JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SERGE BERNSTEIN

Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini (seconde partie)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 219-286.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__219_0>

Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini;

PAR SERGE BERNSTEIN.

(SECONDE PARTIE.)

CHAPITRE III.

POLYNOMES DE JACOBI.

1. Nous passerons à présent à l'étude du cas où le poids trigonométrique $t(x)$ peut devenir nul ou infini sur le segment $(-1, +1)$.

Nous nous bornerons toutefois à l'hypothèse que $t(x)$ peut être mis sous la forme

$$t(x) = t_0(x)\,|x - b_1|^{\delta_1} \ldots |x - b_k|^{\delta_k} \tag{117}$$

où $b_1, \ldots, b_k$ sont des points quelconques en nombre fini de segment considéré, $\delta_1 \ldots, \delta_k$ sont réels, et $t_0(x)$ satisfait à la condition

$$\lambda < t_0(x) < \mathrm{L} \tag{10 bis}$$

et est *intégrable au sens de Riemann.*

Nous montrerons d'abord que, sous ces conditions, les formules du Chapitre I subsistent encore et l'on a (¹)

$$\mathrm{L}_n(\sqrt{t(x)}) \sim \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\mathrm{M}}, \qquad \mathrm{H}_n^2(\sqrt{t(x)}) \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}}\mathrm{M} \tag{46 bis}$$

(¹) *Voir* la première partie de ce Mémoire, *Journal de Mathématiques*, 1930, p. 144. La seconde de ces formules (46 *bis*) se trouve chez M. G. SZEGÖ, *Entwickelung nach Polynomen eines Ortogonalsystems* (*Mathem. Annalen*, Bd 82, p. 199).

où

$$(48\ bis)\qquad M = e^{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Il suffit évidemment d'examiner le cas où $k = 1$. Supposons en premier lieu que δ_1 est un entier pair $\delta_1 = 2p$ (1). Considérons, pour fixer les idées, $L_n(\sqrt{t(x)})$. En vertu de (46) et (48 *bis*) qui sont applicables, comme nous l'avons vu, lorsque $t(x)$ ne s'annule pas sur $(-1, +1)$, on a

$$L_n(\sqrt{t_0(x)[(x-b)^2+\varepsilon^2]^p}) \sim \left|\frac{b+\varepsilon i+\sqrt{(b+\varepsilon i)^2-1}}{2}\right|^p L_n(\sqrt{t_0(x)})$$
$$=\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^p L_n(\sqrt{t_0(x)})$$

où α tend vers zéro avec ε. Mais d'autre part, si $t(x) = t_0(x)(x-b)^{2p}$, on a

$$L_n(\sqrt{t_0(x)[(x-b)^2+\varepsilon^2]^p}) > L_n(\sqrt{t(x)}) \geq L_{n+p}(\sqrt{t_0(x)}) \sim \frac{1}{2^p}L_n(\sqrt{t_0(x)});$$

donc

$$L_n(\sqrt{t(x)}) \sim \frac{1}{2^p}L_n(\sqrt{t_0(x)}),$$

ce qui prouve l'exactitude de (46), lorsque $\delta_1 = 2p$ est un nombre pair.

Remarquons que si p était un entier *négatif*, les formules (46) seraient une conséquence immédiate du fait que les polynomes orthogonaux de degré n relatifs au poids trigonométrique $t(x)$, ainsi que les polynomes d'écart minimum correspondants seraient identiques à ceux de degré $n+p$, respectivement, relatifs à $t_0(x)$ multipliés par $(x-b)^{-p}$ de sorte qu'on aurait identiquement dans ce cas

$$L_n(\sqrt{t(x)}) = L_{n+p}(\sqrt{t_0(x)}), \qquad H_n^{(2)}(\sqrt{t(x)}) = H_{n+p}(\sqrt{t_0(x)}).$$

Les formules (46 *bis*) étant établies ainsi pour le cas où δ_1 est un nombre pair positif ou négatif, considérons le cas général, où δ_1 est un nombre réel quelconque

$$2p < \delta_1 < 2p+2.$$

Soit, pour fixer les idées, $0 < \delta_1 < 2$.

(1) S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales*, etc., p. 18.

Introduisons deux fonctions $t_1(x)$ et $t_2(x)$ intégrables au sens de Riemann, telles que, ε étant un nombre positif très petit, on ait

$$t_1(x) = t_2(x) = t(x) \qquad (\text{pour } |x - b_1| \geqq \varepsilon)$$

et

$$t_1(x) = (x - b_1)^2 t_0(x) \qquad (\text{pour } |x - b_1| < \varepsilon),$$
$$t_2(x) = t_0(x).$$

Les formules (46) et (48 *bis*) sont, d'après ce qui précède, applicables à $t_1(x)$ et $t_2(x)$; ainsi, à cause de

$$t_1(x) \leqq t(x) \leqq t_2(x),$$

on a

$$(118) \qquad \frac{(1-\alpha_n)}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} \leqq L_n(\sqrt{t(x)}) \leqq \frac{(1+\alpha_n)}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}},$$

où $\alpha_n > 0$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Donc, ε étant assez petit, pour que l'on ait

$$\left|\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{+1}\frac{\log t_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\right| < \alpha_n,$$
$$\left|\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int_{-1}^{+1}\frac{\log t_2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right| < \alpha_n,$$

on pourra choisir n assez grand pour avoir

$$(119) \qquad \frac{(1-\alpha_n)^2}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} < L_n(\sqrt{t(x)}) < \frac{(1+\alpha_n)^2}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}};$$

ceci prouve l'exactitude de notre affirmation, le même raisonnement étant applicable à $H_n^2[\sqrt{t(x)}]$.

Ainsi actuellement on a aussi

$$(42\ bis) \qquad H_n^2[t(x)] \sim \frac{\pi}{2} L_n^2[t(x)]$$

et l'égalité asymptotique (13) de l'Introduction

$$(13) \qquad H_n^l[t(x)] \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)} L_n^l[t(x)]$$

s'étend par des considérations identiques.

2. L'extension des expressions asymptotiques des polynomes orthogonaux eux-mêmes est plus délicate, et en particulier, la formule fondamentale

$$\overline{R}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t(x)}} \cos(n\theta + \psi), \tag{16}$$

où

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\log t(z) - \log t(x)}{z - x} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - z^2}}\, dz \tag{17}$$

cesse, en général, d'être valable sur *tout* le segment $(-1, +1)$(¹). Ceci a pour conséquence que le polynome orthogonal $\overline{R}_n(x)$, en général, ne fournira plus asymptotiquement l'écart minimum du produit $\overline{P}_n(x)\sqrt{t(x)}$, où $\overline{P}_n(x)$ est un polynome arbitraire de degré n possédant le même terme de degré supérieur que $\overline{R}_n(x)$, et par conséquent une étude supplémentaire est nécessaire pour résoudre le problème fondamental de la détermination du maximum de $\overline{R}_n(x)\sqrt{t(x)}$ sur le segment $(-1, +1)$.

