JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. FAVARD

Sur les corps convexes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 219-282.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__219_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur les corps convexes;

Par J. FAVARD.

INTRODUCTION.

Quoique depuis Brunn et Minkowski la théorie des corps convexes ait fait de notables progrès, il reste dans cette voie de nombreux résultats à atteindre, résultats dont on connait ou dont on devine l'énoncé. Le but de cette théorie ne s'aperçoit pas encore nettement en ce sens qu'il est, à l'heure actuelle, difficile de dire avec précision quels sont les problèmes au sujet desquels un progrès est à escompter et dans quelle direction un pas nouveau pourra être fait. En disant cela je pense surtout aux inégalités entre les volumes mixtes de Minkowski.

Les efforts à faire paraîtraient peut-être vains à beaucoup de personnes si leurs conséquences devaient se borner à la théorie des corps convexes mais, cela, je ne le crois pas; l'étude complète des inégalités entre les volumes mixtes semble en effet exiger l'élargissement de certaines conceptions du Calcul des Variations.

Ce travail contient des recherches sur la théorie des corps convexes à deux points de vue différents.

Dans ce qui va suivre on trouvera d'abord une démonstration de l'existence d'un plan d'appui en un point d'une surface convexe, proposition bien connue, ainsi que la classification des points de cette surface : dans l'espace d'ordre n il existe au plus n classes de points sur toute surface convexe; sur un polyèdre, par exemple, les points de classe $m(\leq n)$ sont les points d'intersection de m faces de ce polyèdre.

Tout le reste du mémoire est consacré aux inégalités entre les volumes mixtes. J'ai essayé d'abord de préciser la puissance des différentes méthodes employées dans l'étude de ces questions.

Dans l'espace d'ordre 3, après avoir insisté sur la méthode qui conduit aux formes améliorées des inégalités connues, je donne des indications assez précises sur ce qui arrive dans le cas où une inégalité devient une égalité. En assujettissant les surfaces des corps convexes à certaines conditions restrictives, par exemple à avoir un plan tangent à variation continue en chaque point, on pourrait sans doute obtenir des conditions géométriques simples, relatives au cas dont je viens de parler, je n'ai pas essayé de le faire ici.

Dans l'espace d'ordre quelconque n, après les résultats qui généralisent ceux déjà connus dans l'espace ordinaire, j'ai pu obtenir quelques résultats nouveaux. Le fait que la racine $(n-1)^{\text{ième}}$ de la surface des corps d'une série linéaire de deux corps convexes à deux corps de base est une fonction concave apparait comme un résultat isolé; dès qu'il ne le sera plus, c'est-à-dire dès que le même résultat sera démontré pour ce que Minkowski appelle surface relative, la théorie de cet illustre auteur sera bien près de son achèvement, tout au moins dans ses grandes lignes, mais il restera encore tous les cas délicats au sujet desquels j'ai, au début, dit mon opinion.

Dans le Chapitre III, après une digression sur les corps tangentiels, j'étudie une proposition de Minkowski restée jusqu'ici sans démonstration, cette proposition est la suivante :

Pour qu'entre les volumes mixtes de deux corps convexes C_1 et C_2, ait lieu l'égalité

$$V_{112}^2 = V_{111} V_{122}$$

il est nécessaire et suffisant que C_1 soit homothétique à C_2 ou à un corps de capuchon de C_2.

Dans la suite on trouvera la définition des quantités précédentes ainsi que celle d'un corps de capuchon d'un corps donné.

J'ai pu parvenir au résultat dans deux cas : lorsque les deux corps C_1 et C_2 sont des polyèdres et lorsque le corps C_2 se réduit à un disque convexe plan.

Un résumé de ce travail a été inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le 9 novembre 1931.

CHAPITRE I.

PLAN D'APPUI. CLASSIFICATION DES POINTS DE LA FRONTIÈRE.

1. Dans l'espace d'ordre n nous appellerons *figure convexe* un ensemble borné et fermé de points qui, avec deux points A et B, contient tous les points du segment AB. Avec $n+1$ points cet ensemble contiendra par suite tous les points du simplex qui a ces points pour sommets; il suit de là que si une figure convexe n'admet pas de point intérieur, elle est tout entière située dans un espace d'ordre plus petit que n. Il suffit donc d'étudier les figures convexes situées dans l'espace d'ordre n et qui ont des points intérieurs. On a déjà démontré de bien des façons l'existence d'un plan d'appui (¹) à une surface convexe en un point, malgré cela je présenterai encore une démonstration de ce fait, démonstration qui a l'avantage de fournir, par une analyse simple, une classification des points de la surface.

2. Ensembles convexes de directions. — Nous appellerons *ensemble convexe de demi-droites, ou de directions*, un ensemble de demi-droites issues d'un même point qui, avec deux demi-droites non opposées, contient aussi toutes les demi-droites situées dans l'angle saillant formé par ces deux directions.

Par exemple l'ensemble de toutes les directions issues d'un même point est un ensemble convexe: nous allons étudier les ensembles de directions qui ne contiennent pas toutes les directions de l'espace.

Prenons d'abord le cas où l'espace est d'ordre $n = 2$, le cas d'un ensemble plan ordinaire. Si cet ensemble contenait quatre directions distinctes deux à deux opposées, il contiendrait toutes les directions

(¹) L'une des démonstrations les plus curieuses et les plus simples de ce fait est due à M. H. Brunn (*Arch. d. Math. u. Phys.*, 3ᵉ série, t. **17**, 1910, p. 288-292).

Les indications bibliographiques au sujet de ce théorème se trouvent dans un autre article de M. Brunn (*Math. Annalen*, t. **100**, 1928, p. 634-637).

Une autre démonstration très simple se trouve dans le livre de M. Bonnesen. Les méthodes exposées ici permettent également l'étude des singularités tangentielles des surfaces convexes ainsi que M. Bonnesen me l'a fait remarquer.

du plan, contrairement à l'hypothèse; par suite cet ensemble, lorsqu'il contient une direction, ne contient pas la direction opposée, il y a peut-être exception pour deux directions au plus portées par une même droite.

Cet ensemble peut alors se composer seulement de deux directions opposées. Supposons qu'avec deux directions opposées il contienne une troisième direction, il contiendra alors toutes les directions tracées dans le demi-plan déterminé par les deux directions opposées et la troisième; mais en vertu de la remarque précédente il n'en contiendra pas d'autres. Supposons maintenant qu'avec une direction l'ensemble ne contienne jamais la direction opposée: cet ensemble peut se composer d'une seule direction mais s'il en contient plus d'une il en contient une infinité. Considérons alors une direction et faisons lui décrire tout un demi-plan allant d'une direction de l'ensemble à la direction opposée, ou bien, lorsque cette direction est intérieure à ce demi-plan elle n'appartient jamais à l'ensemble, et alors toutes les directions de l'ensemble peuvent être mises dans un même demi-plan fermé; ou bien il existe une direction limite séparant ce demi-plan en deux angles, les directions intérieures à l'un de ces angles faisant partie de l'ensemble tandis que les directions intérieures à l'autre n'en font pas partie. Considérons maintenant le demi-plan fermé limité par cette direction limite et la direction opposée et contenant des directions de l'ensemble; ce demi-plan les contient toutes car si l'une d'elles était dans l'autre, elle formerait avec la direction limite un angle saillant qui contiendrait la direction opposée à la direction de départ. Enfin l'ensemble peut être vide.

Dans tous les cas nous voyons qu'il existe au moins un demi-plan ouvert ne contenant pas de direction de l'ensemble et de plus si l'ensemble n'est pas fermé, la même propriété appartenant à l'ensemble fermé que l'on obtient en lui ajoutant ses directions limites qui ne lui appartiennent pas.

Remarquons aussi que si nous projetons orthogonalement les directions appartenant à un ensemble convexe situées dans un espace d'ordre n sur une variété linéaire de cet espace, l'ensemble de ces projections sera convexe dans la variété; en appelant section d'un ensemble convexe de directions par une variété linéaire, l'ensemble des directions de l'ensemble situées dans cette variété, nous voyons que cette section est un ensemble convexe.

3. Arrivons maintenant au cas où n est quelconque : nous allons montrer que si un ensemble convexe de directions ne contient pas toutes les directions de l'espace, on peut trouver au moins un demi-espace ouvert ne contenant aucune direction de l'ensemble.

Le résultat vient d'être obtenu pour $n=2$, nous allons voir que s'il est vrai pour $n-1$, il est vrai pour n.

Considérons une direction non contenue dans l'ensemble et une variété linéaire d'ordre $n-1$ contenant cette direction. La section de l'ensemble par cette variété étant convexe, nous pouvons y trouver une variété d'ordre $n-2$ qui la divise en deux demi-variétés et dans l'une de ces demi-variétés ouverte il n'y a pas de direction de l'ensemble.

Projetons maintenant l'ensemble sur une variété d'ordre 2 perpendiculaire à la variété d'ordre $n-2$ que nous venons de trouver; nous obtenons dans cette dernière un ensemble convexe de directions qui ne contient pas toutes les directions puisqu'en particulier la projection de l'une des demi-variétés d'ordre $n-1$ ne lui appartient pas.

Dans cette variété d'ordre 2 nous pouvons trouver une droite limitant un demi-plan ouvert ne contenant aucune direction projection.

La variété d'ordre $n-1$ qui passe par cette droite et par la variété d'ordre $n-2$ déjà considérée limite un demi-espace ouvert dans lequel ne se trouve aucune direction de l'ensemble. La démonstration est donc achevée.

4. Avant d'aller plus loin dans l'étude de la structure de ces ensembles, nous poserons quelques définitions. Dans l'espace à n dimensions nous appellerons dorénavant plan une variété d'ordre $n-1$. Nous appellerons *plan d'appui*, pour un ensemble convexe de directions, un plan qui divise l'espace en deux demi-espaces tels que dans l'un deux il n'y ait pas de direction de l'ensemble. Le résultat que nous venons de démontrer s'énonce ainsi :

Tout ensemble convexe de directions, qui ne contient pas toutes les directions, admet au moins un plan d'appui et il en est de même pour *l'ensemble convexe fermé de directions obtenu en lui adjoignant toutes ses directions limites qui ne lui appartiennent pas.*

Si l'ensemble contient deux directions non opposées il en contient alors une infinité et l'ensemble fermé correspondant coïncide avec l'ensemble dérivé.

Nous dirons qu'une direction d'un ensemble convexe lui est *intérieure* si l'ensemble contient toutes les directions qui font avec celle-ci un angle suffisamment petit. Si, dans l'espace d'ordre n, un ensemble convexe de directions n'a pas de direction intérieure, il est situé dans un espace d'ordre moindre, car n directions quelconques de cet ensemble doivent toujours être dans un même plan : nous pourrons donc nous borner à étudier les ensembles ayant des directions intérieures.

Revenant, dans le cas où $n = 2$, au raisonnement précédent, nous avons vu qu'il existe une droite d'appui limite pour un ensemble de cette sorte, limite en ce sens qu'il existe des droites faisant avec elle un angle aussi faible que l'on veut et qui contiennent une direction de l'ensemble; s'il n'existe pas d'autre droite d'appui que celle-ci, les directions de l'ensemble dérivé forment un angle plat, s'il existe d'autres droites d'appui que celle-ci, le raisonnement montre aussi l'existence d'une deuxième droite d'appui limite et les directions de l'ensemble dérivé sont comprises dans un angle saillant.

Dans le cas général, un ensemble convexe fermé, situé dans l'espace d'ordre n, peut contenir toutes les directions situées dans une variété linéaire (P) d'ordre $p (\leqq n - 1)$ sans que sa section par une variété linéaire d'ordre $p + 1$ quelconque contienne toutes les directions situées dans cette variété : nous dirons alors que *l'ensemble est de classe* $n - p$. Par ensemble convexe de classe n nous désignerons un ensemble qui, avec une direction, ne contient jamais la direction opposée. Tout plan d'appui à un ensemble de classe $n - p$ contient la variété (P) correspondante car un plan divise l'espace en deux régions.

Nous appellerons *plan d'appui limite* à un ensemble de classe $n - p$ un plan d'appui qui, avec la variété (P), contient au moins une autre direction de l'ensemble et, par suite, toute une demi-variété d'ordre $p + 1$; pour un ensemble de classe n un plan d'appui limite devra contenir au moins une direction de l'ensemble.

Dans le cas où $p = n - 1$, il n'y a qu'un plan d'appui à l'ensemble, c'est le seul plan d'appui de l'ensemble ; dans le cas général nous allons démontrer l'existence de plans d'appui limites.

5. Le résultat vient d'être démontré dans le plan ordinaire ($n = 2$) ; démontrons que s'il est vrai dans l'espace d'ordre $n - 1$, il l'est aussi dans l'espace d'ordre n.

Lorsque l'ensemble est de classe $n - p$ ($p < n - 1$), considérons la section de l'ensemble par un plan passant par (P) ; cette section est un ensemble de classe $n - 1 - p$ situé dans un espace d'ordre $n - 1$, nous pouvons donc, d'après notre hypothèse, lui mener une variété d'appui limite d'ordre $n - 2$. Si nous projetons maintenant l'ensemble primitif sur une variété d'ordre 2 perpendiculaire à cette dernière, l'ensemble projection est un ensemble convexe et fermé qui ne contient pas toutes les directions du plan ordinaire et le raisonnement s'achève comme précédemment (n° **3**).

On démontre de la même façon que, par toute direction limite de l'ensemble, c'est-à-dire toute direction non intérieure, passe au moins un plan d'appui limite.

Existe-t-il également, lorsque l'ensemble est de classe supérieure à 1, des plans d'appui non limites? La réponse est affirmative et se démontre comme ci-dessus en remarquant que le résultat est vrai dans le cas de $n = 2$.

6. Profitant de l'existence de cette dernière catégorie de plans d'appui, on peut indiquer un mode de génération simple des ensembles des différentes classes.

Supposons d'abord que l'ensemble soit de classe n ; d'après ce que nous venons de voir il existe au moins un plan d'appui non limite et, dans ce cas, cette expression signifie que toutes les directions de l'ensemble sont situées dans un même demi-espace ouvert limité par ce plan. Considérons alors la direction perpendiculaire à ce plan dirigée vers le demi-espace où se trouvent les directions de l'ensemble ; celles-ci font avec cette perpendiculaire un angle plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et, comme l'ensemble est fermé, il existe au moins une direction de l'ensemble pour laquelle le maximum de cet angle est réalisé, ce maximum est par suite inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Considérons maintenant un plan parallèle au précédent situé dans le demi-espace où se trouvent toutes les directions de l'ensemble; celles-ci percent le plan en un ensemble de points qui est tout entier à distance finie d'après la remarque précédente et est de plus convexe et fermé. Nous avons ainsi une génération de l'ensemble de classe n; il est obtenu en joignant un point de l'espace à tous les points d'une figure convexe située dans un plan qui ne contient pas le point; cet ensemble se compose donc de toutes les directions intérieures et de toutes les directions frontières à un cône convexe. Quant aux plans d'appui limites nous voyons qu'ils dépendent de $n-2$ paramètres.

Supposons maintenant que l'ensemble soit de classe $n-p$. Projetons-le sur la variété linéaire d'ordre $n-p$ perpendiculaire à la variété (P) contenue dans l'ensemble; cette projection sur un espace d'ordre $n-p$ est aussi de classe $n-p$ car avec une direction elle ne contient pas la direction opposée, dans le cas contraire en effet l'ensemble de départ serait de classe $n-p-1$ puisqu'il contiendrait toute une variété de directions d'ordre $p+1$.

D'autre part l'ensemble projection contient des directions intérieures puisqu'il en est de même de l'ensemble de départ. Pour avoir une génération des ensembles de classes $n-p$, il suffit de se rappeler ce que nous venons de dire au sujet des ensembles de classe n dans un espace d'ordre n.

Dans une variété linéaire d'ordre $n-p-1$ nous considérerons une figure convexe (F) ayant des points intérieurs. Prenant alors un point extérieur à cette variété qui, avec elle, définit une variété d'ordre $n-p$ et considérant la variété (P) d'ordre p perpendiculaire à cette dernière, nous prendrons les demi-variétés d'ordre $p+1$ qui passent par (P) et qui rencontrent la figure convexe considérée : l'ensemble en question est constitué par l'ensemble de toutes les directions situées dans ces demi-variétés.

On peut encore dire ainsi : par une translation à p paramètres, parallèle à (P), la figure (F) engendre une espèce de cylindre qui est aussi une figure convexe dans un espace d'ordre $n-1$, à condition d'élargir un peu notre définition et de ne plus exiger d'une surface convexe qu'elle soit bornée. L'ensemble dérivé de l'ensemble des directions qui joignent un point de l'espace situé hors de son plan à un point de cette figure est un ensemble de classe $n-p$.

L'ensemble des plans d'appui limites à un tel ensemble dépend de $n-p-2$ paramètres.

En particulier si nous faisons $p=n-2$, la figure (F) est un segment de droite et un ensemble de classe 2 est engendré par des demi-variétés d'ordre $n-1$ qui passent par une même variété d'ordre $n-2$, ici il n'y a plus que deux plans d'appui limites et les directions de l'ensemble sont aussi celles qui sont intérieures au dièdre formé par ces deux plans ainsi que celles qui sont sur les deux faces.

Remarquons aussi que pour un ensemble de classe 1, le mode de génération indiqué s'applique, l'ensemble étant constitué par toutes les directions qui font avec une direction donnée un angle plus petit ou plus égal à un droit.

Dans l'espace à trois dimensions, par exemple, nous avons les trois types suivants d'ensembles convexes, ne contenant pas toutes les directions de l'espace : le cône, le dièdre et le demi-espace.

7. Plans d'appui et plans d'appui limites a un corps convexe. — Établissons maintenant l'existence d'un plan d'appui en un point d'un corps convexe situé dans l'espace d'ordre n et admettant des points intérieurs : on appelle ainsi un plan qui contient au moins un point du corps mais qui laisse dans un même demi-espace fermé tous les points du corps. Les points contenus dans un plan d'appui ne peuvent donc être que des points de la frontière.

