

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. VAN DOP

Sur une classe de congruences de droites

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 12 (1933), p. 205-218.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12_205_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12_205_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur une classe de congruences de droites ;***PAR A. VAN DOP**

(Delà).

M. Tzitzéica a étudié récemment ⁽¹⁾ les propriétés géométriques de certaines congruences de droites, qu'il a nommées *congruences de M. Goursat*. Je me suis proposé dans ce travail de donner quelques résultats concernant une autre classe de congruences de droites, possédant des propriétés analogues.

1. Nous voulons définir, dans un espace projectif S_n à n dimensions, une congruence de droites à l'aide de ses deux réseaux focaux. Rappelons à cet effet que pour définir, dans S_n , une congruence de droites (xy) à l'aide des réseaux focaux (x) et (y) , il faut prendre $n + 1$ couples de solutions x^i, y^i d'un système de la forme

$$(1) \quad x_v = ay, \quad y_u = bx$$

où x_v et y_u sont des dérivées partielles, a et b des fonctions de u et v ⁽²⁾. On déduit de (1) les équations de Laplace suivantes :

$$(2) \quad \begin{cases} x_{uv} - \frac{a_u}{a} x_v - ab_x x = 0, \\ y_{uv} - \frac{b_v}{b} y_u - ab_y y = 0. \end{cases}$$

Dans la suite nous considérons les congruences de droites, qui ont la

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 189.

⁽²⁾ TZITZÉICA, *Géom. diff. proj. des réseaux*, p. 63.

propriété

$$(3) \quad a_u = b_v.$$

L'image d'une surface R de MM . Tzitzéica-Demoulin dans un S_2 est une congruence de droites avec cette propriété. Elle est en outre alors quadratique.

2. Il y a pour les congruences, définies par (1) et (3), une propriété géométrique caractéristique.

On a immédiatement de (1)

$$x_{uv} = abx + a_v y,$$

$$y_{uv} = b_v x + aby.$$

Les points x_{uv} et y_{uv} sont donc situés sur la droite xy de la congruence (xy) . Considérons en même temps les points $x+y$ et $x-y$. Chaque point arbitraire de la droite xy est donné par

$$\lambda x + \mu y$$

et les quatre points nommés sont définis par

$$\left(\frac{y}{x}\right)_1 = \frac{a_v}{ab}, \quad \left(\frac{y}{x}\right)_2 = \frac{ab}{b_v} = \frac{ab}{a_u}, \quad \left(\frac{y}{x}\right)_3 = 1, \quad \left(\frac{y}{x}\right)_4 = -1.$$

Le rapport anharmonique de ces quatre points est

$$(x+y, x-y, x_{uv}, y_{uv}) = -1.$$

Les points $x+y$ et $x-y$ sont donc harmoniquement conjugués avec les points x_{uv} et y_{uv} . Réciproquement si les quatre points ont un rapport harmonique, on déduit $a_u = b_v$.

La propriété que nous avons démontrée est celle-ci :

Dans le cas général, les quatre points $x+y$, $x-y$, x_{uv} , y_{uv} ont un rapport anharmonique $\neq -1$. Le rapport anharmonique a la valeur -1 seulement dans le cas où (xy) est une congruence de l'espèce que nous venons de définir.

3. Transformation Γ . — Soit donnée une congruence de l'espèce

nommée, définie à l'aide du système

$$(1) \quad x_v = av, \quad y_u = bu$$

où

$$(3) \quad a_u = b_v.$$

Soit $\tilde{z}, \tau_i$ un couple particulier de solutions du système adjoint de (1), donc

$$(4) \quad \tilde{z}_v = b\tau_i, \quad \tau_{iu} = a\tilde{z}_i$$

et soit (z) un réseau harmonique à la congruence (x, y) , c'est-à-dire un réseau dont les tangentes passent respectivement par x et par y ; le réseau (z) est défini ⁽¹⁾ à l'aide du système

$$(5) \quad z_u = \tilde{z}_i x, \quad z_v = \tau_i y.$$

L'équation de Laplace de ce réseau est donc

$$(6) \quad z_{uv} = \frac{b\tau_i}{\tilde{z}_i} z_{iu} + \frac{a\tilde{z}_i}{\tau_i} z_{iv}.$$

En particulier, si l'on prend $x = \alpha, y = \beta; \alpha, \beta$ étant un couple particulier de solutions de (1), une solution $\tilde{z}$ correspondante de (5) et de (6) est donnée par

$$(7) \quad z_u = \tilde{z}\alpha, \quad z_v = \tau_i\beta.$$

Au moyen de cette solution, à laquelle on peut ajouter une constante, on construit ∞^1 congruences (x', y') harmoniques à (z) .