Dans ce qui suit nous nous occuperons uniquement du cas où $t(x)$ *ne peut devenir nul ou infini, qu'aux extrémités* ± 1 *du segment*. Nous serons amenés ainsi, pour faire une étude complète de ce cas, de faire le même usage des polynomes généraux de Jacobi, relatifs au poids trigonométrique

$$t(x) = (1 - x)^{2\varphi}(1 + x)^{2\varphi_1} \tag{120}$$

que celui que nous avons fait dans la première partie des polynomes de Tchebichef. Nous devons donc commencer par une étude préliminaire des polynomes de Jacobi, au sujet desquels le problème fondamental que nous venons de signaler n'a également pas encore été résolu. Si

---

(¹) Je voudrais observer en passant que l'expression de $\log t(x)$ en fonction de $\psi(x)$ que j'ai indiquée à l'endroit cité (p. 173) peut être simplifiée : on a

$$\log t(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x)\sqrt{1 - x^2} - \psi(z)\sqrt{1 - z^2}}{z - x} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

pourvu que $\psi(x)$ satisfasse à la condition (18) et que l'on ait $\psi(\pm 1) = 0$.

nous désignons par $q(x)$ le poids ordinaire, on aura

$$q(x) = \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{25 bis}$$

et par conséquent, lorsque $t(x)$ est représenté par (120), on a

$$q(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \tag{121}$$

où

$$\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}, \qquad \beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}. \tag{122}$$

On peut, évidemment, limiter l'étude au cas où $\alpha > -1$, $\beta > -1$, c'est-à-dire

$$\rho > -\frac{1}{4}, \qquad \rho_1 > -\frac{1}{4}, \tag{123}$$

car, si $\alpha = -2s + \alpha_1$, où s est un entier positif et $-1 < \alpha_1 \overline{\leq} 1$, les polynomes orthogonaux de degré n, correspondant aux paramètres α et β, seront identiques aux produits des polynomes orthogonaux de degré $n-s$, correspondant aux paramètres α_1 et β_1 par $(1-x)^s$. La même relation existera naturellement entre les polynomes d'écart minimum correspondants.

Conformément au dernier paragraphe du Chapitre II de la première Partie, l'expression asymptotique (16) ne pourrait être un polynome (¹) que, lorsque $\rho = 0$ ou $\frac{1}{2}$ et $\rho_1 = 0$ ou $\frac{1}{2}$. (D'après la remarque qui vient d'être faite, les cas, où $\rho = -\frac{k}{2}$, $\rho_1 = -\frac{k_1}{2}$, k et k_1 étant des entiers positifs, s'y ramènent.) On vérifie directement que les polynomes normés de Jacobi correspondant alors aux paramètres $\alpha = \mp\frac{1}{2}$, $\beta = \mp\frac{1}{2}$, d'après (122), se réduisent, respecti-

(¹) *Voir* aussi ma Note *Sur une classe de polynomes d'écart minimum* (*Comptes rendus*, t. 190, p. 237), et l'article *Sur une classe de polynomes orthogonaux* (*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, t. 4, 1930).

vement, à

(I) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\theta,$$

(II) $$\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

(III) $$\sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

(IV) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Cependant, même dans ces cas simples [sauf le premier, où $t(x) = 1$] la formule (16), avec la valeur (17) pour ψ, n'est pas exacte sur *tout* le segment $(-1, +1)$. En effet, soit par exemple, $t(x) = 1 + x$, où nous avons

$$\bar{R}_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta};$$

donc la valeur exacte de ψ doit être $\psi = \frac{\theta}{2}$, et cette valeur ne peut certainement pas être donnée par (17) qui jouit de la propriété de s'annuler aux deux extrémités. D'ailleurs, un calcul facile donne actuellement

$$\log t(x) = \log(1+\cos\theta) = -\log 2 + 2\left[\cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \ldots\right]$$

de sorte que, d'après (17), on aurait

$$\psi = \sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \ldots,$$

qui n'est égale à $\frac{\theta}{2}$ que pour $x > -1$; mais pour $x = -1$, on a $\psi = 0$ et la convergence est manifestement non uniforme dans le voisinage de ce point. La même circonstance se présente dans le cas général des polynomes de Jacobi.

3. **Les polynomes classiques de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ qui sont orthogonaux relativement au poids (121) ne sont pas normés; ainsi, en désignant par $\bar{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ les polynomes** ***normés*** **correspondants, on a**

$$(126)\quad \bar{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

De même, si $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ***représente le polynome orthogonal de degré n ayant son terme de degré supérieur égal à x^n, on a***

$$(127)\quad R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \times \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

On vérifie directement que

$$(128)\quad \begin{aligned} H_n^2[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}] &= \int_{-1}^{+1}[R_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx \\ &= 2^{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}, \end{aligned}$$

où

$$(122)\quad \rho = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4};$$

donc, d'accord avec la seconde des formules (46 ***bis*****),**

$$(129)\quad \begin{aligned} H_n^2[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}] \\ \sim \pi\frac{2^{2n+\alpha+\beta}(n+\alpha)^{n+\alpha}(n+\beta)^{n+\beta}(n+\alpha+\beta)^{n+\alpha+\beta}n^n}{(2n+\alpha+\beta)^{2n+\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta)^{2n+\alpha+\beta}} \sim \frac{\pi}{2^{2n+\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

La valeur $L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}]$ est donnée asymptotiquement, d'après ce qui précède, par la première des formules (46 bis), et il vient

$$(130)\quad L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}] \sim \frac{1}{2^{n+\frac{\alpha+\beta-1}{2}}} = \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}}.$$

Nous allons démontrer que : ***pour***

$$(131)\quad 0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2}, \qquad 0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$$

le maximum de $|(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ *est asymptotiquement égal à* (130); *et, au contraire, dans le cas où les conditions* (131) *ne sont pas remplies, c'est-à-dire si l'on a au moins une des inégalités* $|\alpha| > \frac{1}{2}$, $|\beta > \frac{1}{2}$, *le maximum considéré est supérieur à* (130).

A cet effet, posons

$$f_{n,\rho,\rho_1}(x) = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{132}$$

Dans le cas où aucune confusion ne sera possible, nous omettrons certains indices de $f_{n,\rho,\rho_1}(x)$, en écrivant $f_{n,\rho}(x)$ lorsque $\rho = \rho_1$, ou simplement $f_n(x)$ lorsque les paramètres ρ et ρ_1 resteront constants pendant tout le raisonnement.

