ. Quand nous voudrons en tenir compte, nous les ferons rentrer dans ε_1, ε_2, ε_3. (*Cf.* n° **29.**)

[2] On obtient effectivement un résultat différent.

[3] *Congrès International des Mathématiciens*, Zürich, 1932 (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LVII, mai 1933).

en appelant ΔX, ΔY, ΔN les corrections qu'il faut ajouter à X, Y, N, quand on évalue ces quantités en fonction de θ, β.

Il convient de remarquer que tous les termes du premier ordre doivent *a priori* disparaître identiquement, si s et n^2 ont les valeurs données au premier chapitre. C'est ce qu'on vérifie sans peine en faisant le calcul.

27. Calcul de ΔX, ΔY, ΔN. — L'équation (88) donne d'abord

$$\Delta X = \varepsilon_1. \tag{92}$$

Revenons maintenant à l'équation (7). Elle s'écrit, en seconde approximation [1],

$$\frac{d}{ds}(M\varphi') = \varphi + \varphi\,\Delta X - Y - \Delta Y + \frac{d\varepsilon_1}{ds}.$$

Appelons x l'accroissement qu'il faut ajouter à φ pour passer de la première à la seconde approximation. On a

$$\frac{d}{ds}(Mx') - x = \varepsilon - \Delta Y, \tag{93}$$

en posant

$$\varepsilon = \varphi\varepsilon_1 + \varepsilon'_1, \qquad \varepsilon'_1 = \frac{d\varepsilon_1}{ds}. \tag{94}$$

Cette quantité ε peut être calculée à partir de la première approximation.

Pour intégrer l'équation (93), posons

$$Mx' = y;$$

d'où

$$x = y' - \varepsilon + \Delta Y, \tag{95}$$

$$My'' - y = M\varepsilon'. \tag{96}$$

L'intégrale générale de cette équation est (n° **12**)

$$y = Av + Bw + Cv + C'w, \tag{97}$$

---

[1] Comme au n° **26**, nous négligeons les termes du troisième ordre en φ. Quand nous voudrons en tenir compte, nous les ferons rentrer dans ε_1. (*Cf.* n° **29**.)

C et C′ désignant les constantes d'intégration et A, B étant définis par les formules

$$(98)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{-1}{w_0}\displaystyle\int_0^s \varepsilon' w\, ds = \varepsilon_0 - \dfrac{\varepsilon w}{w_0} + \dfrac{1}{w_0}\displaystyle\int_0^s \varepsilon\varphi_2\, ds, \\ B = \dfrac{1}{w_0}\displaystyle\int_0^s \varepsilon'\, v\, ds = -\varepsilon_0\dfrac{v_0}{w_0} + \dfrac{\varepsilon v}{w_0} + \dfrac{1}{w_0}\displaystyle\int_0^s \varepsilon(1-\varphi_1)\, ds. \end{cases}$$

Pour $s = 0$ et $s = \lambda$, on doit avoir $x = 0$, donc $y' = \varepsilon - \Delta Y$. On en conclut que

$$(99)\qquad C = \Delta Y - \varepsilon_0,$$

$$(100)\qquad -A_\lambda + B_\lambda - C + C' = \varepsilon_\lambda - \Delta Y.$$

Nous avons maintenant

$$\beta = \int_0^\lambda (\varphi + x)\, ds.$$

Comme la valeur de β est donnée *a priori* (1), son accroissement est nul et l'on a

$$\int_0^\lambda x\, ds = \lambda\,\Delta Y - \int_0^\lambda \varepsilon\, ds + y_\lambda - y_0 = 0$$

ou

$$\lambda\,\Delta Y - \int_0^\lambda \varepsilon\, ds + A_\lambda v_\lambda + B_\lambda w_\lambda + C(v_\lambda - v_0) - C' v_\lambda = 0.$$

En remplaçant w_λ par $w_0 - v_\lambda$ et tenant compte de (99) et (100), le premier membre s'écrit

$$\beta_1\,\Delta Y - \int_0^\lambda s\, ds - v_\lambda\varepsilon_\lambda + v_0\varepsilon_0 + w_0 B_\lambda$$

ou, d'après (98),

$$\beta_1\,\Delta Y - \int_0^\lambda \varepsilon\varphi_1\, ds.$$

On a donc

$$(101)\qquad \beta_1\,\Delta Y = \int_0^\lambda \varepsilon\varphi_1\, ds.$$

L'équation (2) nous donne ensuite, pour $s = \lambda$,

$$M_\lambda x'_\lambda = \Delta N + \varepsilon_{i\lambda};$$

---

(1) Il s'agit, rappelons-le, de calculer X, Y, N en fonction de θ, β.

d'où

$$\Delta N = y_\lambda - \varepsilon_{4\lambda} = v_\lambda(A_\lambda + C) + w_\lambda(B_\lambda + C') - \varepsilon_{4\lambda}$$
$$= w_0(A_\lambda + C) + w_\lambda(\varepsilon_\lambda - \Delta Y) - \varepsilon_{4\lambda}$$

ou

(102) $$\Delta N = \int_0^\lambda \varepsilon\,\varphi_2\,ds + v_\lambda\,\Delta Y - \varepsilon_{4\lambda}.$$

28. Calcul de f. — Portons (102) dans (91) et tenons compte de (35); il vient

$$f = \frac{g}{z'}\left(\varepsilon_2 z' + a\theta\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \int_0^\lambda \varepsilon\varphi_2\,ds - \varepsilon_{4\lambda} + K\beta_1\,\Delta Y\right)$$

ou, d'après (101), (34) et (94),

$$f = -\frac{n^2}{K}\left[\varepsilon_2 z' + a\theta\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \varepsilon_1\int_0^\lambda \varphi(K\varphi_1 + \varphi_2)\,ds + \int_0^\lambda \varepsilon'_4(K\varphi_1 + \varphi_2)\,ds - \varepsilon_{4\lambda}\right].$$

Nous poserons, d'une manière générale,

(103) $$H_n = \int_0^\lambda (Y\varphi_1 + \theta\varphi_2)^n\,ds.$$

Nous avons alors

(104) $$f = -\frac{n^2}{K}\left[\varepsilon_2 z' + a\theta\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(K\frac{\partial H_2}{\partial Y} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta}\right) + \int_0^\lambda \varepsilon'_4(K\varphi_1 + \varphi_2)\,ds - \varepsilon_{4\lambda}\right].$$

En effectuant une intégration par parties et tenant compte de (14) et (10), les deux derniers termes du crochet peuvent, si l'on veut, être remplacés par l'intégrale

(105) $$-\int_0^\lambda \varepsilon_4\frac{Kv + w}{M}\,ds.$$

29. Erreur d'isochronisme. — Supposons que les seules forces extérieures agissant sur le pendule soient les forces de pesanteur. Autrement dit, nous n'avons pas, à proprement parler, de forces perturbatrices. Mais, il nous faut tenir compte des termes négligés, en première approximation, dans les équations (4), (5), (6) et (7). Nous avons ainsi

$$(106)\quad \begin{cases} g\varepsilon_1 = a(\theta\theta'' + \theta'^2) - \alpha'', \\ g\varepsilon_2 = a\left(\theta\theta'^2 + \dfrac{\theta^2\theta''}{2}\right), \\ \varepsilon_3 = a\dfrac{\theta^2}{6}(\theta - 3\mathrm{Y}), \\ \varepsilon'_4 = \dfrac{\varphi^2}{6}(3\mathrm{Y} - \varphi), \qquad \varepsilon_{4\lambda} = 0. \end{cases}$$

En outre, dans le calcul de β fait au n° **27**, nous devons pousser le développement de $\sin\varphi$ jusqu'au troisième ordre, ce qui nous donne le terme supplémentaire $\int_0^\lambda \frac{\varphi^3}{6}\,ds$, à ajouter au second membre de (101). Il en résulte qu'il faut ajouter $\frac{\mathrm{K}}{6}\mathrm{H}_3$ au crochet de (104).

On pourrait tout de suite simplifier les expressions (106), en tenant compte de la première approximation et supposant qu'il n'y a pas de vibration parasite. Mais, à cause du calcul de la répercussion des erreurs d'encastrement, qui sera fait plus loin, nous avons intérêt à ne faire ces simplifications qu'après avoir calculé f par la formule (104).

Nous avons d'abord

$$\alpha = \lambda - \frac{1}{2}\mathrm{H}_2;$$

d'où

$$(107)\qquad -2\alpha'' = \left(\mathrm{Y}''\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \mathrm{Y}} + \theta''\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \theta}\right) + \left(\mathrm{Y}'\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \mathrm{Y}} + \theta'\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \theta}\right)^2.$$

Puis,

$$\frac{\mathrm{K}}{6}\mathrm{H}_3 + \int_0^\lambda \varepsilon'_4(\mathrm{K}\varphi_1 + \varphi_2)\,ds = \frac{1}{24}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Y}} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta}\right),$$

en posant

$$(108)\qquad \mathrm{H} = 4\mathrm{Y}\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_4.$$

Dans ces conditions, on a

$$(109)\quad f = -\frac{n^2}{\mathrm{K}}\left[\frac{a}{2g}(2a + z')\theta^2\theta'' + \frac{a}{g}(a + z')\theta\theta'^2 - \frac{a}{g}\theta\alpha'' + \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \mathrm{Y}} + \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial \theta}\right) + \frac{a\theta^2}{6}(3\mathrm{Y} - \theta) + \frac{1}{24}\left(\mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathrm{Y}} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta}\right)\right].$$

Supposons maintenant que le mouvement se réduise à *l'oscillation* *principale*. On peut d'abord remplacer θ'' par $-n^2\theta$. On a ensuite

$$\alpha'' = -F_2(\theta\theta'' + \theta'^2);$$

d'où

$$g\varepsilon_1 = (a + F_2)(\theta'^2 - n^2\theta^2).$$

Puis, en appliquant l'identité d'Euler,

$$K\frac{\partial H_2}{\partial Y} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta} = 2\theta F_2, \qquad K\frac{\partial H}{\partial Y} + \frac{\partial H}{\partial \theta} = 4\theta^3 F,$$

en posant

(110) $$F = H(K, 1) = 4KF_3 - F_4.$$

On voit dès lors que f se présente sous la forme

$$f = An^2\theta^3 + B\theta\theta'^2.$$

On a, d'autre part, en première approximation,

$$y = (z - z')\theta,$$

de sorte que la perturbation de θ'' est $\frac{f}{z - z'}$. On en déduit

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\theta_0^2}{8(z - z')}(3A + B).$$

Cette formule nous montre qu'on peut, sans changer ΔT, remplacer θ'^2 par $\frac{n^2\theta^2}{3}$. Nous obtenons alors

(111) $$\frac{\Delta T}{T} = \frac{Q'}{Q}\frac{\theta_0^2}{16},$$

Q étant donné par la formule (45) et $Q' = 6AK$ par la suivante

(112) $$Q' = a(1 - 4K) - \frac{4K}{z'}(a + F_2)^2 - F.$$

30. Remarque importante sur le calcul d'une perturbation quelconque. — Quand aucune perturbation proprement dite ne s'exerce sur le pendule et qu'il est soumis à son oscillation principale, on a

(113) $$\theta = \theta_1(1 + \varepsilon), \qquad \theta_1 = \theta_0\cos\varphi, \qquad \varphi = nt;$$

ε désignant une fonction de t, infiniment petite du second ordre par rapport à θ_0.

Supposons maintenant que s'exerce une perturbation infiniment petite, dont l'accélération perturbatrice soit développable en série entière suivant les puissances de θ et θ' :

$$\Delta\theta'' = F = A\,\theta^p \theta'^q (1+\alpha),$$

α représentant une série entière sans terme constant et dont les coefficients sont finis. La perturbation de la période est donnée par la formule classique

$$(114) \qquad \Delta T = \frac{1}{n^3\theta_0}\int_0^{2\pi} F \cos\varphi \, d\varphi,$$

où θ doit être remplacé par (113). On obtient ainsi

$$(115) \qquad \Delta T = \frac{1}{n^3\theta_0}\int_0^{2\pi} A\,\theta_1^p \theta_1'^q (1+\beta+\alpha)\cos\varphi \, d\varphi,$$

avec

$$\beta = (1+\varepsilon)^p (1+\varepsilon')^q - 1 = p\varepsilon + q\varepsilon' + \ldots.$$

Pratiquement, on remplace θ par θ_1 dans (114), ce qui revient à négliger β dans (115). Si p et q ne sont pas tous deux nuls, β est du second ordre en θ_0 ; il est donc *complètement illusoire de garder, dans* α, *d'autres termes que ceux du premier ordre*. Autrement dit, *on ne doit conserver, dans* F, *que le premier terme non nul et non constant et les termes de dégré immédiatement supérieur*.

En conséquence, *on ne peut obtenir le développement de* ΔT *suivant les puissances de* θ_0, *comme on le fait quand le mouvement non perturbé est rigoureusement sinusoïdal* (¹). On calculerait en effet des termes du même ordre que des termes que l'on néglige implicitement, en remplaçant β par zéro.

Si p est pair et q impair, les termes calculables sont tous nuls ; on ne peut même pas évaluer la partie principale de ΔT. Dans les autres cas, un seul des termes calculables est différent de zéro ; il donne *la partie principale de* ΔT.

(¹) On pourrait l'obtenir, à la rigueur, en évaluant ε par approximations successives et remplaçant β par la valeur résultante dans la formule (115). Mais ce serait compliqué.

Une conséquence de cette remarque est que *l'erreur d'isochronisme ne peut être calculée avec plus de précision* qu'au numéro précédent (1).

31. Influence des erreurs d'encastrement. — Supposons que *la tangente* Ox *ne coïncide pas exactement avec la verticale* OV et posons

$$i = \widehat{OV, Ox}.$$

Supposons également *que le centre de gravité* G *ne soit pas exactement sur la tangente* AT et posons

$$i' = \widehat{AT, AG}.$$

Avec les notations du n° **26**, nous avons, en posant toujours $AG = a$ et négligeant i^3 et i'^3,

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{i^2}{2} + \frac{a}{g} i'(\theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta) - \frac{a}{2g} i'^2(\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta), \\ \varepsilon_2 &= -\; i + \frac{a}{g} i'(\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta) + \frac{a}{2g} i'^2(\theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta), \\ \varepsilon_3 &= - a i'(X\cos\theta + Y\sin\theta) + \frac{a}{2} i'^2(X\sin\theta - Y\cos\theta). \end{aligned}\right.$$

Si l'on porte dans (104), on voit que les termes du premier ordre en i et i' sont des fonctions paires de θ, θ'. Donc, la perturbation de marche est nulle. Autrement dit, *l'influence des erreurs d'encastrement sur la durée d'oscillation est du second ordre par rapport à ces erreurs.*

Pour la calculer, il nous faut *pousser plus loin l'approximation.* C'est ce que nous allons faire, en nous bornant à la *partie principale*, conformément à la remarque du numéro précédent.

---

(1) De même, la formule générale (114) ne peut donner que le terme $\frac{\theta_0^2}{16}$ du développement bien connu de la période du pendule simple. On prend alors

$$F = n^2(\theta - \sin\theta) = n^2 \frac{\theta^3}{6}.$$

Les termes négligés dans le développement de $\sin\theta$ conduiraient à des termes en θ_0 qui seraient totalement faux.

32. Position d'équilibre en première approximation. — Nous devons remarquer, en premier lieu, que la position d'équilibre n'est plus obtenue pour $\beta = \theta = 0$. Elle est donnée par les équations suivantes :

$$X = 1, \qquad Y = -i, \qquad N = a(Y - X\theta - i'X) = -a(\theta + i + i').$$

En portant dans (23) et (24), on obtient un système linéaire en β et θ, d'où l'on tire, en posant $\theta = j$ et $\beta = h$,

$$(117) \qquad j = -\frac{(a - \nu\lambda)i + ai'}{a - a_1}, \qquad h = -\beta_1 i - \nu\lambda j.$$

L'angle que fait le pendule avec la verticale, dans sa position d'équilibre, est

$$(118) \qquad j' = i + j = \frac{w_0 i - ai'}{a - a_1}.$$

33. Changement de variables. — Aux variables θ et β, nous allons substituer les variables θ_1 et β_1 définies par les formules

$$(119) \qquad \theta = j + \theta_1, \qquad \beta = h + \beta_1,$$

de sorte que la position d'équilibre sera maintenant donnée par $\theta_1 = \beta_1 = 0$.

Si l'on effectue ce changement de variables dans les équations (89) et (90) et si l'on s'en tient aux termes du premier degré en θ_1, β_1, on retombe nécessairement sur les équations (25) et (26), où θ et β sont remplacés par θ_1 et β_1. Si l'on suppose que l'oscillation principale existe seule, on a

$$(120) \qquad \theta''_1 = -n^2\theta_1,$$

$$(121) \qquad \beta_1 = -(a + z')\theta_1.$$

De plus [1],

$$(122) \qquad Y = K\theta_1 - i.$$

34. Calcul de la seconde approximation. — Quand on passe à la seconde approximation, les effets des diverses perturbations ne

[1] Pour $\theta_1 = 0$, Y doit se réduire à $-i$. On peut d'ailleurs vérifier directement la formule (122), en substituant (119) dans (23) et tenant compte de (117).

s'ajoutent pas algébriquement, car elles n'entrent plus linéairement dans les équations. *Chaque perturbation se répercute sur les autres* et *il faut les envisager toutes simultanément* [1].

Calculons d'abord l'accélération perturbatrice f provenant *uniquement des erreurs d'encastrement*. En portant (116) dans (104), nous obtenons une fonction impaire en i, j, θ_1 et paire en θ'_1. Les termes linéaires en i, j sont pairs en θ_1 ou θ'_1. Ils donnent un $\frac{\Delta T}{T}$ qui est le produit de θ_0^2 par une forme quadratique en i, j. Les termes du second degré en i, j sont linéaires en θ_1. Ils donnent un $\frac{\Delta T}{T}$ qui est une forme quadratique en i, j, indépendante de θ_0. D'après la remarque du n° **30**, il serait donc illusoire de calculer l'effet des termes linéaires. Autrement dit, *nous devons réduire f à ses termes quadratiques en i, j.* Nous obtenons ainsi

$$(123)\qquad \theta\varepsilon_1 = \theta_1\left(\frac{Ka}{z'}i'j - \frac{i^2}{2}\right), \qquad \varepsilon_2 = \frac{Ka}{2z'}i'(i'+2j)\theta_1.$$

Puis,

$$(124)\qquad \varepsilon_3 = \frac{a\theta_1}{2}[(1-K)(i'^2+2i'j)+2ii'] - ai'\Delta X.$$

D'après (92), nous devons remplacer ΔX par ε_1, en ne gardant que les termes linéaires en i, j, soit

$$(125)\qquad \Delta X = \frac{Ka}{z'}i'\theta_1.$$

Nous avons ensuite

$$(126)\qquad \frac{1}{2}\left(K\frac{\partial H_2}{\partial Y} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta}\right) = \theta_1 F_2 + h,$$

en posant

$$(127)\qquad h = \frac{1}{2}\left(K\frac{\partial H_2}{\partial Y} + \frac{\partial H_2}{\partial \theta}\right)_{Y=-i,\theta=j}.$$

En multipliant (126) par ε_1 et ne gardant que les termes quadratiques, nous obtenons

$$(128)\qquad \theta_1\left(-\frac{i^2}{2}F_2 + \frac{Ka}{z'}i'h\right).$$

[1] C'est pour la même raison qu'on ne peut calculer séparément les perturbations dues à i et à i'.

