JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIOTR SZYMANSKI

Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 67-107.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__67_0>

Quelques solutions exactes des équations de l'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique;

PAR PIOTR SZYMANSKI

(Varsovie).

INTRODUCTION.

Nous nous occuperons dans cette note de l'écoulement du fluide visqueux, incompressible, par un tube cylindrique de section circulaire. Nous admettrons de plus que l'écoulement est symétrique par rapport à l'axe du tube.

Nous adopterons dans la suite le système des coordonnées cylindriques, comme le système qui convient le plus au cas envisagé.

Soient donc (r, ϑ, z) les coordonnées cylindriques d'un point quelconque de l'espace; v_r, v_ϑ, v_z les composantes de la vitesse d'une particule du fluide qui, à l'instant t, se trouve à ce point; $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{X}_\vartheta$, $\mathfrak{X}_z$ les composantes du champ de forces rapportées à l'unité de masse; p la pression du fluide au point envisagé; σ la densité du fluide, que nous admettons constante; μ, le coefficient de la viscosité.

Soient, enfin, l la longueur du tube et ρ le rayon de sa section droite.

Nous disposons l'axe OZ des coordonnées suivant l'axe du tube, de manière que les extrémités de cet axe se trouvent respectivement aux points $z = 0$ et $z = l$ (*fig.* 1).

Conformément aux hypothèses faites, $\mathfrak{X}_\vartheta$ et v_ϑ sont nuls, ainsi que toutes les dérivées de p, $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{X}_z$, v_r, v_z, etc., par rapport à ϑ.

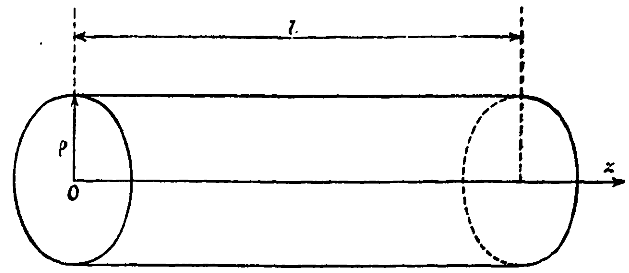
Les équations de Navier-Stokes peuvent donc s'écrire sous la forme [1]

$$(1_1)\qquad \mathfrak{X}_r - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\sigma}\Delta v_r - \frac{\mu}{\sigma}\frac{v_r}{r^2} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z},$$

$$(1_2)\qquad \mathfrak{X}_z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\sigma}\Delta v_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$(1_3)\qquad \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r v_z)}{\partial z} = 0.$$

Fig. 1.



La notation Δ est employée ici pour désigner le laplacien, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

En supposant le champ de forces nul, l'écoulement permanent et s'effectuant le long des droites parallèles à l'axe du tube, on obtient, comme solution exacte de ces équations, l'écoulement bien connu de Poiseuille

$$(2_1)\qquad v_r = 0,$$

$$(2_2)\qquad v_z = \frac{p_0 - p_l}{4\mu l}(\rho^2 - r^2),$$

$$(2_3)\qquad p = p_0 - \frac{p_0 - p_l}{l}z,$$

où p_0 et p_l désignent respectivement les pressions aux extrémités $z = 0$ et $z = l$ du tube. La formule (2_3) montre que la pression est constante dans toute la section droite du tube.

---

[1] *Voir* par exemple H. LORENZ, *Technische Hydromechanik* (München und Berlin, 1910), p. 421.

Nous nous proposons ici d'obtenir les solutions dépendant du temps, mais conservant le même caractère que l'écoulement de Poiseuille. Nous admettons donc aussi

$$v_r = 0. \tag{3}$$

L'équation de continuité nous donne alors

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{3'}$$

En supposant que les forces $\mathfrak{X}_r$ et $\mathfrak{X}_z$ dérivent d'un potentiel E, et en désignant

$$q = \frac{p}{\mu} - \frac{\sigma E}{\mu}, \tag{4}$$

$$\nu = \frac{\sigma}{\mu}, \tag{5}$$

on parvient aux équations

$$\frac{\partial q}{\partial r} = 0, \tag{6_1}$$

$$\Delta v - \nu \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial z}. \tag{6_2}$$

(Pour simplifier l'écriture nous avons introduit la notation v au lieu de v_z.)

Selon (3′) le premier membre de (6_2) ne peut dépendre que de r et de t, tandis que le deuxième ne dépend pas de r en vertu de (6_1).

Il en résulte que les deux membres de (6_2) ne dépendent que de t, d'où

$$\frac{\partial q}{\partial z} = f(t). \tag{7_1}$$

$$\Delta v - \nu \frac{\partial v}{\partial t} = f(t). \tag{7_2}$$

En intégrant l'équation (7_1), on obtient, à l'aide de (6_1),

$$q = z f(t) + \varphi(t). \tag{8}$$

C'est une équation tout à fait analogue à (2_3); elle exprime le fait que la valeur de q est constante dans toute la section droite du tube, et varie linéairement d'une section à une autre le long de l'axe.

En introduisant les fonctions $q_0(t) = q(0, t)$ et $q_l(t) = q(l, t)$ on a

$$q(z, t) = q_0(t) - \frac{q_0(t) - q_l(t)}{l} z, \tag{9_1}$$

$$\Delta v - \nu \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{q_l(t) - q_0(t)}{l}. \tag{9_2}$$

L'équation (9_2) nous montre que la vitesse v ne dépend pas des deux fonctions $q_0(t)$ et $q_l(t)$ mais seulement de leur différence. Dans le cas où le champ de forces est nul, cette conclusion est évidente *a priori*, puisque dans ce cas q est proportionnel à la pression p.

En supposant connues les valeurs de $q_0(t)$ et $q_l(t)$ à tout instant t, on connaît aussi la fonction

$$f(t) = \frac{q_l(t) - q_0(t)}{l}, \tag{10}$$

qui détermine l'écoulement, à l'aide de l'équation (7_2) ou (9_2).

Ainsi, le problème se ramène à la résolution de cette dernière équation, en supposant la fonction $f(t)$ donnée.

Plus précisément, en tenant compte des conditions initiales et des conditions aux parois, on peut énoncer le problème comme suit :

Trouver la solution v de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \nu \frac{\partial v}{\partial t} = f(t), \tag{11}$$

régulière pour $t \geqq 0$ et $0 \leqq r \leqq \rho$ et s'annulant pour

$$(\alpha) \qquad r = \rho \quad \text{et} \quad t \geqq 0,$$

$$(\beta) \qquad t = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqq r \leqq \rho.$$

Nous appelons ici *régulière* toute fonction déterminée et continue et ayant ses dérivées $\frac{\partial^2}{\partial r^2}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial t}$ continues. La symétrie du mouvement par rapport à l'axe OZ exige évidemment que $\frac{\partial v}{\partial r}$ soit nulle pour $r = 0$. En effet, dans le cas contraire la courbe de distribution des vitesses aurait le point anguleux sur l'axe du tube. Nous avons mis à part cette condition puisqu'elle n'appartient pas, à proprement parler, aux conditions aux limites. Nous appellerons cette condition (γ).

Il est évident, que la solution régulière de (11) ne peut exister que dans le cas où la fonction $f(t)$ est *continue*. C'est cette condition, d'ailleurs, qui résulte de l'interprétation physique de la fonction $f(t)$.

Le raisonnement suivant met en évidence encore une condition à imposer.

En effet, on a, en vertu de la condition (α) :

$$v=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=0\qquad \text{et}\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=0,\qquad \text{pour } t=0,$$

d'où l'équation (11) se réduit à

$$-\nu\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=f(0);$$

donc, $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}$ est une constante.

Mais si l'on pose $r=\rho$, on obtient, selon (β),

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=0\\ r=\rho}}=0.$$

d'où la valeur de cette constante est zéro, par conséquent :

$$f(0)=0. \tag{12}$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, l'équation (11) n'admet pas de solutions régulières.

Néanmoins, on peut trouver dans ce cas des solutions continues susceptibles d'une interprétation physique. Nous en rencontrerons un exemple dans ce qui va suivre.

Passons maintenant au problème général, celui de la résolution de l'équation (11) sous les conditions indiquées.

Dans tous les cas que nous allons traiter, nous nous servirons de la même méthode de résolution.

Nous déterminerons d'abord une solution quelconque v_0 de l'équation (11) satisfaisant à la condition (α). Pour satisfaire ensuite à la condition (β), nous ajouterons à la solution ainsi trouvée une solution w convenablement choisie de l'équation sans second membre :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\nu\frac{\partial v}{\partial t}=0. \tag{13}$$

La première partie du problème, dépendant essentiellement de la fonction $f(t)$, sera résolue de manières différentes conformément aux différents modes de représentation, dont la fonction $f(t)$ est susceptible.

Au contraire, la seconde partie du problème, celle qui consiste à résoudre l'équation (13), ne dépend pas de la forme particulière de $f(t)$. Nous nous en occuperons en premier lieu.

Avant d'aborder la solution de tous ces problèmes nous introduirons les coordonnées abstraites indépendantes du choix particulier des unités de mesure. Les solutions ainsi obtenues seront exprimées d'une manière indépendante des dimensions du tube et de la valeur particulière du coefficient ν.

