

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. VOLTERRA

Sur les jets liquides

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 11 (1932), p. 1-35.

[<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__1_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les jets liquides (');

PAR V. VOLTERRA.

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES. LES MÉTHODES DU PROBLÈME PLAN.

1. L'étude des jets liquides constitue un problème déjà ancien dans l'hydrodynamique classique.

Nous dirons en général qu'il y a *jet liquide* lorsque, un liquide étant en mouvement stationnaire, une partie de la frontière qui le limite le sépare, soit d'une partie vide de l'espace, soit d'un fluide (gaz ou liquide) au repos. Cette partie de la frontière constitue la *frontière libre* du liquide, tandis que celle qui est limitée par des parois rigides

(') J'ai obtenu la plupart des résultats exposés dans ce travail dans l'automne 1922. En 1923 je les ai communiqués au Congrès de Liverpool de la British Association et je les ai résumés dans une courte Note parue dans les *Comptes rendus*. Le présent Mémoire a formé le sujet d'un Cours que j'ai tenu à l'Université de Rome en 1926 et de Conférences que j'ai faites à Cluj en 1929 et à

sera la *frontière rigide*. Nous pourrons aussi avoir à considérer les surfaces par lesquelles le liquide *entre* dans la région où l'on étudie plus spécialement son mouvement, ou par lesquelles il sort de la même région.

Le *voile* liquide adhérent aux frontières libres ou rigides sera — le mouvement étant stationnaire — constitué de lignes de courant.

2. Nous supposons que le liquide est parfait et incompressible et que, de plus, son mouvement est irrotationnel. Il existera alors un potentiel des vitesses V vérifiant l'équation de Laplace

$$(1) \quad \Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Soient Π le potentiel des forces de masse, p la pression, μ la densité du liquide. Posant

$$P = \Pi - \frac{p}{\mu},$$

on aura

$$(2) \quad \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 2P + h,$$

où h est une constante.

Examinons maintenant les conditions aux limites. Sur une frontière, libre ou rigide, nous aurons

$$(3) \quad \frac{dV}{dn} = 0,$$

la dérivée étant prise suivant la normale n à cette frontière. Par contre, si nous prenons normales aux lignes de courant les surfaces par lesquelles entre ou sort le liquide, nous aurons sur elles

$$V = \text{const.}$$

Soit enfin une frontière libre suivant laquelle le liquide est au con -

l'Institut Henri Poincaré en 1930. C'est ainsi qu'il a été plusieurs fois remanié tout en restant inédit. M. J. Pérès l'a maintenant rédigé d'après les papiers que je lui ai donnés. Je tiens à lui exprimer ma plus sincère reconnaissance. Je remercie aussi M. Pérès d'avoir ajouté au Chapitre III le paragraphe 4 pour éclaircir un point délicat.

tact avec un fluide au repos soumis aux mêmes forces de masse. On aura sur cette frontière

$$(2') \quad 0 = 2 \left(\Pi - \frac{p}{\mu'} \right) + h',$$

avec la même valeur p de la pression (puisque les pressions des deux côtés de la surface doivent être égales), h' étant une nouvelle constante et μ' la densité du fluide en repos. On en déduit, sur la frontière en question

$$(4) \quad 2P + h = 2\Pi \left(1 - \frac{\mu'}{\mu} \right) + k,$$

k désignant encore une constante. Si la frontière libre sépare le liquide d'un espace vide, la formule précédente s'appliquera encore avec $\mu' = 0$.

Si le fluide au repos est le même que le liquide en mouvement (la frontière libre étant alors surface de discontinuité) on a $\mu = \mu'$ et dans ce cas $2P + h$ se réduit à une constante. De même lorsque l'on pourra négliger les forces de masse. Dans l'un et l'autre cas, d'après (2), le fluide en mouvement a une vitesse constante sur la frontière libre.

En résumé le gradient du potentiel des vitesses (vitesse du fluide) qui est un vecteur tangent tant aux frontières libres qu'aux frontières rigides aura une longueur variable sur les dernières, mais (lorsque $\mu = \mu'$, ou bien Π négligeable) constante sur les premières.

3. C'est dans les deux cas précédents, et en admettant de plus le mouvement parallèle à un plan fixe, que l'on a étudié jusqu'à présent le problème des jets liquides car on a pu ainsi y appliquer la théorie des fonctions analytiques et de la représentation conforme.

Si, en effet, le plan fixe est le plan des xy , $\frac{\partial V}{\partial z}$ sera nul et V dépendra seulement de x et de y . A cause de (1) ce sera la partie réelle $f_1(x, y)$ d'une façon analytique

$$f(x + iy) = f_1 + if_2.$$

Posant

$$\frac{df(x + iy)}{d(x + iy)} = f'(x + iy) = \frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y},$$

il viendra

$$\nabla V = (\text{mod } f')^2.$$

Soit enfin

$$\frac{d(x + iy)}{df(x + iy)} = \frac{1}{f'} = \varphi_1 + i\varphi_2$$

et considérons $f_1, f_2; \varphi_1, \varphi_2$ comme coordonnées des points de deux plans (f et φ) qui sont évidemment en représentation conforme avec le plan xy et entre eux. Dans le plan f frontière libre et frontière rigide correspondent à des droites $f_2 = \text{const.}$ Sur la frontière libre on a

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = \frac{1}{V^2} = \text{const.},$$

de sorte que cette frontière a pour image dans le plan φ un arc de cercle de centre à l'origine.

Prenons alors dans le plan φ une aire limitée par deux arcs de cercle, l'un ayant son centre à l'origine, et dans le plan f une bande comprise entre deux droites parallèles à l'axe f_1 . Représentons-les conformément l'une sur l'autre au moyen de la fonction

$$\varphi_1 + i\varphi_2 = F(f_1 + if_2).$$

L'équation différentielle

$$\frac{d(x + iy)}{d(f_1 + if_2)} = F(f_1 + if_2)$$

donnera, par quadrature,

$$x + iy = \int F(f_1 + if_2) d(f_1 + if_2)$$

et, par inversion de cette relation,

$$f_1 + if_2 = \Phi(x + iy),$$

dont la partie réelle sera

$$V = f_1 = f_1(x, y)$$

et définit un jet liquide, suivant les définitions précédentes.

4. La méthode indirecte qui vient d'être indiquée remonte dans ses lignes essentielles à Helmholtz. Elle a pris un grand développement et son champ d'application a été très étendu par les travaux de

Kirchhoff, Lord Rayleigh, Levi-Civita, Villat, Brillouin, Cisotti et leurs élèves. Elle reste pourtant limitée à l'étude des mouvements plans puisque, dans les autres cas, le potentiel des vitesses n'est plus partie réelle d'une fonction analytique et que l'on doit alors renoncer à utiliser les méthodes de la théorie des fonctions et de la représentation conforme. Elle s'applique d'ailleurs aux seuls cas ($\mu = \mu'$, Π négligeable) où la vitesse est constante sur la frontière libre.

Notons enfin que si l'on peut obtenir ainsi de nombreux exemples de jets liquides, on ne peut, sans rencontrer des difficultés qui ne sont pas entièrement résolues, se donner *a priori* des conditions relatives à la forme de la frontière libre et de la frontière rigide : il faut prendre l'une et l'autre telles que les donnera le calcul.

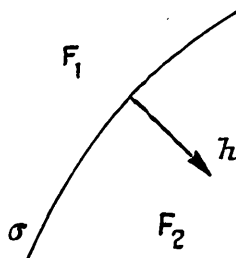
CHAPITRE II.

ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL.

1. Nous venons d'indiquer que, pour aborder le cas général, il faut abandonner les méthodes précédentes et en mettre en jeu d'autres fondées sur de nouveaux principes. J'en indiquerai une qui permet de considérer des jets liquides lorsque le mouvement n'est pas plan et en évitant les autres restrictions précédentes.