A un point M de l'espace nous associerons l'ensemble $d(\mathrm{M})$ des directions issues de M obtenues en joignant ce point à tous les points du corps convexe donné (C).

En vertu de la convexité du corps, cet ensemble $d(\mathrm{M})$ sera convexe et admettra des droites intérieures puisque (C) admet des points intérieurs.

Lorsque le point M est à l'intérieur du corps, $d(\mathrm{M})$ contient toutes les directions issues de M et inversement car sur n directions, qui ne sont pas toutes dans un même plan, on peut trouver n points du corps qui avec M forment un simplex de volume positif. Sur la direction opposée à une direction joignant M à un point intérieur à la base opposée à M de ce simplex se trouve un point du corps qui forme avec les n précédents un simplex contenant M à son intérieur.

De là nous concluons que si M n'est pas intérieur au corps, l'ensemble $d(M)$ ne comprendra pas toutes les directions de l'espace.

Soit M un point frontière du corps, en vertu des résultats précédents, nous voyons que, par le point M passe au moins un plan d'appui à $d(M)$ qui est donc aussi un plan d'appui à (C). Nous appellerons plan d'appui limite en M au corps (C) un plan d'appui limite à $d(M)$ mais nous verrons tout à l'heure une autre définition du plan d'appui limite.

Pour l'instant considérons l'ensemble fermé $d'(M)$ dérivé de l'ensemble $d(M)$ et qui le contient : nous appellerons classe d'un point M de la frontière de (C) la classe de l'ensemble $d'(M)$ correspondant.

Nous avons ainsi obtenu une classification des points de la frontière d'un corps convexe en n classes : sur un polyèdre, par exemple, les points de classe m sont les points des intersections de m faces de ce polyèdre.

Sur un corps convexe quelconque il peut ne pas exister de points de toutes les classes, mais une classe n'est jamais vide, la classe 1, celle des points où il existe un seul plan d'appui. On peut en effet démontrer, comme conséquence de l'existence du volume d'un corps convexe, que l'ensemble des points qui n'appartiennent pas à la première classe a une aire nulle.

Plus généralement on peut prouver que les points de classe $n-p$ ont une étendue d'ordre $p+1$ nulle. Quant à l'ensemble des points de classe n, s'il n'est pas vide, il est ou fini ou dénombrable.

Dans l'espace d'ordre 3, M. Durand a obtenu, pour des surfaces plus générales que les surfaces convexes, des résultats plus précis que les précédents et qui peuvent sans doute se généraliser dans les espaces d'ordre supérieur [1].

Enfin lorsque le point M est extérieur à (C), $d(M)$ est fermé puisque (C) l'est par définition et de plus $d(M)$, avec une direction, ne contient pas la direction opposée, $d(M)$ est donc de classe n et les

---

[1] G. Durand, *Sur une généralisation des surfaces convexes* (*Thèse*, Paris, 1931).

plans d'appui à (C) qui passent par M sont les plans d'appui limites à $d(M)$, ils enveloppent un cône convexe.

8. Montrons maintenant que les directions frontières de l'ensemble $d'(M)$ sont, lorsque le point M appartient à la frontière du corps (C), des demi-tangentes à cette frontière, en ce sens que ce sont des directions limites de directions obtenues en joignant M aux autres points de la frontière de (C).

Il est bien évident d'abord que toute direction n'appartenant pas à $d'(M)$ ne saurait être une demi-tangente; toute droite intérieure à $d'(M)$ n'est pas non plus une direction de tangente car toutes les directions faisant avec elle un angle θ suffisamment petit font partie de $d'(M)$, donc tous les points intérieurs au cône de révolution ayant pour axe cette direction et pour demi-angle au sommet θ et suffisamment voisins de M sont intérieurs à la figure convexe (C) considérée, il suit de là qu'il n'y a pas de points P de la frontière de (C) tendant vers M et tels que les directions MP tendent vers la droite considérée.

Les demi-tangentes possibles sont donc les directions frontières de $d'(M)$, pour montrer que ces directions possèdent effectivement cette propriété il suffit de procéder par récurrence.

Pour cela considérons une direction frontière de $d'(M)$ et un plan passant par elle et contenant des points intérieurs à (C). La section de (C) par ce plan est une figure convexe (c) située dans ce plan et la section de $d'(M)$ par ce plan est l'ensemble $\delta'(M)$ correspondant à (c) et au point M; je dis que la direction choisie est aussi frontière pour $\delta'(M)$. En effet, de part et d'autre du plan contenant (c) il existe des directions qui appartiennent à $d'(M)$, si donc, la direction en question était intérieure à $\delta'(M)$ elle serait aussi intérieure à $d'(M)$, contrairement à l'hypothèse.

Par suite cette direction est une direction frontière de $\delta'(M)$; si nous supposons que notre résultat est vrai pour $n-1$, c'est-à-dire si nous supposons que la direction est une demi-tangente à la frontière de (c), le même résultat sera vrai pour n, c'est-à-dire pour le corps (C) puisque (c) est une section de (C).

Il reste à prouver que le théorème est vrai pour $n=2$, mais, dans ce cas la frontière de $d'(M)$ se compose de deux directions α_1 et α_2 :

soit x une direction intérieure à $d(M)$, les directions MP joignent M à un point de la frontière P situé dans l'angle $(\widehat{xx_1})$ ne sauraient avoir x_2 pour limite lorsque P tend vers M, elles ont donc pour limite x_1 ; le même raisonnement vaut pour les points de la frontière situés dans $(\widehat{xx_2})$ et la direction x_2.

Notre résultat se trouve ainsi complètement établi.

Nous avons alors une nouvelle définition des plans d'appui limites en un point de la frontière d'un corps convexe : ce sont les plans d'appui qui contiennent, en un point de classe $n-p$, toute une demi-variété d'ordre $p+1$ de demi-tangentes à la frontière du corps.

Suivant une définition proposée par M. Bouligand [1], on peut dire que l'ensemble des droites frontières de $d(M)$ forme le *contingent* de la frontière de (C) au point (M).

9. Plans tangents a un corps convexe. — Parmi les plans d'appui limites à un ensemble convexe de directions, ou, ce qui revient au même, à un corps convexe en un point de sa frontière, nous distinguerons encore les plans tangents.

Pour $n=2$, il s'agit de droites tangentes, ce seront, dans ce cas, les droites d'appui limites. De proche en proche, les plans tangents seront définis, à partir de $n=2$, de la façon suivante : si $d(M)$ est de classe $n-p$ ces plans contiendront, outre la variété (P), une variété d'ordre $n-p$ tangente à la figure (F) que nous avons associée à un ensemble convexe de directions au n° 6.

Les plans tangents à un polyèdre, par exemple, sont ses faces ; par chaque point de la frontière du polyèdre il en passe un nombre fini.

En vue d'une application ultérieure, nous allons montrer le théorème suivant, généralisant un résultat de Minkowski.

La section du corps (C) par un plan parallèle à un plan tangent, situé dans le demi-espace limité par ce plan tangent qui contient (C), et à une distance δ suffisamment petite, coupe (C) suivant une figure convexe à $n-1$ dimensions $c(\delta)$; soit $r(\delta)$ le rayon de l'hypersphère

[1] G. Bouligand, *Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites* (*Annales de la Société Polonaise de Math.*, t. 9, 1930, p. 32) ou *Introduction à la Géométrie Infinitésimale directe* (Paris, Vuibert, 1932).

à $n-1$ dimensions inscrite dans $c(\delta)$, alors on a :

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{r(\delta)}{\delta} = \infty$$

et, inversement, si un plan d'appui est tel que la relation précédente ait lieu, ce plan est tangent.

Prenons d'abord le cas où $n=2$, $r(\delta)$ est alors la demi-corde $c(\delta)$ parallèle à une demi-tangente, soit α_1. Par le point M de la frontière menons une direction α intérieure à l'ensemble $d'(M)$ et à la distance unité de α_1 traçons une direction parallèle à α_1 du côté où se trouve (C) et qui coupe α au point P. Sur cette direction prenons un point Q quelconque, la direction MQ coupe la frontière en un point par lequel nous menons dans (C) une corde parallèle à α_1.

Si δ est inférieur à la distance de cette corde à M on aura :

$$\frac{r(\delta)}{\delta} = \frac{c(\delta)}{2\delta} > \frac{PQ}{2};$$

or PQ peut être choisi aussi grand que l'on veut, donc, dès que δ est suffisamment petit, $\frac{r(\delta)}{\delta}$ surpasse toute quantité donnée à l'avance, ce qui démontre notre assertion.

Arrivons maintenant au cas général. Je dis qu'il suffit de démontrer le résultat dans le cas où le plan est tangent en un point M de la frontière de classe n.

En effet, lorsque le point n'est pas de classe n, on peut rogner le corps (C) autour du point M de façon que le plan reste tangent ; il suffit, pour cela, de considérer une partie de $d'(M)$ de classe n ayant le plan en question pour plan tangent et de considérer la portion de (C) intérieure à cet ensemble [on peut prendre, par exemple, pour partie de $d'(M)$, un n-èdre de sommet M], par cette opération la quantité $r(\delta)$ ne se trouve pas augmentée.

Nous démontrerons alors le résultat par récurrence. L'ensemble $d'(M)$ est un cône convexe ayant pour base une figure (F) convexe et le plan tangent, soit (Π), coupe le plan de (F) suivant une variété d'ordre $n-2$ soit (π), tangente à (F), (Π) a de plus en commun avec $d'(M)$ au moins une direction, soit α.

Si nous coupons la figure (F) par une variété (π') parallèle à (π) et située à une distance δ' du côté où se trouve (F) et suffisamment petite, on peut trouver à l'intérieur de cette section un simplex s (d'ordre $n-2$) tel que le rayon $\rho(\xi')$ de sa sphère inscrite soit tel que $\frac{\rho(\xi')}{\xi'}$ augmente indéfiniment lorsque ξ' tend vers zéro.

Ce résultat est en effet exact pour $n=2$ (le simplex se réduisant à un segment de droite), nous pouvons le supposer exact jusqu'à $n-1$.

Par (π') menons un plan (II') parallèle à (II), soit ξ sa distance à (II) : en désignant par h le sinus de l'angle de (II) avec le plan de (F) on a : $\xi = h\xi'$.

Ensuite, par les points de s menons des directions parallèles à x, tous les points situés sur ces directions appartiennent au cône $d'(M)$ et au plan (II') : nous obtenons ainsi un simplex d'ordre $n-1$ ayant un de ses sommets à l'infini, le rayon de sa sphèrs inscrite est égal à $k\rho(\xi')$ où k désigne une constante indépendante de ξ'. On peut donc trouver un simplex (S) d'ordre $n-1$ et situé dans le précédent et tel que le rayon de sa phère inscrite $r(\xi)$ surpasse $\frac{k\rho(\xi')}{2}$, on a donc :

$$\frac{r(\xi)}{\xi} > \frac{k\rho(\xi')}{2l\xi}.$$

Sur les directions qui joignent M aux sommets de (S) se trouvent des points de C situés à une distance non nulle de M, par suite, dès que δ sera suffisamment petit, la section $c(\delta)$ contiendra l'homothétique de (ξ) de centre M et de rapport $\frac{\delta}{\xi}$, et, pour ces valeurs de δ, on aura :

$$\frac{r(\delta)}{\delta} = \frac{r(\xi)}{\xi} > \frac{k}{2l}\frac{\rho(\xi')}{\xi'},$$

c'est-à-dire, que l'on a, puisque $\frac{\rho(\xi')}{\xi'}$ est aussi grand que l'on veut,

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{r(\delta)}{\delta} = \infty.$$

Si un plan n'est pas un plan tangent, on voit immédiatement que le rapport $\frac{r(\delta)}{\delta}$ tend vers une limite car ce résultat est vrai pour l'ensemble $d'(M)$, de cette remarque suit la réciproque de notre proposition.

10. Dans ce qui va suivre nous n'exigerons pas d'un corps convexe, plongé dans un espace d'ordre n, qu'il ait des points intérieurs, la notion de plan d'appui s'étend sans difficulté.

Nous rappellerons aussi qu'un corps convexe (C) admet, en général, deux plans d'appui parallèles à une direction de plan donnée et qu'un corps convexe est entièrement défini par ses plans d'appui.

Soit O un point fixe de l'espace, à une direction ω issue de ce point nous associerons le plan d'appui au corps (C) perpendiculaire à cette direction en un point M tel que la direction parallèle à ω issue de ce point ne fasse pas partie de l'ensemble $d'(M)$. Soit $H(\omega)$ la distance de O à ce plan mesurée algébriquement sur cette direction, le corps (C) est entièrement défini par la connaissance de $H(\omega)$ pour toutes les directions de l'espace.

La fonction $tH(\omega)$, où t désigne une constante positive, définit le corps directement homothétique à (C) par rapport au point O et dans le rapport t, corps que nous appellerons (tC).

CHAPITRE II.

VOLUMES MIXTES.

11. Soit, dans l'espace à n dimensions, un nombre quelconque m de corps convexes : $C_1, C_2, \ldots, C_m$, nous n'exigerons pas que ces corps aient des points intérieurs, cependant il sera nécessaire que, par translation, ils ne puissent pas tous être mis dans un même plan, autrement dit ces corps ne pourront pas se réduire tous à des figures planes situées dans des plans parallèles.

A ces corps correspondent, relativement à un fixe O de l'espace, les fonctions $H_1(\omega), H_2(\omega), \ldots, H_m(\omega)$; soient alors $x_1, x_2, \ldots, x_m$, en nombres positifs ou nuls mais tels que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1.$$

Considérons la fonction

$$H(\omega) = x_1 H_1(\omega) + x_2 H_2(\omega) + \ldots + x_m H_m(\omega),$$

on démontre qu'elle définit un corps convexe C que l'on appelle la somme des m corps $x_i C_i$:

$$C = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \ldots + x_m C_m.$$

On démontre sans peine que ce corps ne dépend pas du point O choisi et que si l'on fait subir à un, ou à plusieurs, corps C_i une translation, le corps C subit lui-même une translation ; si les corps C_i sont définis à une translation près, le corps C est, lui aussi, défini à cette même transformation près, mais, en tout cas, son volume est bien défini.

Lorsque les nombres x_i varient, sous les conditions précédentes, on obtient un ensemble de corps convexes C, que l'on appelle la *série linéaire engendrée par* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ et le volume d'un corps de cette série, $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, est exprimé par :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_m!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_m^{i_m} V_{\underbrace{1\ldots1}_{i_1}\underbrace{2\ldots2}_{i_2}\ldots\underbrace{m\ldots m}_{i_m}},$$

les coefficients $V_{\underbrace{1\ldots1}_{i_1}\underbrace{2\ldots2}_{i_2}\ldots\underbrace{m\ldots m}_{i_m}}$ s'appellent les *volumes mixtes* des m corps $C_1, C_2, \ldots, C_m$; ils sont susceptibles d'une autre définition.

Le volume V d'un polyèdre convexe peut s'exprimer de la façon suivante, soient S_i l'aire d'une face de ce polyèdre, H_i sa distance à O, on a :

$$V = \frac{1}{n}\sum H_i S_i,$$

la somme étant étendue à toutes les faces du polyèdre.

En passant à la limite pour un corps convexe quelconque on a :

$$V = \frac{1}{n}\int H(\omega)\, dS,$$

où l'intégrale est étendue à l'hypersphère de rayon 1 de l'espace d'ordre n, dS désignant l'élément d'aire de la frontière au point où le plan d'appui correspond à la direction ω.

Pour un corps C de la série linéaire engendrée par les C_i, les éléments d'aire se composent comme des corps convexes plans situés dans des plans parallèles, c'est-à-dire comme des corps de l'espace d'ordre $n-1$ de sorte que

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{n}\int\left(\sum_{i=1}^{m} x_i H_i\right)\left[\sum_{i_1+\ldots+i_m=n-1} \frac{(n-1)!}{i_1!\ldots i_m!} x_1^{i_1}\ldots x_m^{i_m}\, dS_{\underbrace{1\ldots1}_{i_1}\ldots\underbrace{m\ldots m}_{i_m}}\right].$$

Le volume mixte le plus complexe s'obtient donc en faisant $m = n$ et l'on montre que

$$V_{12\ldots n} = \frac{1}{n}\int H_1\, dS_{23\ldots n},$$

enfin dans cette définition, on peut permuter l'ordre des indices de V d'une façon quelconque, on ne change pas le résultat (1). Nous écrirons aussi parfois :

$$V_{12\ldots n} = V(C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

et, avec la forme précédente, on voit que

$$V(tC_1, C_2, \ldots, C_n) = tV(C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$V(C_1 + C'_1, C_2, \ldots, C_n) = V(C_1, C_2, \ldots, C_n) + V(C'_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Si C désigne un corps qui, par translation, peut être placé de telle sorte qu'aucun de ses points ne soit extérieur à C_1, on voit aussi que

$$V(C_1, C_2, \ldots, C_n) \geq V(C, C_2, \ldots, C_n).$$

12. *Le résultat fondamental de la théorie consiste en ce que*

$$\sqrt[m]{V(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \qquad (\text{avec } x_i \geq 0,\ \Sigma x_i = 1)$$

est une fonction concave ou linéaire par rapport à $m - 1$ *des variables* x_i.

Rappelons brièvement, pour fixer la puissance des méthodes, par quels moyens on arrive à ce résultat.

Dans le cas où $n = 2$, il existe beaucoup de procédés : le procédé de Crone et Frobenius, celui où l'on utilise les inscrites et les circonscrites à une courbe, ne sont susceptibles de généralisations que dans des cas très particuliers ; dans un espace d'ordre supérieur il faut que les corps C_i admettent tous un corps de capuchon (voir Chap. III) homothétique à un même corps.