Posons à cet effet

$$x = \frac{r}{\rho}, \tag{14_1}$$

$$y = \frac{t}{\rho^2 \nu}, \tag{14_2}$$

$$\zeta = \frac{z}{l}, \tag{14_3}$$

$$v = \frac{u}{l\nu}, \tag{14_4}$$

$$q = \frac{Q}{\rho^2 \nu}. \tag{14_5}$$

L'équation (6_2) s'écrit maintenant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial \zeta}.$$

En posant encore

$$Q_0(y) = Q(0, y), \tag{15}$$

$$Q_1(y) \quad = Q(1, y), \tag{16}$$

$$Q_1(y) - Q_0(y) = F(y), \tag{17}$$

on peut donc énoncer le problème qui nous intéresse de la façon suivante :

Problème. — *Étant donnée la fonction* $F(y)$ *déterminée et continue* *pour toute valeur* $y \geqq 0$, *trouver la solution* u *de l'équation*

$$\text{(I)} \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = F(y),$$

régulière pour $y \geqq 0$ *et* $0 \leqq x \leqq 1$ *et telle que*

$$(\alpha) \qquad u = 0 \qquad \text{pour } x = 1 \text{ et } y \geqq 0,$$
$$(\beta) \qquad u = 0 \qquad \text{pour } y = 0 \text{ et } 0 \leqq x \leqq 1,$$
$$(\gamma) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{pour } x = 0 \text{ et } y \geqq 0.$$

1. PROBLÈME I (auxiliaire). — *Étant donnée la fonction* $\varphi(x)$ *déterminée dans l'intervalle* $(0, 1)$, *trouver la solution* w *de l'équation*

$$\text{(II)} \qquad L(w) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

régulière pour $y \geqq 0$ *et* $0 \leqq x \leqq 1$ *et satisfaisant aux conditions*

$$1^{\circ} \qquad w = 0 \qquad \text{pour } x = 1 \text{ et } y \geqq 0;$$
$$2^{\circ} \qquad w = \varphi(x) \qquad \text{pour } y = 0 \text{ et } 0 \leqq x \leqq 1.$$

On obtient aisément les intégrales simples de l'équation (II), de la forme

$$\mathcal{J}(ax)\, e^{-a^2 y},$$

où $\mathcal{J}(\xi)$ désigne la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, c'est-à-dire la fonction

$$(18) \qquad \mathcal{J}(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{2^2 . 1!^2} + \frac{\xi^4}{2^4 . 2!^2} - \frac{\xi^6}{2^6 . 3!^2} + \ldots.$$

En cherchant à satisfaire la condition (1) du problème, on n'admet pour a que les valeurs des racines de l'équation

$$\mathcal{J}(a) = 0.$$

On sait que ces racines sont en nombre infini. En les rangeant selon leur grandeur on obtient la suite

$$\ldots, \quad -a_n, \quad \ldots, \quad -a_1, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

Puisque $\mathcal{J}(-ax) = \mathcal{J}(ax)$ il suffit de se borner seulement aux racines positives

Il est clair, maintenant, que toute série de la forme

$$(19)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n\,\mathcal{J}(a_n x)\,e^{-a_n^2 y}$$

satisfait formellement à l'équation (II) en s'annulant pour $x=1$ conformément à la condition 1°.

La condition 2° peut être satisfaite aussi si l'on suppose la fonction $\varphi(x)$ développable dans l'intervalle $(0,\ 1)$ en une série de la forme

$$(20)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathcal{J}(a_n x).$$

En partant de l'équation différentielle des fonctions $\mathcal{J}(a_n x)$ on vérifie immédiatement que les fonctions $\sqrt{x}\,\mathcal{J}(a_n x)$ forment une suite orthogonale, c'est-à-dire que

$$(21_1)\qquad \int_0^1 x\,\mathcal{J}(a_n x)\,\mathcal{J}(a_m x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

et

$$(21_2)\qquad \int_0^1 x\,[\mathcal{J}(a_n x)]^2\,dx = \varepsilon_n > 0.$$

Ceci nous permet d'obtenir, par le procédé bien connu, l'expression formelle des coefficients c_n du développement (20) :

$$(22)\qquad c_n = \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^1 x\,\varphi(x)\,\mathcal{J}(a_n x)\,dx.$$

Le développement (20) rentre donc dans une classe générale de développements procédant suivant les fonctions d'un système quelconque de fonctions orthogonales.

En particulier, celui qui nous occupe est bien connu sous le nom de développement de Fourier-Bessel.

Nous citerons ici quelques théorèmes, dont nous ferons usage dans la suite et qui expriment les conditions suffisantes pour que la fonction $\varphi(x)$ soit développable en une série de Fourier-Bessel.

Théorème A. — *Toute fonction continue avec ses deux premières déri-*

vées dans l'intervalle $(0, 1)$ *et s'annulant pour* $x = 1$ *est développable en une série uniformément et absolument convergente de la forme* (20)(1).

THÉORÈME B. — *Si la fonction* $\sqrt{x}\varphi(x)$ *est intégrable* (2) *dans l'intervalle* $(0, 1)$ *la série* (20) *où les* c_n *ont les valeurs* (22) *converge vers la valeur*

$$\frac{1}{2}[\varphi(x-0)+\varphi(x+0)]$$

pour tout point intérieur x *de l'intervalle* $(0, 1)$ *au voisinage duquel la fonction* $\varphi(x)$ *est à variation bornée.*

Si, en outre, la fonction $\varphi(x)$ *est continue dans un intervalle* (a, b) *contenu lui-même à l'intérieur d'un autre intervalle* (α, β) *où la fonction est à variation bornée, la série converge uniformément vers* $\varphi(x)$ *dans l'intervalle* (a, b)(3).

THÉORÈME C. — *Si la série* (20) *est uniformément convergente dans l'intervalle* $(0, 1)$ *la somme* $\varphi(x)$ *de cette série est une fonction qui seule satisfait aux relations* (22)(4).

On peut tirer du théorème B le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Si pour tous les points d'un voisinage du point* $x = 0$, *les conditions du théorème B sont remplies, et si, en outre, la fonction* $\varphi(x)$ *est continue au point* $x = 0$ *et la série* (20) *est uniformément convergente au voisinage de ce point, cette série converge au point* $x = 0$ *vers la valeur* $\varphi(0)$.

Le problème auxiliaire que nous nous sommes proposé au début de ce chapitre se trouve ainsi résolu pour beaucoup de cas. Il en résulte que le problème général sera résolu toutes les fois qu'étant donnée la

(1) D. HILBERT, *Nachr. Ges. Gött.*, 1904, *math.-phys.*, p. 231-241. *Voir aussi* D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeiner Theorie der linearen Integral gleichungen* (Leipzig, 1924), p. 54.

(2) Au sens de M. Lebesgue.

(3) E. W. HOBSON, *Representation of a function by series of Bessels functions* (*Proc. of the London Math. Soc.* 2e série, vol. VII, 1909, p. 387).

(4) W. H. YOUNG, *On series of Bessel functions* (*Proc. of the London Math. Soc.*, 2e série, vol 18, 1920, p. 184).

fonction $F(y)$ on saura trouver une solution de l'équation (I) s'annulant pour $x=1$ et $y\geq 0$. Avant d'aborder ce dernier problème dans le cas général, nous commencerons par l'étude d'un cas particulier, celui où la fonction $F(y)$ se réduit à une constante. Cette étude fera le sujet du paragraphe **3** et des suivants. Le paragraphe **2** sera consacré à quelques préliminaires.

2. Nous citerons dans ce paragraphe quelques formules [1] et nous établirons quelques lemmes dont nous ferons usage dans la suite.

Rappelons, en premier lieu, l'équation différentielle qui détermine la fonction $\mathcal{J}(x)$:

(23) $$x\mathcal{J}''(x) + \mathcal{J}'(x) + x\mathcal{J}(x) = 0.$$

Puis l'expression de $\mathcal{J}(x)$ par la série entière déjà citée :

(18) $$\mathcal{J}(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2.1!^2} + \frac{x^4}{2^4.2!^2} - \frac{x^6}{2^6.3!^2} + \ldots,$$

et par l'intégrale définie

(24) $$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega)\,d\omega.$$

Cette dernière expression montre que la fonction $\mathcal{J}(x)$ ainsi que la fonction $\mathcal{J}'(x)$ sont bornées pour tout x réel.

On a notamment

(25$_1$) $$|\mathcal{J}(x)|\leq 1$$

et

(25$_2$) $$|\mathcal{J}'(x)|\leq 1$$

pour toute valeur réelle de l'argument.