2. Soit σ la surface de séparation de deux fluides F_1 et F_2 , F_1 étant

Fig. 1.



au repos, F_2 incompressible et en mouvement stationnaire irrotationnel. Soit V le potentiel des vitesses de ce mouvement. On aura les équations précédentes (1), (2), (3) et (4).

Prenons des coordonnées curvilignes orthogonales ρ_1, ρ_2, ρ_3 telles que l'équation de σ soit

$$\rho_3 = \rho_0 = \text{const.},$$

l'élément linéaire de l'espace étant

$$ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + H_3^2 d\rho_3^2;$$

sur σ il viendra, à cause de (2) et (3),

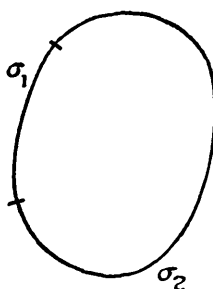
$$(5) \quad \nabla V = \frac{1}{H_1^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right)^2 + \frac{1}{H_2^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho_2} \right)^2 = 2P + h.$$

$$(6) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0,$$

et, d'après (4), P sera fonction connue de ρ_1 et ρ_2 si l'on connaît les densités et le potentiel des forces de masse ⁽¹⁾.

3. Supposons que nous sachions intégrer l'équation différentielle (5) et soit $v_0(\rho_1, \rho_2)$ une fonction qui satisfait cette équation. Le potentiel

Fig. 2.



des vitesses correspondant $V(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ sera, s'il existe, bien déterminé par les deux équations qu'il doit vérifier sur σ :

$$(7) \quad V = v_0(\rho_1, \rho_2),$$

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho_3} = 0.$$

⁽¹⁾ Dans toute la suite c'est donc l'équation (4) qui définit P sur la frontière libre σ .

C'est en effet une fonction harmonique, et une fonction harmonique est bien définie par ses valeurs et celles de sa dérivée normale, supposées *connues* sur une portion de surface ⁽¹⁾.

Sinon, en effet, on pourrait trouver une fonction harmonique V non identiquement nulle et s'annulant ainsi que sa dérivée normale sur une portion de surface, soit σ_1 . Mais complétons alors σ_1 par une autre portion de surface σ_2 , sans sortir du domaine de régularité de V et de telle sorte que l'ensemble σ_1 et σ_2 forme une surface fermée. Puis appliquons la formule de Green. L'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_1 + \sigma_2} \left(V \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma$$

est nulle, ou est égale à V , suivant que l'origine des distances r est extérieure, ou intérieure, au volume limité par $\sigma_1 + \sigma_2$. Puisque V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ sont nulles sur σ_1 , l'intégrale précédente se réduit à l'intégrale analogue prise suivant σ_2 ; elle représente alors une fonction qui reste régulière quand on traverse σ_1 et qui, étant identiquement nulle à l'extérieur de la surface considérée, est aussi identiquement nulle à l'intérieur.

4. Le numéro précédent esquisse la marche à suivre pour la détermination des jets liquides ayant σ pour contour libre. Mais divers points restent à préciser.

Le mouvement du liquide sera déterminé dans un voisinage de σ , c'est-à-dire dans une région de l'espace suffisamment proche de σ . Mais on peut se demander si existera toujours ce voisinage dans lequel a lieu le mouvement. Sous certaines conditions nous pouvons être assurés de son existence.

Supposons que la surface σ soit une surface analytique et que P soit également une fonction analytique. Dans ces conditions les théorèmes généraux sur l'existence des intégrales des équations aux déri-

⁽¹⁾ Cette proposition est bien connue, j'en donne ici la démonstration très élégante due à M. Almansi [voir ALMANSI, *Un teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi* (*Rend. R. Acc. dei Lincei*, 1^{er} semestre 1907)].

vées partielles s'appliquent et nous permettent d'affirmer l'existence d'une solution (unique d'après ce qui précède) de l'équation de Laplace

$$(1') \quad \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \left(\frac{H_2 H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \varphi_3} \right) \equiv 0,$$

fonction analytique satisfaisant sur σ les conditions précédentes (7) et (8) [sous réserve peut-être de remplacer σ par une portion de σ convenablement choisie].

Dans ces conditions *il existe donc un jet liquide ayant pour contour libre σ ou une partie de σ* . Il restera à chercher le contour rigide et à préciser les surfaces d'entrée et de sortie du liquide.

5. Pour déterminer V , connaissant v_0 , la marche la plus immédiate consiste à prendre V sous forme de série de Taylor :

$$(9) \quad V = v_0(\varphi_1, \varphi_2) + \varphi v_1(\varphi_1, \varphi_2) + \dots + \frac{\varphi^n}{n!} v_n(\varphi_1, \varphi_2) + \dots$$

avec $\varphi = \varphi_3 - \varphi_0$. v_1 sera nul et les coefficients suivants s'obtiendront les uns après les autres au moyen de (1'). D'après ce que nous venons de voir il existera une portion de σ et un voisinage correspondant où la série (9) sera convergente et vérifiera les conditions posées. Nous sommes sûrs de l'existence du mouvement fluide dans le domaine ainsi défini et partout où vaudra le prolongement analytique de (9).

6. On voit ainsi que le problème général des jets liquides se scinde en deux parties, si l'on se donne la frontière libre σ : 1° Calculer v_0 en intégrant l'équation (5); 2° calculer V connaissant v_0 .

Le second problème est le plus difficile mais, comme on le verra dans la suite, la détermination de v_0 peut suffire pour obtenir une représentation qualitative du phénomène.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT DU LIQUIDE SUR LE CONTOUR LIBRE.

1. C'est le premier problème, dont la solution repose sur la discussion de l'équation (5).

Mais cette équation se retrouve dans l'étude du mouvement d'un point matériel M de masse unité, assujéti à se déplacer sans frottement sur la surface σ et soumis à des forces dont le potentiel serait P. Les équations différentielles canoniques du mouvement définissent en effet, comme on le vérifie immédiatement, les caractéristiques de l'équation (5).

Dans ces conditions, d'après la théorie de Hamilton-Jacobi, le mouvement du point matériel M s'obtiendra sans quadratures si l'on connaît une intégrale de (5), soit (10) $V(\zeta_1, \zeta_2, h, C)$ dépendant des constantes arbitraires h et C . Les diverses trajectoires seront représentées, comme il est connu, par l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial V}{\partial C} = C',$$

où C' est une nouvelle constante arbitraire; l'équation du temps sera

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0,$$

t_0 étant arbitraire; enfin la vitesse du point sur la trajectoire sera définie par

$$(13) \quad \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial \zeta_1} = \frac{H_1 d\zeta_1}{dt} = u_1, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \zeta_2} = \frac{H_2 d\zeta_2}{dt} = u_2,$$

u_1 et u_2 désignant les projections de cette vitesse sur les tangentes aux lignes coordonnées de σ .

La connaissance de l'intégrale (10) donne donc le mouvement de M sur la surface et réciproquement (nous y reviendrons d'ailleurs) la connaissance du mouvement sur la surface permet d'obtenir toutes les

intégrales de l'équation (5). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Il y a équivalence entre les deux problèmes suivants : 1° mouvement d'un point matériel assujéti à décrire σ sans frottement et sous l'action de forces dont le potentiel est P; 2° étude, sur σ , des jets liquides ayant cette surface pour frontière libre.

2. Mais nous pouvons aller plus loin et établir d'autres propositions.

Soient $d\varphi_1, d\varphi_2$ les différentielles prises suivant une trajectoire de M. En vertu de (11) nous aurons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial C \partial \varphi_1} d\varphi_1 + \frac{\partial^2 V}{\partial C \partial \varphi_2} d\varphi_2 = 0$$

et, d'après (5),

$$\frac{1}{H_1^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1 \partial C} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2 \partial C} = 0,$$

donc

$$d\varphi_1 : d\varphi_2 :: \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} : \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial V}{\partial \varphi_2},$$

ce qui prouve que les trajectoires de M sont orthogonales aux lignes équipotentielles $V = \text{const.}$ de la surface σ . Mais, dans le jet liquide, les lignes de courant appartenant à σ sont également orthogonales à ces lignes équipotentielles, d'où le théorème :

Les lignes de courant sont les trajectoires du point M.