La méthode de M. Lebesgue est peut être susceptible d'extension

(1) Il existe, de ce fait, deux démonstrations dans le cas où $n = 3$, l'une de Minkowski (*Théorie des konvexen Körper. Gesammelte Werke*, t. 2, p. 191-196) et l'autre due à M. Bonnesen (Les *problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*. Gauthier-Villars, 1929, p. 109-110), ces deux démonstrations peuvent être étendues à l'espace d'ordre quelconque.

mais, pour en décider, il faudrait faire quelques études préalables qui semblent d'ailleurs possibles. La méthode de Minkowski est très simple mais il est pénible d'en tirer des conclusions précises.

Dans le livre de M. Bonnesen on trouvera l'exposé de toutes ces méthodes, sauf de celle de Minkowski; M. Bonnesen expose en outre dans son livre deux autres méthodes qui se prêtent facilement à une généralisation et qui sont avantageuses en ce sens qu'elles fournissent des formes améliorées pour les inégalités auxquelles conduit le résultat précédent. Voici en quoi consistent ces deux méthodes, que j'exposerai dans le cas de 3 dimensions.

Envisageons, par exemple, la série linéaire $x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3$ engendrée par trois corps convexes C_1, C_2, C_3 (x_1, x_2, $x_3 \geqq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 1$). On soumet tous les corps de cette série à deux transformations : la *symétrisation par rapport à un plan et la transformation par sections homothétiques*.

Chacune de ces deux transformations transforme la série linéaire en une *série concave* en ce sens que le volume du corps $x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3$ n'est pas plus petit que le volume du corps $x_1C'_1 + x_2C'_2 + x_3C'_3$ de la série linéaire définie par les corps C'_1, C'_2, C'_3 transformés des corps C_1, C_2, C_3. Les deux transformations précédentes sont effectuées dans un ordre quelconque et si l'on suppose que les transformés C'_i ont même travers extérieur dans une direction, cas auquel on peut toujours se ramener par une homothétie préalable effectuée sur les corps C_i de départ, alors la fonction $V'(x_1, x_2, x_3)$, volume du corps

$$x_1C'_1 + x_2C'_2 + x_3C'_3,$$

est concave ou linéaire de x_1 et x_2 (par exemple).

C'est ce dernier point que l'on peut obtenir de deux manières différentes, la première valable quel que soit le nombre des corps, la deuxième valable seulement pour la série linéaire engendrée par deux corps convexes.

Dans le cas de l'espace à 3 dimensions, et pour deux corps, ces considérations permettent de démontrer que

$$(1) \qquad \begin{cases} V_{112}^3 \geqq V_{111}^2 V_{222}, \\ V_{122}^3 \geqq V_{111} V_{222}^2. \end{cases}$$

Considérant maintenant les corps C_1 et $C_1 + tC_2 (t > 0)$, la première inégalité s'écrit :

$$3t^2 V_{111}(V_{112}^2 - V_{111}V_{122}) + t^3(V_{112}^3 - V_{111}^2 V_{222}) \geqq 0.$$

Lorsque t est suffisamment petit on en déduit :

$$(2) \qquad V_{112}^2 \geqq V_{111}V_{122}.$$

Opérant de même sur la deuxième inégalité, on trouve

$$(2') \qquad V_{122}^2 \geqq V_{112}V_{222}.$$

Ce sont les inégalités quadratiques relatives aux volumes mixtes; jusqu'ici on n'a pu les démontrer directement dans le cas général : c'est M. Hilbert [1] qui est allé le plus loin dans cette voie en les établissant pour deux corps qui ont partout un plan tangent variant d'une façon continue.

15. Cas de $n = 3$. — Soient C_1 et C_2 deux corps convexes dans l'espace ordinaire.

En désignant par σ_{11} et σ_{22} les aires des *travers intérieurs ou extérieurs* [2] de ces deux corps dans une même direction et en appliquant les transformations dans l'ordre : transformation par sections homothétiques, symétrisation aux deux corps $\frac{C_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}$, $\frac{C_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}$ lorsque les σ désignent les travers intérieurs, dans l'ordre inverse s'il s'agit des travers extérieurs, on a

$$V\left(x_1\frac{C'_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} + x_2\frac{C'_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) \geqq x_1 V\left(\frac{C'_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right) + x_2 V\left(\frac{C'_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) = \frac{x_1}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}} V(C_1) + \frac{x_2}{\sigma_{22}^{\frac{3}{2}}} V(C_2).$$

Mais, puisque la série des corps transformés de la série $x_1 C_1 + x_2 C_2$ est concave, on a

$$V\left(x_1\frac{C_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} + x_2\frac{C_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) \geqq V\left(x_1\frac{C'_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} + x_2\frac{C'_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\right) \geqq \frac{x_1}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}} V(C_1) + \frac{x_2}{\sigma_{22}^{\frac{3}{2}}} V(C_2).$$

---

[1] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integralgleichungen*, 6e partie, t. XIX (*Göttingen Nachrichten*. *Math. Phys.*, 1910).

[2] Pour les définitions de ces expressions, *voir* le livre de M. Bonnesen (*loc. cit.*).

d'où

$$x_1^2 x_2\left[\frac{3V_{112}}{\sigma_{11}\sigma_{22}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2V_{111}}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}}-\frac{V_{222}}{\sigma_{22}^{\frac{3}{2}}}\right]+x_1 x_2^2\left[\frac{3V_{122}}{\sigma_{11}^{\frac{1}{2}}\sigma_{22}}-\frac{V_{111}}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}}-\frac{2V_{222}}{\sigma_{22}^{\frac{3}{2}}}\right]\geqq 0.$$

Inégalité valable quels que soient les nombres positifs x_1 et x_2, nous en déduisons

$$(3)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{3V_{112}}{\sigma_{11}\sigma_{22}^{\frac{1}{2}}}-\frac{2V_{111}}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}}-\frac{V_{222}}{\sigma_{22}^{\frac{3}{2}}}\geqq 0,\\&\frac{3V_{122}}{\sigma_{11}^{\frac{1}{2}}\sigma_{22}}-\frac{V_{111}}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}}-\frac{2V_{222}}{\sigma_{22}^{\frac{3}{2}}}\geqq 0,\end{aligned}\right.$$

ce sont des formes améliorées des inégalités cubiques (1). Ces inégalités épuisent tout le contenu des considérations géométriques précédentes relatives à la concavité, c'est pourquoi j'ai tenu à bien mettre en lumière les méthodes employées, car il est bien évident que, par des considérations de ce genre, on ne pourra jamais arriver à une démonstration directe des inégalités quadratiques (2) ou (2'). Des inégalités (1) nous avons déduit ces dernières par la méthode de dérivation : cette méthode appliquée aux inégalités (3) va nous donner une forme améliorée des inégalités (2) et (2').

Supposons que les σ désignent les travers extérieurs [1] et désignons par σ_{12} l'aire mixte de ces deux travers; écrivons alors la première des inégalités (3) pour les corps C_1 et C_1+tC_2, on a

$$\frac{3(V_{111}+tV_{112})}{\sigma_{11}(\sigma_{11}+2t\sigma_{12}+t^2\sigma_{22})^{\frac{1}{2}}}-\frac{2V_{111}}{\sigma_{11}^{\frac{3}{2}}}-\frac{V_{111}+3tV_{112}+3t^2V_{122}+t^3V_{222}}{(\sigma_{11}+2t\sigma_{12}+t^2\sigma_{22})^{\frac{3}{2}}}\geqq 0.$$

En développant en série au voisinage de $t=0$ et en écrivant que le terme de la puissance la plus faible en t est positif ou nul, on trouve une forme améliorée de l'inégalité (2); opérant de même avec la deuxième des inégalités (3), on a une forme améliorée de (2'); ces deux inégalités sont

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}&V_{111}\sigma_{12}^2-2V_{112}\sigma_{11}\sigma_{12}+V_{122}\sigma_{11}^2\leqq 0,\\&V_{112}\sigma_{22}^2-2V_{122}\sigma_{12}\sigma_{22}+V_{222}\sigma_{12}^2\leqq 0.\end{aligned}\right.$$

[1] On peut également employer la méthode lorsque les σ désignent les travers intérieurs mais les quantités qui entrent alors dans les formes améliorées de (2) et (2') ne sont pas susceptibles d'une interprétation géométrique simple.

Un seul signe d'égalité dans (3) entraîne le signe d'égalité dans (2) et (2') et, par suite, le deuxième signe d'égalité dans (3). Les inégalités (4) deviennent des égalités et l'on a $\sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}$ quelle que soit la direction des travers extérieurs.

De là on déduit que les deux corps C_1 et C_2 ont des travers extérieurs directement homothétiques dans toute direction, ce qui n'est possible que si C_1 et C_2 sont directement homothétiques : c'est là un résultat et un raisonnement connus.

14. Considérons maintenant trois corps convexes C_1, C_2, C_3, puis les deux corps

$$K_1 = x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3, \qquad K_2 = y_1 C_1 + y_2 C_2 + y_3 C_3,$$

les quantités x et y étant, cette fois-ci, simplement assujetties à être positives.

Posons :

$$W_{jk} = V_{jk1} x_1 + V_{jk2} x_2 + V_{jk3} x_3,$$
$$s_j = \sigma_{j1} x_1 + \sigma_{j2} x_2 + \sigma_{j3} x_3,$$

on a

$$V(K_1, K_1, K_1) = \sum_{j,k=1}^{3} W_{jk} x_j x_k;$$

$$V(K_1, K_1, K_2) = \sum_{j,k=1}^{3} W_{jk} x_j y_k;$$

$$V(K_1, K_2, K_2) = \sum_{j,k=1}^{3} W_{jk} y_j y_k;$$

$$\sigma(K_1, K_1) = \sum_{j=1}^{3} s_j x_j, \qquad \sigma(K_1, K_2) = \sum_{j=1}^{3} s_j y_j,$$

où $\sigma(K_1, K_1)$, $\sigma(K_1, K_2)$ désignent respectivement le travers extérieur du corps K_1 et le travers extérieur mixte de K_1 et K_2.

Écrivons maintenant la première des inégalités (4) pour les deux corps K_1 et K_2, on a

$$(\Sigma W_{jk} x_j x_k)(\Sigma s_j y_j)^2$$
$$- 2(\Sigma W_{jk} x_j y_k)(\Sigma s_j x_j)(\Sigma s_j y_j) + (\Sigma W_{jk} y_j y_k)(\Sigma s_j x_j)^2 \geqq 0,$$

et ceci est valable quels que soient les nombres positifs x et y.

Posons encore

$$y_1 = tx_1 + u_1, \qquad y_2 = tx_2 + u_2, \qquad y_3 = tx_3 + u_3,$$

nous pouvons donner à u_1, u_2, u_3 des valeurs quelconques, positives ou négatives, à condition de choisir t suffisamment grand, les valeurs correspondantes des y seront positives. Si l'on remplace les y dans l'inégalité précédente par leurs nouvelles expressions, on constate que t disparait et c'est ce qui fait le succès de la méthode car nous avons alors

$$\begin{aligned}(5)\qquad & (\Sigma W_{jk} x_j x_k)(\Sigma s_j u_j)^2 \\ & - 2(\Sigma W_{jk} x_j u_k)(\Sigma s_j x_j)(\Sigma s_j u_j) + (\Sigma W_{jk} u_j u_k)(\Sigma s_j x_j)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

inégalité valable lorsque les x sont positifs mais avec des u quelconques.

Faisons maintenant $x_3 = 1$ et faisons tendre x_1 et x_2 vers zéro, nous obtenons

$$\begin{aligned}(6)\qquad & V_{333}(\sigma_{13} u_1 + \sigma_{23} u_2)^2 - 2\sigma_{33}(V_{133} u_1 + V_{233} u_2)(\sigma_{13} u_1 + \sigma_{23} u_2) \\ & + \sigma_{33}^2 (V_{113} u_1^2 + 2 V_{123} u_1 u_2 + V_{223} u_2^2) \leqq 0,\end{aligned}$$

les termes en u_3 ont disparu, comme il était facile de le prévoir.

En prenant $u_1 = \sigma_{23}$ et $u_2 = -\sigma_{13}$, nous arrivons à l'inégalité

$$(7)\qquad V_{113}\sigma_{23}^2 - 2V_{123}\sigma_{13}\sigma_{23} + V_{223}\sigma_{13}^2 \leqq 0,$$

qui est une forme améliorée de l'inégalité de Minkowski

$$(8)\qquad V_{123}^2 \geqq V_{113} V_{223}.$$

Celle-ci, jointe aux inégalités

$$V_{113}^3 \geqq V_{111}^2 V_{333}, \qquad V_{223}^3 \geqq V_{222}^2 V_{333},$$

donne

$$V_{123}^3 \geqq V_{111} V_{222} V_{333},$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que s'il a lieu dans les inégalités précédentes, c'est-à-dire seulement lorsque les trois corps C_1, C_2, C_3 sont homothétiques.

Selon Minkowski cette inégalité domine toute la théorie des corps convexes, car les autres inégalités en sont ou bien des cas particuliers, ou bien des cas limites; il serait facile d'en donner une forme améliorée.

Considérons maintenant le premier membre de (5) comme une forme quadratique en $\sigma_{13}u_1 + \sigma_{23}u_2$ et σ_{33}, en vertu de l'inégalité, cette forme n'est pas définie, donc

$$(V_{133}u_1 + V_{233}u_2)^2 - V_{333}(V_{113}u_1^2 + 2V_{123}u_1u_2 + V_{223}u_2^2) \geqq 0.$$

On a ainsi une forme quadratique en u_1 et u_2, semi-définie positive; en écrivant que son discriminant est positif on trouve

$$\begin{vmatrix} V_{113} & V_{123} & V_{133} \\ V_{213} & V_{223} & V_{233} \\ V_{313} & V_{323} & V_{333} \end{vmatrix} \geqq 0,$$

inégalité due également à Minkowski.

15. Considérons maintenant m corps convexes quelconques C_1, C_2, ..., C_m, puis les trois corps

$$K_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i C_i, \qquad K_2 = \sum_{i=1}^{m} (tx_i + u_i) C_i, \qquad K_3 = \sum_{i=1}^{m} v_i C_i,$$

où les x_i, $tx_i + u_i$, v_i sont des nombres positifs.

Posons :

$$V(C_j, C_k, C_l) = V_{jkl}, \qquad \sigma(C_j, C_k) = \sigma_{jk},$$

$$W_{jk} = \sum_{l} V_{jkl} v_l, \qquad S_j = \sum_{k} \sigma_{jk} v_k.$$

L'inégalité (6) devient

$$(9) \quad \left(\sum_{j,k} W_{jk} x_j x_k\right)\left(\sum_i S_i u_i\right)^2 - 2\left(\sum_{j,k} W_{jk} x_j u_k\right)\left(\sum_i S_i x_i\right)\left(\sum_i S_i u_i\right) + \left(\sum_{j,k} W_{jk} u_j u_k\right)(\Sigma S_i x_i)^2 \geqq 0,$$

valable lorsque les x_i et les v_i sont positifs mais avec des u_i quelconques.

C'est une forme améliorée de l'inégalité

$$(\Sigma W_{jk} x_j u_k)^2 - (\Sigma W_{jk} x_j u_k)(\Sigma W_{jk} u_j u_k) \geqq 0$$

qui exprime que, dans la décomposition de la forme quadratique

$$\Sigma W_{jk} u_j u_k$$

en une somme de carrés, il y a un seul carré positif : il suit de là que le discriminant de cette forme a toujours le signe de $(-1)^{m-1}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(-1)^{m-1} |W_{jk}| = (-1)^{m-1} \left| \sum_i V_{jki} v_i \right| \geq 0,$$

pourvu que les nombres v ne soient pas négatifs [1].

16. Ces diverses inégalités vont nous fournir des renseignements sur ce qui arrive dans le cas où l'une des inégalités de Minkowski devient une égalité.

Nous avons déjà parlé des égalités cubiques et rappelé les résultats connus, nous n'y reviendrons pas.

Examinons d'abord le cas où une seule des inégalités quadratiques entre les volumes mixtes de deux corps convexes, par exemple (2), devient une égalité.

Reprenons l'inégalité (5), faisons maintenant $x_1 = 1$ et faisons tendre x_2 et x_3 vers zéro, nous obtenons

$$V_{111}(\sigma_{12} u_2 - \sigma_{13} u_3)^2 - 2\sigma_{11}(V_{112} u_2 - V_{113} u_3)(\sigma_{12} u_2 - \sigma_{13} u_3) \\ + \sigma_{11}^2 (V_{122} u_2^2 - 2 V_{123} u_2 u_3 + V_{133} u_3^2) \geq 0.$$

Or, le signe d'égalité dans (2) entraine le signe d'égalité dans la première des inégalités (4): dans la forme quadratique qui est au premier membre de l'inégaliié que nous venons d'écrire, le terme en u_2^2 disparaît donc et, pour que cette forme soit semi-définie, il est nécessaire que le terme en $u_2 u_3$ disparaisse aussi, ce qui donne

$$(10) \qquad \sigma_{13}(V_{111}\sigma_{12} - V_{112}\sigma_{11}) - \sigma_{11}(V_{113}\sigma_{12} - \sigma_{11} V_{123}) = 0.$$

Or, comme conséquence du signe d'égalité dans (2) et dans la pre-

---

[1] A cet ordre d'idées on peut rattacher un certain nombre de résultats que j'ai obtenus pour les courbes planes : *Sur les inégalités de Minkowski* (*Matematisk Tidskrift*, B, t. 2, 1930, p. 33-40).

mière des inégalités (4), nous avons

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}=\frac{V_{111}}{V_{112}}=\frac{V_{112}}{V_{122}}.$$

L'égalité précédente se réduit alors à

$$V_{113}\sigma_{12}-V_{123}\sigma_{11}=0,$$

et en définitive nous obtenons les conditions

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}}=\frac{V_{111}}{V_{112}}=\frac{V_{112}}{V_{122}}=\frac{V_{113}}{V_{123}},$$

où C_3 désigne un corps quelconque; ces conditions sont toutes contenues dans l'énoncé suivant :

Pour qu'ait lieu l'égalité

$$V_{112}^2=V_{111}V_{122},$$

il est nécessaire et suffisant que le rapport $\frac{V_{113}}{V_{123}}$ soit une constante indépendante du corps C_3.