Finalement,

$$(129) \qquad f=\frac{n^2}{2\mathrm{K}}\Big[a(i+i')^2+2ai'j-a\mathrm{K}i'(i'+2j) - \frac{2a\mathrm{K}}{z'}i'(ai'+aj+h)+i^2\mathrm{F}_2\Big].$$

35. Voyons maintenant quelle est la *répercussion mutuelle de l'erreur d'encastrement et de l'erreur d'isochronisme.*

La répercussion de la seconde sur la première consiste uniquement en ce que $\Delta\mathrm{X}$ doit être augmenté de la quantité ε_1 donnée par la première formule (106), cette quantité devant d'ailleurs être réduite à ses termes linéaires en i, j.

D'après (107) et (127), nous avons

$$(130) \qquad \alpha''=n^2\theta_1 h.$$

D'où

$$\varepsilon_1=\frac{\mathrm{K}}{z'}(aj+h)\theta_1.$$

Donc, $-\frac{\mathrm{K}f}{n^2}$ doit être augmenté de

$$(131) \qquad \frac{\mathrm{K}a}{z'}i'(aj+h)\theta_1.$$

Voyons maintenant quelle est la répercussion de l'erreur d'encastrement sur l'erreur d'isochronisme. Nous devons remplacer Y par $\mathrm{K}\theta_1-i$ et θ par θ_1+j dans (109) et ne garder que les termes du second degré en i, j. Les cinq premiers termes du crochet donnent, en tenant compte de (130) et (126),

$$\frac{\mathrm{K}\theta_1}{z'}\Big[(aj+h)^2+\frac{az'}{2}j^2\Big]+\frac{a\theta_1}{2}(\mathrm{K}j^2-j^2-2ij).$$

Le dernier terme se réduit à $\frac{h'}{24}\theta_1$, en posant

$$(132) \qquad h'=\Big[\mathrm{K}^2\frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial\mathrm{Y}^2}+2\mathrm{K}\frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial\mathrm{Y}\,\partial\theta}+\frac{\partial^2\mathrm{H}}{\partial\theta^2}\Big]_{\mathrm{Y}=-i,\theta=j}.$$

Finalement, la répercussion mutuelle des deux perturbations se traduit par une augmentation de f égale à

$$\Delta f=\frac{n^2}{2\mathrm{K}}\theta_1\Big[a(j^2+2ij-2\mathrm{K}j^2)+\frac{2\mathrm{K}}{z'}(aj+h)(ai'-aj-h)-\frac{h'}{12}\Big].$$

En ajoutant ceci à (129), nous obtenons *l'accélération perturbatrice totale provenant de l'erreur d'encastrement et de sa répercussion mutuelle avec l'erreur d'isochronisme*,

$$f = \frac{2Q_1}{K} n^2 \theta_1,$$

en posant

$$(133) \quad Q_1 = \frac{\dot{a}}{4}(i+i'+j)^2 - \frac{aK}{2}(i'+j)^2 - \frac{K}{2z'}(ai'+aj+h)^2 + \frac{i^2}{4}F_2 - \frac{h'}{48}.$$

D'où résulte la perturbation de marche

$$(134) \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{Q_1}{Q},$$

Q étant toujours donné par (45).

36. Influence de l'inertie de la lame. — Il faut appliquer la formule (104), en ne tenant compte que des termes en ε_4. On a donc, en utilisant la formule (105),

$$f = \frac{n^2}{K}\int_0^\lambda \varepsilon_4 \frac{K v + w}{M} ds.$$

Appelons μ la densité linéaire de la lame au point d'abscisse curviligne s. On a (n° **26**)

$$mg\varepsilon_4 = -\int_0^\lambda \mu' \frac{d^2y'}{dt^2}(s'-s)\,ds'.$$

Or, on a, en première approximation,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -n^2\theta\int_0^{s'}(K\varphi_1'' + \varphi_2'')\,ds''.$$

Donc,

$$s_4 = -\frac{K}{mz'}\theta\iint \mu'(K\varphi_1'' + \varphi_2'')(s'-s)\,ds'\,ds'' \qquad (0 < s'' < s',\ s < s' < \lambda).$$

D'où

$$f = -\frac{n^2}{mz'}\theta\iiint \frac{Kv + w}{M}\mu'(K\varphi_1'' + \varphi_2'')(s'-s)\,ds\,ds'\,ds''$$
$$(0 < s'' < s',\ 0 < s < s' < \lambda).$$

Or, on a

$$\int_0^{s'} \frac{K v + w}{M}(s' - s)\, ds = \int_0^{s'} (s' - s)\, d(K\varphi_1 + \varphi_2) = \int_0^{s'} (K\varphi_1 + \varphi_2)\, ds.$$

L'intégrale triple peut donc s'écrire

$$\iiint \mu'(K\varphi_1 + \varphi_2)(K\varphi_1'' + \varphi_2'')\, ds\, ds'\, ds''$$

ou

$$\int_0^{\lambda} \mu y^2\, ds,$$

en appelant y l'ordonnée du point d'abscisse curviligne s, pour $\theta = 1$. Cette intégrale définie n'est autre que le *moment d'inertie* I_λ *de la lame par rapport à* Ox, *lorsque l'élongation du pendule vaut un radian* (1). On a dès lors

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{I_\lambda}{2mz'(z - z')} = -\frac{KI_\lambda}{2mQz'}. \tag{135}$$

On a toujours un *retard*, conformément au bon sens.

37. Influence du poids de la lame. — On a

$$m\varepsilon_4 = -\int_s^{\lambda} \mu'(y' - y)\, ds' = -\iint \mu' \varphi''\, ds'\, ds'' \qquad (s < s'' < s' < \lambda).$$

D'où

$$f = -\frac{n^2}{Km}\iiint \mu' \varphi'' \frac{K v + w}{M}\, ds\, ds'\, ds'' \qquad (0 < s < s'' < s' < \lambda).$$

Or,

$$\int_0^{s''} \frac{K v + w}{M}\, ds = K\varphi_1'' + \varphi_2'' = \frac{\varphi''}{\theta}.$$

Puis,

$$\int_0^{s'} \varphi''^2\, ds'' = 2(s' - x').$$

Posons

$$J = \frac{1}{m'}\int_0^{\lambda} \mu(s - x)\, ds,$$

(1) Cette élongation est purement théorique, parce que trop grande. Il est plus correct de dire que I_λ est le quotient par θ^2 du moment d'inertie de la lame pour une élongation θ très petite.

cette intégrale étant calculée pour $\theta = 1$. Nous avons

$$f = -\frac{2m'J}{Km}n^2\theta.$$

D'où

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{m}\frac{J}{Q}. \tag{136}$$

On a une *avance*, conformément au bon sens.

38. Influence d'une correction de la loi de la flexion plane. — La théorie de la flexion plane est, comme on sait, une théorie approchée. Elle repose, d'autre part, sur la loi de Hooke, qui, elle aussi, n'est qu'approximativement exacte. M. Le Rolland (*loc. cit.*, p. 140) a émis l'hypothèse que le moment fléchissant est en réalité de la forme

$$\mathrm{EI}c\left(1 + \sum_{q=1}^{\infty} a_q c^q\right), \qquad c = \frac{1}{\rho}; \tag{137}$$

les termes correctifs $a_q c^q$ étant très petits vis-à-vis de l'unité (¹).

Par raison de symétrie, le moment fléchissant est une *fonction impaire de la courbure c*. On en conclut que *les termes correctifs de rang impair doivent être nuls*, *à moins d'admettre qu'on doive y prendre c en valeur absolue*. C'est cette dernière hypothèse que M. Le Rolland semble avoir faite implicitement.

L'influence du terme correctif $a_q c^q$ snr la durée d'oscillation peut être calculée par notre théorie générale. On a, pour ce terme,

$$\varepsilon_4 = -\mathrm{M}a_q\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^{q+1}.$$

On en déduit, par la formule (104), l'accélération perturbatrice

$$f_q = -\frac{n^2}{K}\theta^{q+1}g_{q+1}(a_q), \tag{138}$$

en posant

$$g_q(x) = \int_0^{\lambda}\frac{(\mathrm{K}v + w)^{q+1}}{\mathrm{M}^q}x\,ds \tag{139}$$

(¹) Le coefficient a_p est la puissance p^e d'une longueur. Cette longueur doit donc être très petite par rapport au rayon de courbure ρ.

ou, si l'on suppose x constant

(140) $$g_q = x G_{q+1},$$

d'après (79).

La formule (138) montre immédiatement que *les termes correctifs de rang impair n'influent pas sur la durée d'oscillation, si on les considère en valeur algébrique. Ils donnent au contraire une perturbation si on les considère en valeur absolue* [1].

Si l'on admet ce dernier point de vue, on a

(141) $$\frac{\Delta_q T}{T} = -\frac{i_{q+2}\, g_{q+1}(a_q)}{Q}\,\theta_0^q,$$

en posant

$$i_q = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^q \varphi \, d\varphi,$$

c'est-à-dire

(142) $$i_q = \frac{1.3.5\ldots(q-1)}{2.4.6\ldots q}, \qquad \text{si } q \text{ est } pair;$$

(143) $$i_q = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6\ldots(q-1)}{3.5.7\ldots q}, \qquad \text{si } q \text{ est } impair.$$

En principe, ces formules permettent de calculer les perturbations de marche dues aux différents termes de la formule (137). Mais, il ne faut pas oublier la remarque du n° **30**, en vertu de laquelle *le calcul devient pratiquement illusoire à partir du troisième terme* [2].

39. Considérons le *cas particulier* $q = 0$ et a_0 constant. Il revient à

---

[1] M. Le Rolland (*loc. cit.*, p. 213) conduit son calcul de ΔT de manière à obtenir une perturbation non nulle. Il donne comme raison que les termes correctifs ajoutés au moment fléchissant *ne dépendent pas de la vitesse*. Cette raison n'a rien à voir avec son calcul. Quand le signe du couple perturbateur dépend du signe de la vitesse, il faut calculer ΔT sur une demi-période et ensuite multiplier par 2. Or, M. Le Rolland opère sur un quart de période et multiplie par 4. Ceci provient du fait qu'il veut, en réalité, éviter le changement de signe des termes correctifs de rang impair au moment où le pendule passe à la verticale.

[2] A moins que les coefficients g_q n'augmentent rapidement avec q.

augmenter le module de Young de la quantité ΔE donnée par

$$\frac{\Delta E}{E} = a_0.$$

La formule (141) devient

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{G_2}{2Q}\frac{\Delta E}{E}.$$

Elle doit être identique à ce que donne la formule (60), quand on y remplace α et α' par zéro et β par $\frac{\Delta E}{E}$. C'est bien ce qui a lieu.

40. Influence du frottement interne de la lame. — Prenons la lame dans une position déterminée, correspondant à une *élongation positive* θ du pendule. Supposons que ce dernier se déplace avec la vitesse positive θ'. La courbure c de la lame augmente en valeur absolue; *on s'éloigne de l'état naturel.* Nous conviendrons d'appeler *frottement sortant* le frottement interne qui résulte d'un tel mouvement et nous émettrons l'hypothèse que ce frottement se traduit par une *diminution du moment fléchissant*, qui est une fonction de c et de la dérivée $c' = \frac{dc}{dt}$ et que nous représenterons par

$$M(\Sigma\Sigma a_{pq} c^p c'^q), \tag{144}$$

les coefficients a_{pq} étant inconnus.

Supposons maintenant que, la lame étant *dans la même position*, le mouvement ait lieu dans le sens négatif. La courbure c diminue; *on se rapproche de l'état naturel.* Nous conviendrons d'appeler *frottement rentrant* le frottement interne qui résulte de ce mouvement et nous admettrons encore qu'il se traduit par une *diminution de la valeur absolue du moment fléchissant*, que nous représenterons par

$$M(\Sigma\Sigma b_{pq} c^p c'^q), \tag{145}$$

la dérivée c' étant prise en valeur absolue.

Rien ne dit *a priori* que les coefficients b_{pq} soient égaux aux coefficients a_{pq}.

Prenons maintenant la lame dans une *position symétrique* de la précédente par rapport à la tangente d'encastrement Ox. S'il existait une entière symétrie par rapport à cette tangente pour les propriétés élastiques de la lame, on aurait le même frottement sortant et le même frottement rentrant que précédemment. Mais, dans la pratique, *cette symétrie n'existe pas*, ainsi que l'a constaté expérimentalement M. Holweck. Dès lors, nous appellerons a'_{pq} et b'_{pq} les coefficients du frottement sortant et du frottement rentrant pour les positions de la lame correspondant à une élongation négative.

41. Cela posé, supposons, par exemple, θ et θ' positifs. Nous avons, avec les notations du n° **26**,

$$\varepsilon_4 = - a_{pq} \frac{(\mathrm{K}v + w)^{p+q}}{\mathrm{M}^{p+q-1}} \theta^p \theta'^q.$$

D'où, par la formule (104) et avec la notation (139),

$$f = -\frac{n^2}{\mathrm{K}} g_{p+q}(a_{pq}) \theta^p \theta'^q. \tag{146}$$

Pour $\theta > 0$ et $\theta' < 0$, on a une formule analogue, en remplaçant a_{pq} par $-b_{pq}$ et θ' par $-\theta'$. Pour $\theta < 0$ et $\theta' < 0$, on remplace a_{pq} par $-a'_{pq}$, θ par $-\theta$, θ' par $-\theta'$. Enfin, pour $\theta < 0$ et $\theta' > 0$, on remplace a_{pq} par b'_{pq} et θ par $-\theta$.

La variation de période est donnée par la formule

$$\frac{\Delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} = \frac{n^q}{4\mathrm{Q}} g_{p+q}(b_{pq} + b'_{pq} - a_{pq} - a'_{pq}) i_{p+1,q} \theta_0^{p+q-1}, \tag{147}$$

en posant

$$i_{mn} = i_{nm} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi \sin^n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)},$$

soit [1]

$$\left\{\begin{aligned} i_{mn} &= \frac{1.3.5\ldots(m-1).1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots(m+n)}, && m, n \text{ pairs}, \\ i_{mn} &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2.4.6\ldots(m-1).2.4.6\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots(m+n)}, && m, n \text{ impairs}, \\ i_{mn} &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1.3.5\ldots(m-1).2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(m+n)}, && m \text{ pair}, n \text{ impair}. \end{aligned}\right. \tag{148}$$

---

[1] Si le dernier facteur d'une des factorielles est égal à zéro ou à -1, remplacer cette factorielle par 1.

Remarque. — L'hypothèse du n° **38** peut se ramener à celle du n° **40**. D'abord, nous devons faire $q = 0$ dans (144), y remplacer p par $q+1$ et a_{pq} par a_q. En outre, la correction du n° **38** est indépendante des signes de θ et θ'; de sorte que, dans la formule (147), il faut également remplacer a'_{pq}, $-b_{pq}$ et $-b'_{pq}$ par a_q. On constate alors que la formule (147) devient identique à (141).

42. Calcul de l'amortissement. — L'accroissement algébrique d'amplitude pendant une période est

$$\Delta\theta_0 = \frac{1}{n^2(z-z')\theta_0}\int f\, d\theta,$$

soit

$$\Delta\theta_0 = -\frac{\pi}{2}\frac{n^q}{Q}g_{p+q}(a_{pq}+b_{pq}+a'_{pq}+b'_{pq})\,i_{p,q+1}\,\theta_0^{p+q}. \tag{149}$$

43. Détermination expérimentale du frottement interne. — L'étude expérimentale de la durée d'oscillation en fonction de l'amplitude permet, en principe (¹), de déterminer les quantités

$$g_{p+q}(b_{pq}+b'_{pq}-a_{pq}-a'_{pq}) \qquad \text{et} \qquad g_{p+q}(b_{pq}+b'_{pq}+a_{pq}+a'_{pq}).$$

Si l'on suppose les coefficients tels que a_{pq} constants, on en déduit

$$\alpha_{pq} = b_{pq}+b'_{pq}-a_{pq}-a'_{pq} \qquad \text{et} \qquad \beta_{pq} = b_{pq}+b'_{pq}+a_{pq}+a'_{pq};$$

d'où les quantités

$$\frac{1}{2}(a_{pq}+a'_{pq}) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2}(b_{pq}+b'_{pq}),$$

c'est-à-dire les *valeurs moyennes du frottement sortant et du frottement rentrant pour des positions symétriques de la lame*. Mais, *il est impossible de déceler une dissymétrie* par de telles expériences (*cf.* n° **46**).

Rappelons aussi qu'il ne faut pas perdre de vue la remarque du n° **30**, de sorte qu'on ne peut guère tenir compte, dans (144) et (145), des termes dont le degré en c, c' surpasse de plus d'une unité le degré du premier terme non nul et non constant (²). Si ce premier terme

---

(¹) J. Haag, *Sur la détermination expérimentale du couple d'amortissement d'un oscillateur* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **194**, p. 838, 7 mars 1932).

(²) A moins de supposer que les coefficients $g_{p+q}(a_{pq})$ n'augmentent rapidement avec $p+q$.

est d'ordre p, on obtient des formules de la forme

$$(150)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{a}{\theta_0} + b\theta_0^{p-1} + c\theta_0^p + \ldots, \\ \Delta\theta_0 = a' + b'\theta_0^p + c'\theta_0^{p+1} + \ldots. \end{cases}$$

D'après les expériences de M. Le Rolland, la perturbation de marche serait de la forme

$$\frac{\Delta T}{T} = a\theta_0 + b\theta_0^2 + c\theta_0^3.$$

Ceci prouverait d'abord que $\alpha_{00} = 0$, c'est-à-dire que

$$a_{00} + a'_{00} = b_{00} + b'_{00}.$$

Il faudrait ensuite supposer (¹) $p = 2$ dans les formules (150) et pousser le développement jusqu'au terme en θ_0^3. Mais, on tombe alors sous le coup de la remarque du nº **30**. De plus, pour calculer les divers coefficients $\alpha_{20}, \alpha_{11}, \ldots, \alpha_{04}$, il faudrait faire plusieurs séries d'expériences, en faisant varier n, c'est-à-dire la période, ceci sans changer la lame, ni le poids du pendule.

Le problème paraît être extrêmement compliqué.

44. Influence d'une dissymétrie de la lame. — Supposons que le module de Young ne soit pas le même, suivant que la lame fléchit d'un côté ou de l'autre de sa position naturelle. Appelons $\Delta E = \varepsilon E$ l'*excédent du module à droite sur le module à gauche*, en convenant que l'axe Oy est dirigé vers la droite. Rien n'empêche, bien entendu, d'admettre que ε est fonction de s.

Nous supposerons, en second lieu, qu'il y a des *erreurs d'encastrement*, définies comme au nº **31**. Nous avons, avec les notations du nº **26**,

$$\varepsilon_4 = -\varepsilon M \frac{d\varphi}{ds}, \qquad \text{pour } \theta > 0;$$

$$\varepsilon_4 = 0, \qquad \text{pour } \theta < 0.$$

(¹) Ceci ne prouve pas que les termes linéaires n'existent pas dans le frottement interne; ces termes donnent une perturbation de marche constante, qui ne peut être mise en évidence en faisant varier θ_0.