Enfin la formule asymptotique bien connue :

(26) $$\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\mathcal{J}(x) = P(x)\cos\psi + Q(x)\sin\psi,$$

---

[1] On trouvera toutes ces formules dans n'importe quel traité sur les fonctions de Bessel. On peut aussi consulter l'*Encyclopédie* (*loc. cit.*) ou *Jahnke und Emde. Funktionen tafeln mit Formeln und Kurven* (Leipzig. 1928).

où

$$\psi = x - \frac{\pi}{4},$$

tandis que $P(x)$ et $Q(x)$ sont les séries semi-convergentes suivantes :

$$P(x) = 1 - \frac{1^2 . 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2}{4!\,(8x)^4} - \ldots,$$

$$Q(x) = \frac{1}{8x} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2}{3!\,(8x)^3} + \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 9^2}{5!\,(8x)^5} - \ldots.$$

On en tire la formule ci-après qui sera d'usage constant dans ce paragraphe [1] :

$$(26_a) \qquad \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, \mathcal{J}(x) = \cos\psi + \frac{\sin\psi}{8x} - \frac{9}{128 x^2}\left[\cos\psi + \frac{\theta(x)}{x}\right],$$

où $\theta(x)$ désigne une fonction bornée.

On obtient aisément à l'aide de la formule (26) l'expression suivante des zéros a_n de la fonction $\mathcal{J}(x)$:

$$(27) \qquad a_n = n\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et la formule [2] :

$$(28) \qquad \mathcal{J}'^2(a_n) = \frac{2}{\pi a_n}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Nous utiliserons la formule (27) pour démontrer le lemme suivant :

Lemme I. — *Pour tout nombre α intérieur à l'intervalle* (0, 1) *il existe un nombre* A *tel que la valeur absolue de la somme*

$$K_n(x) = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \mathcal{J}(a_m x)$$

ne dépasse pas A *quel que soit n pourvu que x soit compris dans l'intervalle* $(-\alpha, \alpha)$.

Pour démontrer ce lemme, exprimons $K_n(x)$ par l'intégrale définie.

---

(1) *Voir* par exemple A. Gray et G. B. Mathews. *A treatise on Bessel Functions*. London, 1895, p. 70.

(2) *Voir* E. W. Hobson, *loc. cit.*

Nous avons en vertu de (24) :

$$K_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi L_n(x \sin\omega)\, d\omega,$$

où l'on a posé :

$$L_n(z) = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \cos(a_m z).$$

Tout revient donc à démontrer le lemme analogue pour les sommes $L_n(z)$.

En effet, s'il existe un nombre A tel que $|L_n(z)| \leqq A$ pour tout n naturel et tout $|z| < \alpha$, on a : (supposant $|x| < \alpha$ et $0 \leqq \omega \leqq \pi$)

$$|x \sin\omega| < \alpha \sin\omega \leqq \alpha,$$

donc

$$|L_n(x \sin\omega)| < A$$

et

$$|K_n(x)| \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |L_n(x \sin\omega)|\, d\omega \leqq \frac{1}{\pi} A.\pi = A.$$

Remarquons maintenant que selon la formule (27) $a_n z$ est de la forme

$$a_n z = a + bn + \frac{c}{n} + \frac{d_n}{n^2},$$

où les nombres d_n forment une suite bornée. Or, nous allons démontrer d'une façon générale l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \cos\left(a + bm + \frac{c}{m} + \frac{d_m}{m^2}\right)\right| \leqq \frac{M}{\left|\cos\frac{b}{2}\right|},$$

dont le lemme en question résulte immédiatement.

Nous avons d'abord

$$C_n = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \cos(a + bm) = \frac{(-1)^n \cos\left(a + \frac{b}{2} + bn\right) - \cos\left(a + \frac{b}{2}\right)}{2\cos\frac{b}{2}},$$

$$S_n = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \sin(a + bm) = \frac{(-1)^n \sin\left(a + \frac{b}{2} + bn\right) - \sin\left(a + \frac{b}{2}\right)}{2\cos\frac{b}{2}},$$

d'où

$$|C_n| \leqq \left|\frac{1}{\cos\frac{b}{2}}\right|, \qquad |S_n| \leqq \left|\frac{1}{\cos\frac{b}{2}}\right|.$$

Il en résulte tout de suite l'inégalité analogue pour la somme

$$T_n = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \cos\left(a + bm + \frac{c}{m}\right).$$

On a, en effet,

$$T_n = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \cos\frac{c}{m} \cos(a + bm) - \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \sin\frac{c}{m} \sin(a + bm).$$

En appliquant à chacune des sommes la transformation d'Abel et en remarquant ensuite qu'à partir d'un certain m les nombres $\cos\frac{c}{m}$ et $\sin\frac{c}{m}$ forment deux suites monotones, on obtient bien l'inégalité de la forme

$$|T_n| \leqq \frac{T}{\left|\cos\frac{b}{2}\right|}.$$

La même inégalité subsiste pour la somme

$$M_n = \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \cos\left(a + bm + \frac{c}{m} + \frac{d_m}{m^2}\right) \qquad \text{si } |d_m| \leqq d.$$

On a, en effet,

$$\cos\frac{d_m}{m^2} = 1 - \frac{\theta_m}{m^4},$$

où

$$|\theta_m| \leqq \frac{d^2}{2}$$

et

$$\left|\sin\frac{d_m}{m^2}\right| \leqq \frac{d}{m^2},$$

puis

$$M_n = T_n - \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \frac{\theta_m}{m^4} \cos\left(a + bm + \frac{c}{m}\right)$$
$$- \sum_{m=1}^{m=n} (-1)^m \sin\frac{d_m}{m^2} \sin\left(a + bm + \frac{c}{m}\right).$$

Les deux dernières sommes sont évidemment bornées. On a donc, en désignant par M' un nombre positif suffisamment grand :

$$|M_n| \leqq |T_n| + M',$$

d'où

$$|M_n| \leqq \frac{T + M'\left|\cos\frac{b}{2}\right|}{\left|\cos\frac{b}{2}\right|} \leqq \frac{T + M'}{\left|\cos\frac{b}{2}\right|}. \qquad \text{C. Q. F. D. (1).}$$

Lemme II. — *La suite* $\{a_n |\mathcal{J}'(a_n)|\}$ *est croissante.*

En effet, considérons l'intégrale

$$I_n = a_n^2 \int_0^1 x\, \mathcal{J}^2(a_n x)\, dx.$$

En posant $a_n x = \xi$ on obtient

$$I_n = \int_0^{a_n} \xi\, \mathcal{J}^2(\xi)\, d\xi$$

et

$$I_{n+1} - I_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} \xi\, \mathcal{J}^2(\xi)\, d\xi > 0.$$

D'autre part (2)

$$\int_0^1 x\, \mathcal{J}^2(a_n x)\, dx = \frac{1}{2} \mathcal{J}'^2(a_n),$$

d'où

$$I_n = \frac{a_n^2}{2} \mathcal{J}'^2(a_n);$$

donc, à l'aide de l'inégalité démontrée,

$$a_{n+1}^2 \mathcal{J}'^2(a_{n+1}) - a_n^2 \mathcal{J}'^2(a_n) = 2(I_{n+1} - I_n) > 0,$$

(1) Je dois à M. Zygmund la simplification de ce raisonnement.

(2) *Voir* par exemple *Encyclopédie*, *loc. cit.*, p. 227, formule (110a).

ce qui prouve notre assertion. Ces remarques faites, nous pouvons nous occuper de notre problème.

5. PROBLÈME II. — « *Trouver la solution u de l'équation*

$$\text{(III)} \qquad L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = h$$

déterminée dans la région R *du plan, où* $0 \leqq x \leqq 1$ et $y \geqq 0$, *et s'annulant pour :*

1° $\qquad x = 1 \quad$ *et* $\quad y \geqq 0,$

2° $\qquad y = 0 \quad$ *et* $\quad 0 \leqq x \leqq 1,$

h étant une constante donnée. »

Conformément aux indications données dans l'introduction, il s'agit, d'abord, à déterminer une solution quelconque $u_0(x, y)$ de l'équation (III) s'annulant pour $x = 1$ et ensuite chercher la solution $w(x, y)$ du problème I se réduisant, pour $y = 0$ à $\varphi(x) = -u_0(x, 0)$.

La somme

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y)$$

sera la solution du problème proposé.

Or, nous avons déjà la solution u_0. C'est celle de Poiseuille qui ne dépend pas, d'ailleurs, de y :

$$(29) \qquad u_0 = \frac{h}{4}(x^2 - 1).$$

Passons donc à la détermination de $w(x, y)$. Comme on l'a signalé, $w(x, y)$ sera de la forme (19) en se réduisant, pour $y = 0$ et $0 \leqq x \leqq 1$, à la fonction

$$-u_0 = \frac{h}{4}(1 - x^2).$$

On doit donc avoir

$$(30) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n \mathfrak{J}(a_n x) = \frac{h}{4}(1 - x^2) \qquad \text{pour } 0 \leqq x \leqq 1.$$

Or, selon (22),

$$c_n = \frac{h}{4\varepsilon_n}\int_0^1 x(1 - x^2)\,\mathfrak{J}(a_n x)\,dx,$$

où

$$\varepsilon_n = \int_0^1 x\, \mathcal{J}^2(a_n x)\, dx.$$

Mais (¹)

$$(31) \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{2} \mathcal{J}'^2(a_n),$$

et, en vertu de l'équation (23),

$$\int_0^1 x(1 - x^2)\, \mathcal{J}(a_n x)\, dx = -\frac{4\, \mathcal{J}'(a_n)}{a_n^3};$$

donc

$$(32) \qquad c_n = -\frac{2h}{a_n^3\, \mathcal{J}'(a_n)}.$$

D'après le théorème A (§ 1), la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{J}(a_n x)$$

est uniformément et absolument convergente et représente bien la fonction $\frac{h}{4}(1 - x^2)$ dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$.