3. Ce même théorème résulte aussi des (13) d'après lesquelles u_1 et u_2 sont égales aux composantes de la vitesse du liquide suivant les tangentes aux lignes coordonnées. Donc en tout point, vitesse du liquide et vitesse du point M sont individualisées par le même vecteur; il y a donc bien coïncidence entre lignes de courant et trajectoires de M et nous pouvons ajouter que :

Les molécules liquides décrivent les lignes de courant coïncidant avec les trajectoires de M avec la même vitesse que ce point.

En d'autres termes nous avons le théorème suivant :

Dans un jet liquide toute molécule qui fait partie de la frontière libre

se déplace sur cette surface comme si elle était un point libre mobile sans frottement sur cette surface et soumis à des forces de potentiel P.

4. Il est intéressant, pour la suite, de préciser la réciproque que nous prendrons sous la forme suivante (1) :

Soit connu un ensemble à un paramètre de trajectoires du point M correspondant à la même valeur h de la constante des forces vives ($2T - 2P = h$); on peut les considérer (en ce qui concerne du moins les conditions à remplir sur σ) comme lignes de courant d'un jet fluide ayant σ pour frontière libre et pour lequel on connaîtra la fonction $v_0(\varphi_1, \varphi_2)$.

Bornons-nous en effet à une région de σ engendrée par des arcs *sans points communs* des trajectoires considérées et prenons ces trajectoires pour lignes coordonnées φ_2 constant. La seconde équation de Lagrange, qui doit être vérifiée pour φ_2 constant quelconque se réduit à

$$-H_1 \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_2} \varphi_1'^2 = \frac{\partial P}{\partial \varphi_2},$$

tandis que l'équation de la force vive donne

$$H_1^2 \varphi_1'^2 = 2P + h.$$

d'où résulte, identiquement en φ_1, φ_2 ,

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_2} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_2} \frac{1}{2P + h} = 0,$$

d'où enfin

$$H_1^2 (2P + h) = \varphi(\varphi_1)$$

(φ fonction arbitraire).

La fonction

$$\int \sqrt{\varphi(\varphi_1)} d\varphi_1$$

vérifie évidemment l'équation aux dérivées partielles (5); c'est la fonction $v_0(\varphi_1, \varphi_2)$ pour le jet que définit l'ensemble de trajectoires considéré.

(1) Ce paragraphe 4 a été ajouté par M. Pérés.

5. Supposons que P soit nul, c'est le cas par exemple si σ est une surface de discontinuité séparant partie immobile et partie en mouvement d'un même liquide. Dans ce cas *les molécules liquides de la frontière libre décriront, avec une vitesse constante, les géodésiques de cette surface.*

6. Nous connaissons bien des cas dans lesquels on sait résoudre le problème du mouvement d'un point sans frottement sur une surface, dans lesquels au moins ce problème se réduit aux quadratures. Dans chacun d'eux nous saurons résoudre le problème correspondant des jets liquides.

Nous saurons du moins trouver les fonctions $v_0(\varphi_1, \varphi_2)$. On verra, aux chapitres suivants, les cas les plus notables et comment v_0 , étant connue, on peut passer au calcul de V , ou bien, sans faire ce calcul, se faire une idée de la nature du jet liquide et du contour libre.

CHAPITRE IV.

JETS LIQUIDES SYMÉTRIQUES.

1. Un jet liquide sera dit symétrique si le contour libre est surface de révolution et que de plus le potentiel P est constant sur chaque parallèle de cette surface. L'axe de σ sera l'axe du mouvement.

Dans ce cas le mouvement du point M pourra être réduit à des quadratures, de sorte que l'on saura intégrer l'équation (5). Notons qu'il en sera ainsi, par exemple, lorsque, l'axe de révolution étant vertical, les forces agissantes sont les forces de pesanteur.

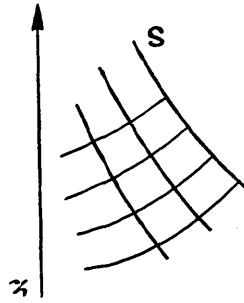
2. Soient z l'axe de la surface de révolution σ , r la distance d'un point à l'axe,

$$r = f(z)$$

l'équation de la ligne méridienne s . Soit enfin φ l'angle qu'un plan passant par l'axe z forme avec un plan origine passant par le même axe. r, z, φ sont des coordonnées cylindriques.

Imaginons maintenant dans le plan méridien un double système de lignes orthogonales, l'une d'elles étant s . Pour individualiser les lignes orthogonales à s nous prendrons pour paramètre la coordonnée z des points où elles rencontrent s . Nous désignerons par ρ_3 un paramètre

Fig. 3.



qui individualise les lignes de l'autre famille. Si nous faisons tourner le plan méridien autour de z les lignes susdites engendreront deux familles de surfaces de révolution, coupées orthogonalement par les plans méridiens. Les paramètres qui fixent les trois familles de surfaces seront

$$\rho_1 = z, \quad \rho_2 = \varphi, \quad \rho_3$$

et le carré de l'élément linéaire sera

$$ds^2 = H_1^2 dz^2 + r^2 d\varphi^2 + H_3^2 d\rho_3^2.$$

En un point de σ , nous aurons

$$ds^2 = (1 + f'^2) dz^2 + r^2 d\varphi^2 + H_3^2 d\rho_3^2,$$

en posant

$$f' = \frac{df}{dz}.$$

L'équation (5) devient alors

$$(5') \quad \frac{1}{1 + f'^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{f'^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right)^2 = 2P + h,$$

qui doit déterminer la fonction inconnue v_0 et dans laquelle, suivant l'hypothèse faite, P sera fonction seulement de z .

Nous pourrions prendre pour intégrale de l'équation précédente

$$(14) \quad v_0 = c\varphi + w_0(z),$$

avec

$$(15) \quad w_0(z) = \int \frac{\sqrt{(1+f'^2) \{ (2P+h)f^2 - c^2 \}}}{f} dz.$$

3. Reste maintenant à calculer la fonction harmonique V qui satisfait les conditions (7) et (8). Observons que la fonction $c\varphi$ est définie dans tout l'espace et y est harmonique. De plus elle satisfait sur σ aux équations (7) et (8). Il reste donc à construire une fonction harmonique W (qui sera évidemment un potentiel symétrique) et qui vérifie sur σ les conditions

$$(7') \quad W = w_0(z).$$

$$(8') \quad \frac{\partial W}{\partial \rho_3} = 0.$$

Donc : le mouvement du liquide résultera d'un mouvement symétrique par rapport à l'axe z et d'un mouvement ayant pour potentiel $C\varphi$.

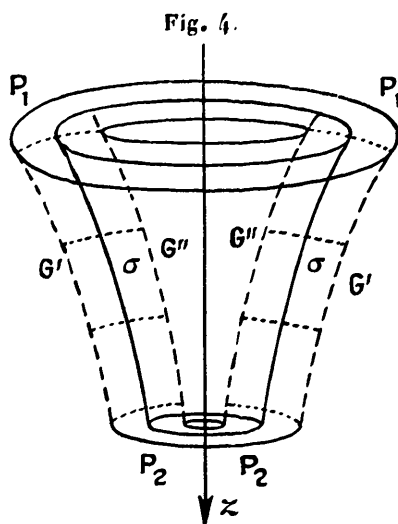
4. La nature de ce dernier mouvement est bien connue. C'est celui qu'induit une ligne-tourbillon, de flux $4\pi c$ et disposée suivant l'axe z . Les molécules décrivent des cercles d'axe z avec une vitesse dépendant de la distance à l'axe et égale à $\frac{c}{r}$. Nous dirons qu'il y a alors *circulation du fluide*, d'intensité c , autour de l'axe z .