Dans la première de ces deux formules, nous devons remplacer $\frac{d\varphi}{ds}$ par son expression générale (14), puis Y et θ par les formules (119) et (122). Nous obtenons ainsi

$$\varepsilon_4 = -\varepsilon[\theta_1(Kv + w) + wj - vi].$$

D'où, par la formule (104) et en reprenant la notation (139),

$$f = -\frac{n^2}{K}[\theta_1 g_1(\varepsilon) - Ai + Bj]. \tag{151}$$

Nous avons posé ici

$$A = \int_0^\lambda \frac{v(Kv + w)}{M}\varepsilon\, ds, \qquad B = \int_0^\lambda \frac{w(Kv + w)}{M}\varepsilon\, ds. \tag{152}$$

Si l'on connaît déjà $g_1(\varepsilon)$ en fonction de K, ces coefficients A et B sont les demi-dérivées de g_1 par rapport à K et par rapport à la variable d'homogénéité. Leur calcul ne nécessite donc aucune nouvelle intégration.

Appelons maintenant φ_1 l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, défini par l'équation

$$\theta_0 \sin\varphi_1 = -j. \tag{153}$$

Nous avons

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi Q\theta_0}\int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1}[g_1(\varepsilon)\theta_0 \sin\varphi - Ai + Bj]\sin\varphi\, d\varphi,$$

ou

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{g_1}{4Q} + \frac{1}{4\pi Q}\left[g_1(2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) + 4\frac{A_i - B_j}{\theta_0}\cos\varphi_1\right]. \tag{154}$$

A cette quantité, il faut, bien entendu, ajouter la perturbation (134), qui n'est d'ailleurs pas modifiée par la dissymétrie de la lame [1].

45. Supposons le *pendule entièrement symétrique*, de sorte que $i' = 0$. La perturbation (134) se présente sous la forme $\frac{Cj^2}{Q}$, C désignant un

---

[1] Cette dissymétrie ne concerne que ε_4 et n'influe pas sur ΔX (n° **34**).

coefficient constant, que nous savons calculer. D'autre part, on a, d'après (117),

$$i = -j\frac{a + w_\lambda}{a - v_\lambda}.$$

On a également l'identité évidente

$$AK + B = g_1.$$

Dès lors, la perturbation globale est proportionnelle à la fonction suivante :

$$(155)\quad P = 2C\theta_0^2 - g_1 + 2\varphi_1\frac{g_1}{\pi} + \frac{\sin 2\varphi_1}{\pi}\left(g_1 + \frac{2AKz}{a - v_\lambda}\right) - 2C\theta_0^2\cos 2\varphi_1.$$

Cette fonction n'est pas paire par rapport à j. Donc, *la durée d'oscillation n'est pas la même pour des positions d'équilibre du pendule symétrique par rapport à la verticale.*

Nous reviendrons sur cette question à propos du pendule de gravité (nº **98**).

46. On peut étudier de la même manière l'*influence simultanée du frottement interne et des erreurs d'encastrement*. On constate que la durée d'oscillation est symétrique par rapport à la verticale dans les deux cas suivants :

Premier cas. — *La différence entre le frottement rentrant et le frottement sortant est la même à droite qu'à gauche.*

Deuxième cas. — *Le frottement est indépendant de la courbure.*

Mais, étant donnée la petitesse des frottements internes, il est probable que la dissymétrie qui existe, quand on ne se trouve dans aucun de ces cas, est toujours très faible. Il en va de même pour les dissymétries qui pourraient résulter du fait que les coefficients a_q du nº **38** n'ont pas la même valeur à droite et à gauche.

CHAPITRE III.

CAS DE LA LAME UNIFORME.

47. Calcul des fonctions v, w, φ_1, φ_2. — Le rapport M est constant et positif [1]. Posons

(156) $$\omega^2 = \frac{1}{M} = \frac{12\,mg}{Ee^3h}, \qquad u = \lambda\omega = \frac{2\lambda}{e}\sqrt{\frac{3\,mg}{Eeh}}.$$

On a

(157) $$v = \lambda\,\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2} - \omega s\right)}{u\operatorname{ch}\frac{u}{2}}, \qquad w = \lambda\,\frac{\operatorname{ch}\omega s}{u\operatorname{sh}u};$$

(158) $$\varphi_1 = 1 - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{u}{2} - \omega s\right)}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}, \qquad \varphi_2 = \frac{\operatorname{sh}\omega s}{\operatorname{sh}u}.$$

D'où

(159) $$\left\{\begin{aligned} & v_0 = -v_\lambda = \lambda\frac{U}{u}, \qquad w_0 = \frac{\lambda}{u}U_1, \qquad w_\lambda = \frac{\lambda}{u}U_2; \\ & \beta_1 = \lambda\left(1 - 2\frac{U}{u}\right), \qquad \beta_2 = \lambda\frac{U}{u}; \end{aligned}\right.$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

(160) $$U = \operatorname{th}\frac{u}{2}, \qquad U_1 = \frac{1}{\operatorname{sh}u}, \qquad U_2 = \frac{1}{\operatorname{th}u}.$$

Signalons les identités suivantes vérifiées par ces fonctions :

(161) $$\left\{\begin{aligned} & U_2 = U + U_1, \\ & 1 - U^2 = 2UU_1, \\ & U_2^2 - U_1^2 = 1. \end{aligned}\right.$$

48. Calcul des intégrales G_n. — La fonction $x = Kv + w$ satisfait

[1] En supposant $g > 0$, c'est-à-dire que la lame est dirigée vers le bas. (*Cf.* n° **101**).

à l'équation (9) et à la suivante, qui en résulte,

(162) $$\mathrm{M}x'^2 = x^2 + \mathrm{M}x_0'^2 - x_0^2 = x^2 + \mathrm{MK}^2 - x_0^2.$$

On a dès lors

$$\mathrm{G}_n = \int_0^\lambda \frac{x^{n-1}}{\mathrm{M}^{n-2}} x''\, ds = \left[\frac{x^{n-1}x'}{\mathrm{M}^{n-2}}\right]_0^\lambda - (n-1)\int_0^\lambda \frac{x^{n-2}x'^2}{\mathrm{M}^{n-2}}\, ds,$$

ou, d'après (162),

$$n\mathrm{G}_n = (n-1)\frac{x_0^2 - \mathrm{MK}^2}{\mathrm{M}^2}\mathrm{G}_{n-2} + \frac{(1-\mathrm{K})x_\lambda^{n-1} + \mathrm{K}x_0^{n-1}}{\mathrm{M}^{n-2}}.$$

Posons

(163) $$\mathrm{G}_n = \lambda\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n-2}\Gamma_n;$$

la relation précédente devient

(164) $$n\Gamma_n = (n-1)\mathrm{U}_1(\mathrm{U}_1 + 2k\mathrm{U})\Gamma_{n-2} + \frac{\mathrm{K}(\mathrm{U}_1 + \mathrm{KU})^{n-1} + (1-\mathrm{K})[\mathrm{U}_1 + (1-\mathrm{K})\mathrm{U}]^{n-1}}{u},$$

en posant

(165) $$k = \mathrm{K}(1-\mathrm{K}) = \frac{(a-a_1)(z-w_0)}{(a+z-v\lambda)^2}.$$

On a d'autre part $\Gamma_0 = 1$. La *formule de récurrence* ci-dessus permet donc de calculer de proche en proche tous les Γ_n.

Le numérateur de la fraction qui est au second membre de (164) est une fonction symétrique entière des racines de l'équation du second degré

$$t^2 - t + k = 0.$$

C'est donc un polynome en k et il en est de même de tous les Γ_n (1).

(1) Cela résulte aussi de la formule

$$\Gamma_n = \frac{1}{2^n u}\int_{-\frac{u}{2}}^{\frac{u}{2}}\left[\frac{\mathrm{ch}\, y}{\mathrm{sh}\,\frac{u}{2}} + (1-2\mathrm{K})\frac{\mathrm{sh}\, y}{\mathrm{ch}\,\frac{u}{2}}\right]^n dy,$$

qui montre que Γ_n est un polynome pair en $1-2\mathrm{K}$, donc un polynome en $(1-2\mathrm{K})^2 = 1-4k$.

Voici l'expression des Γ_n jusqu'à $n = 5$ ([1]) :

$$
(166)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Gamma_1 = \frac{1}{u}, \qquad \Gamma_2 = \frac{1}{2}\left(U_1^2 + \frac{U_2}{u}\right) + kU\left(U_1 - \frac{1}{u}\right),\\
&\Gamma_3 = \frac{1}{u}\left(\frac{1}{3} + U_1^2 - kU^2\right),\\
&\Gamma_4 = \frac{3}{8}U_1^4 + \frac{5}{8u}U_1^2 U_2 + \frac{U_2}{4u} + \frac{kU}{2}\left(3U_1^3 - \frac{2U^2 + 3U_1U_2}{u}\right)\\
&\qquad + \frac{k^2U^2}{2}\left(3U_1^2 + \frac{U - 3U_1}{u}\right),\\
&\Gamma_5 = \frac{1}{5u}\left(U_2^4 + 4U_1^4 + \frac{4}{3}U_1^2\right) - \frac{kU}{u}\left(U^3 - 2UU_1^2 + \frac{8}{3}U_1\right) + \frac{k^2U^4}{u}.
\end{aligned}
\right.
$$

49. Calcul des intégrales F_n. — Si l'on pose $K\varphi_1 + \varphi_2 = x$, on a

$$
Mx'' = x - K
$$

et

$$
Mx'^2 = x^2 - 2Kx + (KU + U_1)^2.
$$

Puis,

$$
\begin{aligned}
F_n &= \int_0^\lambda x^{n-1}(x'' + K)\,ds\\
&= KF_{n-1} + M(x^{n-1}x')_0^\lambda - (n-1)\int_0^\lambda x^{n-2}[x^2 - 2Kx + (KU + U_1)^2]\,ds
\end{aligned}
$$

ou, si $n > 1$,

$$
(167)\quad nF_n = (2n-1)KF_{n-1} - (n-1)(KU + U_1)^2 F_{n-2} + \frac{\lambda}{u}(U_2 - KU).
$$

D'autre part,

$$
(168)\qquad F_0 = \lambda, \qquad \frac{F_1}{\lambda} = \frac{U}{u} + K\left(1 - 2\frac{U}{u}\right).
$$

([1]) Les fonctions symétriques $S_p = K^p + (1 - K)^p$ se calculent aisément par la formule de récurrence

$$
S_p = S_{p-1} - kS_{p-2}.
$$

On vérifie facilement que le terme de plus haut degré en k est $(2p+1)(-k)^p$ pour S_{2p+1} et $2(-k)^p$ pour S_{2p}. On en déduit que le terme de plus haut degré en k, dans Γ_{2p+1}, est $\frac{U^{2p}}{u}(-k)^p$.

La *formule de récurrence* (167) donne ensuite, pour $n = 2$ (¹),

$$\frac{F_2}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_2}{u} - U_1^2\right) + KU\left(\frac{1}{u} - U_1\right) + K^2\left(1 + UU_1 - \frac{3U}{u}\right). \tag{169}$$

Nous avons enfin besoin de la fonction définie par la formule (110). En appliquant (167) pour $n = 3$ et 4, on trouve

$$\begin{aligned} 4F = {} & 3F_2[2K^2(3 - UU_1) + 2KUU_1 + U_1^2] \\ & - 6F_1K(KU + U_1)^2 + \frac{\lambda}{u}(U_2 - KU)(3K - 1). \end{aligned}$$

D'où, en remplaçant F_1 et F_2 par (168) et (169),

$$\begin{aligned} \frac{F}{\lambda} = {} & \frac{1}{8}\left[\frac{U_2}{u}(3U_1^2 - 2) - 3U_1^4\right] + \frac{K}{2}\left[\frac{2U_2 + U_1 - 3UU_1^2}{u} - 3UU_1^3\right] \\ & + \frac{3K^2}{2}\left[\frac{U}{u}(1 + 3U_1^2) + 3U_1^2(UU_1 - 1)\right] \\ & + 3K^3U\left[\frac{1 + UU_1}{u} + U_1(UU_1 - 2)\right] \\ & + 3K^4\left[-\frac{U}{2u}(7 + UU_1) + 1 + 2UU_1 - \frac{1}{2}U^2U_1^2\right]. \end{aligned} \tag{170}$$

50. Forme de la lame. — Reprenons toute la théorie des deux premiers chapitres et voyons quelles en sont les particularités dans l'hypothèse actuelle.

Dans l'équation (30), signalons seulement que $v_0 + v_\lambda$ est nul et que

$$v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda = \frac{\lambda^2}{u^2}(uU_2 - 1).$$

L'équation approchée de la lame est, d'après (77),

$$\omega y = Y[\omega x - \operatorname{sh}\omega x + c(\operatorname{ch}\omega x - 1)], \tag{171}$$

en posant

$$c = U + U_1\frac{\theta}{Y}. \tag{172}$$

A une amplification des ordonnées près, on voit que les différentes formes de la lame ne dépendent que du paramètre c. Dans le cas de

(¹) On peut calculer F_2 par l'identité (81). Il est facile de vérifier qu'on obtient le même résultat.

l'oscillation principale, ce paramètre vaut

$$c = U + \frac{U_1}{K}. \tag{173}$$

Dans le cas de *l'écart statique*, on a, d'après (67) et en se rappelant que $Y = \frac{Q}{mg}$,

$$c = \frac{aU + bU_1 + \frac{\lambda}{u}}{a - a_1}. \tag{174}$$

51. Fatigue de la lame. — La formule (78) devient

$$T' = \sqrt{3ET}\, Y\Gamma, \tag{175}$$

en appelant T la fatigue $\frac{mg}{eh}$ due au poids du pendule et posant

$$\Gamma = c \operatorname{ch} \omega s - \operatorname{sh} \omega s. \tag{176}$$

La fatigue est maximum en même temps que la valeur absolue de Γ. Or, cette fonction, ayant le signe de sa dérivée seconde, varie toujours dans le même sens, ou bien possède un minimum positif, ou bien possède un maximum négatif. Dans tous les cas, sa plus grande valeur absolue est atteinte pour l'une des valeurs extrêmes o et λ de s. Ceci revient à dire que *la plus grande fatigue a toujours lieu à l'un des encastrements* (¹).

Nous devons, dès lors, comparer les valeurs absolues des deux quantités

$$\Gamma_0 = c, \qquad \Gamma_\lambda = c \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u. \tag{177}$$

52. Plaçons-nous d'abord dans le *cas de l'écart statique*. La valeur

---

(¹) Il convient toutefois de se rappeler que *la théorie de la flexion plane est incertaine au voisinage des encastrements* [*cf.* J. Haag, *Extension de la théorie de Saint-Venant aux fils élastiques* (*Ann. scient. de l'Éc. Norm. sup.*, 1929, XLVI, note de la page 120)]. Nous ne pouvons donc pas répondre de *l'exactitude physique* des conclusions relatives aux encastrements.

On trouvera une étude physique de la question dans un article de M. Le Rolland, publié dans les *Annales françaises de Chronométrie* (1933, nº 3).

de c est donnée par (174) et l'on a

$$\Gamma_0 - \Gamma_\lambda = \frac{(2a-b)U + \frac{\lambda}{u}}{a-a_1},$$

$$\Gamma_0 + \Gamma_\lambda = \frac{b(U_1+U_2) + \frac{\lambda}{u}}{a-a_1}.$$

Bornons-nous au *cas où l'on suppose que b est compris entre* o *et* $2a$. Les deux quantités précédentes sont positives et l'on a

$$-\Gamma_0 < \Gamma_\lambda < \Gamma_0.$$

Donc, c'est Γ_0 qui constitue la plus grande valeur absolue de Γ. Autrement dit, *la plus grande fatigue a lieu à l'encastrement dans le support*. Elle est donnée par (175), en remplaçant Y par $\frac{Q}{mg}$ et Γ par (174).

53. *Si le pendule oscille, l'influence de l'oscillation principale* est donnée par

$$T' = \theta\sqrt{3ET}\left[K\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}-\omega s\right)}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}} + U_1 \operatorname{ch}\omega s\right]. \tag{178}$$

Les valeurs extrêmes du crochet C sont

$$C_0 = KU + U_1, \qquad C_\lambda = U_2 - KU = U_1 + U(1-K). \tag{179}$$

On a

$$C_0 + C_\lambda = U_1 + U_2 > 0$$

et

$$C_0 - C_\lambda = (2K-1)U.$$

Si $K > \frac{1}{2}$, on a la même conclusion que précédemment; la plus grande fatigue est au support. Mais, si $K < \frac{1}{2}$, C_0 est compris entre $-C_\lambda$ et $+C_\lambda$; la fatigue est à la tige.

L'influence de la vibration parasite est donnée par des formules analogues, où K doit simplement être remplacé par K'. Comme $K' < 0 < \frac{1}{2}$, on voit que la plus grande fatigue est toujours à la tige.

54. *Si les deux vibrations existent simultanément*, les deux efforts s'ajoutent algébriquement, suivant le principe de la superposition des déformations. Bien entendu, il faut évaluer chacun d'eux au moyen de la valeur correspondante de θ. Si $\mathrm{A}\cos(nt+p)$ et $\mathrm{A}'\cos(n't+p')$ sont les ordonnées des deux foyers au temps t, ces valeurs de θ sont

$$\frac{\mathrm{A}\cos(nt+p)}{z-z'} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{A}'\cos(n't+p')}{z'-z}.$$

Les tensions extrêmes sont

$$\mathrm{T}'_0=\sqrt{3\mathrm{TE}}\,\frac{(\mathrm{KU}+\mathrm{U}_1)\mathrm{A}\cos(nt+p)-(\mathrm{K'U}+\mathrm{U}_1)\mathrm{A}'\cos(n't+p')}{z-z'},$$

$$\mathrm{T}'_\lambda=\sqrt{3\mathrm{TE}}\,\frac{(\mathrm{U}_2-\mathrm{KU})\mathrm{A}\cos(nt+p)-(\mathrm{U}_2-\mathrm{K'U})\mathrm{A}'\cos(n't+p')}{z-z'}.$$

Supposons par exemple *que le pendule ait été lancé par écart statique* (n° **18**). On a

$$(180)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{T}'_0&=\sqrt{3\mathrm{ET}}\,\frac{\mathrm{Q}}{mg}\\
&\quad\times\frac{\left(\mathrm{U}+\dfrac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{K}}\right)(b-a-z')\cos nt-\left(\mathrm{U}+\dfrac{\mathrm{U}_1}{\mathrm{K}}\right)(b-a-z)\cos n't}{z-z'},\\
\mathrm{T}'_\lambda&=\sqrt{3\mathrm{ET}}\,\frac{\mathrm{Q}}{mg}\\
&\quad\times\frac{\left(\dfrac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{K}}-\mathrm{U}\right)(b-a-z')\cos nt-\left(\dfrac{\mathrm{U}_2}{\mathrm{K}'}-\mathrm{U}\right)(b-a-z)\cos n't}{z-z'}.
\end{aligned}\right.$$

Si le pendule est lancé par choc (n° **19**), on a

$$(181)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{T}'_0&=\sqrt{3\mathrm{ET}}\,\frac{(1+h)\mathrm{V}}{(a-b)^2+\mathrm{R}^2\left(1+\dfrac{m}{m'}\right)}\\
&\quad\times\frac{(\mathrm{KU}+\mathrm{U}_1)(bz-az+\mathrm{R}^2)\dfrac{\sin nt}{n}-(\mathrm{K'U}+\mathrm{U}_1)(bz'-az'+\mathrm{R}^2)\dfrac{\sin n't}{n'}}{z-z'},\\
\mathrm{T}'_\lambda&=\sqrt{3\mathrm{ET}}\,\frac{(1+h)\mathrm{V}}{(a-b)^2+\mathrm{R}^2\left(1+\dfrac{m}{m'}\right)}\\
&\quad\times\frac{(\mathrm{U}_2-\mathrm{KU})(bz-az+\mathrm{R}^2)\dfrac{\sin nt}{n}-(\mathrm{U}_2-\mathrm{K'U})(bz'-az'+\mathrm{R}^2)\dfrac{\sin n't}{n'}}{z-z'}.
\end{aligned}\right.$$

Dans le cas général, il est difficile d'évaluer la fatigue maximum. Nous ne le ferons que dans des cas particuliers, qui seront envisagés ultérieurement.