D'après la théorie générale, on peut prendre pour les foyers du rayon $x'y'$

$$\begin{aligned} z z_u - z_u z &= z \tilde{z} \left(x - \frac{\alpha}{\tilde{z}} z \right), \\ z z_v - z_v z &= z \tau_i \left(y - \frac{\beta}{\tau_i} z \right), \end{aligned}$$

ou bien

$$(8) \quad x' = x - \frac{\alpha}{\tilde{z}} z, \quad y' = y - \frac{\beta}{\tau_i} z.$$

⁽¹⁾ TARTAGLIA, *Geom. diff. proj. des réseaux*, p. 75.

et l'on tire de (8)

$$(9) \quad \begin{cases} x'_s = \left(a - \frac{x_1}{\varphi}\right) \left(y - \frac{\bar{z}}{\varphi} z\right) = \left(a - \frac{x_1}{\varphi}\right) y' = a' y', \\ y'_s = \left(b - \frac{\bar{z} z}{\varphi}\right) x' = b' x'. \end{cases}$$

Pour que la congruence $(x'y')$, obtenue à partir de (xy) , soit une congruence de l'espèce nommée, il faut et il suffit qu'on ait

$$a'_s = b'_s.$$

Considérons d'abord deux couples très spéciaux de solutions de (1)

$$(10) \quad x^{(1)} = \bar{z}^{(1)} = e^{\bar{z}}, \quad x^{(2)} = -\bar{z}^{(2)} = e^{-\bar{z}},$$

si nous posons d'abord

$$(11) \quad a = \gamma_s, \quad b = \gamma_{\bar{s}},$$

qui vérifient bien la relation (3).

Or, on a

$$\begin{aligned} a'_s{}^{(1)} &= \left(a - \frac{x^{(1)} x_1}{\varphi}\right)_s = a_s - \frac{e^{\bar{z}} \gamma_s x_1}{\varphi} - \frac{e^{\bar{z}} \gamma_s \bar{z}}{\varphi} - \frac{e^{2\bar{z}} \bar{z} x_1}{\varphi^2}, \\ b'_s{}^{(1)} &= \left(b - \frac{\bar{z}^{(1)} z}{\varphi}\right)_s = b_s - \frac{e^{\bar{z}} \gamma_{\bar{s}} \bar{z}}{\varphi} - \frac{e^{\bar{z}} \gamma_{\bar{s}} x_1}{\varphi} - \frac{e^{2\bar{z}} \bar{z} x_1}{\varphi^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$a'_s{}^{(1)} = b'_s{}^{(1)},$$

et de même

$$a'_s{}^{(2)} = b'_s{}^{(2)}.$$

Les transformations suivantes donnent donc des congruences de la même espèce

$$(I) \quad \begin{cases} x^{(1)} = x - \frac{e^{\bar{z}}}{\varphi^2} z, \\ y^{(1)} = y - \frac{e^{\bar{z}}}{\varphi^2} z, \end{cases} \quad \gamma_s^{(1)} = \bar{z} e^{\bar{z}}, \quad \gamma_{\bar{s}}^{(1)} = x_1 e^{\bar{z}},$$

$$(II) \quad \begin{cases} x^{(2)} = x - \frac{e^{-\bar{z}}}{\varphi^2} z, \\ y^{(2)} = y - \frac{e^{-\bar{z}}}{\varphi^2} z, \end{cases} \quad \gamma_s^{(2)} = \bar{z} e^{-\bar{z}}, \quad \gamma_{\bar{s}}^{(2)} = -x_1 e^{-\bar{z}}.$$

On tire de I, que les droites $xy, x^{(1)}y^{(1)}$ se coupent au point

$$\bar{z}^{(1)} = x - y,$$

et de II, que les droites $x'y$, $x'^{(2)}y'^{(2)}$ se coupent au point

$$\bar{z}^2 = x + y.$$

Les quatre points x , y , $\bar{z}^{(1)}$ et $\bar{z}^{(2)}$ sont deux à deux harmoniquement conjugués.