5. En ce qui concerne le mouvement symétrique ayant pour potentiel W , il est bien clair que les méridiens de σ seront des lignes de courant de ce mouvement.

Le calcul de W s'effectuera, sous réserve des conditions d'analyticité déjà posées, par le développement en série indiqué au Chapitre II (n° 5); nous donnerons plus loin des exemples de ce calcul. Indiquons pour le moment par quelle méthode on peut se faire une idée d'ensemble du mouvement du fluide.

6. Soit une portion de la surface σ suivant laquelle f ainsi que $(2P+h)f^2 - c^2$ sont toujours positifs et ne s'annulent pas et considérons, autour de σ , une strate tubulaire S , également symétrique et dans laquelle existe W . Les surfaces de niveau (W constant) seront

des surfaces de révolution coupant σ à angle droit. Nous limiterons la strate par deux surfaces tubulaires de révolution $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ qui coupent orthogonalement les surfaces de niveau et par deux surfaces



de niveau P_1, P_2 . La surface σ divisera P_1 et P_2 respectivement en deux parties, que nous noterons P'_1, P''_1 et P'_2, P''_2 . En choisissant, pour fixer les idées, positivement le radical de la formule (15), W croîtra avec z .

Dans ces conditions W peut être considéré comme le potentiel des vitesses d'un écoulement fluide symétrique qui se produit entre des surfaces $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ constituant des parois fixes et rigides. Les surfaces d'entrée et de sortie sont respectivement P_1 et P_2 . Les lignes de courant sont dans des plans passant par l'axe.

Composons maintenant ce mouvement avec une circulation d'intensité c autour de z de façon à avoir le potentiel

$$(1) \quad V = c\varphi + W.$$

Dans le mouvement résultant $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ pourront encore être considérés comme des parois rigides et fixes, P_1 et P_2 étant les ouvertures d'entrée et de sortie du fluide; mais le fluide n'entrera pas dans S normalement à ces surfaces.

Tout comme $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$, toutes les surfaces de révolution de S , qui sont lieux de lignes de courant dans le mouvement de potentiel W ,

gardent la même propriété dans le mouvement résultant de potentiel V ; c'est ce qui arrivera en particulier sur σ . Mais sur σ , de plus, la condition (5) sera remplie.

Si donc nous supprimons le fluide en mouvement compris entre σ et $\mathcal{G}''$ et que nous le remplacions par du fluide au repos de densité μ' , le mouvement de la partie de liquide comprise entre σ et $\mathcal{G}'$ ne sera pas altéré pourvu que l'entrée du liquide en P'_1 et sa sortie en P'_2 ne soit pas modifiée. Nous pourrions de même remplacer le liquide compris entre σ et $\mathcal{G}''$ par un fluide au repos de densité μ' .

7. Nous avons ainsi défini deux jets liquides symétriques ayant tous deux pour contour libre σ ; mais il convient à ce propos de faire deux remarques.

Tout d'abord la possibilité des deux jets liquides peut faire naître quelques difficultés. Elles s'écartent en observant que, selon les principes de l'hydrodynamique théorique, la paroi rigide doit être considérée comme une liaison à laquelle le liquide doit adhérer. Il faut observer d'ailleurs qu'en substituant une portion quelconque du contour libre par une paroi rigide, le mouvement du liquide ne serait pas altéré.

En second lieu, la réalisation des jets précédents suppose l'entrée et la sortie du fluide par les surfaces P'_1 ou P''_1 , P'_2 ou P''_2 avec une vitesse bien déterminée en chaque point. Sans aborder pour l'instant l'étude du prolongement analytique du potentiel V en dehors de l'espace S ⁽¹⁾, nous admettrons que l'on puisse artificiellement remplir ces conditions d'entrée et de sortie, soit au moyen de petits tubes amenant et enlevant le liquide avec le débit convenable, soit par un réseau dont les mailles règlent la vitesse, soit de toute autre façon.

(¹) Cf. à ce sujet Chapitre V, n° 7.

CHAPITRE V.

JETS SYMÉTRIQUES. LES PARALLÈLES SINGULIERS DE LA SURFACE LIBRE.

1. Nous avons supposé, au n° 6 du chapitre précédent, que, suivant la portion de σ considérée, f et $(2P + h)f^2 - c^2$ étaient toujours positifs et ne s'annulaient pas. Or pour l'expression $(2P + h)f^2 - c^2$, trois cas principaux peuvent se présenter :

- 1° Elle est positive quel que soit z entre $-\infty$ et $+\infty$;
- 2° Elle est positive pour z compris entre z_1 et $+\infty$ (ou bien entre z_1 et $-\infty$) étant nulle pour $z = z_1$;
- 3° Elle s'annule pour z_1 et z_2 et est positive dans l'intervalle.

Dans le premier cas toute la surface σ doit être considérée comme frontière libre. Dans le second cas nous devons limiter cette surface au parallèle $z = z_1$, en la prenant d'un côté convenable de ce parallèle qui est alors un parallèle de singularité où le mouvement se réduit à la circulation du fluide. Dans le troisième cas il y a deux parallèles de singularité z_1 et z_2 .

2. Il est possible d'étudier le mouvement du fluide au voisinage d'un tel parallèle singulier. Prenons-le dans le plan $z = 0$ et admettons que P et f soient développables en séries de puissances

$$P = g_0 + g_1 z + \frac{g_2}{2!} z^2 + \dots$$

$$f = r_0 + r_1 z + \frac{r_2}{2!} z^2 + \dots$$

(r_0 étant le rayon du parallèle singulier). Dans ces conditions

$$(2P + h)f^2 - c^2 = (2g_0 + h)r_0^2 - c^2 + 2r_0(g_1 r_0 + h r_1 + 2g_0 r_1)z + \dots$$

Cette fonction doit s'annuler pour $z = 0$, de sorte que

$$(2g_0 + h)r_0^2 - c^2 = 0$$

sera nul. En supposant, pour fixer les idées, que le premier membre soit positif pour $z > 0$, le coefficient de z sera positif ou nul. Excluons ce dernier cas. La formule (15) donne alors pour w_0 un développement en série contenant les puissances successives

$$z^{\frac{3}{2}}, z^{\frac{5}{2}}, \dots$$

et l'on vérifie immédiatement que

$$(16) \quad w_0(z) = \frac{2}{3} a z^{\frac{3}{2}} + \dots$$

avec

$$a = \frac{2(1+r_1^2)(g_1 r_0 + h r_1 + 2g_0 r_1)}{r_0}.$$

La partie principale de $w_0(z)$ étant ainsi connue, il faut en déduire la partie principale de W . Au préalable nous donnerons quelques résultats, utiles, sur les potentiels symétriques.

3. Prenons, dans un plan méridien, des axes rectangulaires ξ, η , ayant leur origine en M , sur le parallèle singulier, le premier axe étant parallèle, l'autre perpendiculaire à z .

L'équation aux dérivées partielles qui caractérise les potentiels symétriques est

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$$

et devient, puisque $z = \xi, r = r_0 + \eta$,

$$(r_0 + \eta) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0.$$

En passant en coordonnées polaires

$$\xi = \tau \cos \theta, \quad \eta = \tau \sin \theta.$$

on obtient enfin

$$(17) \quad (r_0 + \tau \sin \theta) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \sin \theta + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cos \theta = 0.$$

Cherchons une solution développée en série des puissances de τ ,

sous la forme

$$\varphi = \tau^z \varphi_0 + \frac{\tau^{z+1}}{r_0} \varphi_1 + \dots + \frac{\tau^{z+h}}{r_0^h} \varphi_h + \dots,$$

les φ_h dépendant seulement de θ . En substituant dans l'équation (17) précédente il vient, pour déterminer de proche en proche les φ_h , le système

$$(18) \quad \begin{cases} z^2 \varphi_0 + \varphi_0'' = 0, \\ [(z+h)^2 \varphi_h + \varphi_h''] + \sin \theta (z+h-1)(z+h) \varphi_{h-1} \\ \quad + \cos \theta \varphi_{h-1}' + \sin \theta \varphi_{h-1}'' = 0, \end{cases}$$

où les accents marquent des dérivations par rapport à θ .