55. Pour ce qui concerne la souplesse et le centre de flexion, il n'y a rien de particulier à signaler dans le cas de la lame uniforme, si ce n'est que les fonctions F_2 et G_2 sont maintenant données explicitement par les formules (169), (163) et (166). Il en va de même pour l'erreur d'isochronisme et pour les erreurs d'encastrement, la fonction F étant donnée explicitement par (170).

56. Calcul de I_λ. — Si m' désigne la masse de la lame, on a, en utilisant (77) et reprenant les notations du n° **48**,

$$I_\lambda = \frac{m'}{\lambda}\int_0^\lambda (x + Ks - x_0)^2\, ds.$$

L'intégrale s'écrit

$$MG_2 + 2M\int_0^\lambda (Ks - x_0)x''\, ds + \frac{(K\lambda - x_0)^3 + x_0^3}{3K}.$$

D'autre part,

$$\int_0^\lambda (Ks - x_0)x''\, ds = [(Ks - x_0)x' - Kx]_0^\lambda$$
$$= k(\lambda - 2v_0) - w_0 = \frac{\lambda}{u}[k(u - 2U) - U_1].$$

Portant dans l'expression précédente, il vient, en tenant compte de (163) et (166),

$$(182)\quad I_\lambda = m'\frac{\lambda^2}{u^2}\left[K^2\left(\frac{u^2}{3} - 1 - uU + \frac{5U}{u} - 3UU_1\right) + K\left(2 - \frac{5U}{u} - uU_1 + 3UU_1\right) + \frac{3}{2}U_1^2 + \frac{U - 3U_1}{2u}\right].$$

En portant dans (135), on obtient l'expression explicite de la perturbation due à *l'inertie de la lame*.

57. Calcul de l'intégrale J. — On a

$$x = s - \frac{1}{2}\int_0^s (K\varphi_1 + \varphi_2)^2\, ds$$

où, d'après (158),

$$s-x=\frac{K^2}{2}\left[s\frac{\operatorname{ch}u+2}{\operatorname{ch}u+1}+2\frac{\lambda}{u}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{u}{2}-\omega s\right)}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}+\frac{\lambda}{2u}\frac{\operatorname{sh}(2\omega s-u)}{\operatorname{ch}u+1}-\frac{3\lambda}{2u}U\right]$$
$$-K\left[\frac{s}{2(\operatorname{ch}u+1)}+\frac{3\lambda}{4u}U_1-\frac{\lambda}{u}U_1\operatorname{ch}\omega s+\frac{\lambda}{4u}U_1\frac{\operatorname{ch}\left(2\omega s-\frac{u}{2}\right)}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}\right]$$
$$-\frac{U_1^2}{4}\left[s-\frac{\lambda}{2u}\operatorname{sh}2\omega s\right].$$

En intégrant par rapport à s et multipliant par $\frac{\mu}{m'}=\frac{1}{\lambda}$, on trouve

$$(183)\qquad J=\frac{\lambda}{8}\left(\frac{1}{u^2}-U_1^2\right)-\frac{K\lambda}{4}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}u+1}+\frac{3}{u}\left(U_1-\frac{1}{u}\right)\right]$$
$$+\frac{K^2\lambda}{4}\left[\frac{\operatorname{ch}u+2}{\operatorname{ch}u+1}-3\frac{U}{u}\right].$$

En portant dans (136), on a la perturbation de marche due au *poids de la lame*.

Il n'y a rien de particulier à signaler pour ce qui concerne les n^{os} **38** à **46**; sauf que l'on connaît explicitement les fonctions G_n (n° **48**).

CHAPITRE IV.

SUSPENSION A FIL.

58. Passage a la limite. — La suspension par un fil inextensible et parfaitement flexible peut être considérée comme *cas limite* de la suspension à lame élastique, quand l'épaisseur de cette lame ou bien son module d'élasticité tend vers zéro. D'après la formule (1), il revient au même de dire que *la fonction* M *tend vers zéro*. Nous nous bornerons d'ailleurs à effectuer le passage à la limite dans le seul cas de la lame uniforme. D'après (156), il nous suffit de supposer que u devient infini.

Les formules (159) nous montrent que v_0, v_λ, w_0, w_λ, β_2, U_1 tendent vers zéro, tandis que β_1 tend vers λ et U et U_2 tendent vers *un*. D'après (157), v et w tendent vers zéro, pour toute valeur de s prise dans l'intervalle (o, λ), limites comprises.

D'après (158), φ_1 tend vers *un*, si s diffère de zéro et de λ. Pour $s = 0$ ou λ, φ_1 reste constamment nul. De même, φ_2 tend vers zéro, si s diffère de λ. Pour $s = \lambda$, φ_1 reste constamment égal à *un*.

D'après (79), on conclut de ce qui précède que F_n tend vers $K^n\lambda$.

Daprès (164) et (163), la valeur asymptotique de G_n est

$$G_n = \frac{K^n + (1-K)^n}{n}\left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n-3}. \tag{184}$$

Enfin, les formules (182) et (183) nous donnent, à la limite,

$$I_\lambda = m'\frac{K^2}{3}\lambda^2, \qquad J = \frac{K^2}{4}\lambda. \tag{185}$$

59. Nous allons maintenant faire une étude directe du mouvement du pendule et nous obtiendrons, par comparaison, des *vérifications de notre théorie générale*.

Employons les équations de Lagrange.

La force vive du système est, en négligeant la masse du fil et appelant ψ l'angle qu'il fait avec la verticale,

$$2T = m[(R^2 + a^2)\theta'^2 + \lambda^2\psi'^2 + 2a\lambda\psi'\theta'\cos(\theta - \psi)]. \tag{186}$$

On a, d'autre part, la fonction de forces

$$U = mg(\lambda\cos\psi + a\cos\theta). \tag{187}$$

En première approximation, nous avons, en négligeant m',

$$2T = m(R^2 + a^2)\theta'^2 + \lambda^2\psi'^2 + 2a\lambda\psi'\theta', \tag{188}$$

$$U = -\frac{mg}{2}(\lambda\psi^2 + a\theta^2). \tag{189}$$

D'où les équations différentielles

$$\begin{aligned} (R^2 + a^2)\theta'' + a\lambda\psi'' + ga\theta &= 0, \\ a\theta'' + \lambda\psi'' + g\psi &= 0 \end{aligned} \tag{190}$$

et, par une combinaison évidente,

$$R^2\theta'' + ga(\theta - \psi) = 0. \tag{191}$$

Ces équations sont identiques à ce que deviennent les équations (25) et (26) quand on y remplace β par $\lambda\psi$ et qu'on passe à la limite. Dès lors, l'intégration du n° **7** s'applique au cas particulier actuel. *Les deux foyers* sont toujours donnés par (30), où l'on doit annuler v_0, v_λ et w_λ.

La valeur critique a_1, définie par (41), est nulle. Donc, le centre de gravité G doit être au-dessous de A; ce qui est bien évident *a priori*.

Les formules du n° **8** continuent à s'appliquer, en se simplifiant. Les formules (44) et (58) se réduisent toutes deux à [1]

$$2Q\frac{dT}{T} = 2Kz\frac{dR}{R} + (2K-1)da + K^2 d\lambda. \tag{192}$$

D'après (184), G_2 a une limite nulle; de sorte que la formule (62) se réduit à $G = -1$. *La variation du coefficient de sensibilité n'est donc possible qu'avec une suspension élastique.*

La formule (64) devient

$$\psi = -\frac{a+z'}{\lambda}\theta = K\theta. \tag{193}$$

Les questions traitées dans les n^{os} **18** à **20** constituent, dans le cas actuel, des problèmes élémentaires et les vérifications correspondantes sont évidentes.

L'équation (77) devient, à la limite,

$$y = Yx.$$

La forme limite de la lame est donc une droite passant par O. On vérifie en outre que la tension (X, Y) est dirigée suivant cette droite.

L'équation (78) et les formules (157) montrent immédiatement que *l'effort* T' *tend vers zéro*, si s diffère de o ou de λ, c'est-à-dire *en dehors des encastrements*. Pour $s = 0$, on a, avec les notations du n° **51**,

$$T'_0 = \sqrt{3ET}\,Y.$$

Pour $s = \lambda$, on a de même

$$T'_\lambda = \sqrt{3ET}(\theta - Y).$$

---

[1] Il est facile de voir que P_λ a pour limite $(1-K)^2$, tandis que l'intégrale (58) tend vers zéro.

On pourrait être tenté d'en conclure que la fatigue aux encastrements ne devient nulle que si le module d'élasticité tend vers zéro. Mais en réalité, les formules ci-dessus sont incertaines, pour la raison signalée dans la note de la page 159 et aussi parce que le rapport $\frac{e}{\rho}$ devient égal à $2\sqrt{\frac{3T}{E}}$, au facteur Y ou $\theta - Y$ près. Si E tend vers zéro, ce rapport devient infini, alors qu'il doit être très petit (*cf.* J. HAAG, *loc. cit.*, p. 128 et 129).

La formule (82) nous donne une *souplesse infinie*.

Rien n'est à changer aux nos **24** et **25**.

60. Pour le calcul de *l'erreur d'isochronisme*, on peut employer la méthode suivante [1].

Reprenons les formules (186) et (187), en négligeant seulement les quantités d'ordre supérieur au quatrième et tenant compte de (193) :

$$2T = m[R^2 + (a+\lambda K)^2 - a\lambda K(1-K)^2\theta^2]\theta'^2,$$
$$U = -\frac{mg\theta^2}{2}(\lambda K^2 + a) + \frac{mg\theta^4}{24}(\lambda K^4 + a).$$

L'équation de Lagrange nous donne

$$\theta''[R^2 + (a+\lambda K)^2 - a\lambda K(1-K)^2\theta^2] - a\lambda K(1-K)^2\theta\theta'^2 = -g(a+\lambda K^2)\theta + \frac{g}{6}(a+\lambda K^4)\theta^3. \tag{194}$$

L'accélération perturbatrice est, au cinquième ordre près,

$$\Delta\theta'' = \frac{a\lambda K(1-K)^2\theta\theta'^2 + \frac{g}{6}(a+\lambda K^4)\theta^3 - n^2 a\lambda K(1-K)^2\theta^3}{(a+\lambda K)^2 + R^2}. \tag{195}$$

En négligeant le troisième ordre (194), on voit immédiatement que le dénominateur de la fraction (195) est égal à

$$\frac{g(a+\lambda K^2)}{n^2} = -\frac{z'}{K}(a+\lambda K^2),$$

d'après (34). En tenant toujours compte de (34) et remplaçant θ'^2

[1] *Cf.* J. HAAG, *Congrès de Zurich* et *Bull. Sc. math.* (*loc. cit.*).

par $\frac{n^2\theta^2}{3}$ (n° **29**), le numérateur s'écrit

$$-\frac{z'}{6K}\left[a+\lambda K^4+\frac{4a\lambda}{z'}K^2(K-1)^2\right]n^2\theta^3.$$

On en déduit

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\theta_0^2}{16}\,\frac{a+\lambda K^4+\frac{4a\lambda}{z'}K^2(K-1)^2}{a+\lambda K^2}. \tag{196}$$

D'autre part, les formules (45) et (112) donnent

$$\left\{\begin{aligned} &Q=a+\lambda K^2,\\ &Q'=a(1-4K)-\frac{4K}{z'}(a+\lambda K^2)^2-3\lambda K^4. \end{aligned}\right. \tag{197}$$

En tenant compte de (35), on vérifie facilement que Q' est identique au numérateur de (196); de sorte que *la formule* (111) *devient identique à* (196).

61. Les formules (117) se réduisent à

$$j=-i-i',\qquad h=-\lambda i;$$

elles expriment que les droites AG et OA sont verticales, dans la position d'équilibre.

Les formules (127) et (132) deviennent ensuite, en remarquant que $H_2=\lambda Y^2$ et $H=3\lambda Y^4$,

$$h=-\lambda K i,\qquad h'=36\lambda i^2 K^2.$$

Portant dans (133), il vient

$$Q_1=-\frac{aK}{2}i^2-\frac{K}{2z'}(a+\lambda K)^2 i^2-\frac{\lambda K^2}{2}i^2=-\frac{Ki^2}{2}(a+z'+\lambda K)=0,$$

en tenant compte de (35). *La perturbation due aux erreurs d'encastrement est donc nulle*, ce qui est évident *a priori*, puisque la direction des encastrements du fil ne joue aucun rôle.

62. Pour tenir compte de *l'inertie du fil*, il suffit d'ajouter

$$m'\frac{\lambda^2}{3}\psi'^2=m'\frac{\lambda^2K^2}{3}\theta'^2$$

à la force vive. Cela nous donne l'accélération perturbatrice

$$\Delta\theta'' = \frac{m'\lambda^2 K^2 n^2 \theta}{-3m\frac{z'}{K}(a+\lambda K^2)} = -\frac{m'}{m}\frac{\lambda^2 K^3}{3z'(a+\lambda K^2)}n^2\theta;$$

d'où

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{m}\frac{\lambda^2 K^3}{6z'(a+\lambda K^2)}.$$

C'est bien ce que devient la formule (135), si l'on tient compte de (185) et de (197).

63. Pour tenir compte du *poids du fil*, il suffit d'ajouter

$$-\frac{m'g\lambda}{4}\psi^2 = -\frac{m'g\lambda K^2}{4}\theta^2$$

à la fonction de forces. Cela nous donne l'accélération perturbatrice

$$\Delta\theta'' = -\frac{m'g\lambda K^2\theta}{2mg\frac{a+\lambda K^2}{n^2}} = -\frac{m'}{m}\frac{\lambda K^2}{2(a+\lambda K^2)}n^2\theta.$$

D'où

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{m}\frac{\lambda K^2}{4(a+\lambda K^2)}.$$

C'est bien ce que devient la formule (136).

On voit que *toutes les vérifications se font parfaitement*.

CHAPITRE V.

PENDULE PONCTUEL, BATTEMENTS.

64. Pendule ponctuel. — C'est le pendule théorique dont toute *la masse est concentrée en un seul point* (1). Autrement dit, le rayon de gyration R est nul.

(1) C'est ce qu'on appelle le *pendule simple*, dans le cas de la suspension à fil. Mais ici, on doit supposer une tige rigide, de masse négligeable.

L'équation (30) nous donne $z = 0$ et

$$z' = -\frac{a^2 + \lambda a - a(v_0 + v_\lambda) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda}{a - v_\lambda}. \tag{198}$$

Le foyer F est donc en G et les formules (34) et (36) nous donnent sa période, sans aucune particularité.

Par contre, en échangeant z et z', on obtient $n' = \infty$. *La vibration parasite a une fréquence infinie* [1]. Physiquement, ceci n'a pas de sens. Cela tient à ce que l'hypothèse faite n'est pas rigoureusement réalisable; R peut être très petit vis-à-vis de a, mais pas rigoureusement nul.

Si l'on considère seulement *le rapport* $\frac{R}{a}$ *comme très petit*, on a asymptotiquement

$$z = -\frac{R^2}{z'},$$

z' étant donné par la formule (198). D'où

$$n'^2 = g\frac{a^2 + \lambda a - a(v_0 + v_\lambda) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda}{R^2\beta_1}. \tag{199}$$

La fréquence de la vibration parasite est très grande. La conséquence pratique est qu'*elle s'amortit très rapidement*, car les frottements internes de la lame et la résistance de l'air exercent un freinage d'autant plus énergique que la fréquence est plus élevée.

Les théories générales des Chapitres I et II s'appliquent sans modification au cas particulier actuel. Signalons simplement que, dans la formule (58), il faut supprimer le premier terme du second membre.

65. Masse ponctuelle fixée a l'extrémité de la lame. — Il suffit de faire $a = 0$ dans le numéro précédent. On obtient, en particulier, dans le cas de la lame uniforme [2],

$$n^2 = \frac{g}{\lambda}\,\frac{u \operatorname{ch} u}{u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u}. \tag{200}$$

---

[1] L'équation (26) donne $\theta'' = \infty$, si la position du pendule n'a pas été choisie de manière à annuler le numérateur du second membre.

[2] *Cf.* Le Rolland, *loc. cit.*, p. 189.

Comme vérification, cette formule nous donne, pour $u=\infty$, la fréquence du pendule simple de longueur λ.

Si u est au contraire très petit, on a asymptotiquement

$$n^2 = \frac{3g}{\lambda u^2} = \frac{Ee^3 h}{4\lambda^3 m}. \tag{201}$$

La pesanteur disparaît devant l'élasticité.

66. Cas où les deux périodes sont confondues. — Pour que les deux périodes soient confondues, il faut et il suffit, d'après (34) et (35), que l'on ait

$$(a - v_\lambda)(z - z') = 0.$$

Une première solution est $z = z'$. Autrement dit, l'équation (30) doit avoir une racine double, qui est nécessairement nulle. Mais alors, n et n' sont infinis, si $a - v_\lambda$ n'est pas nul. Physiquement, ceci n'a pas de sens, pour la raison expliquée au n° **64**. En réalité, on peut seulement supposer que z et z' sont très petits.

Si $a - v_\lambda$ n'est pas infiniment petit, la formule (35) nous montre, dans ce cas, que K et K' ont le même signe et la formule (34) nous montre ensuite que n^2 et n'^2 sont de signes contraires. Donc, les oscillations sont impossibles; l'équilibre est instable (n° **9**).

Voyons maintenant le cas où l'on a

$$a = v_\lambda. \tag{202}$$

Les racines de (30) sont 0 et ∞. Mais, il est plus simple de remarquer que les équations (25) et (26) deviennent

$$\beta'' + a\theta'' = -\frac{g}{\beta_1}(\beta + a\theta). \tag{203}$$

$$R^2\theta'' = -g w_0 \theta. \tag{204}$$

Elles s'intègrent séparément. La première donne le mouvement du point G, qui est le foyer F'. La deuxième donne le mouvement du point à l'infini sur la tige, qui est le foyer F.