Les deux quantités σ_{11} et σ_{12} sont, à un facteur près, les valeurs de V_{113} et de V_{123} respectivement lorsqu'on prend pour corps C_3 un segment de droite de longueur un.

En désignant, comme précédemment, par H_3 la fonction d'appui du corps C_3, par dS_{11} l'élément d'aire de la frontière de C_1, dS_{12} l'élément d'aire correspondante de l'aire mixte, on doit avoir

$$(11)\qquad \frac{V_{113}}{V_{123}}=\frac{\int H_3\,dS_{11}}{\int H_3\,dS_{12}}=k,$$

où k désigne une constante.

Je dis que cela entraîne

$$(12)\qquad \frac{dS_{11}}{dS_{12}}=k$$

dans toute direction.

Si les deux corps C_1 et C_2 sont des polyèdres ce résultat est bien facile à obtenir, et, si les deux fonctions dS_{11} et dS_{12} sont continues sur la sphère de rayon 1, le résultat peut être obtenu de la façon suivante.

Supposons que, pour une certaine direction ω, $\frac{dS_{11}}{dS_{12}}$ soit différente de k de sorte que, dans un petit cercle entourant le point ω de la sphère de rayon 1 et de rayon sphérique α, on ait, par exemple,

$$\frac{dS_{11}}{dS_{12}} > k - \tau_1,$$

où τ_1 désigne un nombre positif.

Prenons d'abord pour corps C_3 une sphère de rayon 1, puis ensuite cette même sphère coiffée d'un capuchon suivant le petit cercle précédent, de la relation (11) appliquée à ces deux corps, on déduit

$$\int\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - 1\right)(dS_{11} - k\,dS_{12}) = 0,$$

θ désignant l'angle d'une direction avec la direction ω, l'intégration étant étendue à l'intérieur du petit cercle déjà défini, de sorte que

$$\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - 1 \geq 0,$$

d'où

$$\int\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - 1\right)(dS_{11} - k\,dS_{12}) \geq \tau_1 \int\left(\frac{\cos\theta}{\cos\alpha} - 1\right) dS_{12} \geq 0,$$

nous arrivons à une contradiction à moins que dS_{11} et dS_{12} ne soient tous les deux nuls au point ω, auquel cas on peut aussi dire que leur rapport est égal à k.

De la relation (12) qui constitue un progrès vers la démonstration de la proposition de Minkowski : savoir que si (2) se réduit à une égalité, le corps C_1 est homothétique à C_2 ou à un corps de capuchon de C_2, je n'ai pas pu tirer cette démonstration dans le cas général. Dans le Chapitre III nous reprendrons la question pour deux polyèdres et nous atteindrons ce but.

17. Examinons maintenant le cas où, sans que l'on ait forcément le signe d'égalité dans (2), ce signe a lieu dans la première des inégalités (4) pour une direction de projection au moins.

L'égalité (10) doit avoir également lieu pour cette direction de projection mais quel que soit le corps C_3, elle donne

$$\frac{V_{111}\sigma_{12} - V_{112}\sigma_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{V_{112}\sigma_{12} - V_{122}\sigma_{11}}{\sigma_{12}} = \frac{V_{113}\sigma_{12} - V_{123}\sigma_{11}}{\sigma_{13}} = k, \tag{13}$$

où k désigne une constante.

On peut l'écrire aussi

$$\int H_3(\sigma_{12}\,dS_{11} - \sigma_{11}\,dS_{12} - k\,ds_1) = 0, \tag{14}$$

où les notations sont les mêmes que précédemment et où ds_1 désigne l'élément d'arc du contour apparent du corps C_1 sur la direction considérée ω, ds_1 est donc nul partout sauf pour les directions perpendiculaires à celle-ci où il est infini, mais on doit considérer

$$\int H_3\,ds_1$$

comme une intégrale curviligne le long du grand cercle perpendiculaire à ω.

On montre, comme au numéro précédent, que l'égalité (14) entraîne

$$\frac{dS_{11}}{dS_{12}} = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} = \text{const.}$$

sur toute la sphère sauf le long de ce grand cercle.

Ceci nous amène à penser que, si le signe d'égalité n'a pas lieu dans (2), du moins il aura lieu pour des corps que l'on peut déduire facilement de C_1 et de C_2.

Considérons le corps $C_{2'}$ obtenu par l'étirage de C_2 suivant la direction de projection d'une quantité h (si l'on veut $C_{2'}$ est la somme de C_2 et du segment de longueur h porté par la direction de projection) on a

$$V_{12'3} = V_{123} + \frac{h}{3}\sigma_{13}.$$

Si nous supposons alors k positif, en prenant $h = \dfrac{3k}{\sigma_{11}}$, la dernière des égalités (13) devient

$$V_{113}\sigma_{12'} - V_{12'3}\sigma_{11} = 0.$$

Elle exprime que, pour les deux corps C_1 et C_2, on a

$$V_{112}^2 = V_{111} V_{122}.$$

Admettant le théorème de Minkowski, nous voyons que ce cas ne pourra avoir lieu que si C_1 est un corps de capuchon d'un corps déduit de C_2 par étirage.

Lorsque k est négatif, si le corps C_2 obtenu en prenant la valeur de h précédente est convexe, nous arrivons à la même conclusion. Je crois que cette condition suffisante est également nécessaire en ce sens que le corps C_2 doit être, dans ce cas, convexe, mais je n'ai pas réussi à éclaircir ce point.

Supposons maintenant que la première des inégalités (4) *se réduise à une égalité pour deux directions de l'espace, les égalités* (13) *ont lieu par ces deux directions, et l'on déduit du résultat précédent que* (12) *est vérifiée pour toutes les directions de l'espace, alors*

$$V_{112}^2 = V_{111} V_{122}.$$

Enfin supposons que, pour une même direction, les deux inégalités (4) *se réduisent à des égalités, il est immédiat, d'après ce qui précède, que l'un des corps est homothétique à un corps qui provient de l'étirage de l'autre.*

Désignons par S_{11}, S_{12}, S_{22} l'aire de la fonction du corps C_1, l'aire mixte de la frontière des deux corps C_1 et C_2, l'aire de la frontière de C_2 respectivement, et rappelons les égalités

$$S_{11} = \frac{1}{\pi} \int \varpi_{11}\, d\omega, \qquad S_{12} = \frac{1}{\pi} \int \varpi_{12}\, d\omega, \qquad S_{22} = \frac{1}{\pi} \int \varpi_{22}\, d\omega,$$

les intégrations étant effectuées sur la sphère de rayon 1. Considérons maintenant les inégalités (4) pour les diverses directions de l'espace, on a évidemment

$$\min \frac{\varpi_{12}}{\varpi_{11}} \leq \frac{\int \varpi_{12}\, d\omega}{\int \varpi_{11}\, d\omega} \leq \max \frac{\varpi_{12}}{\varpi_{11}},$$

$$\min \frac{\varpi_{22}}{\varpi_{12}} \leq \frac{\int \varpi_{22}\, d\omega}{\int \varpi_{12}\, d\omega} \leq \max \frac{\varpi_{22}}{\varpi_{12}}.$$

De là nous déduisons que l'on a (¹)

$$
(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{111}S_{12}^2 - 2V_{112}S_{11}S_{12} + V_{122}S_{11}^2 \leqq 0, \\ V_{112}S_{22}^2 - 2V_{122}S_{12}S_{22} + V_{222}S_{12}^2 \leqq 0. \end{array} \right.
$$

on voit alors aisément que le signe d'égalité ne peut avoir lieu dans la première de ces inégalités que si

$$
\frac{S_{12}}{S_{11}} = \min \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{S_{12}}{S_{11}} = \max \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}},
$$

mais la première de ces égalités entraîne la seconde et le rapport $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}$ est une constante égale à $\frac{S_{12}}{S_{11}}$, c'est-à-dire que la première des inégalités (4) se réduit à une égalité pour toutes les directions de projection et, d'après les résultats précédents, nous pouvons conclure que l'inégalité (2) se réduit à une égalité, ce que nous énoncerons :

Le signe d'égalité dans l'une des relations (4') entraîne l'égalité quadratique correspondante.

18. Demandons-nous maintenant quelles conséquences on peut tirer du fait que l'inégalité (8) devient une égalité.

L'inégalité (7), puis l'inégalité (6), donnent d'abord

$$
\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \frac{V_{113}}{V_{123}} = \frac{V_{123}}{V_{223}} = \frac{V_{133}}{V_{233}}.
$$

Prenons ensuite l'inégalité (9) où nous faisons $m = 4$, en prenant pour C_1, C_2, C_3 les corps considérés et pour C_4 un corps quelconque et posons

$$
\begin{array}{llll} x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & x_4 = 0, \\ y_1 = 0, & y_2 = 0, & y_3 = 1, & y_4 = 0. \end{array}
$$

(¹) Ces inégalités sont les analogues dans l'espace d'une inégalité de G. Frobenius dans le plan [*Über den gemischten Flächeninhalt zweier Ovale* (*Berlin Sitz. Ber.*, t. **195**, p. 387-404)]. Soient S_{11}, S_{12}, S_{22} les aires limitées par deux courbes convexes et leur aire mixte, L_1 et L_2 la longueur de ces courbes, on a

$$
S_{11}L_2^2 - 2S_{12}L_1L_2 + S_{22}L_1^2 \leqq 0,
$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que pour deux courbes homothétiques. *Voir* aussi Bonnesen (*loc. cit.*), p. 91.

nous obtenons une forme semi-définie négative en u_2, u_3, u_1 où le terme en u_2^2 disparaît, il doit donc en être de même des termes en $u_2 u_3$ et $u_2 u_1$. L'évanouissement du coefficient du terme en $u_2 u_3$ ne donne aucune inégalité nouvelle, mais en égalant à zéro celui de $u_2 u_1$ on trouve

$$\frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \frac{V_{131}}{V_{231}} = \frac{\int H_1\, dS_{13}}{\int H_1\, dS_{23}}.$$

Comme précédemment on tire de cette inégalité la conséquence suivante :

Pour qu'ait lieu l'égalité

$$V_{123}^2 = V_{113} V_{223},$$

il est nécessaire et suffisant que le rapport

$$\frac{dS_{13}}{dS_{23}}$$

des éléments d'aire mixte soit indépendant de la direction suivant laquelle sont comptés ces éléments d'aire.

De là nous tirons tout de suite cette conséquence :

Entre les volumes mixtes de trois corps convexes C_1, C_2, C_3 *on a les inégalités*

$$(8') \qquad \left\{ \begin{array}{l} V_{123}^2 \geqq V_{113} V_{223}, \\ V_{123}^2 \geqq V_{332} V_{112}, \\ V_{123}^2 \geqq V_{221} V_{331}, \end{array} \right.$$

deux signes d'égalité entraînent le troisième et alors les éléments d'aire mixte : dS_{12}, dS_{23}, dS_{31} *sont proportionnels.*

Il semble bien que, dans le cas général, il faille renoncer à aller plus loin dans cette analyse; la condition géométrique pour que le signe d'égalité ait lieu dans (8) paraît difficile à énoncer.

Prenons en effet pour corps C_3 un segment de droite de longueur 1, alors on a

$$V_{113} = \frac{\sigma_{11}}{3}, \qquad V_{123} = \frac{\sigma_{12}}{3}, \qquad V_{223} = \frac{\sigma_{22}}{3} \qquad (V_{133} = V_{233} = 0).$$

où les σ désignent les aires et l'aire mixte des contours apparents des corps dans la direction du segment C_3. L'inégalité (8) se réduit à l'inégalité de Minkowski pour les aires des contours apparents et le signe d'égalité exprimera seulement que les corps C_1 et C_2 ont des contours apparents homothétiques dans la direction de C_3.

Les trois signes d'égalité dans (8') n'entraînent pas que les corps C_1, C_2, C_3 soient homothétiques ; supposons en effet que les corps C_2 et C_3 soient les mêmes, ces égalités se réduisent à

$$V_{122}^2 = V_{112} V_{222},$$

qui est valable lorsque C_2 est un corps de capuchon de C_1.

Examinons enfin ce qui se passe lorsque le signe d'égalité a lieu dans (7) pour une direction de projection seulement. En écrivant que les termes en $u_2 u_3$ et $u_2 u_4$ disparaissent dans la forme (9) où l'on a fait les mêmes substitutions que précédemment on trouve

$$\begin{aligned} \frac{V_{113}\sigma_{23} - V_{123}\sigma_{13}}{\sigma_{13}} &= \frac{V_{123}\sigma_{23} - V_{223}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} \\ &= \frac{V_{133}\sigma_{23} - V_{233}\sigma_{13}}{\sigma_{33}} = \frac{V_{134}\sigma_{23} - V_{234}\sigma_{13}}{\sigma_{34}} = k, \end{aligned}$$

où k désigne une constante.

De là on tire

$$\int H_4 (\sigma_{23}\, dS_{13} - \sigma_{13}\, dS_{23} - k\, ds_3) = 0,$$

où les notations sont les mêmes que précédemment, aux indices près. Comme au paragraphe précédent, on voit que cette égalité entraîne

$$\frac{dS_{13}}{dS_{23}} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_{23}} = \text{const.},$$

sauf sur les directions perpendiculaires aux directions de projection.

Des considérations en tout point semblables aux précédentes nous conduisent aux énoncés suivants :

Si k est positif, soit $C_{2'}$ le corps obtenu par étirage de C_2 dans la direction de projection de la quantité $h = \frac{3k}{\sigma_{13}}$, alors on a

$$V_{12'3}^2 = V_{113} V_{2'2'3}.$$

Si le signe d'égalité à lieu dans (7) pour deux directions de projection, alors il a lieu pour toutes les directions et il s'ensuit

$$V_{123}^2 = V_{113}V_{223},$$

enfin on a également

$$V_{113}S_{23}^2 - 2V_{123}S_{13}S_{23} + V_{223}S_{13}^2 \leqq 0,$$

le signe d'égalité entraînant l'égalité précédente.

19. Dans ce paragraphe nous allons examiner quelques cas particuliers des inégalités précédentes.

Soient d'abord C_1 un corps convexe donné et C_2 *une sphère de rayon* 1. Désignons par V, S, M le volume, l'aire de la frontière, l'intégrale de la courbure moyenne (¹) de C_1, σ et λ l'aire et le périmètre du contour apparent de ce corps dans une direction de projection déterminée, on a

$$V_{111} = V, \qquad V_{112} = \frac{S}{3}, \qquad V_{122} = \frac{M}{3}, \qquad V_{222} = \frac{4\pi}{3};$$

$$\sigma_{11} = \sigma, \qquad \sigma_{12} = \frac{\lambda}{2}, \qquad \sigma_{22} = \pi,$$

les inégalités (4) s'écrivent

$$(15) \qquad \begin{cases} 3V\lambda^2 - 4S\sigma\lambda + 4M\sigma^2 \leqq 0, \\ \pi S - M\lambda + \lambda^2 \leqq 0, \end{cases}$$

ce sont des formes améliorées, dues à M. Bonnesen (*loc. cit.*), des inégalités connues

$$(16) \qquad \begin{cases} S^2 - 3MV \geqq 0, \\ M^2 - 4\pi S \geqq 0. \end{cases}$$

Au sujet de la première des inégalités (15) nous ne pouvons rien dire de plus que ce qui a été dit dans les paragraphes précédents au sujet de deux corps C_1 et C_2 quelconques; pour la deuxième de ces inégalités il nous est possible d'aller un peu plus loin.

(¹) Lorsque la surface de C_1 n'est pas régulière (si C_1 est un polyèdre par exemple) on peut définir l'intégrale de la courbure moyenne par

$$M = \int H(\omega)\, d\omega,$$

Tout d'abord le signe d'égalité dans la deuxième des inégalités (16) exige que

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{S}{M} = \frac{M}{4\pi},$$

la longueur du contour apparent est donc constante dans toute direction de projection et l'on a

$$\lambda^2 = \pi S,$$

d'où, en tenant compte de l'expression de S,

$$\int (\lambda^2 - 4\pi\sigma)\, d\omega = 0.$$

Or $\lambda^2 - 4\pi\sigma$ est une fonction continue sur la sphère unité et elle n'est pas négative d'après l'inégalité isopérimétrique classique. *Pour que l'intégrale précédente soit nulle il est donc nécessaire que cette fonction soit nulle partout, c'est-à-dire que le contour apparent du corps* C_1 *dans toute direction est un cercle et cela entraîne que* C_1 *est une sphère.* Ce résultat est connu mais la méthode employée pour l'atteindre est nouvelle je crois.

Si, pour une direction de projection seulement, la deuxième des inégalités (15) devient une égalité, on doit avoir, en désignant par M_3 l'intégrale de la courbure moyenne d'un corps convexe quelconque C_3, par λ_3 la longueur de son contour apparent sur la direction de projection suivant laquelle l'égalité a lieu

$$(17) \qquad \frac{M_3\lambda - 2\pi S_{13}}{\lambda_3} = 2\lambda - M = M - \frac{2\pi S}{\lambda} = k.$$

Ici k ne peut être positif car le corps C_1 devrait être tel que, par étirage, il fournisse une sphère, ce qui est impossible. Si k est nul on retombe sur le cas précédent et C_1 est une sphère. Enfin, lorsque k est négatif, les considérations du paragraphe **17** nous conduisent à penser que C_1 provient de l'étirage d'une sphère : c'est-à-dire que C_1 se compose d'un cylindre de révolution coiffé de deux hémisphères. C'est effectivement ce qui a lieu, nous le démontrerons au prochain paragraphe, mais on peut établir ce fait au moyen de considérations étrangères à celles exposées ici. Voici en quelques mots le schéma d'une autre démonstration.