Cela étant, en posant $x = \cos\theta$, on vérifie, en tenant compte de l'équation différentielle connue ([1]), à laquelle satisfont les polynomes de Jacobi, que l'on a

$$\frac{d^2 f_{n,\rho,\rho_1}(x)}{d\theta^2} + \frac{1}{\lambda_n^2} f_{n,\rho,\rho_1}(x) = 0, \tag{133}$$

où

$$\lambda_n^2(x) = \frac{1-x^2}{(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2 + (1+x)\rho(1-2\rho) + (1-x)\rho_1(1-2\rho_1)}. \tag{134}$$

Puisque λ_n^2 est asymptotique à $\frac{1}{(n+\rho+\rho_1)^2}$ dans toute région *fixe* ne contenant pas les points ± 1, l'intégrale générale de (133) est asymptotique à $A\cos[(n+\rho+\rho_1)\theta+\varphi]$ dans tout intervalle donné *intérieur* au segment $(-1, +1)$, où A et φ sont deux constantes arbitraires.

Ainsi, on aura sur $(-1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$, quel que soit $0 < \varepsilon < 1$,

$$f_{n,\rho,\rho_1}(x) \sim A\cos[(n+\rho+\rho_1)\theta+\varphi] \tag{135}$$

où la constante nous importe peu pour le moment ([2]).

([1])
$$(1-x^2)R_n''(x) + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+1)x]R_n'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)R_n(x) = 0.$$

([2]) La formule (135) est d'ailleurs la formule asymptotique classique des polynomes de Jacobi pour *l'intérieur* du segment $(-1, +1)$ et il est bien connu que $\varphi = -\rho\pi$.

Pour déterminer la constante A, il suffit d'observer que

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{f_n^2(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{H}_n^2\,[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}]\,[1-\delta]$$

où δ tend vers zéro avec ε; donc, en vertu de (129) et (135), on aura

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{A}^2 \sim \frac{\pi}{2^{2n+\alpha+\beta}},$$

d'où

$$(136)\qquad |\mathrm{A}| \sim \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \sim \mathrm{L}_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}].$$

Ainsi, d'après (130), la valeur asymptotique des maxima de $|f_{n,\rho,\rho_1}(x)|$ *à l'intérieur* du segment $(-1,+1)$ est égale à

$$\mathrm{L}_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}];$$

mais nous devons encore examiner la valeur de ces maxima dans le voisinage des extrémités.

Posons dans ce but

$$(137)\qquad u_n(x) = f_n^2(x) + \lambda_n^2\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2.$$

Donc, en tenant compte de (133),

$$(138)\qquad \frac{du_n(x)}{d\theta} = 2f_n(x)\frac{df_n(x)}{d\theta} + 2\lambda_n^2\frac{df_n(x)}{d\theta}\frac{d^2f_n(x)}{d\theta^2} + 2\lambda_n\frac{d\lambda_n}{d\theta}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2$$
$$= 2\lambda_n\frac{d\lambda_n}{d\theta}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2 = \frac{d\lambda_n^2}{d\theta}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2,$$

d'où

$$(138\,bis)\qquad \frac{du_n(x)}{dx} = \frac{d\lambda_n^2}{dx}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2$$
$$= \frac{(1-x)^2\rho_1(1-2\rho_1)-(1+x)^2\rho(1-2\rho)}{[(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2+(1+x)\rho(1-2\rho)+(1-x)\rho_1(1-2\rho_1)]^2}\left[\frac{df_n(x)}{d\theta}\right]^2.$$

Par suite *le signe de* $\frac{du_n}{dx}$ *est le même que celui de* $\frac{d\lambda_n^2}{x}$.

En particulier, $u_n(x)$ [ainsi que $\lambda_n^2(x)$] *sera constant, si l'on a en même temps* $\rho = 0$ ou $\rho = \frac{1}{2}$ et $\rho_1 = 0$ ou $\rho_1 = \frac{1}{2}$; *ce sont les quatre cas signalés plus haut, où les polynomes normés de Jacobi se réduisent aux formes* (124).

En général, le numérateur de (138 *bis*) s'annule pour

$$x = \frac{\left[\sqrt{\rho_1(1-2\rho_1)} \mp \sqrt{\rho(1-2\rho)}\right]^2}{(\rho_1-\rho)(1-2\rho-2\rho_1)};$$

par conséquent, $u_n(x)$ *atteindra un extremum à l'intérieur du segment* $(-1, +1)$ *dans le cas où l'on a*

$$\rho\rho_1(1-2\rho)(1-2\rho_1) \geq 0, \tag{139}$$

c'est-à-dire *si l'on a simultanément les deux inégalités* (131) *ou si aucune de ces inégalités n'est vérifiée;* cet extremum sera donc atteint pour

$$x_0 = \frac{\sqrt{\rho_1(1-2\rho_1)} - \sqrt{\rho(1-2\rho)}}{\sqrt{\rho_1(1-2\rho_1)} + \sqrt{\rho(1-2\rho)}}. \tag{140}$$

Sous l'hypothèse (131), l'extremum sera un *maximum :* la courbe monte ainsi depuis -1 à x_0 pour s'abaisser ensuite, lorsque x varie de $x_0 - 1$.

Mais, d'après (137), les maxima de $f_n^2(x)$ sont égaux aux valeurs correspondantes de $u_n(x)$. Donc dans le cas où

$$0 < \rho < \frac{1}{2}, \qquad 0 < \rho_1 < \frac{1}{2}, \tag{131 bis}$$

le maximum absolu M_n de

$$|f_n(x)| = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} . R_n^{\alpha,\beta}(x) \tag{132 bis}$$

sera atteint, soit pour $x = x_0$, soit pour l'une au moins des deux racines successives de $f'(x) = 0$ entre lesquelles se trouve x_0. En tenant compte de (136), *la valeur asymptotique de ce maximum absolu est*

$$M_n \sim \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \sim L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}]. \tag{141}$$

La première partie de notre proposition énoncée au début du paragraphe est par conséquent démontrée.

4. Dans le cas où aucune des inégalités (131) ne se trouve remplie, l'extremum de $u_n(x)$ est un *minimum*, de sorte que les maxima de (132 *bis*) vont en augmentant depuis x_0 vers les deux bords. Enfin dans le cas où une seulement des inégalités (131) est remplie, par exemple, si

$$0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}, \qquad \rho > \frac{1}{2},$$

la courbe $Y = u_n(x)$ varie toujours d'une façon monotone, et il en est de même des maxima de (132 *bis*) qui, pour l'exemple considéré, augmentent de gauche à droite.