Par ailleurs, l'équation (17) a évidemment une seule solution prenant, sur un arc de courbe, des valeurs données ainsi que sa dérivée normale. Cherchons une solution telle que, pour $\theta = 0$,

$$\varphi = k \tau^z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = k' \tau^z,$$

k et k' étant deux constantes. La première des équations (17) donnera

$$\varphi_0 = k \cos z\theta + \frac{k'}{z} \sin z\theta$$

et il faudra intégrer les équations différentielles suivantes avec les conditions

$$(\varphi_h)_{\theta=0} = 0, \quad (\varphi_h')_{\theta=0} = 0.$$

Or la méthode de variation des constantes donne immédiatement, pour l'équation

$$\varphi_h'' + (z+h)^2 \varphi_h = X(\theta)$$

avec les conditions précédentes,

$$\varphi_h = \frac{1}{z+h} \int_0^\theta X(\theta') \sin[(z+h)(\theta - \theta')] d\theta';$$

en remplaçant X par sa valeur écrite dans (18) et effectuant les intégrations par parties qui s'imposent, on obtient

$$(19) \quad \varphi_h = -\varphi_{h-1} \sin \theta + \int_0^\theta \varphi_{h-1}(\theta') \cos[(z+h)\theta - (z+h+1)\theta'] d\theta'$$

qui détermine les φ_h en y joignant

$$(19_1) \quad \varphi_0 = k \cos \alpha \theta + \frac{k'}{\alpha} \sin \alpha \theta.$$

Il est aisé de vérifier dans ces conditions que la série

$$(20) \quad \varphi = \tau^2 \varphi_0 + \frac{\tau^{2+1}}{r_0^h} \varphi_1 + \dots + \frac{\tau^{2+h}}{r_0^h} \varphi_h + \dots$$

est convergente pour $|\tau|$ assez petit. Elle définit donc le potentiel symétrique qui, pour $\theta = 0$, est tel que

$$(21) \quad \varphi = k\tau^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = k'\tau^2.$$

4. Remplaçons les conditions (21) par les suivantes : pour $\theta = 0$ φ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ sont donnés par des séries convergentes

$$(21') \quad \begin{cases} \varphi = k\tau^2 + k_1\tau^{2+1} + k_2\tau^{2+2} + \dots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = k'\tau^2 + k'_1\tau^{2+1} + k'_2\tau^{2+2} + \dots \end{cases}$$

on obtiendra aisément la fonction φ correspondante en ajoutant les séries, analogues à (20), qui correspondent aux exposants successifs 2 , $2+1$, etc.

La *partie principale* de la fonction φ obtenue, quand τ est très petit, reste

$$\tau^2 \varphi_0 = \tau^2 \left(k \cos \alpha \theta + \frac{k'}{\alpha} \sin \alpha \theta \right).$$

Il est essentiel de remarquer que c'est la *partie réelle d'une fonction de variable complexe* ⁽¹⁾.

3. Revenons maintenant à la recherche du potentiel W qui, sur la ligne de jet aboutissant en M , prend les valeurs

$$w_0 = \frac{2}{3} a \xi^{\frac{3}{2}} + \dots$$

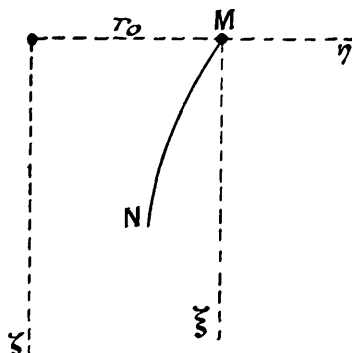
(1) Il y a là un passage, sur lequel nous reviendrons dans un autre Mémoire, des fonctions de variable complexe aux potentiels symétriques.

soit $-\theta_0$ l'angle que la tangente à cette ligne de jet MN fait avec l'axe ξ . Nous aurons

$$w_0 = \frac{2}{3} a \cos^{\frac{3}{2}} \theta_0 \tau^{\frac{3}{2}} + \dots$$

et il est bien clair que W sera caractérisé par des formules analogues à

Fig. 5.



celles du numéro précédent, en remplaçant θ par $\theta + \theta_0$, en prenant

$$k = \frac{2}{3} a \cos^{\frac{3}{2}} \theta_0 \quad \text{et} \quad k' = 0.$$

La partie principale cherchée de W est donc

$$(22) \quad \frac{2}{3} a \cos^{\frac{3}{2}} \theta_0 \tau^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2} (\theta + \theta_0).$$

Pour étudier le mouvement fluide au voisinage du point singulier M, c'est-à-dire pour les valeurs très petites de τ , nous pourrions réduire W à sa partie principale et écrire donc

$$W = \frac{2}{3} a \cos^{\frac{3}{2}} \theta_0 \tau^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2} \varpi,$$

en posant

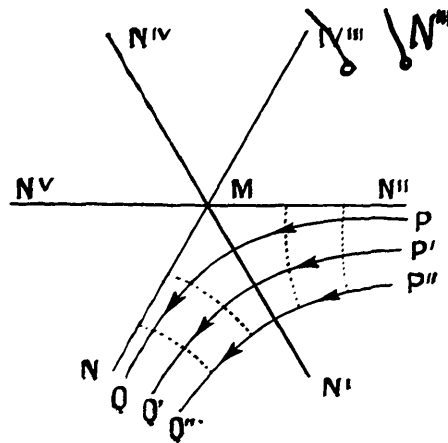
$$\varpi = \theta + \theta_0$$

ce qui revient à compter les angles polaires à partir de la tangente en M à la courbe MN.

6. Soit alors le faisceau des demi-droites MN, MN', MN'', ..., MN^v situées dans le plan méridien et inclinées entre elles de 60°, la première

représentant l'élément infinitésimal de la ligne de jet MN. Suivant MN, MN'', MN''', $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ est nul, elles sont lignes de courant; suivant MN', MN'', MN''', $\frac{\partial W}{\partial r}$ est nul, elles sont lignes équipotentielles.

Fig. 6.



Les autres lignes de courant ont l'équation

$$\tau^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2} \zeta = \text{const.}$$

(lignes P², P'², P''² ...), les lignes équipotentielles (en pointillé sur la figure) ont l'équation

$$\tau^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2} \zeta = \text{const.}$$

On passe évidemment des unes aux autres par rotation de $\pm 60^\circ$ autour du point M.

En limitant le mouvement entre les lignes MN et MN'' nous avons (figure précédente) l'allure du mouvement au voisinage immédiat du point singulier M. MN est la tangente à la ligne méridienne de la frontière libre. MN'' la tangente à la ligne méridienne d'une paroi rigide. P², P'², P''² des lignes de courant du mouvement symétrique, qu'il faudra composer avec la circulation pour obtenir le jet liquide.

On reconnaît facilement que suivant le parallèle singulier de la frontière libre le mouvement liquide se réduit au seul mouvement de

circulation, puisque $\frac{\partial w_0}{\partial z}$ s'annule sur ledit parallèle. Donc : *toutes les lignes de courant du jet appartenant à la frontière libre partent tangentiellement du parallèle singulier.*

7. Notons que les considérations précédentes donnent un moyen d'étudier le prolongement du mouvement du fluide en dehors de l'espace S où se bornait l'étude du chapitre précédent.

Il est facile de reconnaître la relation qui existe entre le mouvement du fluide autour de M et les jets liquides plans envisagés au Chapitre I (n° 3).

Notons enfin que d'une manière analogue on pourrait étudier des mouvements avec des parallèles de singularité en lesquels la méridienne de la surface libre présente quelque singularité.