Le point $\bar{z}^{(1)}$ décrit un réseau $(\bar{z}^{(1)})$, conjugué à ∞^1 congruences $(x'^{(1)}y'^{(1)})$ et le point $\bar{z}^{(2)}$ décrit un réseau $(\bar{z}^{(2)})$, conjugué à ∞^1 congruences $(x'^{(2)}y'^{(2)})$.

On obtient aisément l'équation de Laplace du réseau $(\bar{z}^{(1)})$

$$\begin{aligned} \bar{z}_u^{(1)} &= x_u - y_u, & \bar{z}_v^{(1)} &= x_v - y_v, \\ \bar{z}_{uv}^{(1)} &= x_{uv} - y_{uv} = \gamma_{bv}x + \gamma_u y_v - (\gamma_{uv}x + \gamma_u y_v), \\ (12) \quad \bar{z}_{uv}^{(1)} &= (\gamma_u \gamma_v - \gamma_{uv}) \bar{z}^{(1)}. \end{aligned}$$

L'équation de Laplace du réseau $(\bar{z}^{(2)})$ est

$$(13) \quad \bar{z}_{uv}^{(2)} = (\gamma_u \gamma_v + \gamma_{uv}) \bar{z}^{(2)},$$

$(\bar{z}^{(1)})$ et $(\bar{z}^{(2)})$ sont donc des réseaux avec les équations de Laplace à invariants égaux.

Je désignerai dans la suite de ce travail la transformation (8) par *transformation I*.

4. Considérons maintenant un couple particulier de solutions ξ , η du système (4), en posant

$$(14) \quad \xi = x(x_u - b\beta), \quad \eta = -x(\beta_v - a x) \quad (x = \text{const.}),$$

où x , β est un couple de solutions du système (1). La solution ξ correspondante de (6) est maintenant donnée par

$$\xi_u = x x(x_u - b\beta), \quad \xi_v = -x\beta(\beta_v - a x)$$

et l'on déduira

$$\begin{aligned} \xi_u &= x(x x_u - \beta b x) = x(x x_u - \beta \xi_u) = \left[\frac{x}{3} (x^2 - \beta^2) \right]_u, \\ \xi_v &= -x(\beta \beta_v - x a \beta) = x(x x_v - \beta \xi_v) = \left[\frac{x}{3} (x^2 - \beta^2) \right]_v, \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$(15) \quad \rho = \frac{\alpha}{2} (x^2 - \beta^2) + \text{const.}$$

Il s'agit de choisir la constante de manière que l'on ait

$$a_u = b_v$$

ou

$$\left(a - \frac{x\eta}{\rho}\right)_u = \left(b - \frac{\beta\zeta}{\rho}\right)_v,$$

$$a_u - \frac{x_u \eta}{\rho} - \frac{\alpha x_\zeta^2}{\rho} + \frac{x^2 \zeta \eta}{\rho^2} = b_v - \frac{\beta_v \zeta}{\rho} - \frac{b \beta \eta}{\rho} + \frac{\beta^2 \zeta \eta}{\rho^2}$$

Si l'on tient compte de (3) et que l'on tire x_u et β_v de (14), on pourra déduire

$$-\eta \left[\frac{\zeta}{x} + b \beta \right] - \alpha x \zeta + \frac{x^2 \zeta \eta}{\rho} = \zeta \left[\frac{\eta}{x} - \alpha x \right] - b \beta \eta + \frac{\beta^2 \zeta \eta}{\rho},$$

d'où nous tirons, après division par $\zeta \eta$,

$$-\frac{1}{x} + \frac{x}{\rho} = \frac{1}{x} + \frac{\beta^2}{\rho}.$$

$$(16) \quad \rho = \frac{\alpha}{2} (x^2 - \beta^2).$$

La constante de (15) est donc zéro.