Nous devons montrer qu'actuellement *le maximum absolu* M_n de (132 *bis*) *qui est identique, par conséquent, à l'un au moins des maxima* les plus voisins des bords *est même asymptotiquement supérieur à la valeur* $|A| = \frac{1}{2^{n-\rho-\rho_1-1}}$ *asymptotique aux maxima intérieurs.*

Pour fixer les idées, supposons $\rho > \frac{1}{2}$. Alors le dénominateur de $\lambda_n^2(x)$ s'annule pour x_1 voisin de $+1$, mais nous n'avons pas à considérer le petit intervalle, où $\lambda_n^2(x)$ serait négatif, car $u_n(x)$ étant négatif dans cet intervalle [puisque $u_n(1) = 0$], $f_n(x)$ *ne peut pas y avoir d'extremum et à fortiori ne peut pas s'y annuler.* Donc pour n très grand l'extremum a le plus approché de 1 satisfait à l'inégalité asymptotique

$$\sin\theta = \sqrt{1-a^2} > \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1},$$

où

$$\delta = 2\rho(2\rho-1)$$

(cette inégalité est, évidemment exacte pour toute valeur de n lorsque $\rho \geqq \rho_1$).

D'autre part, d'après la théorie des équations différentielles linéaires du second ordre, $f_n(x) = f_n(\cos\theta)$ admet nécessairement un extremum dans un intervalle πL, où L est la plus grande valeur de λ_n dans cet intervalle. Par conséquent, si nous posons, pour n très grand,

$$\theta = \frac{z}{n+\rho+\rho_1},$$

il y aura un extremum $a = \cos\theta_0$, tel que

$$(141) \qquad \frac{z}{n+\rho+\rho_1} \leqq \theta_0 < \frac{z}{n+\rho+\rho_1} + \frac{\pi z}{n+\rho+\rho_1}\frac{1}{\sqrt{z^2-\delta}}.$$

En cherchant à minimer le second membre de (141) on obtient $z^2 = \delta + (\pi\delta)^{\frac{2}{3}}$; donc

$$(142) \qquad b = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1} \leqq \theta_0 < \frac{\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{n+\rho+\rho_1}.$$

Nous allons comparer le maximum $M > A$ de $|f_n|$ dans cet intervalle avec les maxima intérieurs A. Dans ce but observons que, $0 \leqq \cos\varphi_{k+1} < \cos\varphi_k$ correspondant à deux extrema successifs M_k, M_{k+1} de $f_n(x)$, on aura, d'après (133) et (137), en intégrant par parties

$$(143) \qquad \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \left(\frac{df_n}{d\theta}\right)^2 d\theta = \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{f_n^2\, d\theta}{\lambda_n^2} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{u_n\, d\theta}{\lambda_n^2}.$$

Par conséquent, en vertu de (138), on a

$$(144) \qquad \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} \frac{d\lambda_n^2}{d\theta}\left(\frac{df_n}{d\theta}\right)^2 d\theta = f_n^2(\cos\varphi_{k+1}) - f_n^2(\cos\varphi_k)$$
$$= H\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} u_n \frac{d\log\lambda_n}{d\theta}\, d\theta,$$

le nombre positif H étant compris entre la plus grande et la plus petite valeur de

$$\frac{\dfrac{d\lambda_n^2(\cos\psi_0)}{d\theta}}{\dfrac{d\lambda_n^2(\cos\psi_1)}{d\theta}},$$

avec

$$\varphi_k \leqq \psi_0 \leqq \varphi_{k+1}, \qquad \varphi_k \leqq \psi_1 \leqq \varphi_{k+1}.$$

Donc les maxima successifs $M_k > M_{k+1}$ satisfont à l'inégalité

$$(145) \qquad M_k^2 - M_{k+1}^2 > HM_{k+1}^2 \log\frac{\lambda_n(\cos\varphi_k)}{\lambda_n(\cos\varphi_{k+1})} > HA^2 \frac{\log\lambda_n(\cos\varphi_k)}{\log\lambda_n(\cos\varphi_{k+1})}.$$

On aura une limite inférieure de H en prenant pour ψ_0 et ψ_1 les deux valeurs extrêmes de (142), ce qui donne pour n très grand

$$H > \frac{\delta\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)}{\left[\pi^{\frac{1}{3}} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} + 3\delta^{\frac{2}{3}}\right]^2}.$$

Donc finalement, en faisant la somme des inégalités (145), on a l'inégalité

$$(146)\qquad M^2 > A^2\left[1 + \frac{\delta\left(\pi^{\frac{1}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)}{2\left[\pi^{\frac{4}{3}} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} + 3\delta^{\frac{1}{3}}\right]^2}\log\left(1 + \frac{\delta}{\pi^2 + 3\pi^{\frac{4}{3}}\delta^{\frac{1}{3}} + 3\pi^{\frac{2}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}}\right)\right]$$

en prenant pour θ_0 sa plus grande valeur (142).

Remarque. — Les mêmes considérations [en utilisant, en particulier, l'inégalité (145) sous sa forme plus forte et en observant que $\lambda_n \sim \frac{1}{n+\rho+\rho_1}$ aux points intérieurs] permettraient d'augmenter un peu la limite inférieure de M, mais nous n'y insisterons pas. Observons seulement qu'il n'est pas exclu que la valeur θ_0 fixée par les inégalités (142) peut ne pas être la plus petite valeur de θ correspondant à un extremum. En tout cas, il y aura tout au plus un seul extremum pour $\theta < \theta_0$, car il est aisé de voir que $f_n(x)$ (et par conséquent le polynome de Jacobi correspondant) ne peut pas avoir de racine $\theta < b$ (zéro exclu, bien entendu). Il suffit de vérifier que

$$\sqrt{\delta + (\pi\delta)^{\frac{2}{3}}}\left(1 - \frac{\pi}{2(\pi\delta)^{\frac{1}{3}}}\right) < \delta^{\frac{1}{2}},$$

quel que soit $\delta > 0$, puisqu'un intervalle de grandeur $\frac{\pi}{2}l$, où $l < \lambda_n$ ne peut contenir à la fois une racine et un extremum.

Par conséquent, si l'on désigne par $\cos\gamma_0$ la racine la plus approchée de $+1$ du polynome de Jacobi de paramètres $\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}$, $\beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}$, où $\rho > \frac{1}{2}$, on a, pour n très grand,

$$b = \frac{\delta^{\frac{1}{2}}\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1} < \gamma_0 < \frac{\left(\pi^{\frac{2}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{n+\rho+\rho_1}.$$

Puisqu'on a $\gamma_1 < \gamma_0$, si $\cos\gamma_1 = x$ est la valeur *la plus voisine* de 1, où $f_n(x)$ atteint un extremum, on a

$$(148)\qquad \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1} < \gamma_1 < \frac{\left(\delta^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\pi^{\frac{2}{3}}\right)\left(\delta^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{n+\rho+\rho_1},$$

car dans un intervalle $\left(\theta_1, \theta_1 + L\frac{\pi}{2}\right)$ il doit y avoir une racine ou un extremum de $f_n(x)$.