Sur une sphère, un axe des pôles et un méridien initial ayant été choisis, prenons pour coordonnées, comme on le fait habituellement, la longitude $\varphi(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$ et la colatitude $\theta(0 \leqq \theta \leqq \pi)$, soit $H(\theta, \varphi)$ une fonction d'appui d'un corps convexe, considérons la fonction

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta, \varphi)\,d\varphi,$$

on démontre que c'est aussi la fonction d'appui d'un corps convexe, de révolution, par conséquent, autour de l'axe des pôles. On établit ensuite que l'aire de la frontière de ce dernier corps dépasse, en général, l'aire de la frontière du corps de départ et ne lui est égale que lorsque le corps primitif est lui-même de révolution autour de l'axe des pôles. Les intégrales de la courbure moyenne et les longueurs des contours apparents des deux corps, suivant la ligne des pôles comme direction de projection, sont visiblement les mêmes.

Il suit de là que, dans le cas où nous nous plaçons, le corps C_1 doit être de révolution autour d'un axe parallèle à la direction de projection suivant laquelle a lieu l'égalité dans (15) car, si cela n'était pas, par l'opération précédente on augmenterait le terme πS sans changer les autres et l'inégalité devrait être encore valable ce qui n'est pas possible. On retombe ainsi sur un problème qui a été traité par M. Bonnesen [1].

Enfin, dans le cas où le signe d'égalité a lieu dans (15) *pour deux directions différentes de projection, il est simple de démontrer que le corps* C_1 *est une sphère.*

Reprenons à cet effet les égalités (17) et, pour corps C_2, choisissons un segment de droite de longueur unité faisant avec la direction de projection considérée l'angle $\theta(0 < \theta < \pi)$, on a, en désignant par λ' la longueur du contour apparent de C_1 dans la direction de C_2

$$\pi(\lambda - \lambda') = 2\sin\theta(2\lambda - M).$$

Supposons maintenant que c'est suivant la direction de C_2 qu'a lieu à nouveau le signe d'égalité dans la deuxième des inégalités (15), alors si l'on avait : $2\lambda - M \neq 0$, λ' serait différent de λ et ces deux

[1] T. Bonnesen, *Quelques problèmes isopérimétriques* (*Acta math.*, 48, 1926, p. 123-178).

quantités seraient les racines de

$$x^2 - xM + \pi S = 0,$$

de sorte que

$$\lambda + \lambda' = M.$$

En éliminant λ' entre les deux relations précédentes on trouve

$$(2\lambda - M)(\pi - 2\sin\vartheta) = 0,$$

ce qui conduit à

$$2\lambda - M = 0,$$

contrairement à l'hypothèse. Le corps C_1 est donc une sphère.

20. Soient maintenant C_1 et C_2 deux corps convexes quelconques et C_3 *une sphère de rayon* 1. Désignons par S_{11} et S_{22} les aires des frontières des deux corps C_1 et C_2, par S_{12} leur aire mixte, par M_1 et M_2 les intégrales de la courbure moyenne de chacun de ces deux corps, par λ_1 et λ_2 les longueurs de leurs contours apparents suivant une même direction de projection, on a

$$V_{113} = \frac{S_{11}}{3}, \qquad V_{123} = \frac{S_{12}}{3}, \qquad V_{223} = \frac{S_{22}}{3};$$

$$V_{133} = \frac{M_{11}}{3}, \qquad V_{233} = \frac{M_{22}}{3};$$

$$\sigma_{13} = \frac{\lambda_1}{2}, \qquad \sigma_{23} = \frac{\lambda_2}{2}.$$

L'inégalité (7) s'écrit

$$(18) \qquad S_{11}\lambda_2^2 - 2S_{12}\lambda_1\lambda_2 + S_{22}\lambda_1^2 \geq 0,$$

c'est une forme améliorée de

$$(19) \qquad S_{12}^2 \geq S_{11}S_{22}.$$

Pour qu'ait lieu le signe d'égalité dans (19) il faut que

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{S_{11}}{S_{12}} = \frac{S_{12}}{S_{22}} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{S_{13}}{S_{23}} = k,$$

C_3 étant un corps convexe quelconque.

En particulier le rapport des périmètres des contours apparents est constant et le signe d'égalité doit avoir lieu dans (18) ce qui peut s'écrire

$$\int (\sigma_{11} - 2\sigma_{12} k + \sigma_{22} k^2)\, d\omega = 0, \tag{20}$$

l'intégration étant étendue à la sphère de rayon 1.

Mais, d'après une inégalité due à Frobenius [1], on a, pour deux courbes convexes quelconques,

$$\lambda_2^2 (\sigma_{11} - 2\sigma_{12} k + \sigma_{22} k^2) = \sigma_{11} \lambda_2^2 - 2\sigma_{12} \lambda_1 \lambda_2 + \sigma_{22} \lambda_1^2 \leq 0,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que pour deux courbes homothétiques.

La fonction placée sous le signe d'intégration dans (20) est donc non positive et continue sur la sphère de rayon 1, de (20) il suit qu'elle doit être nulle pour toutes les directions de projection : autrement dit, *les corps C_1 et C_2 ont des contours apparents homothétiques dans toute direction, on en déduit qu'ils sont homothétiques.*

Comme au paragraphe **18**, on montre que

$$S_{11} M_2^2 - 2 S_{12} M_1 M_2 + S_{22} M_1^2 \leq 0,$$

inégalité analogue à celle de Frobenius, le signe d'égalité n'ayant lieu que pour deux corps homothétiques.

Examinons enfin le cas où le signe d'égalité a lieu dans (18) pour une direction de projection seulement, on doit alors avoir

$$\frac{S_{11} \lambda_2 - S_{21} \lambda_1}{\lambda_1} = k,$$

C_1 désignant un corps quelconque.

Si k est positif, soit $C_{2'}$ le corps obtenu par étirage de C_2 dans la direction de projection de la quantité $\frac{2k}{\lambda_1}$, l'égalité précédente montre que

$$S_{12'}^2 = S_{11} S_{2'2'},$$

c'est-à-dire que C_1 est homothétique à $C_{2'}$. Si k est négatif, en permutant le rôle des deux corps C_1 et C_2, nous voyons que C_1 est homothétique à un corps provenant de l'étirage de C_1, et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

---

[1] *Voir* par exemple T. Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (Gauthier-Villars, 1929, p. 91) ou la note de la page 247.

Si le signe d'égalité a lieu dans (18) *pour une direction de projection, alors l'un des deux corps est homothétique à un corps qui provient de l'étirage de l'autre.*

Prenons en particulier pour corps C_2 une sphère, en reprenant les notations du numéro précédent, on a

$$S_{11} = S, \qquad S_{12} = M, \qquad S_{22} = 4\pi;$$
$$\lambda_1 = \lambda, \qquad \lambda_2 = 2\pi,$$

et l'inégalité (18) se réduit à la deuxième des inégalités (15) et le résultat précédent s'énonce ainsi :

Si le signe d'égalité a lieu dans la deuxième des inégalités (15) *pour une direction de projection, alors le corps C_1 provient de l'étirage d'une sphère.*

Enfin, revenant au cas où le signe d'égalité a lieu dans (19), la condition différentielle trouvée au paragraphe **18** s'écrit

$$\frac{dM_1}{dM_2} = k,$$

en désignant par dM l'élément différentiel de l'intégrale de la courbure moyenne d'un corps.

Si C_1 et C_2 sont deux polyèdres, l'égalité précédente exige que les faces de ces polyèdres soient parallèles et que leurs arêtes soient proportionnelles, c'est-à-dire que ces deux polyèdres soient directement homothétiques, nous retrouvons par une autre voie le résultat déjà obtenu.

Mais, lorsqu'un corps est limité par une surface analytique, on a

$$dM = (R_1 + R_2)\,d\omega,$$

où R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure principaux de la surface au point où son plan tangent est parallèle au plan tangent à la sphère de rayon 1 au point ω, le résultat que nous avons obtenu au début de ce paragraphe peut s'interpréter comme il suit :

Il existe une surface convexe au plus telle que la somme des rayons de courbure principaux en un point de cette surface soit une fonction donnée de l'image sphérique.

Dans un travail qui paraitra prochainement je montrerai qu'il existe effectivement une surface correspondant à une fonction donnée, pourvu que cette dernière vérifie des conditions faciles à établir.

21. Cas de n quelconque. — Dans l'espace à un nombre quelconque n de dimensions, le but de la théorie serait de démontrer et d'améliorer l'inégalité suivante :

$$V_{12\ldots n}^{n} \geq V_{11\ldots 1} V_{22\ldots 2} \cdots V_{nn\ldots n},$$

mais bien peu de choses peuvent être obtenues dans cette voie, et il semble bien qu'il n'y ait pas à espérer beaucoup des méthodes précédentes, car l'ensemble de ces inégalités exprime davantage que la concavité de $\sqrt[n]{V(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

En se limitant à celle-ci, la plus grande difficulté qui se présente est la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme soit positive pour des valeurs positives des variables qui y figurent. A ce point de vue, le résultat géométrique que nous avons obtenu, savoir que les volumes des corps d'une série linéaire engendrée par plusieurs corps de base est une fonction concave, ne présente d'intérêt que lorsque le nombre des corps de base est égal à deux.

22. Bornons-nous à une série linéaire engendrée par deux corps C_1 et C_2, le volume $V(x_1, x_2)$ du corps $x_1 C_1 + x_2 C_2$ s'écrit :

$$V(x_1, x_2) = x_1^n V_{11\ldots 1} + n x_1^{n-1} x_2 V_{11\ldots 2} + \frac{n(n-1)}{2} x_1^{n-2} x_2^2 V_{11\ldots 22} + \ldots + x_2^n V_{22\ldots 2}.$$

En désignant par $\sigma_{11\ldots 1}$ et $\sigma_{22\ldots 2}$ les étendues des projections des corps C_1 et C_2 sur un plan de projection quelconque (¹), on a

$$x_1^{n-1} x_2 \left[\frac{n V_{11\ldots 2}}{\sigma_{11\ldots 1} \sigma_{22\ldots 2}^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{(n-1) V_{11\ldots 1}}{\sigma_{11\ldots 1}^{\frac{n}{n-1}}} - \frac{V_{22\ldots 2}}{\sigma_{22\ldots 2}^{\frac{n}{n-1}}} \right] + \ldots$$
$$+ x_1 x_2^{n-1} \left[\frac{n V_{12\ldots 2}}{\sigma_{11\ldots 1}^{\frac{1}{n-1}} \sigma_{22\ldots 2}} - \frac{V_{11\ldots 1}}{\sigma_{11\ldots 1}^{\frac{n}{n-1}}} - \frac{(n-1) V_{22\ldots 2}}{\sigma_{22\ldots 2}^{\frac{n}{n-1}}} \right] \geq 0.$$

(¹) On peut prendre aussi pour $\sigma_{11\ldots 1}$ et $\sigma_{22\ldots 2}$ les étendues des travers intérieurs respectifs des deux corps.

Nous obtenons immédiatement deux inégalités, mais il serait vain d'essayer d'en obtenir d'autres :

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{n V_{11\ldots 2}}{\sigma_{11\ldots 1}\,\sigma_{22\ldots 2}^{\frac{1}{n-1}}} - \dfrac{(n-1) V_{11\ldots 1}}{\sigma_{11\ldots 1}^{\frac{n}{n-1}}} - \dfrac{V_{22\ldots 2}}{\sigma_{22\ldots 2}^{\frac{n}{n-1}}} \geq 0, \\[2ex] \dfrac{n V_{12\ldots 2}}{\sigma_{11\ldots 1}^{\frac{1}{n-1}}\,\sigma_{22\ldots 2}} - \dfrac{V_{11\ldots 1}}{\sigma_{11\ldots 1}^{\frac{n}{n-1}}} - \dfrac{(n-1) V_{22\ldots 2}}{\sigma_{22\ldots 2}^{\frac{n}{n-1}}} \geq 0. \end{cases}$$

Ce sont des formes améliorées des inégalités

$$(22)\quad \begin{cases} V_{11\ldots 2}^{n} \geq V_{11\ldots 1}^{n-1} V_{22\ldots 2}, \\ V_{12\ldots 2}^{n} \geq V_{11\ldots 1} V_{22\ldots 2}^{n-1}. \end{cases}$$

Appliquons la première des inégalités (21) aux deux corps C_1 et $C_1 + tC_2$, avec t suffisamment petit ; puis appliquons la deuxième de ces inégalités aux deux corps $C_2 + tC_1$ et C_2, dans les mêmes conditions, on trouve

$$(23)\quad \begin{cases} V_{11\ldots 1}\,\sigma_{11\ldots 2}^{2} - 2 V_{11\ldots 2}\,\sigma_{11\ldots 2}\,\sigma_{11\ldots 1} - V_{11\ldots 22}\,\sigma_{11\ldots 1}^{2} \geq 0, \\ V_{22\ldots 2}\,\sigma_{12\ldots 2}^{2} - 2 V_{12\ldots 2}\,\sigma_{22\ldots 1}\,\sigma_{22\ldots 2} - V_{112\ldots 2}\,\sigma_{22\ldots 2}^{2} \geq 0 ; \end{cases}$$

Ce sont des formes améliorées des nouvelles inégalités

$$(24)\quad \begin{cases} V_{11\ldots 2}^{2} \geq V_{11\ldots 1} V_{11\ldots 22}, \\ V_{12\ldots 2}^{2} \geq V_{112\ldots 2} V_{22\ldots 2} ; \end{cases}$$

que l'on peut déduire directement des inégalités (22) par les mêmes considérations.

Pour obtenir de nouvelles inégalités, on pourrait penser à utiliser le procédé qui a réussi dans le cas de $n = 3$, c'est-à-dire à introduire un troisième corps C_3, mais l'on obtient seulement

$$V_{123\ldots 33}^{2} \geq V_{113\ldots 33} V_{223\ldots 33},$$

inégalité, qui, lorsque C_3 se réduit à l'un des corps C_1 ou C_2, ne conduit à aucune inégalité nouvelle.

23. Examinons ce qui arrive lorsque l'une des inégalités (22) devient une égalité.

Soit, par exemple,

$$V_{11\ldots 2}^{n} = V_{11\ldots 1}^{n-1} V_{22\ldots 2}.$$

Reprenant les deux corps C_1 et $C_1 + tC_2$ et écrivant l'inégalité analogue pour ces deux corps, on trouve

$$\frac{n(n-1)}{2} t^2 (V^2_{11\ldots2} - V_{11\ldots1} V_{11\ldots22}) V^{n-2}_{11\ldots1} + \ldots$$
$$+ n t^{n-1} (V^{n}_{11\ldots2} - V^{n-2}_{11\ldots1} V_{12\ldots2}) V_{11\ldots1} \geq 0.$$

De là, nous tirons

$$V^{n-1}_{11\ldots2} \geq V^{n-2}_{11\ldots1} V_{12\ldots2},$$

puis

$$V^{n(n-1)}_{11\ldots2} \geq V^{n(n-2)}_{11\ldots1} V^{n}_{11\ldots2} \geq V^{(n-1)^2}_{11\ldots1} V^{n-1}_{22\ldots2},$$

d'où

$$V^{n}_{11\ldots2} \geq V^{n-1}_{11\ldots1} V_{12\ldots2},$$

l'égalité n'étant possible que si

$$V^{n-1}_{11\ldots2} = V^{n-2}_{11\ldots1} V_{12\ldots2},$$
$$V^{n}_{12\ldots2} = V_{11\ldots1} V^{n-1}_{22\ldots2}.$$

De proche en proche, on montre que

$$V^{n-p+1}_{11\ldots12} = V^{n-p}_{11\ldots1} V_{\underbrace{1\ldots1}_{p-1}\underbrace{2\ldots2}_{n-p+1}}.$$

De là, nous tirons

$$\frac{V_{11\ldots1}}{V_{11\ldots2}} = \frac{V_{11\ldots2}}{V_{11\ldots22}} = \ldots = \frac{V_{12\ldots2}}{V_{22\ldots2}},$$

ce qui peut s'interpréter en disant que la fonction $\sqrt[n]{V(x_1, x_2)}$ est linéaire.

Les deux inégalités (24) doivent se réduire toutes les deux à des égalités et il doit en être de même des égalités (23), ce qui amène à

$$(25) \qquad \frac{\sigma_{11\ldots1}}{\sigma_{11\ldots2}} = \frac{\sigma_{22\ldots1}}{\sigma_{22\ldots2}}.$$

Or, puisque les projections des corps sont des corps convexes à $n-1$ dimensions, on a

$$\sigma^{n-1}_{11\ldots2} \geq \sigma^{n-2}_{11\ldots1} \sigma_{22\ldots2},$$
$$\sigma^{n-1}_{12\ldots2} \geq \sigma_{11\ldots1} \sigma^{n-2}_{22\ldots2}.$$

Une conséquence de ces inégalités est

$$\frac{\sigma_{11\ldots1}}{\sigma_{11\ldots2}} \geq \frac{\sigma_{21\ldots1}}{\sigma_{22\ldots2}};$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que quand les deux inégalités précédentes se réduisent à des égalités.

L'égalité (25) entraîne donc que $\sqrt[n-1]{\sigma(x_1, x_2)}$ est une fonction linéaire; admettons que cela exprime que les projections des deux corps sont homothétiques, nous en déduisons que les corps C_1 et C_2 sont eux-mêmes homothétiques comme ayant leurs projections homothétiques dans toutes les directions; or, le théorème est vrai pour $n = 3$, il est donc vrai quel que soit n; donc :

L'égalité

$$V_{11\ldots2}^{n} = V_{11\ldots1}^{n-1} V_{22\ldots2}$$

entraîne que la fonction $\sqrt[n]{V(x_1, x_2)}$ *est linéaire et les deux corps* C_1 *et* C_2 *sont homothétiques.*

24. Désignons maintenant par C_1^ω et C_2^ω les projections des deux corps C_1 et C_2 suivant la direction ω, et précisons aussi les diverses étendues et étendues mixtes de ces deux projections en mettant ω en indice supérieur.