On a le résultat suivant : *Étant donnée une congruence (xy) , définie par ses réseaux focaux*

$$(1) \quad x_v = ay, \quad y_u = bx,$$

$$(3) \quad a_u = b_v,$$

et si l'on définit la solution ζ correspondante de (5) et (6) par (16)

$$(16) \quad \rho = \frac{\alpha}{2} (x^2 - \beta^2),$$

α, β étant un couple de solutions de (1), la congruence $(x'y')$ transformée Γ de (xy) par

$$(8) \quad x' = x - \frac{x}{\rho} \zeta, \quad y' = y - \frac{\beta}{\rho} \zeta$$

sera de la même espèce. Le point z est défini par

$$z_u = x(x_u - b\beta)_v, \quad z_v = -x(\beta_v - ax)_u.$$

§. THÉORÈME DE PERMUTABILITÉ. — Il y a pour les transformations Γ , données par (8), un théorème de permutabilité. Dans le paragraphe suivant nous retournons au cas spécial, où $a_u = b_v$. Considérons maintenant le cas général d'une congruence (xy) définie à l'aide de ses deux réseaux focaux

$$(1) \quad x_v = av, \quad y_u = bv.$$

La transformation Γ était donnée par

$$(8) \quad x' = x - \frac{x}{\rho} z, \quad y' = y - \frac{\beta}{\rho} z.$$

Nous voulons démontrer la propriété suivante: *Si deux congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$ sont des transformées Γ d'une même congruence (xy) , elles le sont d'une double infinité.*

Soient en effet x', β' et x'', β'' les couples de solutions du système (1) qui conduisent aux congruences transformées $(x'y')$, $(x''y'')$. On a donc

$$(17) \quad \begin{cases} x' = x - \frac{x}{\rho} z, & y' = y - \frac{\beta}{\rho} z, \\ x'' = x - \frac{x}{\rho'} z', & y'' = y - \frac{\beta}{\rho'} z', \end{cases}$$

où z', z'', ρ', ρ'' sont définis par

$$\begin{aligned} z'_u &= z'_v x, & z'_v &= x'_u v, \\ z''_u &= z''_v x, & z''_v &= x''_u v, \\ \rho'_u &= z'_v x', & \rho'_v &= x'_u \beta', \\ \rho''_u &= z''_v x'', & \rho''_v &= x''_u \beta''. \end{aligned}$$

Partons de la congruence $(x'y')$ et appliquons-lui une transformation Γ particulière. Remarquons que les formules (17) prouvent que le système

$$(18) \quad x'_v = a'v', \quad y'_u = b'x',$$

où

$$a' = a - \frac{x' \eta'}{\rho'}, \quad b' = b - \frac{\beta' \xi'}{\rho'},$$

admet le couple de solutions

$$(19) \quad \bar{x}' = x'' - \frac{x'}{\rho'} \sigma', \quad \bar{\beta}' = \beta'' - \frac{\beta'}{\rho'} \sigma'$$

où σ' est une solution du système

$$(20) \quad \sigma'_{1u} = x'' \xi', \quad \sigma'_{1v} = \beta'' \eta';$$

et le système adjoint du système (18) admet le couple de solutions

$$(21) \quad \bar{\xi}' = \xi'' - \frac{\xi'}{\rho'} \sigma'_1, \quad \bar{\eta}' = \eta'' - \frac{\eta'}{\rho'} \sigma'_1$$

où σ'_1 est une solution du système

$$(22) \quad \sigma'_{1u} = x' \xi'', \quad \sigma'_{1v} = \beta' \eta''.$$

Au moyen du couple $\xi', \bar{\eta}'$ on peut déterminer un réseau $(\bar{z}')$, harmonique à $(x' y')$, par le système

$$\begin{aligned} \bar{z}'_u &= \bar{\xi}' x' = \left(\xi'' - \frac{\xi'}{\rho'} \sigma'_1 \right) \left(x - \frac{x'}{\rho'} z' \right) = \left(z'' - \frac{\sigma'_1}{\rho'} z' \right)_u, \\ \bar{z}'_v &= \left(z'' - \frac{\sigma'_1}{\rho'} z' \right)_v, \end{aligned}$$

donc, à une constante additive près,

$$(23) \quad \bar{z}' = z'' - \frac{\sigma'_1}{\rho'} z'.$$

On aura ensuite

$$(24) \quad x' = x'' - \frac{\bar{x}'}{\rho'} \bar{z}', \quad y' = y'' - \frac{\bar{\beta}'}{\rho'} \bar{z}',$$

où $\bar{\rho}'$ est déterminé par

$$\bar{\rho}'_u = \bar{x}' \bar{\xi}', \quad \bar{\rho}'_v = \bar{\beta}' \bar{\eta}',$$