La convergence uniforme et absolue de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{J}(a_n x)$$

dans l'intervalle (0, 1) ainsi que celle de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathcal{J}(a_n x)\, e^{-a_n^2 y}$$

dans la région R sont des conséquences immédiates de la formule (28).

En effet, on a pour n suffisamment grand

$$\mathcal{J}'^2(a_n) \geqq \frac{1}{\pi a_n},$$

(¹) *Voir* par exemple *Encyclopédie*, *loc. cit.*, p. 224, formule (110a).

d'où

$$|c_n| \leqq \frac{2h\sqrt{\pi}}{a_n^{\frac{3}{2}}},$$

et, comme $|\mathfrak{J}(x)| \leqq 1$, le terme général d'une quelconque de deux séries est plus petit en valeur absolue que celui de la série

$$2h\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}},$$

qui est manifestement convergente.

Ainsi la fonction

$$(33)\qquad u(x, y) = u_0(x) + w(x, y) = \frac{h}{4}\left[x^2 - 1 - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{J}(a_n x)}{a_n^3\,\mathfrak{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y}\right]$$

est bien déterminée et continue dans la région R, elle satisfait, en outre, aux conditions 1° et 2°. Il faut démontrer encore qu'elle satisfait à l'équation (III). Nous allons étudier dans ce but les dérivées partielles de cette fonction.

Or, il est facile à reconnaître par un raisonnement tout à fait analogue au précédent, que la dérivée formelle de la série (33) par rapport à x est uniformément (et absolument) convergente dans le domaine R. Elle représente donc bien la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ dans tout ce domaine, et l'on a le droit d'écrire

$$(34)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h}{2}\left[x - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{J}'(a_n x)}{a_n^2\,\mathfrak{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y}\right].$$

Remarquons encore qu'ainsi $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue dans le domaine R.

Il n'en est plus de même des dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Nous avons, en effet, en désignant par D_x^2 et D_y les dérivées formelles correspondantes de la série (33) :

$$D_y = 2h\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathfrak{J}(a_n x)}{a_n\,\mathfrak{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y}$$

et

$$D^2_x = \frac{h}{2}\left[1 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{J}''(a_n x)}{a_n \mathcal{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y}\right]$$

ou, en vertu de (23),

$$D^2_x = \frac{h}{2}\left[1 + \frac{4}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{J}'(a_n x)}{a_n^2 \mathcal{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{J}(a_n x)}{a_n \mathcal{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y}\right].$$

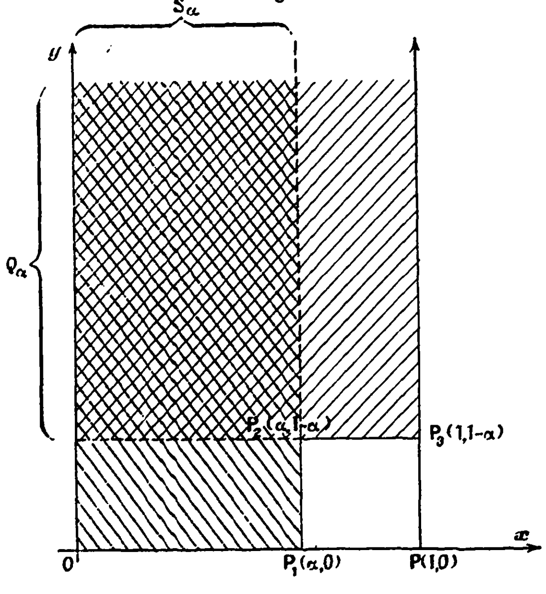
Puisque la première série en crochets est uniformément convergente, il suffit d'étudier la seconde qui intervient aussi dans l'expression de D_y.

Nous prouverons que la série en question

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mathcal{J}(a_n x)}{a_n \mathcal{J}'(a_n)}e^{-a_n^2 y}$$

est uniformément convergente dans toute région fermée contenue dans R *et ne renfermant pas le point* P(1, 0). Il en résultera la continuité de $S(x, y)$ ainsi que l'identité des séries D^2_x et D_y avec les dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et

Fig. 2.



$\frac{\partial u}{\partial y}$ partout dans la région **R** sauf au point P(1, 0). Quant au point P, nous nous en occuperons spécialement.

Pour démontrer notre assertion, il suffit évidemment de considérer les régions particulières par exemple telles que représente la figure 2.

On forme une telle région R_α $(0 < \alpha < 1)$ en enlevant de R le carré dont les sommets sont les points

$$P(1, 0), \quad P_1(\alpha, 0), \quad P_2(\alpha, 1-\alpha) \quad \text{et} \quad P_3(1, 1-\alpha).$$

On peut aussi former R_α par la superposition de deux régions Q_α et S_α (indiquées par les hachures), Q_α étant composée des points de R dont l'ordonnée surpasse $1-\alpha$ et — S_α des points satisfaisant à l'inégalité $0 \leqq x \leqq \alpha$.

Posons maintenant

$$b_n = \frac{e^{-a_n^2 y}}{a_n |\mathcal{J}'(a_n)|}.$$

La suite $\{b_n\}$ est décroissante et tend vers zéro uniformément par rapport à y. Cela résulte du lemme II (§ 2), et de ce que la suite $\{e^{-a_n^2 y}\}$ est elle-même décroissante.

En remarquant encore que

$$\mathcal{J}'(a_n) = (-1)^n |\mathcal{J}'(a_n)|,$$

on peut écrire

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \mathcal{J}(a_n x).$$

Envisageons le reste partiel de cette série :

$$S_{n,p} = \sum_{m=n}^{m=n+p} (-1)^m b_m \mathcal{J}(a_m x)$$

et supposons

$$0 \leqq x \leqq \alpha.$$

En appliquant à cette somme la transformation d'Abel et en tenant compte des propriétés de la suite $\{b_n\}$ on parvient à l'aide du lemme I (§ 2) à la conclusion :

« *La somme $S_{n,p}$ devient aussi petite que l'on veut, pourvu que n soit assez grand, et cela quels que soient l'entier positif p et le point (x, y) de la région S_α.* »

D'autre part si l'on assujettit le point (x, y) à rester dans la région

Q_α, ladite somme

$$S_{n,p} = \sum_{m=n}^{m=n+p} \frac{\mathfrak{J}(a_m x)}{a_m \mathfrak{J}'(a_m)} e^{-a_m^2 y}$$

sera plus petite en valeur absolue que la somme

$$\sum_{m=n}^{m=n+p} \frac{e^{-a_m^2(1-\alpha)}}{\sqrt{a_m}},$$

en vertu des formules (25_1) et (28).

Mais cette somme, en tant que reste partiel d'une série convergente, est infiniment petite avec $\frac{1}{n}$. Cette conclusion s'applique *a fortiori* à la somme $S_{n,p}$.

On voit donc que la somme $S_{n,p}$ est infiniment petite avec $\frac{1}{n}$ et cela uniformément dans la région Q_α de même que dans la région S_α, elle l'est donc aussi dans la région R_α. Ceci prouve que la série $S(x, y)$ est uniformément convergente dans R_α: par conséquent, les développements formels D_y et D_x^2 y représentent bien les dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

La même conclusion s'applique à toute la région R (sauf au point P) puisque tout point de R (sauf le point P) devient le point d'un R_α pourvu que α soit assez proche de 1.

Ainsi les formules

$$(35) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2h \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}(a_n x)}{a_n \mathfrak{J}'(a_n)} e^{-a_n^2 y}$$

et

$$(36) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{h}{2} \left[1 + \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{J}'(a_n x)}{a_n^2 \mathfrak{J}'(a_n)} e^{-a_n^2 y} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{J}(a_n x)}{a_n \mathfrak{J}'(a_n)} e^{-a_n^2 y} \right]$$

sont valables partout dans R, sauf au point P. De plus, les dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y sont continues.

Il nous reste donc à examiner la validité de ces formules pour le point exceptionnel

$$x = 1, \qquad y = 0.$$

Occupons-nous d'abord de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Or, nous avons, pour $x = 1$ et $y = 0$, $D_y = 0$, mais puisque $u = 0$, pour $x = 1$ et tout $y \geqq 0$, la valeur de D_y au point envisagé est bien celle de $\frac{\partial u}{\partial y}$.

La formule (35) est donc valable *dans toute la région* R.

Il en est autrement pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. En effet [en profitant de la formule (34)], on obtient, pour $x = 1$ et $y = 0$,

$$D_x^2 = h,$$

tandis que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (u = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ et } 0 \leqq x \leqq 1).$$

Donc, la formule (36) *cesse d'être valable au point* P.

Supposons maintenant le point (x, y) différent de P. Les formules (34), (35) et (36) sont toutes valables, et l'on obtient [en portant dans la formule (36) les valeurs des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}'(a_n x)}{a_n^2 \mathcal{J}'(a_n)} e^{-a_n^2 y} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}(a_n x)}{a_n \mathcal{J}'(a_n)} e^{-a_n^2 y}$$

tirées des formules (35) et (36)] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h - \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'équation (III) se trouve donc *satisfaite dans toute la région* R *en dehors du point* P. Au contraire, *cette équation n'a pas lieu au point* P, où les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont toutes nulles.