5. Dans le cas où aucune des inégalités (131) n'a lieu, l'extremum M_n de $f_n(x)$ au point (140) donne, grâce au théorème généralisé de M. de la Vallée Poussin [1], une limite inférieure de

$$L_n[(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}],$$

quel que soit n, mais d'après ce qui précède, la fonction $f_n(x)$ ne réalise pas le minimum de l'écart du produit correspondant, même pour $n \to \infty$. Au contraire, les inégalités (131) étant satisfaites, les maxima de $f_{n,\rho,\rho_1}(x)$ près des extrémités sont inférieurs à M_n, de sorte que l'on a d'après le théorème fondamental de Tchebichef pour n fini

$$M_n > L_n[(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}].$$

Ainsi la limite inférieure de L_n que nous donnerait le théorème de la Vallée Poussin ne saurait être supérieure à la valeur du maximum relatif de $|f_n(x)|$ voisin du bord, et il semble inattendu à première vue que $f_n(x)$ sans avoir $\overline{n+1}$ extrema égaux [2] asymptotiquement pour $n \to \infty$, fournit néanmoins, d'après (130), l'écart asymptotique minimum du produit correspondant.

Dans ces conditions il me paraît utile de prouver directement que $f_n(x)$ réalise asymptotiquement l'écart minimum, le même raisonnement pouvant être appliqué dans des circonstances analogues [3].

Pour simplifier l'écriture, nous nous bornerons au cas où l'on a, soit

---

(1) Voir mes *Leçons* citées, p. 5.

(2) Le fait que l'inégalité signalée subsiste aussi asymptotiquement peut être établi par les mêmes considérations qui nous ont conduit au paragraphe **4** à la même conclusion dans le cas où (131) n'a pas lieu.

(3) En particulier, si l'on se donne un des coefficients de x^k, où $\lim \frac{k}{n} = 1$ ou $\lim \frac{k}{n} = 0$, en supposant k et n de même parité et $\rho = \rho_1$.

$\rho_1 = \rho$, soit $\rho_1 + \rho = \frac{1}{2}$. Alors

(134 *bis*) $$\lambda_n^2(x) = \frac{1 - x^2}{(1 - x^2)(n + \rho + \rho_1)^2 + 2\rho(1 - 2\rho)}$$

est une fonction paire.

De (137 et 138 *bis*) nous concluons, en supposant $x > 0$, que

$$0 > \frac{du_n(x)}{dx} \geqq \frac{u_n(x)}{\lambda_n^2(x)} \frac{d\lambda_n^2(x)}{dx};$$

donc, en tenant compte de ce qu'actuellement $x_0 = 0$, on a

$$0 > \int_0^x \frac{d \log u_n(x)}{dx} dx > \int_0^x \frac{d \log \lambda_n^2}{dx} dx,$$

d'où

(149) $$0 > \log \frac{u_n(x)}{u_n(0)} > \log \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + \dfrac{2\rho(1 - 2\rho)}{(n + \rho + \rho_1)^2}}.$$

Donc, x_i désignant les abscisses où $f_n^2(x)$ atteint ses maxima, on a

(150) $$\left\{\begin{array}{l} u_n(0) > u_n(x) > u_n(0) \dfrac{1}{1 + \dfrac{2\rho(1 - 2\rho)}{(1 - x^2)(x + \rho + \rho_1)^2}}, \\ \text{d'où} \\ f_n^2(x_i) > \dfrac{M_n^2}{1 + \dfrac{2\rho(1 - 2\rho}{(1 - x_i^2)(x + \rho + \rho_1)^2}}, \end{array}\right.$$

car pour n pair $u_n(0) = M_n^2 =$ maximum absolu de $[f_n(x)]^2$, et pour n impair $u_n(0) = \dfrac{\left(\dfrac{df_n(0)}{dx}\right)^2}{(n + \rho + \rho_1)^2 + 2\rho(1 - 2\rho)}$ et $M_n^2 < u_n(0)$; d'ailleurs dans ce cas également $\dfrac{M_n^2}{u_n(0)}$ tend rapidement vers 1, lorsque $n \to \infty$.

Il nous suffira donc de montrer que, a étant un nombre fixe $(1 > a > 0)$, on pourra, en prenant n assez grand, affirmer qu'aucun polynome $P_n(x)$ de degré n, ayant le même terme supérieur x^n que le polynome correspondant de Jacobi $R_n^{(\alpha,\beta)}$, mis à la place de ce dernier dans $f_n(x)$ ne rendra ce produit constamment inférieur à $(1 - a)M_n$ sur $(-1, +1)$ en valeur absolue.

En effet, si un tel polynome existait, il devrait exister un polynome $Q(x)$ de degré inférieur à n obtenu par soustraction, tel que

$$\psi(x) = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} Q(x) \tag{151}$$

jouisse de la propriété que

$$(-1)^i \psi(x_i) = \alpha_i > \frac{M_n}{\sqrt{1 + \dfrac{2\rho(1-2\rho)}{\varepsilon^2 (n+\rho+\rho_1)^2}}} - M_n(1-a) > \frac{M_n a}{2}, \tag{152}$$

lorsque $1 - x_i^2 > \varepsilon^2$, où ε est un nombre *fixe* arbitrairement petit, et que

$$|\psi(x)| < 2 M_n \tag{153}$$

sur tout le segment, en supposant que $\varepsilon(n+\rho+\rho_1) \geqq \sqrt{\dfrac{2\rho(1-2\rho)}{a}}$.

Or, en posant

$$F(x) = (1-x^2)\frac{dR_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx} + [(\rho_1 - \rho) - (\rho + \rho_1)x] R_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{154}$$

on aura, d'après la formule d'interpolation de Lagrange,

$$Q(x) = F(x) \sum \frac{\psi(x_i)}{(x - x_i)(1 - x_i)^{\rho}(1 + x_i)^{\rho_1} F'(x_i)}. \tag{155}$$

Exprimons que le coefficient de x^n dans $Q(x)$ est nul : donc

$$\begin{aligned} &\sum \frac{\psi(x_i)}{(1-x_i)^{\rho}(1+x_i)^{\rho_1} F'(x_i)} \\ &= \sum \frac{(-1)^i \alpha_i}{(1-x_i)^{\rho}(1+x_i)^{\rho_1} \left\{ [(\rho+\rho_1-1)x_i + \rho - \rho_1] \dfrac{dR_n^{(\alpha,\beta)}(x_i)}{dx} - [n^2 + (2n+1)(\rho - \rho_1)] R_n^{(\alpha,\beta)}(x_i) \right\}} = 0, \end{aligned} \tag{156}$$

en tenant compte de l'équation différentielle à laquelle satisfont les polynomes $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ de Jacobi.