Pour que ces deux mouvements aient même fréquence, il faut et il suffit que l'on ait $R = R_0$, en posant

$$R_0 = \sqrt{\beta_1 w_0}. \tag{205}$$

Dans ce cas, l'équation (30) est indéterminée, comme on le voit en tenant compte de (16) et (22); *tous les points de la tige sont des foyers* [1] *et vibrent avec la même fréquence* $F_0 = \frac{n_0}{2\pi}$, n_0 étant donné par la formule [2]

$$n_0^2 = \frac{g}{\beta_1}. \tag{206}$$

67. Battements. — Supposons que les conditions (202) et (205) ne soient vérifiées qu'approximativement et posons

$$a - v_\lambda = \varepsilon R, \qquad a^2 + \lambda a + R^2 - a(v_0 + v_\lambda) + v_\lambda^2 + \beta_1 w_\lambda = 2\rho\varepsilon R^2, \tag{207}$$

ρ désignant un facteur fixe quelconque. L'équation (30) s'écrit

$$z^2 + 2\rho R z - R^2 = 0. \tag{208}$$

Ses racines z et z' sont deux longueurs quelconques, de l'ordre de R. Les formules (34) et (35) nous donnent

$$n^2 = n_0^2\left(1 - \varepsilon\frac{z}{R}\right).$$

Les fréquences des deux vibrations sont, en négligeant le carré de $\frac{\varepsilon z}{R}$,

$$F = F_0\left(1 - \varepsilon\frac{z}{2R}\right), \qquad F' = F_0\left(1 - \varepsilon\frac{z'}{2R}\right). \tag{209}$$

Si les conditions initiales sont quelconques, *tout point du pendule autre que les foyers est soumis à des battements*, dont la fréquence est

$$f = F' - F = F_0\varepsilon\frac{z - z'}{2R} = \varepsilon F_0\sqrt{1 + \rho^2}. \tag{210}$$

Le facteur ρ est défini par la seconde équation (207). Cette équation s'écrit d'ailleurs, en tenant compte de la première et négligeant ε^2,

$$\rho = \frac{R_0 - R}{a - a_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta_1}{w_0}}, \tag{211}$$

en appelant a_0 la valeur critique v_λ.

---

[1] Cela est évident sur les équations (203) et (204).

[2] La longueur du pendule synchrone est β_1.

CHAPITRE VI.

PENDULE A LAME COURTE.

68. Détermination approchée des foyers. — Supposons le rapport $\frac{\lambda}{a}$ très petit, comme dans le cas du *pendule ordinaire* et convenons de négliger $\frac{\lambda^2}{a^2}$ devant l'unité. L'équation (30) s'écrit

$$(212) \qquad (z+a)\left(z-\frac{R^2}{a}\right)=z\,\frac{-a\beta_1+l\nu_\lambda-(\beta_1 w_\lambda+\nu_\lambda^2)}{a-\nu_\lambda},$$

en posant [1]

$$(213) \qquad l=a+\frac{R^2}{a}.$$

D'après (18), le second membre de (212) peut être réduit à

$$z\left(-\beta_1+\frac{l}{a}\nu_\lambda\right).$$

On en conclut que les racines z et z' ont les *valeurs approchées* suivantes :

$$(214) \qquad z=\frac{R^2}{a}-\frac{R^2}{a^2+R^2}\left(\beta_1-\frac{l}{a}\nu_\lambda\right),$$

$$(215) \qquad z'=-a+\left(\nu_\lambda-\frac{a}{l}\beta_1\right).$$

La distance AF *est* donc *très légèrement inférieure à la longueur normale du pendule synchrone* et *le foyer* F' *se trouve à une très courte distance au-dessus de* A.

69. Période de l'oscillation principale. — La formule (36) nous donne, au second ordre près en $\frac{\lambda}{a}$,

$$(216) \qquad K=\frac{a}{l}\left[1+\frac{w_\lambda}{a}+\frac{\nu_\lambda}{l}+\frac{R^2}{al}\left(\frac{\beta_1}{l}-\frac{\nu_\lambda}{a}\right)\right].$$

---

[1] On sait que l est la *longueur normale du pendule synchrone*, correspondant au cas où le pendule oscille autour d'un axe fixe passant par A.

En portant (215) et (216) dans (34), on a ensuite

$$n^2 = \frac{g}{l}\left(1 + \frac{w_\lambda}{a} + \frac{2 v_\lambda}{l} - \beta_1 \frac{a}{l^2}\right). \tag{217}$$

Si l'on suppose que w_λ est de l'ordre de λ (¹), on voit que *l'oscillation principale est très voisine du mouvement normal du pendule à axe fixe.*

L'accroissement de longueur du pendule synchrone imputable à la lame est approximativement

$$\Delta l = -\frac{l}{a} w_\lambda - 2 v_\lambda + \beta_1 \frac{a}{l}. \tag{218}$$

Avec les pendules ordinaires, R^2 *est très petit vis-à-vis de* a^2 et l'on a approximativement

$$\Delta l = \lambda - v_0 - w_0. \tag{219}$$

Dans le cas de la *lame uniforme*, cette dernière formule se réduit à (²)

$$\Delta l = \lambda\left(1 - \frac{U_2}{u}\right). \tag{220}$$

Pour $u = \infty$, on retrouve bien $\Delta l = \lambda$. Si la lame est véritablement élastique, l'allongement est moindre. Il est positif pour $u > 1,2$ environ et négatif pour $u < 1,2$. Dans ce dernier cas, la lame raccourcit le pendule synchrone au lieu de l'allonger.

70. Influence de la température. — Elle est toujours donnée par la formule générale (60). Voyons à quoi se réduit cette formule, *quand on néglige* λ^2 *et* R^2 *devant* a^2 (³).

Les formules (45) et (216) nous donnent d'abord

$$Q = a + w_\lambda + \beta_1 = a + \lambda + w_0 - v_0. \tag{221}$$

(¹) Ceci n'a pas nécessairement lieu. Par exemple, avec une lame uniforme, $\frac{w_\lambda}{\lambda}$ est infiniment grand, si u est infiniment petit. Dans la pratique, si la lame n'est pas trop épaisse, on peut admettre toutefois que la condition ci-dessus est remplie.

(²) *Cf.* Le Rolland, *loc. cit.*, p. 350, et Tricomi, *loc. cit.*, p. 16 et 17.

(³) Nous supposons en outre que w_λ est de l'ordre de λ.

On a, d'autre part,

$$P_\lambda = \frac{(v_\lambda + w_\lambda)^2}{M_\lambda} = \frac{w_0^2}{M_\lambda}.$$

D'après (19), cette quantité est inférieure à $\mu\frac{w_0}{\lambda}$. Si l'on suppose que μ n'est pas très grand, P_λ est de l'ordre de grandeur de l'unité.

De même, on peut écrire

$$G_2 < \frac{\mu}{\lambda w_0}\int_0^\lambda (v_0 + w_\lambda)^2\, ds = \frac{\mu(v_0 + w_\lambda)^2}{w_0}.$$

Si w_0 n'est pas très petit, G_2 est de l'ordre de grandeur de λ.

Dans ces conditions, la formule (60) s'écrit approximativement

$$\frac{dT}{T} = \alpha'\left(1 - \frac{\lambda - w_0 - v_0}{a}\right) + \alpha\frac{\lambda}{a}\left(1 + \frac{w_0^2}{M_\lambda} - 4\frac{G_2}{\lambda}\right) - \beta\frac{G_2}{a}. \tag{222}$$

Dans le cas de la *lame uniforme*, on a

$$\frac{dT}{T} = \frac{\alpha'}{2} + \frac{\lambda}{2a}\left[-\alpha'\left(1 - \frac{U_2}{u}\right) + \alpha\left(1 - U_1^2 - \frac{2U_2}{u}\right) - \frac{\beta}{2}\left(U_1 + \frac{U_2}{u}\right)\right]. \tag{223}$$

On aboutit au même résultat, en faisant le calcul direct à partir de la formule (220).

71. VIBRATION PARASITE. — La formule (35) donne approximativement

$$K' = -\frac{l}{\beta_1}; \tag{224}$$

d'où

$$n'^2 = \frac{gal}{\beta_1 R^2}. \tag{225}$$

Le rapport des fréquences de la vibration parasite et de l'oscillation principale est

$$\frac{n'}{n} = \frac{l}{R}\sqrt{\frac{a}{\beta_1}} > \frac{l}{R}\sqrt{\frac{a}{\lambda}}. \tag{226}$$

Il est *extrêmement grand*. On en conclut, comme au n° **64**, que *la vibration parasite s'amortit très rapidement.*

La formule (69) s'écrit approximativement

$$\frac{A'}{A} = -\frac{\overline{FB}}{\overline{F'B}} \cdot \frac{a\beta_1}{l^2}. \tag{227}$$

Donc, *quand le pendule est lancé par écart statique initial, l'amplitude de la vibration parasite est beaucoup plus petite que l'amplitude de l'oscillation principale.*

De même, la formule (73) devient

$$\frac{A'}{A} = -\frac{\overline{FB}}{\overline{F'B}} \cdot \frac{a^2}{lR}\sqrt{\frac{\beta_1}{a}}. \tag{228}$$

On a une conclusion analogue à la précédente, mais moins nette, car le rapport de la fraction (228) à la fraction (227) est $\frac{l}{R}\sqrt{\frac{a}{\beta_1}}$. Il est très grand. Donc, *la vibration parasite est relativement beaucoup plus grande dans le lancement par choc que dans le lancement par écart statique.*

72. Influence de l'échappement sur la vibration parasite. — Si l'on considère l'action de l'échappement pendant un temps infiniment petit, on peut l'assimiler à un choc instantané. Les accroissements $d\beta'$ et $d\theta'$ qui en résultent satisfont à l'équation (70). En intégrant pendant toute la durée de l'impulsion, on a la même relation entre les accroissements finis $\Delta\beta'$ et $\Delta\theta'$ (¹). Les accroissements de vitesse Δv et $\Delta v'$ des deux foyers F et F' sont liés à $\Delta\theta'$ par la formule (71) et la formule analogue. Dès lors, l'effet de chaque impulsion consiste à superposer au mouvement existant précédemment une vibration sinusoïdale, pour chaque foyer, le rapport des amplitudes de ces deux vibrations étant donné par (228). Il s'ensuit que, *si la vibration parasite n'existait pas avant l'impulsion, elle existe après.*

Toutefois, *son amplitude est très faible* et, comme elle s'amortit très rapidement, elle est éteinte au bout d'un temps qui est vraisembla-

(¹) On peut démontrer cette propriété directement, en écrivant les équations différentielles auxquelles satisfont les accroissements $\delta\beta''$ et $\delta\theta''$ provenant de la force F agissant au point B. En éliminant F entre ces deux équations, on obtient la relation (70) entre $\delta\beta''$ et $\delta\theta''$. En intégrant pendant la durée de l'impulsion, on aboutit à la même relation entre $\Delta\beta'$ et $\Delta\theta'$. Ceci suppose, bien entendu, que le point B reste fixe pendant l'impulsion, ce qui est pratiquement exact.

blement une très petite fraction de l'intervalle séparant deux impulsions consécutives. Pratiquement, *cette vibration parasite est imperceptible*.

Il n'en subsiste pas moins qu'une certaine quantité d'énergie est empruntée à chaque impulsion, pour le renouvellement de cette vibration éphémère. Le rendement de l'échappement est donc un peu diminué. Mais, cela ne doit pas avoir une bien grande importance ([1]).

Pour éviter ce léger inconvénient, il faut *que le point d'impulsion* B *coïncide avec le foyer* F. C'est pratiquement impossible avec les échappements mécaniques ordinaires, parce que la fourchette serait trop longue. Avec les échappements électromagnétiques, la condition est, au contraire, presque remplie, car l'impulsion a lieu au bas du pendule, donc dans le voisinage de F ([2]).

73. Fatigue de la lame. — Pour ce qui concerne la fatigue en écart statique, il n'y a rien à ajouter à ce qui a été dit au n° **52**. Voyons ce qui se passe pendant les oscillations. A cet effet, reprenons les formules (180) et (181). Dans chacune d'elles, le terme en $\cos n't$ ou en $\sin n't$ varie beaucoup plus rapidement que l'autre terme (n° **71**). D'autre part, il s'amortit en un temps très court. Il s'ensuit que, pour avoir le maximum de T'_0 ou de T'_λ, on peut pratiquement faire $t = 0$ dans le premier terme du numérateur.

Supposons d'abord le *pendule lancé par écart statique initial.* D'après (224), $\frac{1}{K'}$ est très petit. Si l'on néglige toujours R^2 devant a^2, on a sensiblement $K = 1$. Dans ces conditions, les valeurs maxima de T'_0 et T'_λ sont respectivement ([3])

$$(229)\qquad \begin{cases} T'_0 = \sqrt{3ET}\,\dfrac{Q}{mg}\cdot\dfrac{U_2.F'B + U.FB}{F'F}, \\[2ex] T'_\lambda = \sqrt{3ET}\,\dfrac{Q}{mg}\cdot\dfrac{U_1.F'B + U.FB}{F'F}, \end{cases}$$

les distances F'B, FB, F'F étant prises en valeur absolue.

([1]) A condition toutefois de ne pas réduire la distance BF' d'une manière exagérée, c'est-à-dire de *ne pas prendre une fourchette trop courte*.

([2]) *Cf.* Le Rolland, *loc. cit.*, p. 354.

([3]) Elles sont atteintes pour $n't = 0$ ou π, suivant le signe de $\overline{FB}$.

D'après (161), c'est la première expression qui est la plus grande. Donc, *la plus grande fatigue a lieu à l'encastrement dans le support.*

Si B *se trouve entre* F *et* F′, la première formule (229) s'écrit, en tenant compte de (67) et confondant F′ avec A et F avec G,

$$T'_0 = \sqrt{3ET}\,\theta_0\left(U_1 + U\frac{a}{b}\right). \tag{230}$$

Pour une amplitude θ_0 donnée, cette quantité est d'autant plus petite que b est plus voisin de a.

Si B *est au-dessous de* F, on a

$$T'_0 = \sqrt{3ET}\,\theta_0\left(U + U_2 - U\frac{a}{b}\right). \tag{231}$$

Cette quantité est d'autant plus petite que b est plus voisin de a.

Donc, dans tous les cas, *il y a intérêt à attaquer le pendule le plus près possible du foyer inférieur* F.

Si l'attaque se produit en ce point, les formules (230) et (231) se réduisent l'une et l'autre à

$$T'_0 = \sqrt{3ET}\,U_2\theta_0. \tag{232}$$

74. Supposons maintenant le *pendule lancé par choc.*

Les deux formules (181) donnent sensiblement le même maximum pour T'_0 et T'_λ. Autrement dit, *la plus grande fatigue a lieu simultanément aux deux encastrements. Elle provient* d'ailleurs *uniquement de la vibration parasite* et a pour valeur

$$T' = \sqrt{3ET}\,\frac{(1+h)V}{(a-b)^2 + R^2\left(1+\dfrac{m}{m'}\right)}\,\Theta, \tag{233}$$

en posant

$$\Theta = \frac{Ua.BF}{\beta_1 n'} = \frac{UR.BF}{\sqrt{\beta_1 g}}. \tag{234}$$

Toutes choses égales d'ailleurs, elle est *d'autant plus grande que la lame est plus courte.*

75. Bien entendu, les formules (230) à (233) ne s'appliquent *qu'au début du mouvement*, quand la vibration parasite n'a encore subi aucun amortissement. Au bout d'un temps très court, cet amortissement est complet et *il ne subsiste plus que l'oscillation principale*. A partir de ce moment, on doit appliquer le n° **53**. Comme K est voisin de l'unité, *la fatigue maximum a lieu à l'encastrement fixe* et sa valeur est donnée par la formule (232).

76. Souplesse. — La formule (82) se réduit pratiquement à

$$S = \frac{a}{G_2} = \frac{2a}{\lambda\left(U_1^2 + \frac{U_2^2}{u}\right)} = \frac{2a}{\lambda}\,\frac{u\,\text{sh}^2 u}{u + \text{sh}\,u\,\text{ch}\,u}. \tag{235}$$

On vérifie aisément que le dernier facteur est une fonction croissante de u. On en conclut que *la souplesse augmente* avec u, c'est-à-dire *quand on diminue l'épaisseur, la largeur ou le module d'élasticité de la lame*, ou bien *quand on augmente le poids du pendule*. Tout ceci est bien conforme au bon sens.

Si l'on fait seulement varier λ, on voit que S est proportionnelle à la fonction

$$\frac{\text{sh}^2 u}{u + \text{sh}\,u\,\text{ch}\,u}, \tag{236}$$

qui est aussi une fonction croissante de u. Donc, *quand il ne reste plus qu'à choisir la longueur de la lame, on augmente la souplesse en prenant cette longueur la plus grande possible* [1]. Il faut toutefois remarquer que la fonction (236) atteint rapidement sa valeur asymptotique 1. Par exemple, pour $u = 4$, elle vaut déjà 0,993. Il n'y a donc *aucun intérêt*, du point de vue de la souplesse, *à ce que u dépasse la valeur 4*.

77. Centre de flexion. — Les formules (83) et (215) nous donnent

$$\overline{OF'} = \lambda + v_\lambda - \frac{a}{l}\beta_1$$

ou, en confondant l avec a,

$$\overline{OF} = v_0. \tag{237}$$

Plaçons-nous maintenant au point de vue du n° **25**. L'équation (87)

---

(1) On suppose toujours, bien entendu, que $\frac{\lambda}{a}$ reste petit.

admet une racine très petite et l'autre très voisine de L. Cette dernière est à rejeter, car elle conduirait à une fourchette agissant sensiblement en A, c'est-à-dire à l'extrémité de la tige. Il faut donc prendre la petite racine.

Comme elle est de l'ordre de λ, ainsi que F_2 et $a+z'$, on a, au second ordre près,

$$x = -F_2 - 2(a+z') = -F_2 - 2v_\lambda + 2\frac{a}{l}\beta_1. \tag{238}$$

Supposons la *lame uniforme* et négligeons toujours R^2 devant a^2. La formule (169) nous donne, pour $K=1$,

$$\frac{F_2}{\lambda} = 1 - \frac{2U}{u} + \frac{U_2}{2u} - \frac{U_1^2}{2}. \tag{239}$$

Portant dans (238), on trouve

$$x = \lambda\left(1 - \frac{U_2}{2u} + \frac{U_1^2}{2}\right);$$

d'où

$$c = \lambda - x = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{U_2}{u} - U_1^2\right). \tag{240}$$

Pour $u > 4$, on peut prendre pratiquement

$$c = \frac{\lambda}{2u};$$

tandis que l'on a, d'après (237),

$$\overline{OF'} = \frac{\lambda}{u}.$$

Donc, *si la lame est très mince, l'axe de la fourchette doit être au milieu du segment* OF' et non pas en F', comme l'ont préconisé divers auteurs (¹).

78. Perturbations. — Pour le calcul d'une *perturbation proprement*

(¹) *Cf.* Keelhoff, p. 1 et 13; Le Rolland, p. 353. Bien entendu, pour de petites oscillations, ceci n'a pas grande importance pratique. Quel que soit l'emplacement de l'axe de la fourchette, le glissement sur la tige est toujours très petit. Mais, si l'on tient à donner une règle aux constructeurs, il vaut évidemment mieux leur indiquer l'emplacement qui donne le glissement minimum.

dite, la formule générale (104) se réduit à

$$(241) \qquad f = n^2(a\varepsilon_2 - a\varepsilon_1\theta + \varepsilon_3),$$

en négligeant λ devant a. Il revient au même de dire que *l'accélération perturbatrice est pratiquement la même qu'avec un axe rigide.* En particulier, la théorie de l'échappement peut se faire sans tenir compte de la lame.

On pourrait évidemment pousser plus loin l'approximation, en négligeant seulement λ^2 devant a^2. Mais, cela ne présenterait vraisemblablement aucun intérêt pratique.