Évidemment, l'une au moins des deux dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ n'est pas continue au point P.

Pour mettre en évidence la discontinuité signalée, considérons les valeurs des dérivées de u le long de la droite $x = 1$.

Nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \to 0$$

quand y étant toujours positif tend vers zéro.

On obtient donc à l'aide de l'équation (III) :

$$\lim \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h \qquad \text{pour } x = 1 \text{ et } y \to 0.$$

Mais $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s'annule au point P, ce qui démontre la discontinuité de cette dérivée.

Il en est de même pour la dérivée $\frac{\partial u}{\partial y}$ égale à $2hS(x, y)$.

Considérons à cet effet les valeurs de la série $S(x, y)$ (dont il est question), le long du segment $(0, 1)$ de l'axe Ox.

Il est facile de reconnaître que la série $S(x, 0)$ est le développement formel de la constante $-\frac{1}{2}$ en une série de Fourier-Bessel.

D'après le théorème B et son corollaire (§ 1) le développement en question représente bien la constante $-\frac{1}{2}$ dans l'intervalle $0 \leqq x < 1$. Ainsi, la discontinuité devient évidente, puisque $S(x, 0) = 0$ pour $x = 1$.

Il est facile de se rendre compte de la signification physique de la discontinuité signalée.

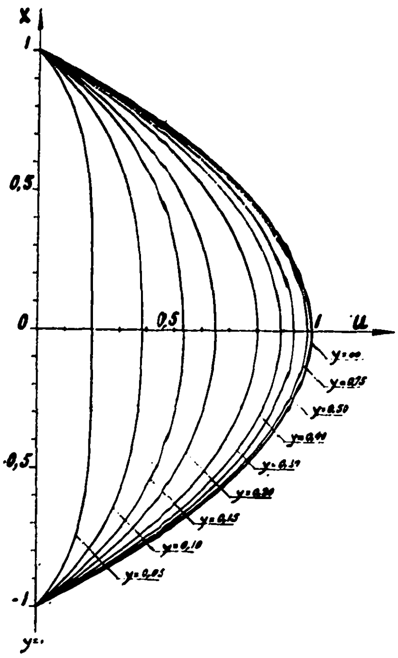
En effet, la dérivée $\frac{\partial u}{\partial y}$ représente l'accélération du liquide. Au début du mouvement, c'est-à-dire pour $y = 0$, les forces de la viscosité sont encore nulles et l'accélération est entièrement due à la différence des pressions aux extrémités du tube. Cette dernière étant constante et non nulle dans toute la section du tube, l'accélération l'est aussi à l'intérieur du tube tandis qu'aux parois, elle est nécessairement nulle.

La discontinuité n'existe plus pour $y > 0$ en disparaissant, ainsi, au cours du mouvement ([1]).

([1]) On peut citer quelques autres problèmes où les discontinuités analogues ont été rencontrées. (*Voir* par exemple BOUSSINESQ, *C. R. Ac. Sc.*, 29 mars 1880; H. LAMB, *The Journal of London Math. Soc.*, n° 6, 1927. *Cf.* aussi M. BRILLOUIN, *Leçons sur la viscosité*, Paris, 1907, § 42.)

Pour se rendre compte de l'aspect du mouvement nous avons effectué les calculs numériques. La figure 3 montre les courbes de la

Fig. 3.



distribution des vitesses le long du rayon du tube pour quelques valeurs particulières de y. La table I contient les données numériques correspondantes.

Il ne présente aucune difficulté de réaliser le mouvement théorique étudié. Il suffit pour cela d'imposer les conditions analogues à celles des expériences de Poiseuille. A ce point de vue la solution, que nous venons de trouver, nous instruit sur la manière dont le régime de Poiseuille s'établit à partir du repos.

On voit, en effet, que pour y infini le mouvement se rapproche indéfiniment de celui de Poiseuille.

On a, notamment,

$$|w(x, y)| \leqq e^{-\alpha_1^2 y} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha_n^3 |J'(\alpha_n)|},$$

d'où, pour

$$y \to \infty,$$

$u(x, y)$ tend vers $u_0(x)$ et cela uniformément par rapport à x. On démontre de la même manière que $\frac{\partial u}{\partial x}$ tend uniformément vers $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ pour $y \to \infty$. Pour obtenir le résultat analogue concernant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, il faut faire recours à la transformation d'Abel (déjà appliquée page 19) de la série (35), et s'appuyer ensuite sur les lemmes I et II.

Remarquons, enfin, que la solution $u(x, y)$ satisfait à la condition $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, pour $x = 0$, reconnue nécessaire au point de vue de l'interprétation physique (*voir* l'Introduction page 70 de cet article).

On le démontre en remplaçant $\mathfrak{J}'(a_n x)$, dans (34), par sa valeur tirée de l'équation (23) et en tenant compte de (25_1) et (25_2).

TABLE I.

$x \backslash y$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,75	1,00	∞
0,0	0,200	0,385	0,536	0,652	0,805	0,890	0,939	0,985	0,997	1,000
0,1	0,200	0,384	0,533	0,647	0,797	0,882	0,929	0,976	0,987	0,990
0,2	0,199	0,379	0,522	0,631	0,776	0,857	0,902	0,946	0,957	0,960
0,3	0,198	0,370	0,504	0,606	0,739	0,814	0,856	0,897	0,907	0,910
0,4	0,194	0,355	0,476	0,568	0,687	0,754	0,792	0,829	0,837	0,840
0,5	0,189	0,333	0,438	0,517	0,619	0,677	0,709	0,740	0,748	0,750
0,6	0,178	0,300	0,386	0,451	0,536	0,580	0,607	0,632	0,638	0,640
0,7	0,160	0,254	0,320	0,368	0,430	0,465	0,485	0,504	0,509	0,510
0,8	0,127	0,191	0,235	0,267	0,308	0,331	0,344	0,356	0,359	0,360
0,9	0,076	0,108	0,129	0,145	0,165	0,176	0,182	0,188	0,190	0,190
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

4. Dans le problème général que nous avons énoncé à la fin de l'Introduction il s'agit de trouver la solution de l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = F(y)$$

régulière dans la région $R(0 \leqq x \leqq 1, y \geqq 0)$ et s'annulant pour $y = 0$ ainsi que pour $x = 1$.

Nous nous occuperons dans ce paragraphe des deux cas particuliers de ce problème, correspondant aux deux hypothèses

$$F(y) = \cos ky - 1 \qquad \text{et} \qquad F(y) = -\sin ky.$$

Ainsi nous aurons à résoudre les deux équations suivantes :

$$(\mathrm{IV}_1) \qquad L(A) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = \cos ky - 1$$

et

$$(\mathrm{IV}_2) \qquad L(B) = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} = -\sin ky$$

sous les conditions aux limites déjà énoncées.

Pour abréger les calculs nous traiterons les deux équations ensemble en introduisant des imaginaires.

Ainsi, en posant :

$$M = A + iB,$$

nous aurons au lieu des deux équations (IV_1) et (IV_2) une seule équation :

$$(\mathrm{IV}) \qquad L(M) = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = e^{-iky} - 1,$$

avec les mêmes conditions aux limites.

En suivant la méthode indiquée dans l'Introduction nous chercherons d'abord une solution quelconque M_0 s'annulant pour $x = 1$ en ajoutant ensuite à M_0 une série de la forme (19), convenablement choisie.

On peut poser évidemment :

$$M_0(x, y) = \frac{1}{4}(1 - x^2) + N(x)\, e^{-iky}.$$

où $N(x)$ satisfait à l'équation

$$N''(x) + \frac{1}{x} N'(x) + ik\, N(x) = 1.$$

en s'annulant, pour $x = 1$.

On voit immédiatement que la fonction

$$N(x) = G(x) + i H(x) = \frac{1}{ik}\left[1 - \frac{\mathfrak{I}(x\sqrt{ik})}{\mathfrak{I}(\sqrt{ik})}\right] \tag{37}$$

est bien la solution cherchée de la dernière équation.

Déterminons maintenant la série

$$Z(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} z_n \mathfrak{I}(a_n x) e^{-a_n^2 y}, \tag{38}$$

se réduisant pour $y = 0$ à $-M_0(x, 0)$.