Donc, d'après $F(x_i) = 0$, la formule (156) se transforme en

$$\begin{aligned} &\sum \frac{-(-1)^i}{(1-x_i)^{\rho}(1+x_i)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x_i) \left\{ \dfrac{[(\rho+\rho_1-1)x_i + \rho - \rho_1][(\rho+\rho_1)x_i + \rho - \rho_1]}{1 - x_i^2} - [n^2 + (2n+1)(\rho+\rho_1)] \right\}} \\ &= \sum \frac{(-1)^{i-1}\alpha_i}{(1-x_i)^{\rho}(1+x_i)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x_i) \left[(n+\rho+\rho_1)^2 + \dfrac{2\rho(1-2\rho)}{1-x_i^2} \right]} \\ &= \sum \frac{\alpha_i}{f(x_i) \left[(n+\rho+\rho_1)^2 + \dfrac{2\rho(1-2\rho)}{1-x_i^2} \right]} = 0. \end{aligned} \tag{157}$$

Mais l'égalité (157) est manifestement impossible, car la partie de cette somme qui correspond aux points x_i, satisfaisant à (152), dont le nombre est asymptotique à $n(1-2\varepsilon)$, étant composée de termes positifs, est supérieure à

$$\frac{n(1-2\varepsilon)a}{2\left[(n+\rho+\rho_1)^2+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{\varepsilon^2}\right]},$$

tandis que chacun des termes restants, dont le nombre est asymptotique $2n\varepsilon$, est inférieur en valeur absolue, à cause de (150) et (153), à

$$\frac{2M_n}{|f_n(x_i)|\left[(n+\rho+\rho_1)^2+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{1-x_i^2}\right]}<\frac{2\sqrt{1+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{(1-x_i^2)(n+\rho+\rho_1)^2}}}{(n+\rho+\rho_1)^2+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{1-x_i^2}}$$

$$=\frac{2}{(n+\rho+\rho_1)^2\sqrt{1+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{(1-x_i^2)(n+\rho+\rho_1^2)^2}}}$$

$$<\frac{2}{(n+\rho+\rho_1)^2\sqrt{1+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{\varepsilon^2(n+\rho+\rho_1)^2}}}.$$

L'égalité (157) conduirait à l'inégalité

$$\frac{(1-2\varepsilon)a}{2\sqrt{1+\dfrac{2\rho-4\rho^2}{\varepsilon^2(n+\rho+\rho_1)^2}}}<4\varepsilon, \tag{158}$$

absurde pour n très grand, si l'on a choisi $a>\dfrac{8\varepsilon}{1-2\varepsilon}$.

Remarque. — Par un raisonnement absolument analogue on démontrera que le produit

$$Q_n(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1},$$

où $Q_n(x)$ est un polynome de degré n, atteint asymptotiquement l'écart minimum

$$L_n\sim 2\left(\frac{1}{\xi+\sqrt{\xi^2-1}}\right)^{n+\rho+\rho_1} \tag{159}$$

sur le segment $(-1, +1)$, si l'on a

$$Q_n(\xi)(\xi-1)^\rho(\xi+1)^{\rho_1}=1$$

en un point $\xi > 1$. *Dans le cas où* $0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$, *cet écart minimum est asymptotiquement réalisé par les polynomes de Jacobi correspondants* (multipliés par une constante convenable).

6. Arrêtons-nous un instant sur le cas des polynomes de Legendre $\left(\rho = \rho_1 = \frac{1}{4}\right)$. Actuellement le maximum absolu de $|f_n(x)|$ sera atteint pour $x = 0$, si $n = 2m$ est pair, et lorsque $n = 2m+1$ est impair, pour x égal à la plus petite racine de $f'_n(x) = 0$. Par conséquent, *en désignant par* $P_n(x)$ *le polynome classique de Legendre* [c'est-à-dire en supposant que $P_n(1) = 1$] *on a, pour* $n = 2m$ *quelconque*,

$$(160) \qquad (1-x^2)^{\frac{1}{4}} |P_{2m}(x)| \leqq \frac{1.3\ldots 2m-1}{2.4\ldots 2m}$$

sur tout le segment $(-1, +1)$, *et l'égalité a effectivement lieu à l'origine.*

Pour $n = 2m+1$, le maximum de $u_n(x)$ sera égal à

$$\lambda_n^2(0)\left(\frac{df_n(0)}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{n^2+n+\frac{1}{2}}[R'_n(0)]^2,$$

de sorte que

$$(161) \qquad (1-x^2)^{\frac{1}{4}} |P_{2m+1}(x)| < \frac{1.3\ldots 2m-1}{2.4\ldots 2m} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4m+3}{8m^2+8m+2}}},$$

car

$$P'_{2m+1}(0) = \pm \frac{1.3\ldots 2m+1}{2.4\ldots 2m}:$$

pour n impair, la valeur du second membre (161) ne sera atteinte qu'asymptotiquement. Ainsi, quel que soit n, on a (sur le segment $-1, +1$), d'après la formule de Wallis,

$$(162) \qquad (1-x^2)^{\frac{1}{4}} |P_n(x)| < \sqrt{\frac{1}{m\pi}},$$

où $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ (la valeur du second membre ne pouvant pas être asymptotiquement abaissée).

C'est Stieltjes qui remarqua le premier que l'on peut fixer une constante A telle que

$$(1-x^2)^{\frac{1}{4}}|P_n(x)| < \frac{A}{\sqrt{n}}.$$

M. Fejér qui est revenu récemment(¹) sur cette question signale que la meilleure valeur de A égale à $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ a été obtenue par M. Cronwall (²); d'après ce qui précède, la limite inférieure de A, qui dépend de n, est environ 2 fois plus petite, et sa valeur asymptotique, pour $n \to \infty$, est exactement 2 fois moindre que celle trouvée par M. Cronwall.

Au même endroit M. Fejér obtient une inégalité analogue relative à la dérivée du polynome de Legendre :

$$(1-x^2)|P'_n(x)| < \frac{7}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{n}.$$

Cette inégalité peut aussi être précisée.

A cet effet, reprenons de nouveau les polynomes orthogonaux $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ayant le terme de degré supérieur égal à x^n, de sorte que

$$R_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{n}\frac{d}{dx}[R_n^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)], \tag{163}$$

et considérons

$$f_{n,\rho}(x) = (1-x^2)^\rho R_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \tag{132 bis}$$

où nous supposerons $0 < \rho < \frac{1}{2}$.