CHAPITRE VI.

JETS LIQUIDES SYMÉTRIQUES TRÈS MINCES.

1. Dans le cas qui vient d'être étudié des jets liquides symétriques, la frontière rigide est une surface de révolution autour de l'axe du mouvement (Chapitre IV, n° 6). En reprenant les notations du susdit numéro un des jets liquides a pour contour rigide la surface de révolution $\mathcal{G}'$. Si nous supposons que la couche liquide comprise entre σ et $\mathcal{G}'$ soit très mince, nous pourrions facilement calculer de façon approchée l'équation de la ligne méridienne de la frontière rigide.

Observant en effet que

$$r \Delta_2 W = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0,$$

on voit que

$$-r \frac{\partial W}{\partial r} dz + r \frac{\partial W}{\partial z} dr$$

est une différentielle exacte. Posons cette expression égale à dU . U s'appelle la *fonction conjuguée du potentiel symétrique W* et nous

aurons

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} = -r \frac{\partial W}{\partial r}, \\ \frac{\partial U}{\partial r} = r \frac{\partial W}{\partial z}. \end{cases}$$

Les lignes $U = \text{const.}$ sont évidemment les lignes de courant du liquide (lorsque le potentiel des vitesses est W).

2. Soient s la méridienne de la surface σ , n la normale à s . Nous aurons

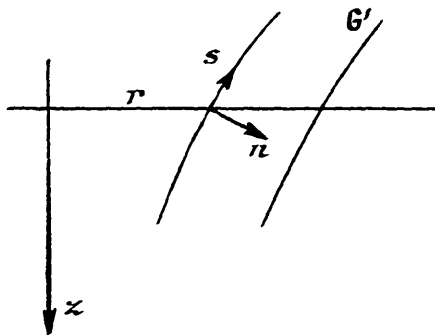
$$(24) \quad \begin{cases} \cos(n, r) = -\cos(s, z) = \frac{1}{\sqrt{1-f'^2}}, \\ \cos(n, z) = -\cos(s, r) = -\frac{f'}{\sqrt{1-f'^2}}. \end{cases}$$

De plus, puisque $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$, il vient

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial s} \cos(s, z) = \frac{dw_n}{dz} \cos^2(s, z) = \frac{1}{1-f'^2} \frac{dw_n}{dz}, \\ \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial s} \cos(s, r) = \frac{dw_n}{dz} \cos(s, r) \cos(s, z) = \frac{f'}{1-f'^2} \frac{dw_n}{dz}, \end{cases}$$

et, tenant compte de (15) et de la seconde des équations (23) nous

Fig. 7.



pourrons écrire

$$\frac{\partial U}{\partial r} = r \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{f}{1-f'^2} \frac{dw_n}{dz} = \sqrt{\frac{f^2(2P-h) - r^2}{1-f'^2}}.$$

Soit $U = U_0$ l'équation de la méridienne de la frontière libre et soit $U = U_0 + \Delta U$ l'équation de la méridienne du contour rigide $\mathcal{G}'$, en supposant ΔU très petit. Désignons enfin par Δr l'accroissement que subit r lorsqu'on passe (z restant constant) de σ à $\mathcal{G}'$. Nous pourrions remplacer le rapport $\frac{\Delta U}{\Delta r}$ par la dérivée partielle qui vient d'être calculée, d'où

$$(26) \quad \Delta r = \Delta U \sqrt{\frac{1-f^2}{f^2(2P+h)-c^2}}.$$

Posant enfin $r + \Delta r = r_1$, l'équation de la méridienne de $\mathcal{G}'$ sera

$$(27) \quad r_1 = f - \Delta U \sqrt{\frac{1-f^2}{f^2(2P+h)-c^2}}$$

dans laquelle ΔU est une constante arbitraire très petite et dans laquelle nous devons exprimer f et P en fonction de z .

3. Il est intéressant d'introduire dans la formule précédente le débit $\mathcal{Q}$ du jet (volume liquide qui traverse la section du jet liquide dans l'unité de temps). Comme la circulation ne fait pas mouvoir le liquide dans le sens longitudinal, nous aurons

$$\mathcal{Q} = 2\pi r \Delta r \frac{\partial W}{\partial z} = 2\pi \frac{\partial U}{\partial r} \Delta r = 2\pi \Delta U,$$

et (27) devient

$$(27') \quad r_1 = f - \frac{2\sqrt{1-f^2}}{2\pi\sqrt{f^2(2P+h)-c^2}}.$$

4. Nous avons calculé l'épaisseur du jet liquide dans le sens de l'axe r , mais il est facile d'évaluer son épaisseur normale ν . Nous aurons

$$(27'') \quad \nu = \Delta r \cos(n, r) = \frac{\Delta U}{\sqrt{f^2(2P+h)-c^2}} = \frac{2}{2\pi\sqrt{f^2(2P+h)-c^2}}.$$

5. Nous devons supposer $(2P+h)f^2 - c^2$ positif (cf. Chap. V, n° 1), mais si nous nous approchons d'un parallèle singulier correspondant à $z = z_0$ [$f^2(2P+h) - c^2 = 0$] le second membre de l'expression précédente croît indéfiniment. Cela fait évidemment perdre toute signification aux formules puisque Δr avait été supposé très petit. Mais

on peut interpréter ce résultat en imaginant que le jet liquide sort d'un réservoir placé au-dessus d'un parallèle singulier.

6. Rappelons un phénomène bien connu et que l'on observe dans le cas d'un entonnoir rempli de liquide et qui se vide par son ouverture inférieure. Spécialement lorsque l'on imprime au liquide un mouvement circulaire autour de l'axe de l'entonnoir, on constate que le liquide prend le long des parois de l'entonnoir un mouvement hélicoïdal et qu'il se forme dans le milieu un trou, de telle sorte que le liquide se trouve séparé de l'axe par une surface libre, elle-même en entonnoir. Les considérations précédentes se réfèrent à ce phénomène.

CHAPITRE VII.

JETS LIQUIDES LIBRES.

1. Le chapitre précédent concerne des écoulements compris entre une frontière libre et une paroi rigide $\mathcal{G}'$ très voisine. Nous allons maintenant étudier la question importante de voir quand on peut supprimer cette paroi rigide sans altérer le mouvement, c'est-à-dire quand on peut considérer $\mathcal{G}'$ comme frontière libre du liquide, aussi bien que σ . Nous aurons alors à vérifier sur $\mathcal{G}'$ des équations analogues à (2) et (3).

Nous résoudrons la question avec la même approximation que précédemment en supposant les deux frontières libres σ et $\mathcal{G}'$ très voisines. Le jet correspondant sera alors dit *jet libre*.

2. Soient s et s' respectivement les méridiennes de σ et de $\mathcal{G}'$ et n et n' les normales correspondantes. Appelons ΔW l'accroissement de W en passant, à z constant, de s à s' . La seconde des (25) donne

$$\Delta W = \frac{\partial W}{\partial r} \Delta r = \frac{dw_0}{dz} \frac{f'}{1+f'^2} \Delta r$$

et, d'après (26),

$$\Delta W = \frac{f'}{f} \Delta U,$$

de sorte que la valeur de W sur $\mathcal{G}'$, soit W' , sera

$$W' = w_0 + \int \Delta U$$

et la valeur V' de V sera [formule (I)]

$$V' = w_0 + \int \Delta U + c\varphi.$$

Calculons maintenant sur s'

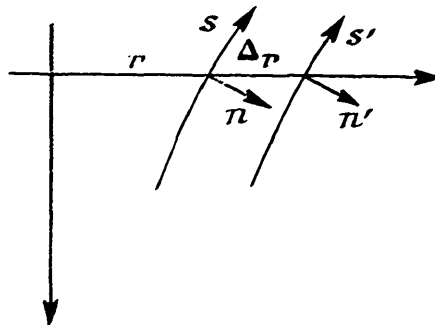
$$\nabla V' = \left(\frac{\partial V'}{\partial s'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial n'}\right)^2 + \frac{1}{(f + \Delta r)^2} \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2;$$

en observant que $\frac{\partial V'}{\partial n'}$ est nul il reste

$$\nabla V' = \left(\frac{\partial V'}{\partial s'}\right)^2 + \frac{c^2}{(f + \Delta r)^2}.$$