La projection du corps $x_1 C_1 + x_2 C_2$, suivant la direction ω, est $x_1 C_1^\omega + x_2 C_2^\omega$, et l'étendue $\sigma^\omega(x_1, x_2)$ est telle que sa racine $(n-1)^{\text{ième}}$ est une fonction concave ou linéaire, et l'on a la relation plus expressive

$$\begin{aligned}(26)\quad & x_1^{n-2} x_2 \left[(n-1)\sigma_{11\ldots2}^{\omega} t^{n-2} - (n-2)\sigma_{11\ldots1}^{\omega} t^{n-1} - \sigma_{22\ldots2}^{\omega}\right] + \ldots \\ & + x_1 x_2^{n-2} \left[(n-1)\sigma_{2\ldots2}^{\omega} t - \sigma_{11\ldots1}^{\omega} t^{n-1} - (n-2)\sigma_{2\ldots2}^{\omega}\right] \geq 0,\end{aligned}$$

où l'on peut prendre pour t la racine d'ordre $n-2$ du rapport des étendues des projections des corps C_1^ω et C_2^ω suivant une direction également quelconque.

Considérons maintenant deux directions de projection ω et ω'; les deux directions de variétés d'ordre $n-1$ perpendiculaires à ces directions ont en commun une variété d'ordre $n-2$ perpendiculaire à la variété d'ordre 2 déterminée par les directions ω et ω'; les projections des deux corps $C^{(\omega)}(x_1, x_2)$ et $C^{\omega'}(x_1, x_2)$ sont les mêmas sur cette variété d'ordre $n-2$, il y a donc une valeur de t commune à deux inégalités (26) relatives à deux directions quelconques de projection. Ceci peut s'exprimer également de la façon suivante :

Pour une direction de projection, nous avons des valeurs de t pour lesquelles l'inégalité (26) est vérifiée, et dont l'ensemble constitue un segment, alors pour deux directions quelconques, les segments correspondants ont toujours au moins un point commun.

Il suit de là qu'il existe au moins une valeur de t, soit t_0 pour laquelle l'inégalité (26) est vérifiée quelle que soit la direction ω.

Or, l'étendue de la frontière du corps $C(x_1, x_2)$ est, à un facteur près, la moyenne de $\sigma^{(\omega)}(x_1, x_2)$ sur la sphère de rayon unité de l'espace à n dimensions; en désignant par $S(x_1, x_2)$ cette étendue et par S affecté d'un nombre convenable d'indices les étendues et les étendues mixtes des frontières de C_1 et de C_2, de sorte que

$$S(x_1, x_2) = x_1^{n-1} S_{11\ldots 1} + (n-1) x_1^{n-2} x_2 S_{11\ldots 2} + \ldots + x_2^{n-1} S_{22\ldots 2},$$

nous obtenons

$$(27)\quad \begin{aligned} & x_1^{n-2} x_2 [(n-1) S_{11\ldots 2} t_0^{n-2} - (n-2) S_{11\ldots 1} t_0^{n-1} - S_{22\ldots 2}] + \ldots \\ & \quad + x_1 x_2^{n-2} [(n-1) S_{12\ldots 2} t_0 - S_{11\ldots 1} t_0^{n-1} - (n-2) S_{22\ldots 2}] \geqq 0, \end{aligned}$$

inégalité qui exprime *que la fonction* $\sqrt[n-1]{S(x_1, x_2)}$ *est une fonction concave ou linéaire.*

Nous en déduisons les inégalités

$$(28)\quad \begin{cases} S_{11\ldots 2}^{n-1} \geqq S_{11\ldots 1}^{n-2} S_{22\ldots 2}, \\ S_{12\ldots 2}^{n-1} \geqq S_{11\ldots 1} S_{22\ldots 2}^{n-2}, \end{cases}$$

puis

$$(29)\quad \begin{cases} S_{11\ldots 2}^{2} \geqq S_{11\ldots 1} S_{11\ldots 22}, \\ S_{12\ldots 2}^{2} \geqq S_{112\ldots 2} S_{11\ldots 1}. \end{cases}$$

Un seul signe d'égalité dans (28) *entraine l'autre et la fonction* $\sqrt[n-1]{S(x_1, x_2)}$ *est linéaire, ce que l'on voit comme précédemment. Quant à cette dernière éventualité, elle ne peut se présenter que quand le signe d'égalité a lieu dans* (27), *et par suite, dans* (26) *pour* $t = t_0$ *on en déduit que les deux corps ont des projections homothétiques dans toutes les directions, c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes homothétiques.*

23. Reprenons, pour la démontrer maintenant et en tirer une conséquence importante, l'inégalité à laquelle nous avons fait allusion à la fin du paragraphe **22**.

Il suffit de reprendre la méthode qui a réussi dans l'espace ordinaire. Considérons trois corps convexes C_1, C_2, C_3 et écrivons l'inégalité (23) pour les deux corps

$$K_1 = x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3, \qquad K_2 = y_1C_1 + y_2C_2 + y_3C_3.$$

Posons

$$W_{jk} = V(\underbrace{x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3, \ldots, x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3}_{n-2}, C_j, C_k)$$
$$s_j = \sigma(\underbrace{x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3, \ldots, x_1C_1 + x_2C_2 + x_3C_3}_{n-2}, C_j)$$
$$(j, k = 1, 2, 3).$$

Comme dans le cas de trois variables, on a

$$V(K_1, K_1 \ldots K_1) = \Sigma W_{jk}x_jx_k, \qquad V(K_1 \ldots K_1, K_2) = \Sigma W_{jk}x_jy_k,$$
$$V(K_1 \ldots K_1, K_2, K_2) = \Sigma W_{jk}y_jy_k;$$
$$\sigma(K_1 \ldots K_1) = \Sigma s_jx_j, \qquad \sigma(K_1 \ldots K_1, K_2) = \Sigma s_jy_j.$$

Si, dans l'inégalité obtenue, on pose ensuite

$$y_1 = tx_1 + u_1, \qquad y_2 = tx_2 + u_2, \qquad y_3 = tx_3 + u_3,$$

nous obtiendrons une inégalité de même forme que l'inégalité (5) valable pour des valeurs positives des x et des valeurs quelconques des u. Faisant dans cette dernière $x_3 = 1$ et faisant tendre x_1 et x_2 vers zéro, on aura l'inégalité suivante, valable quels que soient u_1 et u_2 :

$$(5') \qquad \begin{aligned} &V_{33\ldots3}(\sigma_{13\ldots3}u_1 + \sigma_{23\ldots3}u_2)^2 \\ &\quad - 2\sigma_{3\ldots3}(V_{13\ldots3}u_1 + V_{23\ldots3}u_2)(\sigma_{13\ldots3}u_1 + \sigma_{23\ldots3}u_2) \\ &\qquad + \sigma^2_{3\ldots3}(V_{113\ldots3}u_1^2 + 2V_{123\ldots3}u_1u_2 + V_{223\ldots3}u_2^2) \geqq 0. \end{aligned}$$

Il suffit de faire

$$\sigma_{13\ldots3}u_1 + \sigma_{23\ldots3}u_2 = 0$$

pour obtenir

$$(30) \qquad V_{113\ldots3}\sigma^2_{23\ldots3} - 2V_{123\ldots3}\sigma_{13\ldots3}\sigma_{23\ldots3} + V_{223\ldots3}\sigma^2_{13\ldots3} \geqq 0,$$

forme améliorée de l'inégalité

$$(31) \qquad V^2_{123\ldots3} \geqq V_{113\ldots3}V_{223\ldots3}.$$

En particulier, prenons pour corps C_3 une sphère de rayon 1 les quantités $V_{113\ldots3}$, $V_{223\ldots3}$, $V_{123\ldots3}$ sont, à un facteur près, qui dépend seulement de n, les étendues d'ordre deux [1] et l'étendue mixte des frontières des deux corps C_1 et C_2, et le résultat précédent peut être énoncé de la façon suivante :

La racine carrée de l'étendue d'ordre deux de la frontière du corps $x_1C_1 + x_2C_2\,(x_1 + x_2 = 1)$ est une fonction concave ou linéaire de x_1 (ou de x_2).

Pour savoir dans quel cas cette fonction est linéaire, il suffit de reprendre le raisonnement du paragraphe **20**; *nous allons montrer que cette hypothèse entraine que les deux corps C_1 et C_2 sont homothétiques.*

C_3 désignant toujours la sphère de rayon 1, admettons que, lorsque dans un espace à $n-1$ dimensions, l'inégalité (analogue à celle de Frobenius)

$$(32)\qquad V_{\underbrace{113\ldots3}_{n-1}} V^2_{\underbrace{23\ldots3}_{n-1}} - 2V_{\underbrace{123\ldots3}_{n-1}} V_{\underbrace{13\ldots3}_{n-1}} V_{\underbrace{23\ldots3}_{n-1}} + V_{\underbrace{223\ldots3}_{n-1}} V^2_{\underbrace{13\ldots3}_{n-1}} \geq 0$$

se réduit à une égalité, les deux corps correspondants sont homothétiques.

Nous avons démontré cela dans l'espace à trois dimensions, il suffira de prouver que si cette assertion est vraie dans l'espace d'ordre $n-1$, elle l'est également dans l'espace d'ordre n.

Or, les quantités $\sigma_{13\ldots3}$ et $\sigma_{23\ldots3}$ qui figurent dans (30) sont, à un facteur près, les quantités $V^{(\omega)}_{\underbrace{13\ldots3}_{n-1}}$ et $V^{(\omega)}_{\underbrace{23\ldots3}_{n-1}}$ qui figurent dans (31) pour les corps $C_1^{(\omega)}$ et $C_2^{(\omega)}$ projections des corps C_1 et C_2 suivant une direction donnée ω, et les quantités $V_{\underbrace{13\ldots3}_{n}}$ et $V_{\underbrace{23\ldots3}_{n}}$ sont aussi, à un autre facteur près, les moyennes, sur la sphère de rayon 1 de l'espace d'ordre n, des quantités précédentes; l'inégalité (32) est donc générale.

De plus, on sait aussi que $V_{\underbrace{113\ldots3}_{n}}$, $V_{\underbrace{123\ldots3}_{n}}$, $V_{\underbrace{223\ldots3}_{n}}$ sont, toujours à un facteur près, les moyennes des étendues et de l'étendue mixte des corps $C_1^{(\omega)}$ et $C_2^{(\omega)}$, soient $V^{(\omega)}_{\underbrace{113\ldots3}_{n-1}}$, $V^{(\omega)}_{\underbrace{123\ldots3}_{n-1}}$, $V^{(\omega)}_{\underbrace{223\ldots3}_{n-1}}$; pour que (30) devienne une égalité quelle que soit la direction de projection, il faut donc que

[1] Pour la définition de cette quantité, *voir* le paragraphe **27**.

le rapport

$$k = \frac{\sigma_{13\ldots3}}{\sigma_{23\ldots3}} = \frac{V^{(\omega)}_{13\ldots3}}{V^{(\omega)}_{23\ldots3}}$$

ne dépende pas de la direction de projection, et, de plus, que

$$\int \Big(V^{(\omega)}_{\underbrace{113\ldots3}_{n-1}} - 2V^{(\omega)}_{\underbrace{123\ldots3}_{n-1}} k + V^{(\omega)}_{\underbrace{223\ldots3}_{n-1}} k^2 \Big) d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à la sphère de rayon 1 de l'espace d'ordre n.

Or, d'après ce que l'on vient de dire, la quantité qui figure sous le signe d'intégration est, à un facteur près, égale au premier membre de l'inégalité (32).

Le signe d'égalité doit donc avoir lieu dans (32) quelle que soit la direction de projection; les deux corps ont donc des contours apparents homothétiques dans toute direction; ils sont donc homothétiques.

Écrivant maintenant l'inégalité (32) dans l'espace d'ordre n, nous voyons, comme au paragraphe **20**, que le signe d'égalité entraîne le signe d'égalité dans (30) pour toutes les directions de projection, et nous venons de montrer que cela entraîne aussi que les deux corps C_1 et C_2 sont homothétiques : notre assertion est donc complètement démontrée.

Quant au signe d'égalité dans (31), il entraîne le signe d'égalité dans (30), et la même conséquence : c'est ce que nous avions affirmé au début.

Remarquons aussi que l'inégalité (32) peut s'obtenir directement à partir de (5') en faisant

$$V_{133\ldots3}\, u_1 - V_{23\ldots3}\, u_2 = 0,$$

mais pour voir ce qui arrive lorsque le signe d'égalité est réalisé, il faut avoir recours aux considérations précédentes.

Les considérations relatives au cas général (C_3 n'est plus forcément une sphère) peuvent être reprises ici et conduisent à des résultats analogues. Il serait également facile de voir ce qui arrive lorsque le signe d'égalité a lieu dans (30) pour une seule direction de projection.

26. CAS DE $n = 4$. — Dans l'espace à quatre dimensions, on peut aller un peu plus loin sans toutefois arriver à la démonstration de toutes les inégalités souhaitées.

Écrivons, dans ce cas, la première des inégalités (23) pour les deux corps $x_1 C_1 + x_2 C_2$ et $y_1 C_1 + y_2 C_2$, puis, comme auparavant, posons

$$y_1 = t x_1 + u_1, \qquad y_2 = t x_2 + u_2,$$
$$W_{jk} = V_{jk11} x_1^2 + 2V_{jk12} x_1 x_2 + V_{jk22} x_2^2 \qquad (j, k = 1, 2),$$
$$\sigma_j = \sigma_{j11} x_1^2 + 2\sigma_{j12} x_1 x_2 + \sigma_{j22} x_2^2.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}(W_{11} x_1^2 + 2W_{12} x_1 x_2 + W_{22} x_2^2)(\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2)^2 \\ - 2[W_{11} x_1 u_1 + W_{12}(x_1 u_2 + x_2 u_1) + W_{22} x_2 u_2](\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2)(\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2) \\ + (W_{11} u_1^2 + 2W_{12} u + u_2 + W_{22} u_2^2)(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2)^2 \leqq 0,\end{aligned}$$

inégalité valable lorsque les nombres x_1 et x_2 sont positifs, mais avec des valeurs de u_1 et de u_2 quelconques.

Prenons alors des valeurs de u_1 et de u_2 telles que

$$\sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 = 0,$$

nous obtenons

$$W_{11} \sigma_2^2 - 2W_{12} \sigma_1 \sigma_2 + W_{22} \sigma_1^2 \leqq 0,$$

ce que nous écrirons :

$$\begin{aligned}V_{1111} x_1^2 \sigma_2^2 - 2V_{1122} x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 + V_{2222} x_2^2 \sigma_1^2 \\ + 2(V_{1112} x_1 \sigma_2 - V_{1222} x_2 \sigma_1)(x_2 \sigma_2 - x_1 \sigma_1) + V_{1122}(x_2 \sigma_2 - x_1 \sigma_1)^2 \leqq 0.\end{aligned}$$

Choisissons maintenant x_1 et x_2 de façon que $x_1 \sigma_1 = x_2 \sigma_2$, cela est possible, car cette équation s'écrit

$$x_1^2(\sigma_{111} x_1 + \sigma_{112} x_2) = x_2^2(\sigma_{122} x_1 + \sigma_{222} x_2),$$

elle a une seule racine positive en $\frac{x_2}{x_1}$, soit a; l'inégalité précédente devient

$$V_{1111} - 2V_{1122} a^2 + V_{2222} a^4 \leqq 0.$$

De même, il existe une valeur positive du rapport $\frac{x_2}{x_1}$ telle que

$$V_{1112} x_1 \sigma_2 = V_{1222} x_2 \sigma_1$$

et l'on en déduit

$$V_{1111} V_{1222}^2 - 2V_{1122} V_{1112} V_{1222} + V_{2222} V_{1112}^2 \leqq 0.$$

Nous obtenons ainsi deux formes améliorées de l'inégalité

$$V_{1122}^2 \geqq V_{1111} V_{2222}.$$

Pour que le signe d'égalité ait lieu, il est nécessaire que

$$\frac{V_{1111}}{V_{1122}} = \frac{V_{1112}}{V_{1222}} = \frac{V_{1122}}{V_{2222}} = a^2,$$

d'où

$$\frac{V_{1111}}{V_{1222}} = \frac{V_{1112}}{V_{2222}} = a^3$$

et, d'après ce que nous avons vu au paragraphe **25**, il faut que les deux corps C_1 et C_2 soient homothétiques.

Toutes les inégalités trouvées dans ce cas sont des conséquences des trois suivantes :

$$V_{1112}^2 \geqq V_{1111} V_{1122},$$
$$V_{1122}^2 \geqq V_{1111} V_{2222},$$
$$V_{1222}^2 \geqq V_{1122} V_{2222}.$$

27. Cas où l'un des corps est une sphère de rayon un. — Prenons maintenant pour corps C_2 une sphère de rayon 1, le corps C_1 étant quelconque, nous le désignerons par C. Nous écrirons le volume $V(x_1, x_2)$ de la façon suivante :

$$V(x_1, x_2) = x_1^n V_n + x_1^{n-1} x_2 V_{n-1} + \ldots + x_1 x_2^{n-1} V_1 + x_2^n V_0.$$

V_n désigne le volume du corps C, V_{n-1} l'étendue d'ordre $n-1$ de la frontière de ce corps ([1]); quant au coefficient V_p $(p \geqq 1)$, nous l'appellerons *l'étendue d'ordre p de la frontière* du corps; V_0 désigne le volume de la sphère de rayon 1, et l'on sait que

$$V_0 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

On démontre sans peine que, lorsque p est positif et inférieur à n, V_p est, à un facteur près, qui dépend seulement de n, la moyenne des étendues d'ordre p des projections du corps sur un espace d'ordre $n-1$; cela se fait au moyen de considérations en tous points sem-

(1) Cette quantité a été précédemment désignée par S.

blables à celles qui ont servi à établir le résultat analogue dans le cas des trois dimensions que nous avons rappelé au paragraphe **17**. Itérant ce procédé, on peut dire que V_p est, à un facteur près, la moyenne des étendues d'ordre p des projections du corps sur un espace d'ordre quelconque, mais compris entre p et n.