D'après une remarque faite plus haut (au paragraphe **4**), tous les extrema de $f_{n,\rho+\frac{1}{2}}(x)$ satisfont à l'inégalité

$$(1-x^2) > \frac{2\rho(2\rho+1)}{(n+1+2\rho)^2}. \tag{164}$$

Par conséquent, en ces points, on a

$$\lambda_{n+1,\rho}(x) > \frac{\sqrt{2\rho(2\rho+1)}}{(n+1+2\rho)\sqrt{2\rho(2\rho+1)}+2\rho(1-2\rho)} = \frac{\sqrt{\rho+\frac{1}{2}}}{n+1+2\rho}.$$

(¹) *Math. Zeitschrift*, t. 22, 1925, p. 267-298.

(²) *Mathem. Annalen*, t. 72, 1913, p. 213-270.

Or, en vertu de (137), on a

$$\left|\lambda_{n+1,\rho}(x)\frac{df_{n+1,\rho}(x)}{d\theta}\right| \leqq M_{n+1,\rho}, \tag{165}$$

où $M_{n,\rho} \sim \frac{1}{2^{n+2\rho-1}}$ désigne le maximum de $\sqrt{u_n(x)}$; donc

$$\left|(1-x^2)^{\rho+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}[R_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)] - 2\rho(1-x^2)^{\rho-\frac{1}{2}}R_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)\right|$$
$$= \left|\frac{df_{n+1,\rho}(x)}{d\theta}\right| < \frac{n+1+2\rho}{\sqrt{\rho+\frac{1}{2}}} M_{n+1,\rho},$$

d'où

$$\left|(1-x^2)^{\rho+\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}[R_{n+1}^{(\alpha,\alpha)}(x)]\right| < \left[\frac{2\rho}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{n+1+2\rho}{\sqrt{\frac{1}{2}+\rho}}\right] M_{n+1,\rho}$$
$$< \frac{(1+\sqrt{\rho})(n+1+2\rho)}{\sqrt{\rho+\frac{1}{2}}} M_{n+1,\rho}.$$

Par conséquent,

$$\left|f_{n,\rho+\frac{1}{2}}(x)\right| < \frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\rho}} M_{n+1,\rho}\left(1+\frac{2\rho}{n+1}\right) \sim \frac{1}{2^{n+2\rho}}\,\frac{1+\sqrt{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{2}+\rho}}. \tag{166}$$

En particulier dans le cas des polynomes de Legendre, on a

$$P_n(x) = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!} R_n^{(0,0)}(x),$$

donc

$$\left|(1-x^2)^{\frac{3}{4}} P'_n(x)\right| < \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}\, M_{n,\frac{1}{4}} \frac{1.3\ldots 2n-1}{n!} \tag{167}$$
$$< \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{6}{n\pi}} \sim \sqrt{\frac{6n}{\pi}}.$$

Dans cette inégalité ce n'est pas seulement le coefficient de $\sqrt{n}$ dans le second membre qui est plus petit que celui de M. Fejér, mais *le plus essentiel c'est que le facteur de* $P'_n(x)$ *est* $(1-x^2)^{\frac{3}{4}}$ *au lieu de* $(1-x^2)$, *et l'exposant de* $(1-x^2)$ *ne saurait être encore diminué sans augmenter l'ordre de grandeur du second membre.*

Si l'on conserve l'exposant *un* de $1-x^2$, on obtient par le même raisonnement, après avoir remarqué que pour $\rho = \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$ [aux points où $f_{n,\rho+\frac{1}{2}}(x)$ est extremum]

$$\lambda_{n+1,\rho}(x) \geqq \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{n+1+2\rho},$$

que pour n très grand, on a

$$(168) \qquad |(1-x^2)P'_n(x)| < \sqrt{\frac{2n}{\pi}},$$

et comme dans (162), *la valeur du second membre de* (168) *ne peut être asymptotiquement diminuée.*

7. Il importe d'avoir une limite supérieure de $|f_n(x)|$ pour tous les polynomes de Jacobi ($\rho \geqq 0$, $\rho_1 \geqq 0$).

Il n'y aurait rien d'essentiel à changer dans les calculs précédents, si $\rho \gtrless \rho_1$. Ainsi moyennant la formule (163), on pourra passer successivement à des valeurs quelconques de α, β satisfaisant simultanément aux inégalités

$$|\alpha - k| \leqq \frac{1}{2}, \qquad |\beta - k| \leqq \frac{1}{2},$$

où k est un nombre entier quelconque.

A cet effet, posons

$$(169) \qquad v_n = f^2 + \frac{f_0'^2}{(n+\rho+\rho_1)^2}$$

où $f = f_{n,\rho,\rho_1}$. Donc

$$(170) \quad v_0' = 2f_0'\left[f + \frac{f''}{(n+\rho+\rho_1)^2}\right] = 2f'\left[f - \frac{f}{\lambda_n^2(n+\rho+\rho_1)^2}\right]$$
$$= \frac{-2f'f}{(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2}[\rho(1-2\rho)(1+x) + \rho_1(1-2\rho)(1-x)]$$
$$= 2f'f''\left[\frac{1}{(n+\rho+\rho_1)^2} - \lambda_n^2\right].$$

Par conséquent, $v_n(x)$ atteint ses extrema en même temps que f_n^2 et $f_n'^2$. En particulier, lorsque

$$(171) \qquad \rho > \frac{1}{2}, \qquad \rho_1 > \frac{1}{2},$$

les maxima de φ_n correspondent à ceux de f_n^2. Donc, sous la condition (171), le maximum absolu M_{n,ρ,ρ_1} de $|f_{n,\rho,\rho_1}(x)|$ se confond avec celui de $\sqrt{\varphi_n}$, de sorte que le maximum absolu M'_{n,ρ,ρ_1} de $\left|\frac{df_{n,\rho,\rho_1}(x)}{d\theta}\right|$ satisfait à l'inégalité

$$M'_{n,\rho,\rho_1} < (n+\rho+\rho_1) M_{n,\rho,\rho_1}. \tag{172}$$

Donc en nous bornant, pour simplifier l'écriture, au cas de $\rho = \rho_1$, nous aurons, en tenant compte de (164),

$$\left|(1-x^2)^{\rho+\frac{1}{2}} \frac{dR_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)}{dx}\right| < (n+1+2\rho) M_{n+1,\rho}$$
$$+ \frac{2\rho M_{n+1,\rho}}{\sqrt{1-x^2}} < (n+1+2\rho)\left[1+\sqrt{\frac{\rho}{\frac{1}{2}+\rho}}\right]$$

d'où

$$M_{n,\rho+\frac{1}{2}} < \left(1+\frac{2\rho}{n+1}\right)\left[1+\sqrt{\frac{\rho}{\frac{1}{2}+\rho}}\right] M_{n+1,\rho}. \tag{173}$$