Compte tenu de la valeur de l'arc s' , puis développant en série et

Fig. 8.



gardant seulement les termes où figure la première puissance de ΔU , on obtient

$$\begin{aligned} (28) \quad \nabla V' &= \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{1}{1-f^2} + \frac{c^2}{f^2} + 2\Delta U \\ &\times \left\{ \frac{1}{1-f^2} \frac{dw_0}{dz} \frac{d}{dz} \left(\frac{f'}{f}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{f'}{(1+f^2)^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1-f'^2}{f \frac{dw_0}{dz}}\right) - \frac{c^2(1-f'^2)}{f \frac{dw_0}{dz}} \right\}. \end{aligned}$$

3. Si maintenant P ne dépend que de la seule z et par suite ne change pas de valeur lorsque l'on passe de s à s' parallèlement à l'axe Oz , les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{G}'$ soit frontière libre seront

$$(2') \quad \nabla V' = 2P + h,$$

$$(3') \quad \frac{\partial V'}{\partial n'} = 0.$$

La seconde des équations précédentes est vérifiée d'après le choix de $\mathcal{G}'$. Quant à la première, tenant compte de (28) et de ce que

$$\left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{1}{1+f^2} + \frac{c^2}{f^2} = 2P + h,$$

elle se réduit à

$$\frac{1}{1+f^2} \frac{dw_0}{dz} \frac{d}{dz} \frac{f'}{f} - \left(\frac{dw_0}{dz}\right)^2 \frac{f'}{(1+f^2)^2} \frac{d}{dz} \left(\frac{1+f^2}{f \frac{dw_0}{dz}}\right) - \frac{c^2(1+f'^2)}{f^3 \frac{dw_0}{dz}} = 0.$$

Il reste à y remplacer $\frac{dw_0}{dz}$ par sa valeur tirée de l'équation (15). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f} \sqrt{\frac{(2P+h)f^2-c^2}{1+f^2}} \frac{d}{dz} \frac{f'}{f} \\ & - \frac{\{(2P+h)f^2-c^2\}f'}{f^2(1+f^2)} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{\frac{1+f'^2}{(2P+h)f^2-c^2}} \right] \\ & - \frac{c^2}{f^3} \sqrt{\frac{1+f'^2}{(2P+h)f^2-c^2}} = 0, \end{aligned}$$

ou bien encore

$$\frac{1}{f} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{f'}{f} \sqrt{\frac{(2P+h)f^2-c^2}{1+f^2}} \right\} - \frac{c^2}{f^3} \sqrt{\frac{1+f'^2}{(2P+h)f^2-c^2}} = 0,$$

ou enfin

$$\frac{f'}{f} \sqrt{\frac{(2P+h)f^2-c^2}{1+f^2}} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{f'}{f} \sqrt{\frac{(2P+h)f^2-c^2}{1+f^2}} \right\} - \frac{c^2}{f^3} f' = 0,$$

et, en intégrant,

$$\frac{f'^2}{f^2} \frac{(2P+h)f^2-c^2}{1+f^2} + \frac{c^2}{f^2} = k,$$

k étant une constante arbitraire. Par séparation des variables on en

déduit

$$(29) \quad \frac{f df}{\sqrt{k f^2 - c^2}} = \frac{dz}{\sqrt{2P + h - k}}$$

et, en posant

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2P + h - k}} = \chi(z),$$

on a

$$f = \sqrt{\frac{c^2}{k} + k[\chi(z) + c']^2},$$

c' étant une nouvelle constante arbitraire. L'équation de la méridienne s sera donc

$$(30) \quad r = \sqrt{\frac{c^2}{k} + k[\chi(z) + c']^2};$$

l'équation (27) définira la méridienne s' .

4. Le problème des jets libres très minces de révolution est ainsi traité. Il était intéressant de le traiter, comme nous venons de le faire, en partant des résultats acquis au chapitre précédent. Mais il convient de noter que la solution *directe* de ce problème se présente d'une manière fort simple.

Notons en effet que, dans la formule (4) qui définit P sur une frontière libre, Π et μ' figurent seulement par la combinaison

$$\Pi\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right);$$

rien n'empêche donc de supposer μ' nul, à condition de remplacer Π par $\Pi\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)$. Mais, dans le cas d'un jet libre, nous avons alors affaire à un *voile liquide* très mince dans le vide. Il est dans ces conditions naturel de penser que chaque molécule se déplacera comme un point matériel libre de masse unité, soumis à la force de potentiel $\Pi\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right)$, c'est-à-dire P , avec les notations précédentes. De plus, à cause de (2) il faudra, pour former le *voile liquide*, prendre un ensemble des trajectoires précédentes correspondant à la même valeur h de la constante des forces vives.

Dans le cas d'un jet libre *de révolution* cet ensemble de trajectoires sera déduit de l'une d'elles par rotation arbitraire autour de l'axe z .

§. Il est facile de vérifier que les relations précédentes (29) et (30) concordent bien avec ce que nous apprend l'étude directe des jets libres de révolution.

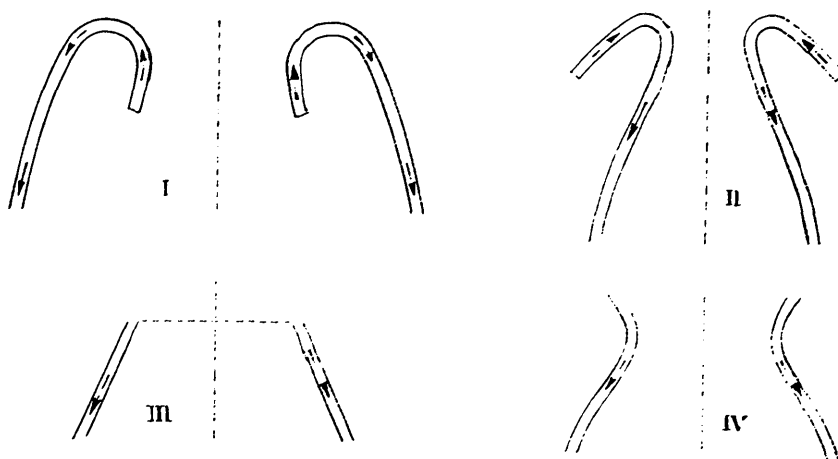
En coordonnées semi-polaires une trajectoire sera définie par les équations

$$(31) \quad \begin{cases} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2P + h, \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = k, \\ r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \end{cases}$$

(puisque P ne dépend que de z).

L'équation différentielle des méridiennes des surfaces de révolution

Fig. 9.



engendrées par les trajectoires s'obtiendra en éliminant, entre les relations (31), φ et t . Or la première s'écrit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2P + h - k,$$

la seconde

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = k - \frac{c^2}{r^2}$$

et, faisant le quotient membre à membre, on retrouve (29).

6. Indiquons quelques cas particuliers.

Si P est nul les trajectoires sont des droites décrites uniformément et le voile est en forme d'hyperboloïde de révolution (à une nappe).

Si, l'axe z étant vertical, la force agissante est la pesanteur, le voile sera obtenu par rotation d'une parabole dont l'axe est également vertical. Les formes de méridienne, dont la discussion est aisée, correspondent schématiquement aux figures ci-dessus (*fig. 9*).