L'étendue d'ordre p du corps $C(x_1, x_2)$ est

$$V_p(x_1, x_2) = x_1^p V_p + (n-p+1) x_1^{p-1} x_2 V_{p-1} + \ldots + \frac{n!}{p!(n-p)!} x_2^p V_0.$$

Précédemment, nous avons déjà montré que $\sqrt[n]{V_n(x_1, x_2)}$, $\sqrt[n-1]{V_{n-1}(x_1, x_2)}$ et $\sqrt{V_2(x_1, x_2)}$ sont des fonctions concaves, on peut raisonnablement espérer qu'il en est de même de $\sqrt[p]{V_p(x_1, x_2)}$.

Au lieu de désigner par σ les étendues des projections, nous les désignerons par des petites lettres v; nous avons obtenu les inégalités suivantes en démontrant que $\sqrt[n]{V_n(x_1, x_2)}$ est concave :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{V_{n-1}}{v_{n-1}\, v_0^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{(n-1)V_n}{(v_{n-1})^{\frac{n}{n-1}}} - \frac{V_0}{(v_0)^{\frac{n}{n-1}}} \geqq 0, \\ &\frac{V_1}{(v_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\, v_0} - \frac{V_n}{(v_{n-1})^{\frac{n}{n-1}}} - \frac{(n-1)V_0}{(v_0)^{\frac{n}{n-1}}} \geqq 0. \end{aligned}\right.$$

Ce sont des formes améliorées des inégalités

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{V_{n-1}}{n}\right)^n \geqq V_n^{n-1} V_0, \\ &\left(\frac{V_1}{n}\right)^n \geqq V_n V_0^{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Puis nous avons

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &V_n\left(\frac{v_{n-2}}{n-1}\right)^2 - 2\frac{V_{n-1}}{n}\left(\frac{v_{n-2}}{n-1}\right)v_{n-1} + \frac{2}{n(n-1)} V_{n-2}\, v_{n-1}^2 \geqq 0, \\ &\frac{2}{n(n-1)} V_2\, v_0^2 - 2\frac{V_1}{n}\,\frac{v_1}{n-1}\, v_0 + V_0\left(\frac{v_1}{n-1}\right)^2 \geqq 0, \end{aligned}\right.$$

ce sont des formes améliorées respectives de

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{V_{n-1}}{n}\right)^2 \geqq \frac{2}{n(n-1)} V_n V_{n-2}, \\ &V_1^2 \geqq \frac{2n}{n-1} V_2 V_0. \end{aligned}\right.$$

En écrivant que $\sqrt[n-1]{V_{n-1}(x_1, x_2)}$ est concave, nous obtenons les deux inégalités nouvelles :

$$(37)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{2V_{n-2}}{n-1}\right)^{n-1} \geqq n V_{n-1}^{n-2} V_0, \\ V_1^{n-1} \geqq (n V_0)^{n-2} V_{n-1}. \end{cases}$$

Mais une seule des inégalités quadratiques déduites de ces inégalités est nouvelle, l'autre coïncide avec la deuxième des inégalités (36), la nouvelle s'écrit :

$$V_{n-2}^2 \geqq \frac{3}{2}\,\frac{n-1}{n-2} V_{n-1} V_{n-3}.$$

Un signe d'égalité dans (34) ou (37) entraîne l'autre, et le corps C est une sphère.

Le signe d'égalité dans la deuxième des inégalités (36) entraîne également ce fait, cela ressort de ce que nous avons vu au paragraphe précédent, car le signe d'égalité exprime que $\sqrt{V_2(x_1, x_2)}$ est une fonction convexe, mais cela peut aussi se voir en généralisant le procédé employé dans l'espace ordinaire.

Le signe d'égalité entraîne en effet que

$$\frac{2}{n-1}\,\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_1}{n V_0} = \frac{v_1}{(n-1) v_0} = \sqrt{\frac{2 V_2}{n(n-1) V_0}},$$

v_1 est donc une constante qui ne dépend pas de la direction de projection, et l'on a

$$2(n-1) V_2 v_0^2 = n V_0 v_1^2 = \int v_1^2\, d\omega,$$

l'intégration étant étendue à la surface de la sphère de rayon 1 de l'espace d'ordre n.

Si nous exprimons maintenant v_2 comme il a été dit au début de ce paragraphe, nous voyons que l'égalité précédente permet d'écrire

$$\int \left(v_1^2 - 2\frac{n-1}{n-2} v_0 v_2\right) d\omega = 0.$$

Or, pour toute direction de projection du corps sur un espace d'ordre $n-1$, on a

$$v_1^2 - 2\frac{n-1}{n-2} v_0 v_2 \geqq 0$$

et la fonction sous le signe d'intégration n'est jamais négative et, de plus, elle est continue, donc, dans toute direction de projection, on doit avoir

$$v_1^2 = \frac{2(n-1)}{n-2} v_0 v_2$$

et la réciproque est évidemment vraie. Nous sommes donc ramenés à démontrer notre résultat dans l'espace d'ordre $n-1$; or, dans l'espace d'ordre 2, l'inégalité exprime la propriété isopérimétrique du cercle. Les projections du corps C sur les divers espaces d'ordre $n-1$ sont donc des sphères du même ordre, il suit de là que le corps C doit être lui-même une sphère.

En définitive, nous avons trouvé seulement sept inégalités différentes (lorsque n est au moins égal à 4) entre les étendues d'un corps convexe, et il semble difficile d'en obtenir d'autres par la méthode précédente.

Dans le cas de $n=4$, les inégalités trouvées se déduisent toutes des trois inégalités quadratiques suivantes :

$$V_3^2 \geqq \frac{8}{3} V_2 V_4,$$

$$V_2^2 \geqq \frac{9}{4} V_1 V_3,$$

$$V_1^2 \geqq \frac{4}{3} \pi^2 V_2$$

et, dans ce cas, nous ne pouvons souhaiter davantage.

CHAPITRE III.

CORPS TANGENTIELS.

28. Dans ce chapitre nous allons tout d'abord étudier certains corps convexes définis à partir d'un corps convexe donné et qui possèdent une liaison remarquable avec celui-ci. Cela nous amènera à énoncer une assertion généralisant une proposition de Minkowski qu'on n'a pas encore pu démontrer dans toute sa généralité (nous la démontrerons cependant dans deux cas).

Nous aurons à utiliser deux formules fort simples que je vais rappeler.

Soient C_1 et C_2 deux corps convexes de l'espace d'ordre n, une section plane du corps C_1 détermine deux nouveaux corps C' et C'' dont le corps C_1 est la réunion, soient v l'étendue d'ordre $n-1$ de la section, B la largeur du corps C_2 dans la direction de la section considérée de C_1, on a

$$(38)\qquad V(C', \ldots, C', C_2) + V(C'', \ldots, C'', C_2) = V(C_1, \ldots, C_1, C_2) + \frac{1}{n} Bv.$$

Si C_2 est intérieur à C_1, on a de plus

$$(39)\qquad V(C', \ldots, C', C_1) \geqq V(C', \ldots, C', C_2) + \frac{1}{n} v d.$$

où d désigne la distance (positive) des deux plans d'appui des corps C_1 et C_2 parallèles à la direction de la section et situés sur ces corps comme le plan de la section l'est sur C'.

Ces deux formules sont des conséquences immédiates de la définition du volume mixte rappelée au n° **11**.

29. C_1 et C_2 désigneront toujours dorénavant deux corps convexes tels que le deuxième C_2 peut être mis à l'intérieur du premier C_1 par une translation convenable, nous poserons pour simplifier les notations (¹)

$$W_p = V_{\underbrace{11\ldots1}_{n-p}\underbrace{22\ldots2}_{p}}.$$

On a vu, au paragraphe **11**, que l'hypothèse précédente entraine

$$W_0 \geqq W_1 \geqq W_2 \geqq \ldots \geqq W_p \geqq \ldots \geqq W_n.$$

Nous nous proposons de voir dans quel cas $W_0 = W_p$ ou, ce qui revient au même, dans quel cas on a

$$W_0 = W_1 = W_2 = \ldots = W_p.$$

(¹) Dans ce qui précède j'ai dû conserver des notations assez complexes afin d'examiner les volumes mixtes dont la définition fait intervenir plus de deux corps de base.

Il est d'abord évident que si $p = n$, les deux corps C_1 et C_2 peuvent être amenés à coïncider par translation.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $p = 1$ et appelons *corps tangentiel d'ordre un* d'un corps convexe C_2 un corps dont tous les plans tangents sont en même temps plans d'appui de C_2.

La condition s'énonce alors :

Si C_2 est contenu dans C_1, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$W_n = W,$$

est que C_1 soit un corps tangentiel d'ordre un de C_2.

Lorsque C_1 est un polyèdre, désignons par H_1 et H_2 les distances des plans d'appui également situés de ces deux corps à un point fixe quelconque et par S l'aire d'une face de C_1, on doit avoir

$$\Sigma_1 (H_1 - H_2) S = 0,$$

or $H_1 - H_2$ est une quantité toujours positive ou nulle, si C_2 est à l'intérieur de C_1 : pour que l'égalité précédente ait lieu, elle doit donc être nulle dans toutes les directions perpendiculaires aux faces de C_1 ; autrement dit les plans des faces de C_1 doivent être des plans d'appui de C_2 et cette condition est visiblement suffisante.

Passons au cas général, nous raisonnerons par l'absurde. Supposons qu'un plan tangent à C_1 ne soit pas plan d'appui de C_2, prenons alors une origine O des coordonnées à l'intérieur de C_2, la direction positive de l'axe x_n étant associée au plan tangent à C_1 considéré. Considérons maintenant les bornes inférieures et supérieures des x_n

$$a'_0 \geqq x_n \geqq a'_1 \qquad \text{pour } C_2,$$
$$a_0 \geqq x_n \geqq a_1 \qquad \text{pour } C_1,$$

on a

$$a_0 \geqq a'_0 < 0 < a'_1 < a_1.$$

Soit δ une quantité positive inférieure à $a_1 - a'_1$, le plan $x_n = a_1 - \delta$ sectionne le corps C_1 en deux corps C' et C'' dont l'un d'eux, soit C', contient C_2 : la section de C_1 par ce plan est un corps convexe $c(\delta)$, dont l'étendue d'ordre $n-1$ sera désignée par $v(\delta)$, l'étendue d'ordre $n-2$ par $s(\delta)$, $r(\delta)$ désignera le rayon de la sphère (d'ordre $n-1$)

inscrite dans cette section ; on a

$$\frac{1}{n-1}\, r(\delta)\, s(\delta) \leq c(\delta).$$

Lorsque δ tend vers zéro, nous avons vu, au paragraphe **9**, que le rapport $\frac{r(\delta)}{\delta}$ augmente indéfiniment, il en est donc de même du rapport $\frac{c(\delta)}{\delta\, s(\delta)}$. D'autre part, les formules (38) et (39) du paragraphe précédent s'écrivent ici :

$$V(C', \ldots, C', C_2) + V(C'', \ldots, C'', C_2) = V(C_1, \ldots, C_1, C_2) + \frac{1}{n}(a'_1 - a'_0)\, c(\delta),$$

$$V(C', \ldots, C', C_1) \geq V(C', \ldots, C', C_2) - \frac{1}{n}(a_1 - a'_1)\, c(\delta).$$

Cherchons une limite supérieure de $V(C'', \ldots, C'', C_2)$. Soit M un point de C_1 situé dans le plan tangent $x_n = a_1$. Construisons le cône ayant pour base $c(\delta)$ et pour sommet O, il coupe le plan $x_n = a_1$ suivant un corps homothétique à $c(\delta)$ dans le rapport $\frac{a_1}{a_1 - \delta}$ et qui contient le point M ; construisons alors le cylindre ayant pour base ce dernier corps et dont la direction des génératrices est OM et limitons-le aux deux plans $x_n = a_1$ et $x_n = a_1 - \delta$: ce cylindre τ contient le corps C'', nous avons donc

$$V(\tau, \ldots, \tau, C_2) \geq V(C'', \ldots, C'', C_2).$$

Soient R le maximum de la distance des plans d'appui de C_2 à l'origine, S' le corps convexe obtenu en considérant la partie de la sphère de centre O et de rayon R comprise entre les deux plans $x_n = a'_0$ et $x_n = a'_1$ et α le sinus de l'angle de la direction x_n avec la direction OM, on a

$$\begin{aligned} V(\tau, \ldots, \tau, C_2) &\geq V(\tau, \ldots, \tau, S') \\ &= \frac{R}{n}\,\frac{\delta}{\alpha}\left(\frac{a_1}{a_1 - \delta}\right)^{n-1} s(\delta) + \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1 - \delta}\right)^{n-1} c(\delta)\,(a'_1 - a'_0). \end{aligned}$$

Comme

$$W_0 = V(C_1, \ldots, C_1) \geq V(C', \ldots, C', C_1),$$

nous déduisons de ces diverses relations

$$W_0 - W_1 \geq \frac{1}{n} v(\delta) \left\{ a_1 - a'_1 - \left[\left(\frac{a_1}{a_1 - \delta} \right)^{n-1} - 1 \right] (a'_1 - a'_0) \right\}$$
$$- R \delta \frac{s(\delta)}{x} \left(\frac{a_1}{a_1 - \delta} \right)^{n-2}.$$

Or $a_1 - a'_1$ est positif, ensuite, lorsque δ tend vers zéro,

$$\left(\frac{a_1}{a_1 - \delta} \right)^{n-1} - 1$$

tend également vers zéro ainsi que $\delta s(\delta)$ car on a

$$\delta s(\delta) = \frac{\delta s(\delta)}{v(\delta)} v(\delta),$$

le premier facteur tend vers zéro comme nous l'avons déjà remarqué tandis que le deuxième est borné par le travers intérieur maximum du corps C_1.

Pourvu que δ soit suffisamment petit, le second membre de l'inégalité précédente est donc positif, par suite l'existence d'un plan tangent à C_1 non plan d'appui à C_2 entraîne

$$W_0 > W_1.$$

La condition énoncée, quant à l'égalité $W_0 = W_1$, est donc nécessaire.

Cette condition est également suffisante. Désignons en effet par $(1+\varepsilon)C_1$ le corps homothétique à C_1 dans le rapport $1+\varepsilon$, avec l'origine comme centre d'homothétie, ε étant un nombre positif mais aussi petit que l'on veut. On peut, comme on le sait, trouver un polyèdre P_1 dont les faces sont tangentes à C_1 et dont la frontière est comprise entre les frontières des deux corps C_1 et $(1+\varepsilon)C_1$; alors P_1 est un corps tangentiel d'ordre 1 de C_2 et l'on a

$$V(P_1 \ldots P_1) = V(P_1 \ldots P_1, C_2).$$

Mais, lorsque ε tend vers zéro, les quantités

$$V(C_1 \ldots C_1) - V(P_1 \ldots P_1) \text{ et } V(P_1, \ldots, P C_2) - V(C_1, \ldots, C_1, C_2)$$

tendent elles aussi vers zéro et la quantité $W_0 - W_1$ qui est leur somme est aussi petite que l'on veut, on a donc

$$W_0 = W_1.$$

La démonstration que nous venons de donner est une simple extension, à l'espace d'ordre quelconque, de celle donnée par Minkowski dans l'espace ordinaire.

30. Nous dirons qu'un corps C_1 est un *corps tangentiel d'ordre p* d'un corps C_2 si, en tous les points du corps C_1 qui appartiennent aux classes $1, 2, \ldots, p$, les plans d'appui de C_1 sont également des plans d'appui de C_2.

Si C_2 est contenu dans C_1, nous allons voir que la condition nécessaire et suffisante pour qu'ait lieu l'égalité

$$W_0 = W_p$$

est que C_1 soit un corps tangentiel d'ordre p de C_2.

Ce fait vient d'être démontré pour $p = 1$, nous prouverons que s'il est vrai pour $p - 1$, il est vrai pour p et nous supposerons le résultat établi dans l'espace d'ordre $n - 1$ jusqu'à la valeur $p - 1$.

L'égalité précédente entraine d'abord $W_0 = W_{p-1}$; c'est-à-dire que le corps C_1 doit être un corps tangentiel de C_2 d'ordre $p - 1$; de plus les égalités

$$W_0 = W_1 = \ldots = W_{p-1} = W_p$$

entraînent

$$W_1^2 = W_0 W_2, \qquad W_2^2 = W_1 W_3, \qquad \ldots, \qquad W_{p-1}^2 = W_{p-2} W_p.$$

Appliquant alors la première des inégalités (21) aux deux corps C_1 et $C_1 + tC_2$ avec t suffisamment petit, on voit que, quant aux étendues d'ordre $n - 1$ des projections, les égalités précédentes entraînent

$$\sigma_{11\ldots1} = \sigma_{11\ldots2} = \ldots = \sigma_{11\ldots\underbrace{2\ldots2}_{p-1}},$$

quelle que soit la direction de projection.

Mais puisque C_2 est intérieur à C_1, la projection de C_2 sur un plan est intérieure à la projection de C_1 sur ce même plan, en vertu de nos hypothèses nous voyons que la projection de C_1 sur un plan est un corps tangentiel d'ordre $p-1$ de la projection de C_2 sur ce même plan.

Considérons maintenant un point de classe p du corps C_1 et supposons qu'il existe un plan d'appui à C_1 passant par ce point qui ne soit pas plan d'appui de C_2. Projetons les deux corps sur un plan parallèle à la variété linéaire d'ordre $n-p$, contenue dans l'ensemble fermé de directions que nous avons attaché à un point de classe p, et perpendiculaire au plan d'appui considéré passant par ce point.

La projection de C_1 admet au point projection du point de départ un plan d'appui qui n'est pas plan d'appui à la projection de C_2 sur ce même plan, de plus ce point est de classe $p-1$ pour la projection : donc, sur ce plan, la projection de C_1 n'est pas corps tangentiel d'ordre $p-1$ de la projection de C_2, on ne peut donc avoir $W_0 = W_p$. La condition énoncée est donc nécessaire.