Cette condition s'écrit :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} z_n \mathfrak{I}(a_n x) = -\frac{1}{4}(1 - x^2) - N(x),$$

d'où [*voir* les formules (22), (31) et (32)]

$$z_n = -\frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^1 x\, \mathfrak{I}(a_n x)\left[\frac{1}{4}(1 - x^2) - N(x)\right] dx$$
$$= \frac{2}{a_n^3 \mathfrak{I}'(a_n)} - \frac{1}{\varepsilon_n}\int_0^1 x\, N(x)\, \mathfrak{I}(a_n x)\, dx.$$

Posons

$$p_n = \int_0^1 x\, N(x)\, \mathfrak{I}(a_n x)\, dx;$$

$$q_n = \int_0^1 x\, \mathfrak{I}(a_n x)\, dx$$

et

$$r_n = \int_0^1 x\, N'(x)\, \mathfrak{I}'(a_n x)\, dx.$$

En écrivant les équations qui déterminent les fonctions $\mathfrak{I}(a_n x)$

et $N(x)$ sous la forme

$$[x\,\mathfrak{J}'(a_n x)]' = -a_n x\,\mathfrak{J}(a_n x),$$
$$[x\,N'(x)]' - x = -x i k\,N(x),$$

on obtient immédiatement

$$ikp_n = q_n + a_n r_n,$$
$$a_n p_n = r_n$$

et

$$a_n q_n = -\mathfrak{J}'(a_n),$$

d'où

$$p_n = \frac{\mathfrak{J}'(a_n)}{a_n(a_n^2 - ik)};$$

donc

$$z_n = \frac{1}{a_n^2\,\mathfrak{J}'(a_n)}\,\frac{2k}{k + a_n^2 i} = \frac{2k}{a_n^2\,\mathfrak{J}'(a_n)}\,\frac{k - a_n^2 i}{k^2 + a_n^4}. \tag{39}$$

Il en résulte que la série $Z(x, y)$ ainsi que ses dérivées $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial Z}{\partial y}$, sont uniformément et absolument convergentes dans la région R. Il en est donc de même de la fonction

$$\begin{aligned} M(x, y) &= M_0(x, y) + Z(x, y) \\ &= \frac{1}{4}(1 - x^2) + N(x)\,e^{-iky} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z_n\,\mathfrak{J}(a_n x)\,e^{-a_n^2 y} \end{aligned} \tag{40}$$

qui représente, par conséquent, la solution du problème proposé.

On peut faire disparaître de la formule (40) la fonction $N(x)$, en exprimant de cette façon la solution du problème, au moyen de la fonction $Z(x, y)$ seule.

En effet, $M(x, y)$ s'annulant pour $y = 0$, la fonction $N(x)$ est représentée dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ par

$$N(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1) - Z(x, 0).$$

Il faut ajouter que cette égalité peut être différentiée une ou deux fois par rapport à x, les deux premières dérivées formelles de $Z(x, 0)$ étant uniformément convergentes.

Posons encore, pour abréger,

$$u_0(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1). \tag{41}$$

La formule (40) s'écrit maintenant

$$M(x, y) = u_0(x)(e^{-iky} - 1) - Z(x, 0)e^{-iky} + Z(x, y).$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, posons :

$$z_n = \alpha_n + i\beta_n,$$

où

$$\alpha_n = \frac{2k^2}{a_n^3 \vartheta'(a_n)(k^2 + a_n^4)}, \tag{42}$$

$$\beta_n = -\frac{2k}{a_n \vartheta'(a_n)(k^2 + a_n^4)} \tag{43}$$

et

$$Z(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y),$$

où

$$\alpha(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \alpha_n \vartheta(a_n x) e^{-a_n^2 y}, \tag{44}$$

$$\beta(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \beta_n \vartheta(a_n x) e^{-a_n^2 y}. \tag{45}$$

Les solutions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ des équations (IV_1) et (IV_2) prennent maintenant la forme

$$A(x, y) = u_0(x)(\cos ky - 1) + A_0(x, y), \tag{46}$$

$$B(x, y) = -u_0(x)\sin ky + B_0(x, y), \tag{47}$$

où

$$A_0(x, y) = \alpha(x, y) - \alpha(x, 0)\cos ky - \beta(x, 0)\sin ky, \tag{48}$$

$$B_0(x, y) = \beta(x, y) - \beta(x, 0)\cos ky + \alpha(x, 0)\sin ky. \tag{49}$$

Les fonctions u_0, A_0 et B_0 satisfont, respectivement, aux équations

$$L(u_0) = 1, \tag{50}$$

$$L(A_0) = -ku_0 \sin ky, \tag{51}$$

$$L(B_0) = -ku_0 \cos ky. \tag{52}$$

3. Deux cas particuliers, que nous venons de développer, nous serviront à construire la solution du problème général.

Nous allons entreprendre dans ce but l'étude plus détaillée des fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ et surtout la manière dont ces fonctions dépendent du paramètre k.

[Nous écrirons dès lors $A(x, y, k)$, $B(x, y, k)$, $\alpha(x, y, k)$, $\beta(x, y, k)$, etc. pour mettre en évidence ce paramètre.] Nous nous occuperons d'abord des fonctions $\alpha(x, y, k)$ et $\beta(x, y, k)$. Il résulte de la formule (28) qu'il existe un nombre N, tel que

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}\,|\delta'(a_n)|} \leqq \frac{N}{2};$$

donc, à l'aide des formules (25_1), (25_2), (42) et (43), on obtient [le point (x, y) appartenant à la région R]

$$|\alpha(x, y, k)| \leqq N k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2 \sqrt{a_n}(k^2 + a_n^4)},$$

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right| \leqq N k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n \sqrt{a_n}(k^2 + a_n^4)},$$

$$\left|\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\right| \leqq N k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}(k^2 + a_n^4)},$$

$$|\beta(x, y, k)| \leqq N k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}(k^2 + a_n^4)},$$

$$\left|\frac{\partial \beta}{\partial x}\right| \leqq N k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{k^2 + a_n^4},$$

$$\left|\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}\right| \leqq N k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sqrt{a_n}}{k^2 + a_n^4}.$$

L'évaluation plus sommaire nous suffit, notamment :

$$N k^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{k^2 + a_n^4}$$

pour $\alpha(x, y, k)$ avec ses dérivées, et

$$N k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{k^2 + a_n^4}$$

pour $\beta(x, y, k)$ avec ses dérivées.

La première série est d'ordre $O(k^2)$ et la deuxième d'ordre $O(k)$ pour $k \to 0$.

Il en est de même des *fonctions* $\alpha(x, y, k)$ *et* $\beta(x, y, k)$, *qui, avec leurs deux premières dérivées par rapport à* x, *sont respectivement d'ordre* $O(k^2)$ *et* $O(k)$ *pour* $k \to 0$.

Nous allons démontrer maintenant un lemme qui nous sera utile dans l'étude de ces fonctions pour k infini.

Lemme III. — Soient $\{u_n\}$ et $\{a_n\}$ deux suites des nombres positifs, la deuxième étant croissante. Soit $f(z)$ la fonction, toujours positive, définie pour $z \geqq a_1$ et telle que $f(a_n) = u_n$. Nous supposerons cette fonction bornée et intégrable dans chacun des intervalles (a_n, a_{n+1}). Soient m_n et M_n les bornes de la fonction $f(z)$ dans l'intervalle (a_n, a_{n+1}).

Si les nombres

$$l_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{u_n} m_n \qquad \left(\text{resp.} \quad L_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{u_n} M_n\right)$$

ont une borne inférieure $l \neq 0$ (resp. une borne supérieure L), on a, pour tout n naturel,

$$\sum_{m=1}^{m=n} u_m \leqq \frac{1}{l} \int_{a_1}^{a_{n+1}} f(z)\, dz$$

$$\left[\text{resp.} \quad \int_{a_1}^{a_{n+1}} f(z)\, dz \leqq L \sum_{m=1}^{m=n} u_m\right].$$

Posons, en effet,

$$\varphi(x) = \int_{a_1}^{x} f(z)\, dz.$$

(D'après les hypothèses faites cette intégrale existe.) On a

$$\varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n) = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(z)\, dz,$$

d'où

$$(a_{n+1} - a_n) m_n \leqq \varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n) \leqq (a_{n+1} - a_n) M_n$$

ou encore

$$u_n l_n \leqq \varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n) \leqq u_n L_n$$

Conformément à l'hypothèse $l_n \geq l \neq 0$ (resp. $L_n \leq L$), d'où

$$u_n l \leq \varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n)$$

$$\left[\text{resp.} \quad \varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n) \leq L u_n\right].$$

Posons successivement $n = 1, 2, 3, \ldots, n_1$, et ajoutons, membre à membre, les inégalités obtenues. Puisque $\varphi(a_1) = 0$, on a

$$\varphi(a_{n_1+1}) \geq l \sum_{n=1}^{n=n_1} u_n$$

$$\left[\text{resp.} \quad \varphi(a_{n_1+1}) \leq L \sum_{n=1}^{n=n_1} u_n\right].$$

ce qui démontre le lemme.

Remarque. — Il est évident que si les deux nombres l et L existent, les deux inégalités ont lieu, c'est-à-dire

$$\frac{1}{L}\int_{a_1}^{a_{n+1}} f(z)\,dz \leq \sum_{m=1}^{m=n} u_m \leq \frac{1}{l}\int_{a_1}^{a_{n+1}} f(z)\,dz.$$

Il en résulte, en particulier, que la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, implique l'existence de l'intégrale $\int_{a_1}^{\infty} f(z)\,dz$ et inversement.