ou

$$\begin{aligned} \bar{\rho}'_u &= \left(x'' - \frac{x'}{\rho'} \sigma' \right) \left(\xi'' - \frac{\xi'}{\rho'} \sigma'_1 \right) = \left(\rho'' - \frac{\sigma' \sigma'_1}{\rho'} \right)_u, \\ \bar{\rho}'_v &= \left(\rho'' - \frac{\sigma' \sigma'_1}{\rho'} \right)_v, \end{aligned}$$

donc

$$(25) \quad \bar{\rho}' = \rho' - \frac{\sigma' \sigma_1'}{\rho'}.$$

On déduit de (24) à l'aide de (25)

$$(26) \quad \begin{cases} \bar{x}' = \frac{1}{\rho' \rho'' - \sigma' \sigma_1'} \begin{vmatrix} x & z' & z'' \\ x' & \rho' & \sigma_1' \\ x'' & \sigma' & \rho'' \end{vmatrix}, \\ \bar{y}' = \frac{1}{\rho' \rho'' - \sigma' \sigma_1'} \begin{vmatrix} y & z' & z'' \\ \bar{\beta}' & \rho' & \sigma_1' \\ \bar{\beta}'' & \sigma' & \rho'' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Si l'on part maintenant de la congruence $(x''y'')$ avec les couples de solutions

$$\begin{aligned} \bar{z}'' &= z'' - \frac{\xi''}{\rho''} \sigma'', & \bar{\eta}'' &= \eta'' - \frac{\eta''}{\rho''} \sigma'', \\ \bar{x}'' &= x'' - \frac{x''}{\rho''} \sigma_1'', & \bar{\beta}'' &= \beta'' - \frac{\beta''}{\rho''} \sigma_1'', \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \sigma'' &= x'' \xi', & \sigma_1'' &= \beta'' \eta', \\ \sigma_{1u}'' &= x'' \xi'', & \sigma_{1v}'' &= \beta'' \eta'', \end{aligned}$$

on trouvera la même congruence si l'on prend

$$\sigma' = \sigma'' = \sigma + c, \quad \sigma_1' = \sigma_1'' = \sigma_1 + c_1,$$

où c et c_1 sont deux constantes arbitraires. On a ainsi une double infinité de congruences $(\bar{x}\bar{y})$, où

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\rho' \rho'' - (\sigma + c)(\sigma_1 + c_1)} \begin{vmatrix} x & z' & z'' \\ x' & \rho' & \sigma_1 + c_1 \\ x'' & \sigma + c & \rho'' \end{vmatrix}, \\ \bar{y} &= \frac{1}{\rho' \rho'' - (\sigma + c)(\sigma_1 + c_1)} \begin{vmatrix} y & z' & z'' \\ \bar{\beta}' & \rho' & \sigma_1 + c_1 \\ \bar{\beta}'' & \sigma + c & \rho'' \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

qui admettent comme transformées Γ les congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$. Pour $c = c_1 = \infty$ on a la congruence initiale (xy) .

Le théorème de permutabilité des congruences de M. Goursat,

donné par M. Tzitzéica ⁽¹⁾ est un cas spécial de ce qui précède. Si le système (1) est de la forme

$$(27) \quad x_v = a_v x, \quad y_u = a_u y,$$

ce système est identique à son adjoint et nous pouvons prendre pour ξ, η un couple de solutions de (27). La solution φ correspondante est alors donnée par

$$\varphi_u = \xi^2, \quad \varphi_v = \eta^2$$

et

$$\sigma = \sigma_1,$$

car les équations (20) et (22) deviennent

$$\sigma_u = \xi' \xi'', \quad \sigma_v = \eta' \eta'',$$

6. Considérons maintenant le cas spécial, où la congruence initiale est de l'espèce définie par (3). Supposons en outre

$$\varphi' = \frac{x'}{2} (x'^2 - \beta'^2),$$

$$\varphi'' = \frac{x''}{2} (x''^2 - \beta''^2),$$

et

$$\begin{aligned} \xi' &= x' (x'_u - b \beta'), & \eta' &= -x' (\beta'_v - a x') \\ \xi'' &= x'' (x''_u - b \beta''), & \eta'' &= -x'' (\beta''_v - a x''). \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$ sont de la même espèce. Les réseaux (z') et (z'') sont définis par

$$\begin{aligned} z'_u &= x' (x'_u - b \beta'), & z'_v &= -x' (\beta'_v - a x'), \\ z''_u &= x'' (x''_u - b \beta''), & z''_v &= -x'' (\beta''_v - a x''). \end{aligned}$$

On peut alors demander : Si l'on part de deux congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$, transformées l'une d'une congruence (xy) , toutes les trois de la même espèce nommée, quand la congruence $(\bar{x}\bar{y})$ est-elle aussi de cette espèce ?