Pour compléter il faut encore indiquer comment varie l'épaisseur, très petite, du voile liquide. La formule (27'') nous donne l'épaisseur normale ν :

$$\nu = \frac{\Delta U}{\sqrt{f^2(2P + h) - c^2}}.$$

Dans le cas de la pesanteur, posant $g\left(1 - \frac{\mu'}{\mu}\right) = z$, il vient

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \frac{1}{z} \sqrt{2zz + h - k}, \\ f^2 &= \frac{c^2}{h} + k \left(\frac{1}{z} \sqrt{2zz + h - k} + c' \right)^2, \end{aligned}$$

où nous pouvons supposer $h = k$ en prenant l'origine des z dans le plan horizontal convenable [plan contenant le point le plus haut du jet]. Dans ces conditions il vient

$$\nu = \frac{\Delta U}{\sqrt{\frac{2zc^2}{k}z + \frac{2k}{z}(2zz + k) \left(\sqrt{z} + c' \sqrt{\frac{z}{2}} \right)^2}}.$$

Le jet correspond à z positif de sorte qu'il est évident que ν garde un signe constant : $\mathcal{C}'$ est tout entière d'un même côté de σ .

CHAPITRE VIII.

COMPLÉMENTS SUR LE CAS DU JET LIMITÉ PAR UNE SURFACE SPHÉRIQUE.

1. En traitant, au Chapitre IV, le cas des jets liquides symétriques, nous n'avons pas insisté sur la détermination du potentiel des vitesses V et nous nous sommes contentés d'une discussion qualitative faite à

partir de v_0 (ou w_0). Nous développerons maintenant un peu plus un cas particulier.

2. C'est celui où la frontière libre est une zone sphérique et où de plus les forces de masse sont négligeables.

En prenant les coordonnées sphériques θ, φ ayant l'origine au centre de la sphère, l'équation fondamentale (5') devient

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \varphi} \right)^2 = h = \lambda^2$$

et l'intégrale déjà considérée s'écrit

$$v_0(\theta, \varphi) = c\varphi + \int \sqrt{R^2 \lambda^2 - \frac{c^2}{\sin^2 \theta}} d\theta.$$

c^2 est nécessairement inférieur à $R^2 \lambda^2$ de sorte qu'on peut poser

$$c = R\lambda \sin \theta_0$$

et

$$(32) \quad v_0 = c\varphi + w_0 = c \left(\varphi + \int \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta_0 \sin \theta} d\theta \right);$$

les parallèles singuliers correspondent à θ_0 et $\pi - \theta_0$.

L'intégrale qui figure dans (32) est aisée à calculer et l'on trouve

$$(33) \quad w_0 = c \left(\frac{z}{\sin \theta_0} - \beta \right)$$

avec

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0}}{\cos \theta_0}, & \cos z &= \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}, \\ \sin \beta &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0}}{\sin \theta \cos \theta_0}, & \cos \beta &= \frac{\cos \theta \sin \theta_0}{\sin \theta \cos \theta_0}, \end{aligned}$$

enfin, entre z et θ il y a la relation

$$z = R \cos \theta.$$

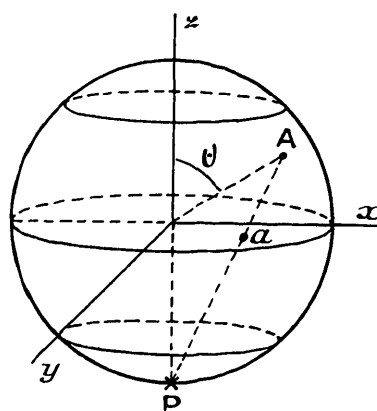
3. Reste à déterminer maintenant la fonction W qui satisfait les conditions (7') et (8') dans la zone sphérique limitée par les parallèles singuliers.

On pourra, pour cela, transformer d'abord le problème par une

inversion. En prenant le pôle d'inversion en un des points où l'axe z rencontre la sphère la zone sera transformée en une couronne plane et un volume entourant la zone sera transformé en un volume entourant la couronne. De plus la fonction W divisée par le rayon vecteur compté à partir du pôle d'inversion donne une transformée W' harmonique, et, à partir des équations précédentes, il est aisé de calculer les valeurs de W' et celles de sa dérivée normale W'' en tout point de la couronne. De plus W' et W'' sont fonctions analytiques d'un point xy de la couronne ⁽¹⁾.

(1) Le pôle d'inversion étant $z = -R$ et la puissance $2R^2$ la couronne transformée de la zone est dans le plan xy (figure ci-dessous). Les coordonnées

Fig. 10.



polaires du point a transformé du point A de la sphère sont

$$\rho = R \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \varphi,$$

le rayon du cercle interne de la couronne est

$$\rho_0 = R \tan \frac{\theta_0}{2},$$

celui du cercle externe est $\frac{1}{\rho_0}$. Enfin, posant $\delta = Pa$ nous pouvons prendre

$$W'(a) = \frac{1}{\delta} W(A).$$

En un point de la couronne

$$W'(a) = \frac{c}{\sqrt{R^2 + \rho^2}} \left[\frac{\alpha(R^2 + \rho_0^2)}{2R\rho_0} - \beta \right],$$

Dans ces conditions j'ai donné une formule très simple pour obtenir W' dans une couche d'épaisseur finie entourant la couronne $K^{(1)}$. Cette formule résulte de la formule bien connue, due à Poisson, concernant le problème analogue relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

En remplaçant respectivement x, y, t par ix, iy, z , ce qui ne présente pas de difficultés puisque les données sont analytiques, on passe à l'équation caractéristique des potentiels. La fonction W' étant ainsi connue on reviendra à W par l'inversion déjà considérée.

Les calculs, sur lesquels nous n'insistons pas, ne présentent pas de difficultés.

4. La même question (détermination de W) peut se traiter par développement en série du type indiqué au Chapitre II, n° 3. Le rôle de la variable φ_0 sera tenu par le rayon vecteur r issu du centre de la sphère et, posant

$$r - R = \rho,$$

α et β s'évaluant facilement en fonction de ρ

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{2R\sqrt{(\rho^2 - \rho_0^2)(R^2 - \rho^2 \rho_0^2)}}{(R^2 + \rho^2)(R^2 - \rho_0^2)}, & \cos \alpha &= \frac{(R^2 - \rho^2)(R^2 + \rho_0^2)}{(R^2 + \rho^2)(R^2 - \rho_0^2)}, \\ \sin \beta &= \frac{\sqrt{(\rho^2 - \rho_0^2)(R^2 - \rho^2 \rho_0^2)}}{\rho(R^2 - \rho_0^2)}, & \cos \beta &= \frac{\rho_0}{\rho} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - \rho_0^2}. \end{aligned}$$

Comme aux points de la zone la dérivée normale de W est nulle, nous aurons, sur la couronne,

$$\frac{\partial W'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} W(A) = -\frac{1}{\rho^2} \cos \frac{\theta}{2} W(A) = -\frac{cR}{(R^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{z(R^2 + \rho_0^2)}{2R\rho_0} - \beta \right].$$

On vérifie aisément que W' et $\frac{\partial W'}{\partial z}$ ainsi connues sont analytiques régulières autour de tout point de la couronne.

(1) *Esercizii di Fisica Matematica*: 1. *Sulle funzioni potenziali*, Torino, *Rivista di matematica*, 1894.

nous aurons

$$(34) \quad W = w_0(\theta, \varphi) + \frac{\rho^2}{2!} w_2(\theta, \varphi) + \frac{\rho^3}{3!} w_3(\theta, \varphi) + \dots$$

Or l'équation de Laplace, en coordonnées sphériques, s'écrit

$$r^2 \Delta_2 W = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(r^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = 0.$$

En y substituant (34) on obtient, pour déterminer de proche en proche les w_n , la relation

$$(35) \quad R^2 w_n - 2R(n-1)w_{n-1} - (n-1)(n-2)w_{n-2} + \Omega w_{n-2} = 0,$$

où Ω désigne l'opérateur différentiel

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

3. On obtiendra aisément des résultats analogues concernant d'autres cas simples : cas où σ est un cône ou un cylindre, cas d'une surface du second degré dont il n'est pas besoin de supposer qu'elle est de révolution.