Appliquons le lemme démontré aux séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a_n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{k^2 - a_n^2}.$$

Puisque dans ces cas les nombres L_n et l_n du lemme ont des limites égales pour $n \to \infty$ et indépendantes de k, les bornes l et L existent et sont indépendantes de k. On obtient, donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a_n^2} = \lambda_1(k) \int_{a_1}^{\infty} \frac{dz}{k^2 - z^2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{k^2 - a_n^2} = \lambda_2(k) \int_{a_1}^{\infty} \frac{z^2\,dz}{k^2 - z^2}.$$

où les fonctions $\lambda_1(k)$ et $\lambda_2(k)$ admettent des bornes supérieures et inférieures, ces dernières étant positives.

On n'a pas besoin de calculer les intégrales en question pour évaluer leur ordre pour $k \to \infty$. Il suffit de remarquer qu'elles sont toutes les deux de la forme

$$I_s = \int_{a_1}^{\infty} \frac{z^s\,dz}{z^4 + k^2} \qquad (s \geq 0).$$

Or, en effectuant la substitution $z = t\sqrt{k}$, on ramène cette intégrale à la forme

$$I_s = k^{\frac{s-3}{2}} \int_{\frac{a_1}{\sqrt{k}}}^{\infty} \frac{t^s\,dt}{1+t^4} < k^{\frac{s-3}{2}} \int_0^{\infty} \frac{t^s\,dt}{1+t^4},$$

où la dernière intégrale est convergente, puisque $0 \leq s \leq 2$. Donc

$$I_s = O\left(k^{\frac{s-3}{2}}\right)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a_n^4} = O\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{k^2 + a_n^4} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Tout ce qui a été démontré ci-dessus peut se résumer de la manière suivante.

Les fonctions $\alpha(x, y, k)$ *et* $\beta(x, y, k)$ *avec leurs dérivées* $\frac{\partial}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *admettent pour* $k \geq 0$ *une fonction majorante de la forme* $M\sqrt{k}$ *où* M *ne dépend ni de* x *ni de* y *(dans la région* R*).*

La même conclusion s'applique aux fonctions $A_0(x, y, k)$ *et* $B_0(x, y, k)$ *et leurs dérivées* $\frac{\partial}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *en vertu des formules* (48) *et* (49).

Remarquons, encore, que non seulement $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{\partial \beta}{\partial x}$ mais aussi $\frac{1}{x}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ et $\frac{1}{x}\frac{\partial \beta}{\partial x}$ admettent la fonction de la forme $M\sqrt{k}$, comme majorante, dans toute la région R (même pour les valeurs de $x \to 0$).

Pour le démontrer il suffit de remplacer $\mathcal{J}'(a_n x)$, dans l'expression de $\frac{1}{x}\frac{\partial\alpha}{\partial x}$ ou dans celle de $\frac{1}{x}\frac{\partial\beta}{\partial x}$, par sa valeur

$$-a_n x[\mathfrak{J}''(a_n x)+\mathfrak{J}(a_n x)]$$

tirée de l'équation (23). En se basant ensuite sur (25_1) et (25_2) et en raisonnant comme précédemment on parvient bien au résultat demandé.

Il en résulte, grâce aux expressions (48) et (49), que les fonctions $\frac{1}{x}\frac{\partial A_0}{\partial x}$ et $\frac{1}{x}\frac{\partial B_0}{\partial x}$, par conséquent aussi, les fonctions

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial A_0}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 B_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial B_0}{\partial x}$$

possèdent la même fonction majorante $M\sqrt{k}$.

Ceci nous montre, en outre, que les fonctions $A(x, y, k)$ et $B(x, y, k)$ satisfont à la condition (γ), c'est-à-dire

$$\frac{\partial A}{\partial x}=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial B}{\partial x}=0 \qquad \text{pour } x=0.$$

6. Reprenons l'équation générale

$$(1) \qquad L(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=F(y),$$

où la fonction $F(y)$ est supposée donnée.

Nous n'examinerons que les deux cas suivants : le cas de la fonction $F(y)$ périodique et celui de la fonction $F(y)$ ayant une limite déterminée pour y infini. Ce sont, en effet, les cas les plus importants au point de vue de l'interprétation physique.

Nous supposerons, naturellement, la fonction $F(y)$ continue et s'annulant pour $y=0$, pour les raisons exposées à l'Introduction. Quant aux autres conditions, nous les introduirons plus loin puisqu'elles sont différentes pour chacun des deux cas envisagés.

Occupons-nous d'abord du premier de ces cas. Soit ω la période de la fonction $F(y)$. Supposons que la fonction $F(y)$ admette une dérivée première $F'(y)$ et que les deux fonctions $F(y)$ et $F'(y)$ sont à variation bornée dans l'intervalle $(0, \omega)$ [1].

[1] Il est à remarquer qu'en vertu de ces hypothèses la fonction $F(y)$ ne peut admettre que des points de discontinuité de première espèce.

Il résulte de ces deux hypothèses que la fonction $F(y)$ peut être développée en une série de Fourier, uniformément convergente [1]

$$F(y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \cos \frac{2\pi n}{\omega} y + s_n \sin \frac{2\pi n}{\omega} y \right]$$

que l'on peut écrire aussi, grâce à la condition $F(0) = 0$,

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \left(\cos \frac{2\pi n}{\omega} y - 1 \right) + s_n \sin \frac{2\pi n}{\omega} y \right]. \tag{53}$$

Les coefficients de cette série sont d'ordre $\frac{1}{n^2}$, c'est-à-dire

$$c_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{54_1}$$

et

$$s_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{54_2}$$

On le démontre en appliquant à la fonction $F'(y)$ le théorème connu de M. Lebesgue [2].

L'équation (I) peut s'écrire maintenant

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \left(\cos \frac{2\pi n}{\omega} y - 1 \right) + s_n \sin \frac{2\pi n}{\omega} y \right]. \tag{I_1}$$

On satisfait formellement à cette équation ainsi qu'aux conditions aux limites, en posant :

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[c_n A\left(x, y, \frac{2\pi n}{\omega}\right) - s_n B\left(x, y, \frac{2\pi n}{\omega}\right) \right]. \tag{55}$$

Ceci résulte des équations (IV_1) et (IV_2).

Il nous reste à examiner la convergence de la solution obtenue et de ses dérivées formelles.

---

[1] *Voir* par exemple C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, vol. II, p. 100 (Paris, 1928) ou E. WHITTAKER and S. WATSON, *Modern Analysis* (Cambridge, § 9, 44).

[2] *Cf.* par exemple *Modern Analysis*, *loc. cit.*, § 9, 41 (II).

Pour cela mettons notre série sous la forme

$$(55_a)\quad u = u_0(x)\,F(y) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\,A_0\left(x, y, \frac{2\pi n}{\omega}\right) - s_n\,B_0\left(x, y, \frac{2\pi n}{\omega}\right)\right]$$

en se reportant aux formules (46), (47) et (53).

La convergence uniforme et absolue de la série (55_a) et de ses dérivées formelles, par rapport à x, est une simple conséquence des formules (54_1) et (54_2) et de l'évaluation des fonctions A_0 et B_0 (et de leurs dérivées correspondantes) effectuée au paragraphe précédent.

Il n'y a qu'à se reporter aux résultats acquis à la fin du même paragraphe, pour s'assurer de la convergence uniforme de la série

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

[Il faut prendre u sous la forme (55_a).]

Il en résulte immédiatement la convergence uniforme de la dérivée formelle $\frac{\partial u}{\partial y}$.

En effet, u satisfaisant formellement à l'équation (I_1), la dérivée formelle $\frac{\partial u}{\partial y}$ est la somme de deux séries uniformément convergentes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{et} \quad -F(y).$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial y}$ est représentée par son développement formel.

Nous avons démontré ainsi, que la fonction u est régulière dans la région R, y satisfait partout à l'équation (I_1) et répond aux conditions aux limites [y compris la condition (γ)], ces conditions étant remplies séparément par chaque terme de la série (55).

La fonction u est donc bien la solution cherchée.

Le mouvement représenté par la fonction u n'est pas périodique, bien que la pression $F(y)$ varie périodiquement.

Mais on peut démontrer que ce mouvement devient périodique à la limite, pour un temps y infini. On entend par là que la partie de la vitesse u qui n'est pas périodique tend vers zéro quand y augmente indéfiniment. Cette partie est représentée, en effet, par la série

$$v=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\alpha\left(x,y,\frac{2\pi n}{\omega}\right)-s_n\,\beta\left(x,y,\frac{2\pi n}{\omega}\right).$$

Il est facile à démontrer l'inégalité

$$|v|\leqq M\,e^{-\alpha_1 y}\sum_{n=1}^{\infty}\{|c_n|+|s_n|\}\sqrt{n},$$

et les inégalités analogues pour $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ en raisonnant comme au paragraphe précédent.

Ceci prouve à l'aide de (54_1) et (54_2) que v ainsi que ses dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ tendent uniformément vers zéro pour $y\to\infty$.

C. Q. F. D.

7. Passons au second cas général de notre problème. Nous faisons maintenant les hypothèses suivantes sur la fonction $F(y)$ définie, pour tout $y\geqq 0$:

1° $F(0)=0$;

2° $F(y)$ *admet une limite déterminée* l, *pour* $y\to\infty$;

3° *l'intégrale* $\int_0^{\infty}|F(y)-l|\,dy$ *existe;*

4° $F(y)$ *est continue et à variation bornée dans l'intervalle infini* $(0,\infty)$;

5° $F(y)$ *admet la dérivée première* $F'(y)$ *qui est à variation bornée dans l'intervalle* $(0,\infty)$.