79. Erreur d'isochronisme. — La formule (112) donne, en négligeant λ^2 et R^2 devant a^2,

$$Q' = a - 4\lambda + 4v_0 + 8F_2 - F.$$

Nous avons Q par la formule (221). D'où

$$(242) \qquad \frac{Q'}{Q} = 1 + \frac{-5\lambda + 5v_0 - w_0 + 8F_2 - F}{a}.$$

Si l'on suppose la *lame uniforme*, F_2 est donné par (239). En faisant $K = 1$ dans (170), on obtient, d'autre part,

$$(243) \qquad \frac{F}{\lambda} = \frac{-42U + 22U_1 + 3U_2U_1^2}{8u} + 3\left(1 - U_1^2 - \frac{1}{8}U_1^4\right).$$

Portant dans (242), puis dans (111), il vient

$$(244) \qquad \frac{\Delta T}{T} = \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{\theta_0^2}{16}\frac{\lambda}{a}\left(-\frac{7U}{4u} + \frac{U_1}{4u} - U_1^2 - \frac{3U_2U_1^2}{8u} + \frac{3}{8}U_1^4\right).$$

Comme ***vérification***, on retrouve, pour $u = \infty$, la formule classique qui donne l'erreur d'isochronisme du pendule simple (¹).

(¹) Il doit bien en être ainsi, car nous avons affaire, dans ce cas, à un pendule simple de longueur $a + \lambda$, puisque nous négligeons le rayon de gyration R. M. Le Rolland (*loc. cit.*, p. 336) trouve, avec nos notations,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\theta_0^2}{16} - \frac{\theta_0^2}{16}\frac{\lambda}{a}\left(1 - \frac{2U}{u}\right).$$

Mais, sa formule est nécessairement fausse, car, pour $u = \infty$, la vérification ne se fait pas.

Si $u > 4$, on a approximativement

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\theta_0^2}{16}\left(1 - \frac{7\lambda}{4au}\right). \tag{245}$$

On voit que *l'influence de la lame sur l'erreur d'isochronisme consiste en une très légère diminution de cette erreur.* Elle est pratiquement négligeable.

80. Erreurs d'encastrement. — La première formule (117) s'écrit, en négligeant $\frac{\lambda^2}{a^2}$,

$$j + i + i' = \frac{i w_0 + i' w_\lambda}{a}, \tag{246}$$

ou, dans le cas de la *lame uniforme*,

$$j + i + i' = \frac{\lambda}{au}(i U_1 + i' U_2). \tag{247}$$

La formule (133) donne, en négligeant toujours λ^2 et R^2 devant a^2 et remarquant que $\frac{h}{a}$ et $i + i' + j$ sont de l'ordre de $\frac{\lambda}{a}$,

$$Q_1 = \frac{i^2}{2}(v_0 - \lambda) - hi + \frac{i^2}{4} F_2 - \frac{h'}{48}. \tag{248}$$

Si la lame est uniforme, on calcule h et h' par les formules (127), (132), (169) et (170). En tenant compte de (239), on trouve, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T} = \frac{\lambda}{16a}\Bigg[& i^2\left(\frac{2U_1 - 3U - 3UU_1^2}{u} - 4UU_1 + U_1^2 - 3UU_1^3\right) \\ & + ij\left(\frac{U_1 - 4U - 3UU_1^2}{u} - 4UU_1 + 2U_1^2 - 3UU_1^3\right) \\ & + \frac{j^2}{2}\left(-U_2\frac{4 + 3U_1^2}{u} + 6U_1^2 + 3U_1^4\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{249}$$

Pour $u > 5$, on a approximativement

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\lambda}{16au}(3i^2 + 4ij + 2j^2). \tag{250}$$

Cette formule montre que si les angles i et j sont seulement de l'ordre du degré, *l'influence des erreurs d'encastrement sur la durée d'oscillation est extrêmement faible.*

81. Inertie et poids de la lame. — Bornons-nous au cas de la *lame uniforme* et négligeons toujours λ^2 et R^2 devant a^2.

En faisant $K = 1$ dans (182) et portant dans (135), on trouve, pour la *perturbation d'inertie*,

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m'}{2m}\frac{\lambda^2}{a^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{U_2}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{U - 3U_1}{2u^3} + \frac{3U_1^2}{2u^2}\right). \tag{251}$$

Si $u > 5$, on a pratiquement

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m'}{2m}\frac{\lambda^2}{a^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{2u^3}\right). \tag{252}$$

En faisant $K = 1$ dans (183) et portant dans (136), on trouve, pour *la perturbation due au poids de la lame*,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{8m}\frac{\lambda}{a}\left(2 - 6\frac{U_2}{u} + \frac{7}{u^2} - U_1^2\right) \tag{253}$$

ou, si $u > 5$,

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{8m}\frac{\lambda}{a}\left(2 - \frac{6}{u} + \frac{7}{u^2}\right). \tag{254}$$

On voit que *l'influence du poids de la lame est beaucoup plus grande que l'influence de son inertie.* La première est proportionnelle à $\frac{\lambda}{a}$, tandis que la seconde est proportionnelle au carré de ce rapport.

CHAPITRE VII.

PENDULE DE GRAVITÉ A SUSPENSION DIRECTE.

82. Condition de grande sensibilité. — Pour que le pendule soit *très sensible aux variations de g*, il faut et il suffit, d'après (63), que Q soit très petit. Or, en tenant compte de (35) et (36), la formule (45) peut s'écrire

$$Q = (a - a_1)\frac{z^2 + R^2}{z(z + a - \nu\lambda)}. \tag{255}$$

Cette quantité ne peut être très petite que si le facteur $a - a_1$ est très petit. Donc, *pour que le pendule soit très sensible aux variations de g, il faut que la distance a soit légèrement supérieure à la distance critique a_1*, c'est-à-dire *que le pendule soit très voisin de l'instabilité* (n° 9).

83. Position approchée des foyers. — Posons

$$a - a_1 = \varepsilon\lambda, \tag{256}$$

ε désignant un nombre positif très petit.

L'identité (33) nous apprend que l'une des racines z et z' est très voisine de $v_\lambda - a = w_0 - \varepsilon\lambda$, donc très voisine de w_0. Comme $w_0 > 0$, cette racine est la racine positive. Pour des commodités de notations, *nous appellerons dorénavant z la racine négative et z' la racine positive*, contrairement à la convention du n° 7. Autrement dit, F *sera le foyer supérieur et* F' *sera le foyer inférieur.*

Dans ces conditions, z' est voisin de w_0 et z voisin de $-\frac{R^2}{w_0}$. La formule (33) nous donne alors la valeur approchée

$$z' = w_0(1 + \varepsilon'), \tag{257}$$

en posant

$$\varepsilon' = \varepsilon\lambda\frac{\beta_1 w_0 - w_0^2 - R^2}{w_0(w_0^2 + R^2)} = \varepsilon\lambda\frac{\lambda - v_0 - w_\lambda - \dfrac{R^2}{w_0}}{w_0^2 + R^2}. \tag{258}$$

On a ensuite

$$z = -\frac{R^2}{w_0}(1 - \varepsilon'). \tag{259}$$

En portant dans (36), on a approximativement

$$K = -\frac{\varepsilon\lambda w_0}{w_0^2 + R^2} = \frac{\varepsilon\lambda}{z - z'}. \tag{260}$$

Puis, d'après (37),

$$K' = \frac{z' - z}{\beta_1}. \tag{261}$$

84. Valeur approchée du coefficient de sensibilité. — Si l'on porte (256) dans (255), on obtient

$$Q = \varepsilon\lambda\frac{z^2 + R^2}{z(z - w_0 + \varepsilon\lambda)}.$$

Si l'on remplace z par z', cette quantité devient

$$\frac{(w_0^2 + R^2)^2}{\beta_1 w_0^2}.$$

Elle n'est pas infiniment petite avec ε. Ceci nous prouve que, pour mesurer les variations de g, *c'est la vibration du foyer supérieur* F *qu'il faut utiliser* (¹).

Pour cette vibration, on a approximativement $Q = \varepsilon\lambda$; d'où

$$(262) \qquad G = \frac{G_2}{\varepsilon\lambda} = \frac{2W}{mg\lambda\varepsilon},$$

en ne gardant que la partie principale.

On vérifie bien que *ce coefficient de sensibilité devient infini quand* ε *tend vers zéro*. De plus, il est positif. Donc, *la durée d'oscillation augmente avec* g, contrairement à ce qui se passe avec le pendule ordinaire.

On voit aussi que *le coefficient de sensibilité est proportionnel à l'énergie de déformation de la lame*, pour une élongation donnée du pendule.

85. Dans le *cas de la lame uniforme*, $G_2 = \lambda\Gamma_2$ est donné par la seconde formule (165). D'autre part, la formule (260) nons montre que $k = K(1 - K)$ est infiniment petit avec ε. On peut donc réduire Γ_2 à son premier terme et l'on a

$$(263) \qquad G = \frac{1}{2\varepsilon}\left(U_1^2 + \frac{U_2}{u}\right).$$

Si l'on considère ε comme donné, on voit facilement que G est une fonction décroissante de u. On a donc intérêt à *prendre u aussi petit que possible* (²).

Si u est très petit, on a approximativement

$$z' = \frac{\lambda}{u^2} = -a, \qquad z = \frac{R^2}{a}.$$

(¹) C'est la *vibration parasite* du nº **16**.

(²) Il faut remarquer toutefois que ceci augmente la valeur absolue de a_1 et par conséquent la longueur du pendule. Pratiquement, on prend des pendules courts, pour qu'ils soient facilement transportables. De ce fait, on ne peut pas donner une très petite valeur à u.

Le foyer F′ est sensiblement en A et le foyer F est sensiblement à l'extrémité du pendule synchrone (*cf.* n° **68**).

En outre, la formule (263) se réduit à

$$G = \frac{1}{\varepsilon u^2} = \frac{-a}{a - a_1}. \tag{264}$$

86. Calcul approché des périodes. — La fréquence de l'*oscillation principale* est donnée par les formules (34), (260) et (257) :

$$n^2 = \varepsilon \frac{g\lambda}{R^2 + w_0^2}. \tag{265}$$

L'oscillation principale est d'autant plus lente que le pendule est plus sensible.

La fréquence de la *vibration parasite* est donnée par

$$n'^2 = \frac{g}{\beta_1}\left(1 + \frac{w_0^2}{R^2}\right). \tag{266}$$

Elle est de l'*ordre de grandeur de la fréquence du pendule simple de longueur* λ. Elle est donc *beaucoup plus rapide que l'oscillation principale* et, comme au n° **71**, s'amortit très rapidement.

Revenons à la formule (265), en supposant la *lame uniforme*, avec *u très petit*. On a approximativement

$$n^2 = g\frac{\varepsilon\lambda}{R^2 + a^2} = g\frac{\varepsilon\lambda}{al} = \frac{g}{l} + \frac{g\lambda}{alu^2}. \tag{267}$$

D'où, en tenant compte de (156),

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} + \frac{Ee^3 h}{12 mal\lambda}. \tag{268}$$

Si l'on appelle T et T′ les durées d'oscillation correspondant à g et g', on a

$$g' - g = l\pi^2\left(\frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2}\right). \tag{269}$$

On obtient exactement la *même formule que pour le pendule ordinaire à axe fixe* (1).

(1) Il ne faut pas oublier que l est négatif, de sorte qu'en réalité il y a un changement de signe.

Si $g' - g$ est infiniment petit, ceci s'écrit

$$\Delta g = -2 l \pi^2 \frac{\Delta T}{T^3},$$

formule identique à (61), si l'on tient compte de (267) et (264). Mais, il est bien entendu que les formules (267) à (269) ne sont valables que si u est infiniment petit.

87. Influence d'une variation de température. — La formule (60) devient, pour ε infiniment petit,

$$\frac{dT}{T} = \frac{\alpha' w_\lambda + \alpha\left(-\lambda + \lambda \frac{w_\lambda^2}{M_\lambda} - 4G_2\right) - \beta G_2}{2\varepsilon\lambda}. \tag{270}$$

On voit que l'*influence d'une variation de température sur la durée d'oscillation est asymptotiquement proportionnelle au coefficient de sensibilité.*

Voyons quelle est la *répercussion sur la mesure de* Δg.

Supposons que la température augmente de 1° entre la première et la deuxième expérience. *La correction à ajouter à la valeur expérimentale de* $\frac{\Delta g}{g}$ est donnée par

$$\frac{dg}{g} = -\frac{2}{G}\frac{dT}{T}$$

ou, d'après (262),

$$\frac{dg}{g} = \beta + \alpha\left[4 + \frac{\lambda}{G_2}\left(1 - \frac{w_\lambda^2}{M_\lambda}\right)\right] - \alpha' \frac{w_\lambda}{G_2}. \tag{271}$$

Elle est *indépendante du coefficient de sensibilité.*

Avec une *lame uniforme* la formule ci-dessus devient

$$\frac{dg}{g} = \beta + 2\frac{\alpha(uU_1^2 + 2U_2) - \alpha' U_2}{uU_1^2 + U_2}. \tag{272}$$

Si u est infiniment petit, on a

$$\frac{dg}{g} = \beta + 3\alpha - \alpha'. \tag{273}$$

Comme vérification, on peut obtenir directement cette dernière formule en différentiant (268) :

$$d\left(\frac{\pi^2}{T^2}\right) = -\frac{g\alpha'}{l} + \left(\frac{\pi^2}{T^2} - \frac{g}{l}\right)(\beta + 3\alpha - 2\alpha')$$

ou, en négligeant $\frac{\pi^2}{T^2}$ devant $\frac{g}{l}$,

$$d\left(\frac{\pi^2}{T^2}\right) = -\frac{g}{l}(\beta + 3\alpha - \alpha').$$

En se reportant à (269), on voit qu'il faut diminuer g' de $ld\left(\frac{\pi^2}{T^2}\right)$, c'est-à-dire augmenter g' de $g(\beta + 3\alpha - \alpha')$. C'est bien ce que donne la formule (273).

88. Lancement du pendule. — Dans le cas du *lancement par écart statique initial*, la formule (68) et la formule analogue donnent, d'après (260) et (261),

$$A = \frac{Q}{mg} \cdot \frac{FF' . \overline{BF'}}{\varepsilon\lambda}, \qquad A' = \frac{Q}{mg} \beta_1 \frac{\overline{FB}}{FF'}; \tag{274}$$

d'où

$$\frac{A}{A'} = \frac{\overline{BF'}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{FF'}^2}{\varepsilon\lambda\beta_1}. \tag{275}$$

On voit que si B n'est pas très voisin de F', *l'oscillation principale a*, comme il convient, *une amplitude beaucoup plus grande que la vibration parasite*.

Bien entendu, pour éviter complètement cette dernière, il faut *attaquer le pendule au foyer supérieur* F.

Dans le *cas du choc*, la formule (73) donne

$$\frac{A}{A'} = \frac{\overline{BF'}}{\overline{FB}} \cdot \frac{R . FF'}{z'\sqrt{\varepsilon\lambda\beta_1}}. \tag{276}$$

Le rapport de cette fraction à la fraction (275) est

$$\frac{R\sqrt{\varepsilon\lambda\beta_1}}{R^2 + z'^2}.$$

Il est très petit. Donc, il faut *éviter le lancement par choc*.

89. Forme de la lame. — Si le pendule est écarté statiquement, la formule (67) nous apprend que $Y = \frac{Q}{mg}$ est très petit vis-à-vis de θ, pourvu que b ne soit pas très voisin de v_λ, c'est-à-dire de $a + z'$. Dans ces conditions, l'équation (77) se réduit pratiquement à

$$(277) \qquad y = \theta(w - w_0).$$

Cette équation est *approximativement valable sous la seule condition qu'on n'attaque pas le pendule très près du foyer inférieur* F'. On peut, en particulier, l'appliquer *pendant l'oscillation normale du pendule.*

D'après les propriétés générales de la fonction w (n° **3**), la courbe représentée par l'équation (277) est partout concave vers les y positifs, si l'on suppose $\theta > 0$.

Dans le cas de la *lame uniforme*, on a, d'après (157),

$$(278) \qquad \omega y = \frac{\theta}{\operatorname{sh} u}(\operatorname{ch} \omega x - 1).$$

La lame se déduit d'un arc de chaînette par amplification des ordonnées dans le rapport $\frac{\theta}{\operatorname{sh} u}$.

Si u est très petit, on a approximativement *la parabole*

$$x^2 = 2\frac{\lambda}{\theta}y.$$

90. Fatigue de la lame. — En se plaçant dans les mêmes conditions qu'au numéro précédent, la formule (78) se réduit à

$$(279) \qquad T' = \theta mg\frac{ew}{2I} = \theta E\frac{e}{2}\frac{w}{M}.$$

Bien entendu, on ne peut en étudier la variation le long de la lame que si l'on connaît la constitution de celle-ci. Par exemple, dans le cas de la *lame uniforme*, on a, avec la notation du n° **51**,

$$(280) \qquad T' = \theta\sqrt{3ET}\frac{\operatorname{ch} \omega s}{\operatorname{sh} u}.$$

La fatigue est maximum à l'encastrement dans la tige du pendule. Elle vaut, en ce point, $\frac{\theta\sqrt{3ET}}{\operatorname{th} u}$.

91. Souplesse. — La formule (82) nous donne, pour ε infiniment petit,

$$S = -1.$$

Ce résultat s'explique aisément, si l'on considère que le mouvement du pendule est infiniment lent (n° **86**). Son énergie cinétique est infiniment petite; donc, le travail total $W + W'$ est infiniment petit et le rapport $\frac{W'}{W}$ est infiniment voisin de -1.

La conclusion pratique est qu'avec un pendule de gravité très sensible, *l'amortissement est beaucoup plus rapide qu'avec un pendule ordinaire.*

92. Perturbations. — La forme générale (104) se réduit asymptotiquement à

$$\frac{f}{z - z'} = -\frac{n^2}{\varepsilon\lambda}\left(\varepsilon_2 w_0 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \theta \int_0^\lambda w w'' \, ds - \int_0^\lambda \varepsilon_4 w'' \, ds\right), \tag{281}$$

en tenant compte de (81). Le second membre constitue l'accélération perturbatrice subie par θ. En lui appliquant la théorie générale des perturbations, *on peut calculer l'effet d'une force perturbatrice* quelconque sur la durée d'oscillation ou sur l'amortissement. La présence du facteur $\frac{1}{\varepsilon\lambda}$ nous montre que *cet effet est proportionnel au coefficient de sensibilité.*

93. Erreur d'isochronisme. — La formule (112) se réduit à

$$Q' = a - F = F_4 - w_\lambda,$$

avec

$$F_4 = \int_0^\lambda w'^4 \, ds. \tag{282}$$

La formule (111) donne ensuite, d'après (262),

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\theta_0^2}{16} GC, \tag{283}$$

en posant

$$(284) \qquad C = \frac{w_\lambda - F_4}{G_2} = \frac{w_\lambda - F_4}{w_\lambda - F_2} = \frac{w_0 + \int_0^\lambda w'(1 - w'^3)\,ds}{w_0 + \int_0^\lambda w'(1 - w')\,ds}.$$

Comme w' croît de o à 1, quand s croît de o à λ (n° **3**), les deux intégrales ci-dessus sont positives. On a de plus

$$C - 1 = \frac{\int_0^\lambda w'^2(1 - w'^2)\,ds}{G_2} > 0.$$

Donc, $C > 1$. D'où la conclusion suivante :

L'erreur d'isochronisme du pendule de gravité est égale à l'erreur d'isochronisme du pendule simple, multipliée par le coefficient de sensibilité, puis par un coefficient > 1 *et enfin changée de signe.*

Dans le cas particulier de la *lame uniforme*, le coefficient C a pour valeur, d'après (170),

$$(285) \qquad C = \frac{3}{4}\,\frac{2U_2 + U_2 U_1^2 - u U_1^4}{U_2 + u U_1^2} = \frac{3}{8}\,\frac{\operatorname{sh} 4u - 4u}{\operatorname{sh}^2 u(\operatorname{sh} 2u + 2u)}.$$

On démontre aisément que C est une *fonction croissante* de u. Elle vaut 1 pour $u = 0$ et $\frac{3}{2}$ pour $u = \infty$.