⁽¹⁾ TZITZÉICA, *Sur certaines congruences de droites* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1928, p. 189).

Partons de

$$\bar{x}'^2 - \bar{\beta}'^2 = (x'^2 - \beta'^2) \frac{\sigma^2}{\rho^2} - 2 \frac{\sigma}{\rho} (x' x'' - \beta' \beta'') + (x''^2 - \beta''^2). \quad (28)$$

Or nous tenons compte que

$$x'^2 - \beta'^2 = \frac{3\rho'}{\kappa'}, \quad x''^2 - \beta''^2 = \frac{3\rho''}{\kappa''},$$

On aura ensuite, de (20) et (22),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa'} \sigma_u + \frac{1}{\kappa''} \sigma_{1u} &= \frac{x''^2}{\kappa'} + \frac{x'^2}{\kappa''} = x'' x'_u + x' x''_u - x'' b \beta' - x' b \beta'' = (x' x'' - \beta' \beta'')_u \\ \frac{1}{\kappa'} \sigma_v + \frac{1}{\kappa''} \sigma_{1v} &= (x' x'' - \beta' \beta'')_v. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\sigma}{\kappa'} + \frac{\sigma_1}{\kappa''} = x' x'' - \beta' \beta'' + G.$$

On a donc de (28)

$$\frac{\kappa''}{3} (\bar{x}'^2 - \bar{\beta}'^2) = \rho'' - \frac{\sigma \sigma_1}{\rho'} + \frac{G \kappa'' \sigma}{\rho'},$$

et si l'on tient compte de (25), on a

$$\frac{\kappa''}{3} (\bar{x}'^2 - \bar{\beta}'^2) = \bar{\rho}' + \frac{G \kappa'' \sigma}{\rho'}.$$

Pour que la congruence $(\bar{x}' \bar{y}')$ soit de l'espèce nommée, il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{aligned} G &= 0, \\ \bar{\rho}' &= \frac{\kappa''}{3} (\bar{x}'^2 - \bar{\beta}'^2). \end{aligned}$$

On a donc le résultat suivant : *Étant données deux congruences de l'espèce nommée $(x' y')$ et $(x'' y'')$, transformées d'une congruence initiale (xy) de la même espèce respectivement par Γ_x et par $\Gamma_{x'}$ — nous désignons une transformation, définie par (8) et (16) par transformation Γ_x — il y a encore une congruence de l'espèce nommée transformée $\Gamma_{x'}$ de $(x' y')$ et transformée Γ_x de $(x'' y'')$.*

7. Parmi les congruences de l'espèce nommée, celles qui sont en

même temps quadratiques sont intéressantes. Dans un S_3 ces congruences sont l'image des surfaces R de MM. Tzitzéica-Demoulin.

De plus, si l'on transforme une surface R par la transformation R_x de M. Jonas, on obtient une nouvelle surface R . Dans un S_3 on a donc une nouvelle congruence de l'espèce donnée et cette congruence est maintenant une transformée V_x de l'image de la surface R initiale.

L'image d'une surface R dans S_3 est une congruence de droites (pq) , définie par ses réseaux focaux ⁽¹⁾

$$(29) \quad \begin{cases} q_v = \gamma p_v, \\ p_u = \beta q_v, \\ \gamma_u = \beta_v. \end{cases}$$

L'image de la surface transformée est une congruence $(\bar{p}\bar{q})$, définie par

$$(30) \quad \begin{cases} \bar{q}_v = \bar{\gamma} \bar{p}_v, \\ \bar{p}_u = \bar{\beta} \bar{q}_v, \\ \bar{\gamma}_u = \bar{\beta}_v. \end{cases}$$

où les fonctions $\beta, \gamma, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ doivent vérifier les relations

$$(31) \quad \begin{cases} \bar{\gamma} = -\gamma + \frac{ak}{\Lambda}, \\ \bar{\beta} = -\beta + \frac{bh}{\Lambda}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} a_v = \gamma b_v, & h_v = \beta k_v, \\ b_u = \beta a_v, & k_u = \gamma h_v, \end{cases}$$

et la fonction Λ est donnée par ⁽²⁾

$$\Lambda = \frac{x}{3}(a^2 - b^2).$$

⁽¹⁾ Voir A. TERRACINI, *Sulla teoria delle congruenze W*, (Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, t. LX, 1937, p. 657).