Posons

$$F_1(y)=F(y)\quad -l\qquad \text{pour } y\geqq 0,$$
$$F_1(y)=F(-y)-l\qquad \text{pour } y\leqq 0,$$

grâce aux conditions 2°, 3° et 4°, la fonction $F_1(y)$ peut être représentée par l'intégrale de Fourier (¹) :

$$F_1(y)=\int_0^{\infty}c(k)\cos ky\,dk,$$

(¹) *Voir* par exemple *Modern analysis, loc. cit.*, § 9, 7.

où

$$c(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\eta)\cos k\eta\, d\eta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} [F(\eta) - l]\cos k\eta\, d\eta. \tag{56}$$

Donc, pour $y \geqq 0$,

$$F(y) = l + \int_0^{\infty} c(k)\cos ky\, dk,$$

et, en vertu de l'hypothèse 1°,

$$F(y) = \int_0^{\infty} c(k)(\cos ky - 1)\, dk. \tag{57}$$

L'équation du problème s'écrit maintenant

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^{\infty} c(k)(\cos ky - 1)\, dk. \tag{I_2}$$

On voit aisément qu'on satisfait formellement à cette équation, ainsi qu'aux conditions aux limites, en posant

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} c(k)\,\Lambda(x, y, k)\, dk. \tag{58}$$

Pour démontrer que cette intégrale est bien la solution cherchée, nous ferons à peu près le même raisonnement qu'au paragraphe précédent. En effet, pour qu'une intégrale de la forme (58) soit continue, il suffit qu'elle soit uniformément convergente, la fonction à intégrer étant continue.

De même si l'intégrale obtenue par la différentiation formelle est uniformément convergente et la fonction à intégrer reste continue, la dérivée de l'intégrale coïncide avec son expression formelle (elle est, en outre, continue, d'après ce qui précède).

Il nous suffit donc de démontrer la convergence uniforme de l'intégrale (58) et de ses dérivées formelles $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$.

Comme au paragraphe précédent la démonstration sera faite si nous trouvons pour $c(k)$ une fonction majorante convenable. Dans ce but, nous prouverons les propositions suivantes :

(*a*). *La fonction* $c(k)$ *est continue pour* $k \geqq 0$.

Corollaire. — $c(k) = O(1)$ *pour* $k \to 0$.

(*b*). $c(k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ *pour* $k \to \infty$.

En se reportant à l'expression (56) on démontre la proposition (*a*) en remarquant que la fonction

$$[F(y) - l] \cos ky$$

admet une majorante intégrable (hypothèse 3°) et *indépendante* de k, ce qui entraîne la convergence uniforme (¹) de (56) et, par conséquent, la continuité de $c(k)$.

Quant à la proposition (*b*), la démonstration est fondée sur le théorème de M. Lebesgue déjà mentionné (²). En effet, d'après l'hypothèse 5°, on peut mettre la fonction $F'(y)$ sous la forme

$$F'(y) = f_1(y) - f_2(y),$$

où $f_1(y)$ et $f_2(y)$ sont deux fonctions non décroissantes. On peut même supposer ces deux fonctions bornées et positives.

Si $f_1(y) \leqq M$ et $f_2(y) \leqq M$, on a, d'après le théorème de M. Lebesgue,

$$\left| \int_0^Y F'(y) \sin ky \, dy \right| \leqq \frac{2}{k} [f_1(Y) + f_2(Y)] \leqq \frac{4M}{k},$$

quel que soit Y, donc aussi

$$\left| \int_0^\infty F'(y) \sin ky \, dy \right| \leqq \frac{4M}{k};$$

or, en intégrant par parties l'intégrale (56), on obtient

$$c(k) = -\frac{1}{k} \int_0^\infty F'(y) \sin ky \, dy,$$

ce qui démontre notre proposition.

Les deux propositions (*a*) et (*b*) étant démontrées, la vérification de la convergence et de la régularité de la solution (58) se fait comme au paragraphe précédent.

Ainsi, le problème proposé se trouve résolu.

Signalons encore, avant de terminer cette note, une propriété importante de la solution trouvée.

(¹) *Voir* par exemple *Modern analysis*, § 4, 431.

(²) *Loc. cit.*, § 9, 41 (II).

Il s'agit de la propriété dont nous avons déjà parlé à l'occasion de l'écoulement particulier du paragraphe 3. Nous avons démontré alors que cet écoulement devient à la limite (pour un temps infini) l'écoulement de Poiseuille. Or, l'écoulement général (58) jouit de la même propriété. Nous allons démontrer, notamment, que *l'expression* (58) *tend uniformément* (*par rapport à x*) *vers*

$$l u_0(x) = \frac{l}{4}(x^2 - 1)$$

quand $y \to \infty$. Il en est de même des dérivées correspondantes $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *et* $\frac{\partial}{\partial y}$ *des deux expressions.*

Pour la démonstration, transformons (58) à l'aide de (46) et (57) :

$$u(x, y) = u_0(x)\,\mathrm{F}(y) + \int_0^\infty c(k)\,\mathrm{A}_0(x, y, k)\,dk. \tag{59}$$

Le premier terme de cette somme devient, à la limite, $lu_0(x)$, nous prouverons que le deuxième terme tend uniformément vers zéro. Désignons cette intégrale par ε, nous aurons, en vertu de (48),

$$\begin{aligned}\varepsilon = \int_0^\infty c(k)\,\alpha(x, y, k)\,dk - \int_0^\infty c(k)\,\alpha(x, 0, k)\cos ky\,dk \\ - \int_0^\infty c(k)\,\beta(x, 0, k)\sin ky\,dk.\end{aligned}$$

Occupons-nous successivement de ces trois intégrales. D'après les formules (44) et (42) et la proposition (*b*), la série $c(k)\alpha(x, y, k)$ est uniformément convergente (par rapport à k). En l'intégrant terme à terme, on met la première intégrale sous la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{J}(a_n x)\,e^{-a_n^2 y} \int_0^\infty c(k)\,\alpha_n(k)\,dk.$$

La proposition (*b*) et la formule (42) nous donnent

$$\left[\,|c(k)| \leqq \frac{4\mathrm{M}}{k^2}\right],$$

$$\left|\int_0^\infty c(k)\,\alpha_n(k)\,dk\right| \leqq \frac{8\mathrm{M}}{a_n^3\,|\mathfrak{J}'(a_n)|}\int_0^\infty \frac{dk}{k^2 + a_n^4} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{a_n^4\sqrt{a_n}}\right),$$

d'onc la première partie de ε admet la majorante de la forme

$$M_1 e^{-a_1^2 y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2 \sqrt{a_n}}.$$

Cette première partie tend donc uniformément vers zéro pour $y \to \infty$.

La seconde et la troisième intégrale dans l'expression de ε ayant toutes deux la même forme, il suffit d'en étudier une seule.

Soit donc

$$\varepsilon_1 = \int_0^{\infty} c(k)\,\alpha(x, 0, k) \cos ky\, dk.$$

Décomposons cette intégrale en deux parties :

$$\varepsilon_1 = \int_0^{T} + \int_T^{\infty} c(k)\,\alpha(x, 0, k) \cos ky\, dk,$$

T étant un nombre positif arbitraire.

D'après un théorème de M. Lebesgue ([1]), la première partie tend vers zéro quand $y \to \infty$ à la condition que l'intégrale

$$\int_0^{T} |c(k)|\,|\alpha(x, 0, k)|\, dk$$

existe. Mais cela résulte des propositions (a) et (b) et du fait que la fonction $\alpha(x, 0, k)$ admet la majorante de la forme $A\sqrt{k}$.

Il n'y a qu'à reprendre la démonstration du théorème citée de M. Lebesgue, avec les hypothèses actuelles, pour s'assurer que ladite intégrale tend vers zéro *uniformément*.

Quant à la seconde partie de l'intégrale ε_1, sa valeur absolue est inférieure à

$$4AM \int_T^{\infty} \frac{1}{k^2}\sqrt{k}\, dk = \frac{8AM}{\sqrt{T}},$$

En fixant maintenant T suffisamment grand, on rend cette seconde partie de l'intégrale ε_1 aussi petite que l'on veut. Il en sera de même de la première partie de cette intégrale si, T laissant fixe, on donne

---

([1]) *Voir* par exemple C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 97 (Paris, 1928).

à y la valeur suffisamment grande. La limite de l'intégrale z_1 pour $y \to x$ est donc bien zéro.

De plus, le choix de T et de y étant indépendant de x, z_1 tend vers zéro, *uniformément* (1).

En résumant, nous avons démontré que notre solution u tend uniformément vers lu_0 pour $y \to x$. Le même raisonnement nous prouve que les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ ont respectivement pour limites $lu'_0(x)$, $lu''_0(x)$ et o, et cela uniformément par rapport à x.

(1) Je dois à M. Zygmund la simplification de ce raisonnement. Cette simplification m'a permis en même temps de rejeter quelques hypothèses non essentielles concernant la fonction $F(y)$.