94. Erreurs d'encastrement. — La formule (118) nous montre que si $iw_0 - ai'$ n'est pas très petit, *l'écart du pendule avec la verticale, dans sa position d'équilibre, est approximativement proportionnel au coefficient de sensibilité.* Il peut donc être très grand, même si les angles i et i' sont petits.

On peut *régler l'inclinaison du support* de telle manière que le pendule soit sensiblement vertical dans sa position d'équilibre. Dans ce cas, *les angles i, i' et j ont le même ordre de grandeur.*

95. Evaluons maintenant la *répercussion sur la durée d'oscillation.*

Si le pendule n'est pas réglé (n° **94**), la formule (133) donne

$$Q_1 = j^2\frac{a+F_4}{4} = -\frac{j^2}{4}CG_2,$$

d'après (284).

D'où

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{j^2}{4}GC. \tag{286}$$

Comme j contient le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$, on voit que *la perturbation est une avance proportionnelle au cube du coefficient de sensibilité.* Elle peut donc être très grande.

Supposons maintenant le *pendule réglé;* de sorte que j a le même ordre de grandeur que i et i'. La formule (133) devient

$$4Q_1 = a(i+i'+j)^2 + i^2F_2 - \frac{h'}{12}.$$

D'autre part, la formule (132) se réduit à

$$h' = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}\right)_{Y=-i,\theta=j} = 12A_0j^2 - 6A_1ij + 2A_2i^2,$$

en posant

$$F = \Sigma A_p K^p. \tag{287}$$

On a dès lors :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{-a\lambda(i+i'+j)^2 + i^2F_2 - A_0j^2 + \frac{1}{2}A_1ij - \frac{1}{6}A_2i^2}{4\varepsilon\lambda}. \tag{288}$$

Cette fois, *la perturbation n'est plus proportionnelle qu'au coefficient de sensibilité.*

Dans le cas de la *lame uniforme*, on trouve, en se reportant à (170) pour les coefficients A_p,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4\varepsilon}\Bigg[&-\frac{U_2}{u}(i+i'+j)^2 + \frac{i^2}{4}\left(\frac{U_1+U_2-3UU_1^2}{u} + U_1^2 - 3UU_1^3\right)\\ &+\frac{ij}{4}\left(\frac{2U_2+U_1-3UU_1^2}{u} - 3UU_1^3\right) + \frac{j^2}{8}\left(\frac{2U_2-3U_2U_1^2}{u} + 3U_1^4\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{289}$$

Si le pendule est bien symétrique par rapport à l'encastrement de la lame dans la tige, on a $i' = 0$ et la formule (117) donne

$$i = \frac{\varepsilon\lambda}{w_0} j. \tag{290}$$

Le rapport $\frac{i}{j}$ étant infiniment petit, *on peut appliquer la formule* (286), à laquelle se réduit d'ailleurs la formule (288) si l'on ne garde que les termes en j^2.

96. Influence de l'inertie et du poids de la lame. — Dans le cas de la *lame uniforme*, l'influence de *l'inertie* est, d'après (182),

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m'\lambda^2}{4m} \cdot \frac{3U_1^2 + \dfrac{U - 3U_1}{u}}{R^2 u^2 + \lambda^2 U_1^2}. \tag{291}$$

Elle est *indépendante du coefficient de sensibilité.*

L'influence du *poids* est, d'après (136),

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{m} \frac{J}{\varepsilon\lambda}; \tag{292}$$

soit, dans le cas de la *lame uniforme* et d'après (183),

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{8m\varepsilon}\left(\frac{1}{u^2} - U_1^2\right). \tag{293}$$

Elle est *proportionnelle au coefficient de sensibilité.*

Examinons *l'influence d'une variation de température* sur la perturbation (292). On a, en se bornant à la partie principale,

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = \frac{dT}{T} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Le premier terme est donné par (270). Calculons le deuxième. On a

$$\varepsilon = \frac{a + w_\lambda}{\lambda}.$$

D'où

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\alpha' a + dw_\lambda}{\varepsilon\lambda},$$

en se bornant toujours à la partie principale. Or, on a, d'après (52) et (57),

$$dw_\lambda = \alpha\lambda\left(1 - \frac{w_\lambda^2}{M_\lambda}\right) + (\beta + 4\alpha)G_2.$$

Donc,

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\alpha' a + \alpha\lambda\left(1 - \frac{w_\lambda^2}{M_\lambda}\right) + (\beta + 4\alpha)G_2}{\varepsilon\lambda}.$$

En comparant avec (270), on voit que

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -2\frac{dT}{T}.$$

Donc,

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = 3\frac{dT}{T}.$$

D'où

$$\frac{d(\Delta T)}{T} = 3\frac{\Delta T}{T}\cdot\frac{dT}{T}. \tag{294}$$

Le rapport de la nouvelle perturbation thermique à l'ancienne est égal à $-\frac{3m'}{m\varepsilon}\frac{J}{\lambda}$. *Il n'est très petit qu'à la condition que le rapport* $\frac{m}{m'}$ *soit beaucoup plus grand que le coefficient de sensibilité.*

97. Correction a la loi de flexion plane et frottement interne. — Dans l'application de la formule générale (141), signalons d'abord que l'on doit annuler K dans la formule (139), ce qui la simplifie. Il faut ensuite remarquer que la présence du dénominateur $Q = \varepsilon\lambda$ rend la *perturbation proportionnelle au coefficient de sensibilité*. Il semble donc que le pendule de gravité pourrait, au point de vue de la détermination expérimentale des coefficients a_q, rendre des services analogues à ceux qu'il rend pour la mesure des variations de g.

Les mêmes observations s'appliquent aux formules (147) et (149), qui concernent l'influence du frottement interne.

98. Dissymétrie de la lame. — Reprenons la formule (154), en supposant $i' = 0$. En se rappelant que i est négligeable devant j et ajoutant à (154) la perturbation (286), nous obtenons une perturbation globale donnée par la formule

$$\frac{4}{G}\frac{\Delta T}{T} = -Cj^2 + \frac{g_1}{G_2}\left(-1 + \frac{2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1}{\pi} - 4\frac{j\cos\varphi_1}{\theta_0}\right)$$

ou, d'après (153), et en supposant ε constant (n° **44**) ([1]),

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{G}{4}\left[\frac{2\varepsilon}{\pi}\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{\pi}(2\pi - 1)\sin 2\varphi_1 + \frac{C\theta_0^2}{2}\cos 2\varphi_1 - \varepsilon - \frac{C\theta_0^2}{2}\right]. \tag{295}$$

La dérivée du crochet par rapport à φ_1 est

$$D = \frac{2\varepsilon}{\pi} + \frac{2\varepsilon}{\pi}(2\pi - 1)\cos 2\varphi_1 - C\theta_0^2 \sin 2\varphi_1.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\varepsilon(2\pi - 1)}{C\theta_0^2\pi}, \tag{296}$$

on a

$$D = \frac{C\theta_0^2}{\cos\alpha}\left[\frac{\sin\alpha}{2\pi - 1} - \sin(2\varphi_1 - \alpha)\right].$$

Supposons, pour fixer les idées, ε positif ([2]). L'angle α est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$. Appelons β l'angle, compris entre o et α, dont le sinus est égal à $\frac{\sin\alpha}{2\pi - 1}$. La dérivée D s'annule pour

$$\varphi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{et} \quad \varphi_1 = \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

Elle est positive quand φ_1 est compris entre ces deux racines. Il s'ensuit que $\frac{\Delta T}{T}$ est *maximum pour*

$$j = -\theta_0 \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \tag{297}$$

et *minimum pour*

$$j = \theta_0 \cos\frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{298}$$

([1]) Si ε n'est pas constant, il faut le remplacer par $\frac{g_1(\varepsilon)}{G_2}$ (n° **38**). Ne pas confondre cet ε avec celui de la formule (256).

([2]) Autrement dit, *le module de Young est plus grand à droite qu'à gauche.*

Il convient toutefois de faire la remarque suivante. *Dans la pratique*, il est vraisemblable d'admettre que ε est petit vis-à-vis de θ_0 (¹). Donc, les angles α et β sont petits. Il s'ensuit que l'angle (297) est petit vis-à-vis de θ_0, tandis que l'angle (298) est au contraire très voisin de θ_0. *Le maximum de la durée d'oscillation est donc facile à obtenir expérimentalement;* tandis que *le minimum ne serait obtenu qu'en déséquilibrant le pendule de telle manière que son oscillation se fasse presque tout entière du même côté de la verticale.*

Si la dissymétrie de la lame est très accentuée, il peut arriver que α soit assez grand pour *que le maximum soit lui aussi impossible à atteindre pratiquement.*

Ces deux cas ont été constatés expérimentalement par M. Holweck (²).

Ajoutons qu'il est aisé de reconnaître, d'après l'expérience, *le côté correspondant au plus grand module de Young*. C'est en effet *le côté opposé à celui vers lequel il faut dévier la position d'équilibre pour faire croître la durée d'oscillation.*

Si l'on a mesuré expérimentalement la valeur de j correspondant au maximum, ainsi que l'amplitude θ_0, on peut facilement calculer ε. On calcule l'angle γ donné par

$$\sin\gamma = -\frac{j}{\theta_0} \tag{299}$$

et compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. On a ensuite

$$\sin(2\gamma - \alpha) = \frac{\sin\alpha}{2\pi - 1};$$

d'où l'on déduit $\operatorname{tang}\alpha$ et, d'après (296),

$$\varepsilon = \frac{C\pi}{2}\theta_0^2 \frac{\sin 2\gamma}{1 + (2\pi - 1)\cos 2\gamma}. \tag{300}$$

(¹) A moins que l'on ne prenne intentionnellement des oscillations de très faible amplitude. Mais leur observation serait sans doute difficile.

(²) Je dois dire que c'est d'ailleurs M. Holweck qui m'a donné l'idée de faire l'étude théorique de cette question, en me communiquant fort aimablement ses résultats expérimentaux, à la suite de la séance du 6 mai 1932 de la *Société française de Chronométrie*.

Si γ est très petit, on a approximativement

$$\varepsilon = -\frac{C}{2} j \theta_0. \tag{301}$$

Signalons encore que le sens de variation de T en fonction de j est *indépendant du coefficient de sensibilité*, puisque ce coefficient intervient seulement comme un facteur constant dans la formule (295). Mais, *le pendule de gravité est néanmoins beaucoup plus commode que le pendule ordinaire pour étudier ces phénomènes;* parce qu'il amplifie énormément la perturbation et rend, par conséquent, ses variations beaucoup plus nettes.

99. J'ai fait une théorie analogue à la précédente pour l'influence simultanée du déséquilibre et des dissymétries dans le frottement interne. Mais, pour les raisons indiquées au n° **46**, il ne me paraît pas utile de la publier maintenant, car il faudrait d'abord évaluer expérimentalement l'importance du frottement interne.

CHAPITRE VIII.

PENDULE DE GRAVITÉ A LAME RENVERSÉE.

100. Condition d'existence des vibrations. — La théorie générale faite dans les chapitres précédents continue à s'appliquer au cas actuellement envisagé, sous la seule condition de changer g en $-g$.

Les inégalités établies au n° **3** *ne subsistent pas*, du fait que *la fonction* M *est maintenant négative* et l'on ne peut plus rien dire *a priori* concernant les signes de v_0, v_λ, w_0, w_λ, β_1.

Reprenons le raisonnement du n° **9**. La formule (34), où l'on change g en $-g$, nous apprend cette fois que l'on doit avoir

$$K < 0, \qquad K' > 0. \tag{302}$$

Les quantités $a + z' - v_\lambda$ et $a + z - v_\lambda$ doivent être de signes contraires. Comme la première est la plus petite, on a

$$a + z' - v_\lambda < 0, \qquad a + z - v_\lambda > 0; \tag{303}$$

d'où

(304) $$\beta_1 < 0,$$

d'après (302). L'identité (33) nous apprend ensuite que l'on doit avoir

(305) $$a + \varpi_\lambda < 0.$$

Réciproquement, supposons que l'on ait (304) et (305). D'après (33), $a + z - \varphi_\lambda$ et $a + z' - \varphi_\lambda$ sont de signes contraires; donc, on a (303) et (302); n^2 et n'^2 sont positifs; les deux vibrations existent.

En résumé, on voit qu'il y a, cette fois, *deux conditions d'existence des vibrations. La première*, qui est (304), *fait uniquement intervenir la lame et le poids du pendule*. La seconde signifie *que la distance a doit être algébriquement inférieure à la distance critique* $a_1 = -\varpi_\lambda$ (1).

Si l'on veut pouvoir donner des valeurs positives à a, c'est-à-dire avoir véritablement un *pendule renversé*, il faut donc encore que l'on ait

(306) $$\varpi_\lambda < 0.$$

101. Cas de la lame uniforme. — On peut garder les formules du n° **47**, en changeant simplement ω en $i\omega$, donc u en iu. En particulier,

---

(1) La *condition de stabilité* peut aussi s'obtenir en écrivant que *le potentiel est minimum*. Or, ce potentiel a pour valeur (n° **23**)

$$V = W + W' = \frac{mg}{2}\left[\int_0^\lambda \frac{(Y\varphi + \theta\varpi)^2}{M}\,ds + \int_0^\lambda (Y\varphi_1 + \theta\varphi_2)^2\,ds + a\theta^2\right]$$

ou, d'après (81),

$$V = \frac{mg}{2}\left[Y^2\beta_1 + \theta^2(a + \varpi_\lambda)\right],$$

Y étant donné par (23), en fonction de β et θ. Pour que cette fonction soit maximum pour $\beta = \theta = 0$, il faut et il suffit que les coefficients de Y^2 et de θ^2 soient tous deux négatifs, ce qui donne immédiatement les conditions (304) et (305), puisque nous supposons ici que g est négatif.

Si g est positif, on a les conditions opposées et l'on retrouve les conclusions du n° **9**.

on a

$$\beta_1 = \lambda \left(1 - 2 \frac{\operatorname{tang} \frac{u}{2}}{u} \right). \tag{307}$$

L'inégalité (304) devient

$$\operatorname{tang} \frac{u}{2} > \frac{u}{2}. \tag{308}$$

Soit x_n la $n^{\text{ième}}$ racine positive de l'équation

$$\operatorname{tang} x = x,$$

en comptant la racine $x_0 = 0$. Pour que l'inégalité (308) soit vérifiée, il faut et il suffit qne u satisfasse à l'une des inégalités

$$2x_n < u < (2n+1)\pi. \tag{309}$$

On a ensuite

$$a_1 = -w_\lambda = \frac{\lambda}{u \operatorname{tang} u}. \tag{310}$$

Si l'on veut que a puisse être positif, il faut, d'après (306), que tang$u$ le soit aussi. En tenant compte de (309), ceci exige que l'on ait

$$2x_n < u < 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Cela n'est possible que si

$$x_n - n\pi < \frac{\pi}{4}.$$

Or, la différence $x_n - n\pi$ augmente avec n. Pour $n = 1$, elle vaut environ $4,49 - \pi = 1,35$, nombre supérieur à $\frac{\pi}{4}$. La seule valeur acceptable est donc $n = 0$ et l'on doit avoir en définitive

$$u < \frac{\pi}{2},$$

ou, d'après (156),

$$mg < \frac{\pi^2 E e^3 h}{48\lambda^2}. \tag{311}$$

Ceci donne une *limite supérieure que ne doit pas dépasser le poids du* *pendule, pour une lame donnée.* Pour la suspension directe, aucune restriction de ce genre n'existait ([1]).

102. Extension des formules du chapitre précédent. — La condition (305) nous montre qu'il faut poser cette fois

$$a_1 - a = \varepsilon\lambda. \tag{312}$$

En comparant avec (256), on voit que ceci revient à *changer* ε *en* $-\varepsilon$. Moyennant ce changement, *toutes les formules du chapitre précédent sont applicables.* Nous ferons seulement les observations suivantes.

D'abord, comme nous ne connaissons pas le signe de w_0, nous ne savons plus si c'est le foyer supérieur ou le foyer inférieur qui donne l'oscillation très sensible à la variation de g. Voici cependant un cas très général où l'on sait à quoi s'en tenir. C'est le *cas de la lame symétrique* (n° **4**). D'après (304) et (20), on sait que

$$v_0 > \frac{\lambda}{2} > 0.$$

Donc, $v_\lambda < 0$ et, d'après (16) et (306), on en conclut que $w_0 < 0$.

([1]) Si l'on ne s'impose pas la condition que a soit positif, la condition *théorique* de stabilité est que l'une des inégalités (309) soit vérifiée. Pour $n = 0$, on a $u < \pi$; ce qui donne une limite supérieure du poids du pendule égale à 4P, en appelant P la limite (311).

En faisant ensuite $n = 1$, on trouve que le pendule peut encore être stable quand son poids est compris entre 32,7P et 36P, tandis qu'il est instable lorsque son poids est compris entre 4P et 32,7P. En faisant $n = 2, 3, \ldots$, on obtiendrait de même une infinité d'intervalles de stabilité, qui seraient d'ailleurs de plus en plus resserrés.

Une telle conclusion est *physiquement* inadmissible, car si le pendule est instable pour un certain poids, il doit l'être *a fortiori* pour un poids supérieur. L'explication de ce paradoxe est la même que celle de la théorie du *flambement* (*cf.* Bouasse, *Résistance des matériaux*, n^{os} **139** et **140**). Si u est grand, la forme théorique de la lame est une sinusoïde présentant plusieurs ondulations. Mais, sa courbure en certains points est trop grande pour qu'on puisse considérer la déformation locale comme infiniment petite et la théorie mathématique de l'élasticité n'est plus applicable.

Il semble dès lors que *la véritable limite de stabilité soit* 4P.

Dans ces conditions, *le foyer de grande sensibilité est le foyer supérieur*, comme au n° **83**.

Le coefficient de sensibilité est toujours donné par (262), avec le simple changement de ε en $-\varepsilon$. Comme G_2 est maintenant négatif, par suite de changement de signe de M, on voit que G *est toujours positif*.

Au n° **93**, nous avons toujours la formule (283). Le coefficient C est toujours positif; mais, nous ne pouvons rien dire, en général, du signe de $C-1$, car nous ne savons pas si w' reste compris entre 0 et 1 quand s croît de 0 à λ.

103. Cas de la lame uniforme. — Les formules (159) deviennent, par le changement de u en iu,

$$(313)\qquad v_0 = -v_\lambda = \frac{\lambda}{u}\operatorname{tang}\frac{u}{2},\qquad w_0 = -\frac{\lambda}{u\sin u},\qquad w_\lambda = -\frac{\lambda}{u\operatorname{tang}u}.$$

On a ensuite, en faisant le même changement dans (263) et changeant en outre ε en $-\varepsilon$,

$$(314)\qquad G = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{\sin^2 u} + \frac{\cot u}{u}\right).$$

L'angle u étant aigu (n° **101**), cette fonction est décroissante et, comme au n° **85**, on a intérêt à *prendre u aussi petit que possible*.