Cette démonstration est valable si l'on peut déterminer le plan de projection, c'est-à-dire si $p \geqq 2$.

Lorsque le corps C_2 est un polyèdre, il en est de même de C_1 et, par un calcul direct, on peut vérifier que la condition est suffisante ; dans le cas général il suffit d'approcher le corps C_2 puis le corps C_1 par des polyèdres.

31. Lorsque $p = n-1$, la démonstration peut être présentée sous une forme différente, généralisation de la méthode employée par Minkowski dans le cas de trois dimensions. Il faut démontrer que l'égalité

$$W_0 = W_{n-1}$$

entraîne que les plans d'appui de C_1 sont également des plans d'appui de C_2, sauf peut-être pour ceux qui sont plans d'appui en un sommet (point de classe n) : Minkowski dit alors que C_1 *est un corps de capuchon de* C_2.

Si C_1 n'est pas identique à C_2 considérons un plan d'appui de C_1 qui ne soit pas plan d'appui de C_2 et reprenons les considérations et les notations du paragraphe **29**, on a

$$V(C_1, \ldots, C_1) \geqq V(C_1, C', \ldots, C') \geqq V(C_1, C_2, \ldots, C_2).$$

Pour que l'égalité précédente ait lieu, il est nécessaire que

$$V(C_1, \ldots, C_1) = V(C_1, C', \ldots, C').$$

Or on a

$$V(C_1, C', \ldots, C') + V(C_1, C'', \ldots, C'') = V(C_1, \ldots, C_1) + \frac{1}{n}(a_1 - a_0)\,v(\delta),$$

$$V(C_1, C'', \ldots, C'') - V(C'', \ldots, C'') = \frac{1}{n}(a_1 - a_0 - \delta)\,v(\delta).$$

De ces relations on tire

$$V(C'', \ldots, C'') = \frac{1}{n}\,\delta\, v(\delta).$$

Soit M un point de C_1 appartenant au plan d'appui $x_n = a_1$, $\frac{1}{n}\delta v(\delta)$ désigne le volume du cône de base $v(\delta)$ et de sommet M, ce cône n'a pas de point extérieur à C_1, donc, d'après l'égalité ci-dessus C'' coïncide avec ce cône; le point M est donc un sommet de C_1 ce qui achève la démonstration.

32. Étant donnés deux corps convexes C_1 et C_2, l'un d'eux peut être homothétique à un corps tangentiel d'ordre p (plus grand que 1) de l'autre; si, par exemple, c'est le corps C_1 qui est homothétique à un corps tangentiel d'ordre p de C_2, nous avons vu que cela entraîne

$$\frac{W_0}{W_1} = \frac{W_1}{W_2} = \ldots = \frac{W_{p-1}}{W_p},$$

il est vraisemblable que la réciproque est vraie car, en appliquant les méthodes du chapitre précédent, on voit que ces égalités entraînent des conditions très précises quant aux éléments d'aires mixtes de ces deux corps.

Cela amène aussi à considérer comme vraisemblable la proposition suivante :

Entre les volumes et les volumes mixtes de deux corps convexes on a les inégalités

$$\frac{W_0}{W_1} \geqq \frac{W_1}{W_2} \geqq \ldots \geqq \frac{W_{p-1}}{W_p} \geqq \ldots \geqq \frac{W_{n-1}}{W_n},$$

un seul signe d'égalité entraîne tous les précédents ou tous les suivants et l'un des deux corps est homothétique à un corps tangentiel de l'autre.

Cette proposition serait la généralisation de celle de Minkowski dont nous avons déjà parlé, savoir que, pour deux corps convexes, dans l'espace ordinaire, l'égalité

$$V_{112}^2 = V_{111} V_{122}$$

entraîne que le corps C_1 est homothétique à un corps de capuchon de C_2.

33. C'est cette proposition que nous allons démontrer dans le cas où les deux corps C_1 et C_2 sont des polyèdres.

Par une homothétie convenable, éventuellement nécessaire, nous pouvons faire en sorte que

$$V_{111} = V_{112} = V_{122}.$$

D'après l'égalité (12) établie au paragraphe **16** nous devons également avoir

$$dS_{11} = dS_{12}$$

dans toutes les directions

Ici, comme C_1 est un polyèdre, nous écrirons plutôt cette égalité sous la forme

$$S_{11} = S_{12}. \tag{40}$$

Par S_{11} nous désignons l'aire d'une face de C_1 s'il en existe une dans le direction de plan d'appui considérée, ou bien zéro si ce n'est pas le cas. Par S_{12} nous désignons l'aire mixte des éléments de la frontière de C_1 et de C_2 qui se trouvent dans deux plans d'appui parallèles et également situés. S_{12} n'est pas nul si les éléments correspondants sont tous deux des faces ou si l'un d'eux est une face de l'un des deux corps et l'autre une arête de l'autre corps, ou, enfin, lorsque tous les deux sont des arêtes non parallèles. S_{12} est nul, par contre, dans tous les autres cas, c'est-à-dire si les deux plans d'appui respectifs aux corps C_1 et C_2 ont en commun seulement un sommet avec l'un des deux corps au moins, ou bien ont chacun en commun seulement une arête avec chacun des deux corps, ces deux arêtes étant parallèles.

De l'égalité (40) nous concluons que, pour tout plan d'une face de C_1, le plan également situé sur C_2 doit être celui d'une face ou passer au moins par une arête, autrement dit toute face de C_1 doit être parallèle à une face ou à une arête de C_2 et, C_2 étant donné, cela limite déjà considérablement le nombre des faces possibles pour C_1.

34. Pour aller plus loin nous aurons besoin de quelques lemmes préliminaires.

1° Soient P_1 et P_2 deux polygones convexes situés dans un même plan ou dans deux plans parallèles; supposons qu'à chaque côté de P_2 corresponde un côté de P_1 parallèle et également situé [la réciproque n'étant pas forcément exacte ([1])] et qu'on ait de plus, entre l'aire S_{11} de P_1 et l'aire mixte S_{12} de P_1 et de P_2,

$$S_{11} = S_{12},$$

en comparant les longueurs des côtés de P_1 à ceux de P_2 nous écrirons sur chaque côté de P_1 le signe (+) si ce côté est plus grand que le côté de P_2 qui lui est parallèle ou si la droite d'appui de P_2, située sur ce polygone comme le côté correspondant de P_1, passe par un sommet de P_2; le signe (—) si ce côté est plus petit que le côté de P_2 également situé; le signe (o) si ces deux côtés sont égaux. Alors, lorsqu'on fait le tour de P_1 on trouve au moins quatre changements de signe, ou bien il y a le signe (o) sur tous les côtés et P_1 est égal à P_2.

Nous disons qu'il y a un changement de signe lorsqu'on passe d'un côté marqué du signe (+) [ou du signe (—)] à un côté marqué du signe (—) [ou du signe (+)] en traversant ou non des côtés marqués (o).

On peut, pour la démonstration, supposer que les deux polygones sont dans un même plan; choisissant alors une origine quelconque et désignant par h la distance de cette origine à une droite d'appui de P_1 et par l et l' les longueurs des côtés des polygones P_1 et P_2, on doit avoir

$$\Sigma h_i(l_i - l'_i) = 0. \tag{41}$$

Si $l_i - l'_i$ n'est pas constamment nul, nous voyons donc qu'on rencontrera au moins deux changements de signe en faisant le tour de P_1; d'ailleurs le nombre de ces changements de signe est pair.

([1]) Pour P_1 on peut prendre, par exemple, un trapèze et pour P_2 un triangle.

Il ne peut y avoir seulement deux changements de signe car alors on pourrait trouver deux sommets qui diviseraient P_1 en deux lignes polygonales, l'une, l'arc (+), ne contenant que des côtés marqués (+) ou (o), et l'autre, l'arc (—), que des côtés marqués (—) ou (o). Par ces deux sommets on peut toujours mener à P_1 deux droites d'appui concourantes. Prenons pour origine l'intersection de ces deux droites d'appui, les distances des côtés de l'arc (+) à ce point ont toutes le même signe et les distances des côtés de l'arc (—) à ce même point sont toutes de signe opposé au précédent; donc, dans le premier membre de (41), les divers termes de la somme ont tous le même signe et l'égalité ne saurait avoir lieu. Le nombre des changements de signe est donc au moins égal à quatre (¹).

En particulier, si P_1 est un triangle, tous ses côtés seront marqués du signe (o), P_1 sera égal à P_2.

2° Si, sur un polyèdre, dont toutes les arêtes sont marquées (+), (—) ou (o), on a sur chaque face au moins quatre changements de signe, ou bien le signe (o) sur toutes les arêtes de la face, alors on a une contradiction, à moins que l'on ait le signe (o) sur toutes les arêtes.

Dans cet énoncé ne figurent que des notions d'*Analysis situs*, nous pouvons donc raisonner comme si le polyèdre en question se réduisait à un réseau ou à un filet.

Si l'on a une arête marquée (o) ne faisant pas partie d'une face triangulaire on peut la supprimer en nouant les sommets où elle aboutit, on supprime ainsi un sommet et une arête. Si, sur le réseau, se trouve une face triangulaire on peut la supprimer en nouant en un

(¹) Ce résultat conduit au suivant :

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π et continue telle qu'il existe sur le cercle trigonométrique deux points qui partagent ce cercle en deux arcs dans chacun desquels $f(x)$ ne change pas de signe, alors on ne peut avoir à la fois

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = 0,$$

à moins que $f(x)$ ne soit identiquement nulle.

même sommet les arêtes, autres que celles de cette face que l'on supprimera, on supprime ainsi une face, deux sommets et trois arêtes.

Par des applications successives de ce procédé et, si toutes les arêtes du polyèdre ne sont pas marquées (o), nous arrivons à un polyèdre dont toutes les arêtes sont marquées (+) et (—) et, sur chaque face, les opérations précédentes n'ont pas altéré le nombre des changements de signe. Sur ce dernier polyèdre on a donc au moins 4F changements de signe, F désignant le nombre de ses faces.

On peut aussi compter le nombre de ces changements de signe en faisant le tour de chaque sommet du polyèdre car, en faisant le tour d'un sommet, à chaque changement de signe correspond un changement de signe dans une face et inversement. Chaque sommet de trièdre donne, au plus, deux changements de signe; en général si, par un un sommet, passent n arêtes, il y a au plus n changements de signe si n est pair, ou $n - 1$ si n est impair, soit s_n le nombre de ces sommets, on aura au plus

$$\sum 2\left[\frac{n}{2}\right]s_n$$

changements de signe, où $\left[\frac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

D'autre part, la formule d'Euler pour les polyèdres donne

$$4F = 8 + \sum 2(n-2)s_n > \sum 2\left[\frac{n}{2}\right]s_n.$$

Or, précédemment, nous avons vu qu'il y avait au moins 4F changements de signe, nous arrivons donc à une contradiction.

3° Soient P_1 et P_2 deux polygones puis $P_{2'}$ le polygone de capuchon de P_2 dont les côtés sont parallèles à ceux de P_1 [1], alors on a

$$S_{12} = S_{12'}.$$

C'est une simple conséquence de la définition de l'aire mixte de deux polygones.

55. Nous avons déjà vu que l'égalité (40) exige que tout plan

[1] Certains côtés de P_2 peuvent être nuls.

d'une face de C_1 soit parallèle au plan d'une face de C_2 ou parallèle à un plan d'appui de C_2 passent par une arête.

Supposons alors que le corps C_1 ait des faces parallèles à chacune des arêtes d'une face du corps C_2 : s'il y a plusieurs faces de C_1 parallèles à une même arête de $\mathcal{F}$, la face en question de C_2, nous considérons celle qui fait avec cette face l'angle le plus petit; ou encore : faisant tourner le plan de $\mathcal{F}$ autour de cette arête de façon qu'au début du mouvement ce plan devienne plan d'appui de C_2, la face de C_1 dont le plan sera tel que son plan parallèle mené par cette arête sera rencontré le premier est la face que nous considérons.

Je dis que les faces de cette sorte de C_1 se coupent en un même point ou bien qu'il y a une face de C_1 dont le plan est parallèle à celui de $\mathcal{F}$.

Si, en effet, ce dernier cas n'est pas réalisé, l'assemblage de ces faces ne peut se faire que suivant une ou plusieurs arêtes qui ne sont pas les intersections de deux faces parallèles à deux arêtes adjacentes de $\mathcal{F}$. Aucune de ces arêtes ne peut être parallèle à la face $\mathcal{F}$, car on aurait $S_{11} = 0$, $S_{12} > 0$. Menons par chaque arête de $\mathcal{F}$ un plan parallèle au plan des faces correspondantes de C_1, à une des arêtes précédentes de ce corps correspondant une droite parallèle perçant le plan de $\mathcal{F}$ au point commun à deux arêtes de $\mathcal{F}$ non adjacentes. Par les arêtes de $\mathcal{F}$ que l'on voit de ce dernier point on peut mener des plans d'appui à C_2 parallèles à cette arête car ces plans font, avec $\mathcal{F}$, des angles moindres que ceux des faces de C_1 correspondantes, on a donc encore pour cette arête $S_{11} = 0$, $S_{12} > 0$; nous obtenons encore une impossibilité, ce qui démontre le résultat.

Ce résultat est encore exact si C_1, au lieu d'avoir des faces parallèles à des arêtes d'une face de C_2, a, plus généralement, des faces parallèles aux arêtes d'un contour fermé quelconque formé d'arêtes de C_2, sans avoir aucune face parallèle à une face au moins de l'une des deux parties de C_2 déterminées par le contour fermé considéré (et également située). Si, par les arêtes de $\mathcal{F}$, ou du contour fermé formé d'arêtes de C_2, nous menons des faces parallèles à celles-ci, elles sont concourantes.

S'il y a une face de C_1 parallèle à la face correspondante de C_2 et également située, les faces que nous avions considérées au début, nous les considérons comme définies par les mêmes arêtes assurément mais ces arêtes nous les considérerons comme appartenant aux faces adjacentes à la précédente et nos conclusions sont valables pour ces faces.

S'il y a plus de deux faces de C_1 parallèles à une arête de C_2 et également situées, nous conviendrons de considérer cette arête comme une face d'aire nulle.

Si C_1 a moins de faces que C_2, c'est donc que certaines faces de C_2 concourent en un même point mais alors, appliquant le résultat 3° du numéro précédent, nous voyons que C_1 doit présenter la propriété de Minkowski pour le corps C_2 obtenu en prolongeant ces faces.

De toute façon nous avons fait correspondre à toute face de C_1, limitée par un polygone P_1, un polygone P_2 dont les côtés sont parallèles à ceux de P, qui est une face d'un corps de capuchon de C_2. Nous pouvons alors appliquer les principes 1° et 2° du numéro précédent : ils nous montrent que le corps C_1 peut se déduire d'un corps de capuchon de C_2 par une translation.

36. Un autre cas où la proposition de Minkowski peut être démontrée est celui où le corps C_2 se réduit à un disque convexe plan.

Prenons un axe des abscisses x perpendiculaire au plan de ce disque et soient x_1 et x_2 les abscisses des plans d'appui à C_1 parallèles au plan du disque ($x_1 < x_2$). Soient $S_{11}(x)$ l'aire de la section de C_1 par le plan d'abscisse x; $S_{12}(x)$ l'aire mixte de cette section avec le disque convexe d'aire S_{22}, on a

$$V_{111} = \int_{x_1}^{x_2} S_{11}(x)\,dx, \qquad V_{112} = \frac{2}{3}\int_{x_1}^{x_2} S_{12}(x)\,dx,$$
$$V_{122} = \frac{x_2 - x_1}{3} S_{22}, \qquad V_{222} = 0.$$

L'inégalité de Minkowski s'écrit

$$(42) \qquad \left\{\int_{x_1}^{x_2} S_{12}(x)\,dx\right\}^2 \geqq \frac{3}{4}(x_2 - x_1) S_{22} \int_{x_1}^{x_2} S_{11}(x)\,dx.$$

Or on a

$$(43) \qquad S_{12}^2(x) \geqq S_{11}(x) S_{22}.$$

On sait d'autre part que la fonction $\sqrt{S_{11}(x)} = f(x)$ est une fonction concave ou linéaire de $x(x_1 \leqq x \leqq x_2)$, l'inégalité précédente (42) sera vérifiée *a fortiori* d'après (43), si l'on a

$$\left\{\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{S_{11}(x)}\,dx\right\}^2 \geqq \frac{3}{4}(x_2 - x_1)\int_{x_1}^{x_2} S_{11}(x)\,dx$$

ou

$$\left\{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right\}^2 \geqq \frac{3}{4}\,\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx. \tag{44}$$

Or on démontre qu'il en est bien ainsi pour les fonctions $f(x)$ non convexes et non négatives [1], le signe d'égalité n'ayant lieu dans (44) que pour les fonctions $f(x)$ telles que la courbe $y = f(x)$ soit composée de deux segments joignant les points $(y = 0, x = x_1)$ et $(y = 0, x = x_2)$, ou pour les fonctions limites de celles-ci

$$y = a(x - x_1), \qquad y = a(x_2 - x) \qquad (a > 0).$$

Pour que le signe d'égalité ait lieu dans (42) il est nécessaire et suffisant qu'il ait lieu dans (43) pour toutes les valeurs de x : les sections du corps C_1 par des plans parallèles à celui du disque C_2 doivent donc d'abord être des courbes convexes homothétiques au disque. Puis le signe d'égalité devant avoir également lieu dans (44), le corps C_1 doit se réduire ou bien à deux cônes accolés par la base, le plan de cette base étant parallèle à celui du disque et cette base étant elle-même homothétique au disque, ou bien à un cône dont la base est homothétique au disque : ce sont bien là les seuls corps de capuchon du disque.

[1] J. FAVARD. *Sur les valeurs moyennes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 57, février 1933).