⁽²⁾ Dans toutes ces formules j'ai employé la notation de M. Jonas. Voir : H. JONAS, *Ueber die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einen gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen* (Jahresber. der Deutschen Mathem. Verein., Bd 29, 1920).

Changeons maintenant la notation par

$$(34) \quad \begin{cases} q=x, \\ p=y; \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{q}=a, \\ \bar{p}=b; \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{q}'=x', \\ \bar{p}'=-y'; \end{cases} \quad \begin{cases} -\bar{q}'=a', \\ -\bar{p}'=b'; \end{cases} \quad \begin{cases} a=x, \\ b=\bar{q}; \end{cases} \quad \begin{cases} h=\bar{q}, \\ k=x; \end{cases} \quad \Lambda=p.$$

Les équations (29) et (30) deviennent

$$\begin{cases} x_1=a'y, \\ y_1=b'x; \end{cases} \quad \begin{cases} x'_1=a'y, \\ y'_1=b'x. \end{cases}$$

et les équations (31) donnent

$$\begin{aligned} a' &= a - \frac{xh}{p}, \\ b' &= b - \frac{\bar{q}k}{p}. \end{aligned}$$

M. Terracini a fait voir aussi que le point d'intersection des droites $p\bar{p}$ et $q\bar{q}$ décrit un réseau (z) harmonique à la congruence $(p\bar{p})$ et à la congruence $(q\bar{q})$. Il donne les formules suivantes :

$$(35) \quad \begin{cases} z = -\frac{\Lambda}{a}(\bar{q} - q), \\ z = -\frac{\Lambda}{b}(p + \bar{p}), \end{cases}$$

et à l'aide de (32) l'on obtient

$$\begin{aligned} z &= -\frac{p}{x}(x' - x), \\ z &= -\frac{p}{y}(y - y'). \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{x}{p}z, \\ y' &= y - \frac{y}{p}z; \end{aligned}$$

et

$$\Lambda = \frac{x}{y}(a^2 - b^2)$$

donne

$$z = \frac{x}{y}(x^2 - \bar{q}^2).$$

On a donc le résultat suivant : La transformation R_x de M. Jonas, qui

transforme une surface R en une autre surface R , est dans un S_3 une transformation Γ_x de deux congruences de droites de l'espèce nommée.

8. M. Tzitzéica a étudié ⁽¹⁾ les congruences de M. Goursat et une transformation Γ de ces congruences. Il remarque que l'image d'une surface isotherme-asymptotique de M. Fubini dans un S_3 est une congruence quadratique de M. Goursat. Si nous changeons la notation des résultats de M. Terracini par (32) et nous posons en outre $a = b$, nous considérons dans un S_3 l'image d'une surface isotherme-asymptotique de M. Fubini. Nous aurons donc du paragraphe précédent : *La transformation W de M. Fubini* ⁽²⁾ *des surfaces isothermes-asymptotiques correspond dans un S_3 à une transformation Γ de deux congruences de M. Goursat.*

En effet la transformation W de M. Fubini est caractérisée par

$$\begin{aligned} a &= ch \\ b &= ck \end{aligned} \quad (c = \text{const.})$$

et

$$\begin{aligned} A_u &= ch^2, \\ A_v &= ck^2. \end{aligned}$$

Nous posons alors

$$\frac{A}{c} = \varphi$$

au lieu de $A = \varphi$ et nous aurons

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \xi^2, \\ \varphi_v &= \eta^2, \end{aligned}$$

ce qui conduit aux formules de M. Tzitzéica.

⁽¹⁾ G. TZITZÉICA, *Sur certaines congruences de droites* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1928, p. 189).

⁽²⁾ FUBINI-ČECH, *Geometria Proiettiva Differenziale* (N. Zanichelli, Bologna, 1927), t. I, p. 283-286.