Si u est très petit, on a approximativement

$$z' = -\frac{\lambda}{u^2} = -a,\qquad z = \frac{R^2}{a};$$

les foyers ont la même position qu'au n° **85**.

Dans la formule (268), il faut changer g en $-g$; mais la longueur l est ici positive, tandis qu'au n° **86** elle était négative; de sorte qu'en valeur absolue rien n'est changé. Et l'on peut en dire autant de la formule (269).

La formule (272) devient

$$(315)\qquad \frac{dg}{g} = \beta + 2\,\frac{2\alpha(u+\sin 2u) - \alpha'\sin 2u}{2u+\sin 2u}.$$

L'équation (278) devient, en changeant ω en $i\omega$ et u en iu,

$$\omega y = \frac{\theta}{\sin u}(1 - \cos\omega x). \tag{316}$$

On a un *arc de sinusoïde*, au lieu d'un arc de chaînette.

Dans la formule (280), on doit remplacer $\operatorname{ch}\omega s$ par $\cos\omega s$ et $\operatorname{sh} u$ par $\sin u$, en donnant à T sa valeur absolue.

La formule (285) devient

$$C = \frac{3}{8}\,\frac{4u - \sin 4u}{\sin^2 u(2u + \sin 2u)}. \tag{317}$$

On peut prouver que cette fonction est *décroissante*. Elle vaut 1 pour $u = 0$ et $\frac{3}{4}$ pour $u = \frac{\pi}{2}$. En comparant avec le n° **93**, on voit que, pour un coefficient de sensibilité donné, *l'erreur d'isochronisme est plus petite avec le pendule renversé qu'avec le pendule direct.*

La formule (289) doit être remplacée par la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{4\varepsilon}\Bigg[& -\frac{\cot u}{u}(i + i' + j)^2 + \frac{i^2}{4}\left(\frac{\cot\frac{u}{2}}{u} - \frac{3\tan\frac{u}{2}}{u\sin^2 u} + \frac{1}{\sin^2 u} - \frac{3\tan\frac{u}{2}}{\sin^3 u}\right) \\ & + \frac{ij}{4}\left(\frac{1 + 2\cos u}{u\sin u} - \frac{3\tan\frac{u}{2}}{u\sin^2 u} - \frac{3\tan\frac{u}{2}}{u\sin^3 u}\right) \\ & + \frac{j^2}{8}\left(\cos u\,\frac{2\sin^2 u + 3}{u\sin^3 u} - \frac{3}{\sin^4 u}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{318}$$

On a de même, au lieu de (291) et (293),

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m'\lambda^2}{4m}\cdot\frac{3 - \frac{\sin u}{u}(4 - \cos u)}{\lambda^2 + R^2 u^2 \sin^2 u}, \tag{319}$$

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{m'}{8m\varepsilon}\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{\sin^2 u}\right). \tag{320}$$

CHAPITRE IX.

EXEMPLES DE LAME NON UNIFORME.

104. Lame percée d'un trou rectangulaire. — L'exemple le plus fréquemment rencontré dans la pratique est celui d'une lame percée d'un trou. Ce trou est généralement *circulaire* (¹). Malheureusement, l'intégration de l'équation (9) paraît impossible dans ce cas (²). Elle est, au contraire, relativement facile, si le trou est *rectangulaire*, les côtés du rectangle étant parallèles aux bords de la lame.

Soit $h - h'$ la largeur du trou et soient s_0 et $s_1 = s_0 + p$ les abscisses de ses côtés horizontaux. Pour $s < s_0$ et $s > s_1$, M a la valeur (156). Pour $s_0 < s < s_1$, M a une valeur plus petite M′, obtenue en remplaçant h par h' dans (156). Nous appellerons ω' la valeur correspondante de ω.

Calculons les fonctions v et w, en supposant la *lame renversée* (³).

Pour $s < s_0$, on a

$$v = A \cos \omega s + B \sin \omega s. \tag{321}$$

Pour $s_0 < s < s_1$, on a

$$v = A' \cos \omega'(s - s_0) + B' \sin \omega'(s - s_0). \tag{322}$$

En écrivant que les fonctions v et v' sont *continues* pour $s = s_0$, on trouve

$$A' = A \cos \omega s_0 + B \sin \omega s_0, \qquad B' = \frac{\omega}{\omega'}(-A \sin \omega s_0 + B \cos \omega s_0). \tag{323}$$

Pour $s > s_1$, on a

$$v = A'' \cos \omega(s - s_1) + B'' \sin \omega(s - s_1), \tag{324}$$

(¹) C'est le cas du pendule *Holweck-Lejay*.

(²) On peut, en principe, employer la méthode des approximations successives. Mais, dès la première approximation, les calculs sont très compliqués.

(³) Pour la suspension directe, on aurait des calculs analogues. Les fonctions circulaires seraient simplement remplacées par des fonctions hyperboliques.

avec

$$A'' = A'\cos\omega' p + B'\sin\omega' p, \qquad B'' = \frac{\omega'}{\omega}(-A'\sin\omega' p + B'\cos\omega' p)$$

ou

$$(325)\quad \left\{\begin{aligned} A'' &= A\left(\cos\omega s_0\cos\omega' p - \frac{\omega}{\omega'}\sin\omega s_0\sin\omega' p\right) \\ &\quad + B\left(\sin\omega s_0\cos\omega' p + \frac{\omega}{\omega'}\cos\omega s_0\sin\omega' p)\right), \\ B'' &= -A\left(\sin\omega s_0\cos\omega' p + \frac{\omega'}{\omega}\cos\omega s_0\sin\omega' p\right) \\ &\quad + B\left(\cos\omega s_0\cos\omega' p - \frac{\omega'}{\omega}\sin\omega s_0\sin\omega' p\right). \end{aligned}\right.$$

En écrivant que $v' = -1$ pour $s = 0$ et $s = \lambda$, nous obtenons

$$(326)\qquad B = -\frac{1}{\omega},$$

$$(327)\qquad A = \frac{\left\{\begin{aligned} &-\cos\omega' p\cos\omega(\lambda - p) \\ &+\sin\omega' p\left[\frac{\omega}{\omega'}\cos\omega s_0\sin\omega(\lambda - s_1) + \frac{\omega'}{\omega}\sin\omega s_0\cos\omega(\lambda - s_1)\right] + 1\end{aligned}\right\}}{\omega D},$$

en posant

$$(328)\qquad \begin{aligned} D = {}&\cos\omega' p\sin\omega(\lambda - p) \\ &+ \sin\omega' p\left[-\frac{\omega}{\omega'}\sin\omega s_0\sin\omega(\lambda - s_1) + \frac{\omega'}{\omega}\cos\omega s_0\cos\omega(\lambda - s_1)\right].\end{aligned}$$

On a maintenant

$$(329)\qquad \left\{\begin{aligned} v_0 &= A, \\ v_\lambda &= \frac{\left\{\begin{aligned} &\cos\omega' p\cos\omega(\lambda - p) \\ &-\sin\omega' p\left[\frac{\omega}{\omega'}\sin\omega s_0\cos\omega(\lambda - s_1) + \frac{\omega'}{\omega}\cos\omega s_0\sin\omega(\lambda - s_1)\right] - 1\end{aligned}\right\}}{\omega D}.\end{aligned}\right.$$

Comme vérification, pour $\lambda - s_1 = s_0$, on a

$$(330)\quad -v_\lambda = v_0 = \frac{1}{\omega}\,\frac{-\cos\omega' p\cos\omega(\lambda - p) + \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega}\right)\sin\omega' p\sin\omega s_0\cos\omega s_0 + 1}{\cos\omega' p\sin\omega(\lambda - p) + \sin\omega' p\left(\frac{\omega'}{\omega}\cos^2\omega s_0 - \frac{\omega}{\omega'}\sin^2\omega s_0\right)}.$$

La fonction w nous est donnée par des formules analogues à (321),

(322) et (324); mais, on a cette fois

$$(331)\qquad B = 0, \qquad A = \frac{-1}{\omega D}.$$

D'où

$$(332)\qquad \left\{ \begin{aligned} w_0 &= \frac{-1}{\omega D}, \\ w_\lambda &= \frac{\left\{ \begin{aligned} &-\cos\omega' p \cos\omega(\lambda - p) \\ &+\sin\omega' p \left[\frac{\omega}{\omega'} \sin\omega s_0 \cos\omega(\lambda - s_1) + \frac{\omega'}{\omega}\cos\omega s_0 \sin\omega(\lambda - s_1) \right] \end{aligned} \right\}}{\omega D}. \end{aligned} \right.$$

On vérifie facilement l'identité (16). De plus, pour $p = 0$ ou bien $\omega = \omega'$, on retrouve les formules (313).

105. Calculons le *coefficient de sensibilité*, en nous bornant au cas du *pendule de gravité*. Il faut évaluer l'intégrale

$$G_2 = \int_0^\lambda \frac{w^2}{M}\, ds.$$

On doit décomposer l'intervalle d'intégration en trois intervalles partiels, séparés par s_0 et s_1. Le calcul est un peu long, mais ne présente aucune difficulté. On trouve

$$(333)\qquad \begin{aligned} 2D^2 G_2 = {} & s_0 + p\left(\frac{\omega'^2}{\omega^2}\cos^2\omega s_0 + \sin^2\omega s_0\right) \\ & + (\lambda - s_1)\left[\cos^2\omega' p + \left(\frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega}{\omega'}\right)\frac{\sin 2\omega' p \sin 2\omega s_0}{2} \right. \\ & \left. \qquad + \sin^2\omega' p \left(\frac{\omega'^2}{\omega^2}\cos^2\omega s_0 + \frac{\omega^2}{\omega'^2}\sin^2\omega s_0\right)\right] \\ & + \frac{\sin 2\omega(\lambda - p)\cos^2\omega' p - \sin^2\omega' p \sin 2\omega s_0 \cos 2\omega(\lambda - s_1)}{2\omega} \\ & + \frac{\sin 2\omega' p}{4\omega'}[\cos 2\omega(\lambda - p) - \cos 2\omega(\lambda - s_1)] \\ & + \frac{\omega' \sin 2\omega' p}{4\omega^2}[\cos 2\omega(\lambda - p) + \cos 2\omega(\lambda - s_1)] \\ & + \frac{\sin^2\omega' p \sin 2\omega(\lambda - s_1)}{2\omega}\left(\frac{\omega^2}{\omega'^2}\sin^2\omega s_0 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}\cos^2\omega s_0\right). \end{aligned}$$

Comme vérification, pour $p = 0$ ou $\omega = \omega'$, on retrouve la formule (314).

106. Les formules précédentes sont évidemment très compliquées et se prêteraient difficilement à une discussion générale. Il y aurait lieu de voir ce que devient la condition de stabilité (304) et de chercher, par exemple, la limite supérieure que ne doit pas dépasser la largeur du trou pour que cette condition soit remplie ([1]). Il serait également intéressant de voir quelle est l'*influence du trou sur le coefficient de sensibilité* et aussi *sur la valeur de la distance critique* a_1. Mais, une telle étude paraît sinon inextricable, du moins tout à fait rébarbative. Le seul parti que l'on puisse tirer des formules ci-dessus semble être de faire des applications numériques.

107. Lame percée d'un trou en forme de losange. — Nous supposerons que deux sommets opposés de ce losange se trouvent au milieu des bases supérieure et inférieure de la lame. *Prenons le milieu de la lame pour origine des s.* On a

$$M = M_0(1 + k|s|),$$

k désignant une constante positive.

Posons

$$\frac{1}{M_0} = \omega^2, \qquad x = \frac{2\omega}{k}\sqrt{1 + k|s|}. \tag{334}$$

L'équation (9) devient ([2])

$$\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dv}{dx} + v = 0. \tag{335}$$

Son intégrale générale est

$$v = x[AJ_1(x) + BY_1(x)], \tag{336}$$

([1]) Signalons simplement que, dans le cas d'un trou concentrique à la lame, le pendule est certainement stable si l'on a à la fois

$$\omega\lambda < \frac{\pi}{2}, \qquad \omega' p < \frac{\pi}{2}, \qquad a < a_1.$$

Ceci revient à prendre comme *poids limite* le poids P donné par la formule (311), en supposant successivement que la lame est pleine, puisqu'elle est réduite à la partie qui subsiste à la hauteur du trou.

([2]) Remarquer que nous avons pris M en valeur absolue, de sorte que, pour tenir compte du changement de g en $-g$, il faut changer le signe du premier terme de (9).

J_1, Y_1 désignant les fonctions de Bessel et de Neumann ([1]) et A, B les constantes d'intégration.

Déterminons d'abord la fonction v. On a

$$\frac{dv}{ds} = \varepsilon \frac{dv}{dx} \cdot \frac{2\omega^2}{kx} \qquad (\varepsilon = \pm 1);$$

le signe de ε étant le même que celui de s. D'autre part ([2]),

$$\frac{dv}{dx} = x[AJ_0(x) + BY_0(x)].$$

Appelons x_0 et x_1 les valeurs de x qui correspondent à $s = 0$ et $\pm \frac{\lambda}{2}$. On a (n° **4**)

$$AJ_1(x_0) + BY_1(x_0) = 0$$

et

$$AJ_0(x_1) + BY_0(x_1) = \frac{\varepsilon k}{2\omega^2} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

le signe à prendre pour ε étant $-$ ou $+$, suivant que les constantes A et B se rapportent à $s > 0$ ou à $s < 0$. De ces équations, on tire

$$(337) \qquad A = \frac{\varepsilon k}{2\omega^2} \cdot \frac{Y_1(x_0)}{D}, \qquad B = -\frac{\varepsilon k}{2\omega^2} \cdot \frac{J_1(x_0)}{D},$$

en posant

$$(338) \qquad D = Y_1(x_0) J_0(x_1) - Y_0(x_1) J_1(x_0).$$

108. La fonction w nous est donnée par une formule analogue à (336), avec de nouvelles constantes. Appelons A', B' les constantes correspondant à $s < 0$ et A'', B'' celles qui correspondent à $s > 0$. On a d'abord

$$A'J_0(x_1) + B'Y_0(x_1) = 0.$$

Puis,

$$A''J_1(x_0) + B''Y_1(x_0) = A'J_1(x_0) + B'Y_1(x_0),$$
$$A''J_0(x_0) + B''Y_0(x_0) = -A'J_0(x_0) + B'Y_0(x_0),$$

et enfin

$$A''J_0(x_1) + B''Y_0(x_1) = \frac{k}{2\omega^2}.$$

([1]) *Cf.* E. Jahnke et F. Emde, *Funktionentafeln*, p. 166 et 93.

([2]) *Loc. cit.*, p. 165.

De ces équations, on tire (1)

(339) $$\begin{cases} A'' = A'x_0[J_1(x_0)Y_0(x_0) + J_0(x_0)Y_1(x_0)] + 2B'x_0Y_0(x_0)Y_1(x_0), \\ B'' = -2A'x_0J_0(x_0)J_1(x_0) - B'x_0[J_1(x_0)Y_0(x_0) + J_0(x_0)Y_1(x_0)]. \end{cases}$$

Puis,

(340) $$A' = -\frac{k}{4\omega^2 x_0}\frac{Y_0(x_1)}{DD'}, \qquad B' = \frac{k}{4\omega^2 x_0}\frac{J_0(x_1)}{DD'},$$

en posant

(341) $$D' = Y_0(x_0)J_0(x_1) - Y_0(x_1)J_0(x_0).$$

En portant (340) dans (339), on trouve enfin

(342) $$A'' = \frac{k}{4\omega^2}\left[\frac{Y_0(x_0)}{D'} + \frac{Y_1(x_0)}{D}\right], \qquad B'' = -\frac{k}{4\omega^2}\left[\frac{J_0(x_0)}{D'} + \frac{J_1(x_0)}{D}\right].$$

109. Avec les notations du n° **3**, on a (2)

(343) $$\begin{cases} v_0 = -v_\lambda = \dfrac{kx_1}{2\omega^2}\dfrac{D_1}{D}, \\ w_0 = -\dfrac{k}{4\omega^2 x_0 DD'}, \qquad w_\lambda = \dfrac{kx_1}{4\omega^2}\left(\dfrac{D'_1}{D'} + \dfrac{D_1}{D}\right), \end{cases}$$

en posant

(344) $$\begin{cases} D_1 = Y_1(x_0)J_1(x_1) - J_1(x_0)Y_1(x_1), \\ D'_1 = Y_0(x_0)J_1(x_1) - Y_1(x_1)J_0(x_0). \end{cases}$$

En tenant compte de l'identité du bas de la page précédente, on vérifie aisément l'identité (16), qui revient à

(345) $$D_1D' - DD'_1 = \frac{1}{x_0x_1}.$$

110. Calculons le *coefficient de sensibilité*. Appelons y et z les valeurs de w pour $s < 0$ et pour $s > 0$, c'est-à-dire les fonctions obtenues en employant les constantes A′, B′, puis les constantes A″, B″.

---

(1) S'appuyer sur l'identité (*loc. cit.*, p. 165 et 93)

$$J_1(x)Y_0(x) - Y_1(x)J_0(x) = \frac{1}{x}.$$

(2) *Cf.* n° **4**.

On a

$$G_2 = \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \frac{w^2}{M}\, ds = \frac{2\omega^2}{k} \int_{x_0}^{x_1} \frac{y^2 + z^2}{x}\, dx.$$

Or, on vérifie facilement que, pour toute solution de l'équation (335), on a

$$\int \frac{\rho^2}{x}\, dx = \frac{\rho^2 + \rho'^2}{2} - \frac{\rho\rho'}{x}.$$

Donc,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y^2}{x}\, dx = \frac{w_0^2}{2} - \frac{y_0^2 + y_0'^2}{2} + \frac{y_0 y_0'}{x_0}$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{z^2}{x}\, dx = \frac{w_\lambda^2 + 1}{2} - \frac{w_\lambda}{x_1} - \frac{z_0^2 + z_0'^2}{2} + \frac{z_0 z_0'}{x_0}.$$

D'autre part, on a, en tenant compte de (340), (338) et (341),

$$y_0 = \quad z_0 = x_0[A' J_1(x_0) + B' Y_1(x_0)] = \frac{k}{4\omega^2 D},$$

$$y_0' = -z_0' = x_0[A' J_0(x_0) + B' Y_0(x_0)] = \frac{k}{4\omega^2 D}.$$

D'où

$$G_2 = \frac{\omega^2}{k}\left(w_0^2 + w_\lambda^2 + 1 - 2\frac{w_\lambda}{x_1}\right) - \frac{k}{8\omega^2}\left(\frac{1}{D^2} + \frac{1}{D'^2}\right)$$

ou, d'après (343) et (345),

$$(346)\quad G_2 = \frac{k}{8\omega^2 D^2 D'^2}\left(\frac{1}{x_0^2} + 2x_1^2 DD'D_1D_1' - D^2 - D'^2\right) + \frac{\omega^2}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{D_1}{D} + \frac{D_1'}{D'}\right).$$

111. Comme dans l'exemple précédent, il ne paraît guère praticable de faire une discussion générale de toutes ces formules. Par contre, elles se prêtent très facilement aux *applications numériques*, puisque l'on possède des tables des fonctions J_0, J_1, Y_0, Y_1 (¹).

(¹) Par exemple les Tables déjà citées de E. JAHNKE et F. EMDE, p. 111 à 125).