Par conséquent, en admettant qu'il soit déjà connu, qu'il existe une constante A_ρ, telle que

$$M_{n,\rho} < A_\rho L_n[(1-x^2)^\rho] \sim \frac{A_\rho}{2^{n+2\rho-1}},$$

on aura aussi pour n assez grand

$$M_{n,\rho+\frac{1}{2}} < \frac{A_{\rho+\frac{1}{2}}}{2^{n+2\rho}},$$

où

$$A_{\rho+\frac{1}{2}} < \left[1+\sqrt{\frac{\rho}{\rho+\frac{1}{2}}}\right] A_\rho.$$

On aura donc *a fortiori*, quel que soit $\rho > \frac{1}{2}$

$$M_{n,\rho} < 2^{2\rho} L_n[(1-x^2)^\rho] \sim \frac{1}{2^{n-1}}, \tag{174}$$

ce qui signifie que *les polynomes de degré n de Jacobi, multipliés par les facteurs $(1-x^2)^\rho$ correspondants ne s'écartent pas plus de zéro sur*

$(-1, +1)$ *que le polynome de degré n de Tchebichef lui-même, ayant le même terme supérieur.*

Pour limiter M_{n,ρ,ρ_1} où

$$\rho \geqq \frac{1}{2}, \qquad \rho_1 \geqq \frac{1}{2},$$

sont quelconques, il faut utiliser de la même manière, au lieu de (163), la formule

$$(175) \qquad R_{n-1}^{(\alpha,\beta+1)}(x) = \frac{1+\frac{\alpha+\beta}{2n}}{n+\alpha}\left[(1-x)\frac{d}{dx}[R_n^{(\alpha,\beta)}(x)] + nR_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]$$

qui résulte de la remarque que le coefficient de x^{n-1} dans $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ est égal à $\frac{n(\alpha-\beta)}{2n+\alpha+\beta}$, de sorte que le polynome de degré $n-1$ ainsi construit, orthogonal relativement au poids $(1-x)^\alpha(1+x)^{\beta+1}$, a son terme de degré supérieur égal à x^{n-1}.

En appliquant (175), on trouvera ainsi de proche en proche une inégalité analogue à (174).

Le seul cas qui demande encore à être discuté est celui où une seulement des inégalités (171) est remplie : soit

$$\rho < \frac{1}{2}, \qquad \rho_1 > \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, d'après (138), le maximum absolu de $|f_{n,\rho,\rho_1}(x)|$ est atteint près de l'extrémité -1, ses maxima relatifs allant en décroissant de gauche à droite. Mais d'autre part, d'après (170), les maxima de v_n correspondront à ceux de $f^2(x)$, tant que

$$\rho(1-2\rho)(1+x)+\rho_1(1-2\rho_1)(1-x)<0,$$

c'est-à-dire lorsque

$$(176) \qquad -1 < x < \frac{\rho_1(2\rho_1-1)+\rho(2\rho-1)}{\rho_1(2\rho_1-1)+\rho(1-2\rho)}.$$

Donc, l'inégalité (172) subsiste, pourvu qu'on désigne par M'_{n,ρ,ρ_1} le maximum absolu de $\left|\frac{df}{d\theta}\right|$ pour x situé dans l'intervalle (176).

Donc, on a

$$(177)\qquad \left|(1-x)^{\rho+\frac{1}{2}}(1+x)^{\rho_1+\frac{1}{2}}R'_{n+1}(x)\right| < (n+1+\rho+\rho_1)\,M_{n+1,\rho,\rho_1}+\frac{2\rho_1}{\sqrt{1-x^2}}M_{n+1,\rho,\rho_1}.$$

Donc, en tenant compte de ce que le maximum absolu de $\left|f_{n,\rho,\rho_1+\frac{1}{2}}(x)\right|$ est atteint dans le voisinage de $x=-1$ et de (164) (où ρ doit être remplacé par ρ_1), on a, d'après (175), pour n assez grand,

$$M_{n,\rho,\rho_1+\frac{1}{2}}<\sqrt{2}\left[1+\sqrt{\frac{\rho_1}{\frac{1}{2}+\rho_1}}\right]M_{n+1,\rho,\rho_1}.$$

Ainsi *on peut dans tous les cas fixer une constante* A_{ρ_1} *dépendant de* ρ_1, *telle que*

$$(178)\qquad M_{n,\rho,\rho_1}<A_{\rho_1}L_n[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}]\qquad \left(\rho_1>\frac{1}{2}\right).$$

Observons, enfin, que dans l'hypothèse que

$$\rho<\frac{1}{2},\qquad \rho_1>\frac{1}{2},$$

aucune des fonctions u_n et v_n ne reste finie dans tout l'intervalle $(-1,+1)$. Pour ce cas il convient de construire la fonction

$$(179)\qquad w_n(x)=f_n^2+\mu_n^2\left(\frac{df_n}{d\theta}\right)^2,$$

où

$$(180)\qquad \mu_n^2=\frac{1-x}{(1-x)(n+\rho+\rho_1)^2+\rho(1-2\rho)}.$$

On a sur tout le segment $\mu_n^2<\frac{1}{(n+\rho+\rho_1)^2}$. En appliquant cette inégalité à l'intervalle (176), nous en concluons que

$$(181)\qquad w_n(x)\leqq M_{n,\rho,\rho_1}^2$$

dans cet intervalle. Or, tant que $\lambda_n^2>0$, ce qui a lieu sur tout le segment $(-1,+1)$, sauf au voisinage de -1, et, par conséquent en particulier, sur la partie du segment $(-1,+1)$ extérieure à l'intervalle (176), on a $\mu_n^2 < \lambda_n^2$; donc, on a dans cette dernière partie

$$(182) \qquad w_n(x) \leqq u_n(x) < M^2_{n,\rho,\rho_1},$$

puisque $u_n(x)$ va en diminuant de gauche à droite. Par conséquent, l'inégalité (181) a lieu sur tout le segment et l'on a *a fortiori* sur tout le segment

$$(183) \qquad \mu_n \left| \frac{df_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta} \right| < M_{n,\rho,\rho_1}.$$

On aura évidemment un résultat analogue, si $\rho > \frac{1}{2}$ et $\rho_1 < \frac{1}{2}$.

8. Ainsi, *dans le cas où* $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 < \frac{1}{2}$, *on devra considérer la fonction* $u_n(x)$ (137); *dans le cas où* $\rho \geqq \frac{1}{2}$, $\rho_1 \geqq \frac{1}{2}$, *on considérera la fonction* $v_n(x)$ (169); *dans le cas où* $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 \geqq \frac{1}{2}$, *on considérera la fonction* $w_n(x)$ (179); dans le cas également, où $\rho_1 \geqq \frac{1}{2}$, $\rho_1 < \frac{1}{2}$, on considérerait la fonction correspondante $w_n(x)$, où

$$\mu_n^2 = \frac{1+x}{(1+x)(n+\rho+\rho_1)^2 + \rho_1(1-2\rho_1)}.$$

On pourra poser, par conséquent,

$$(184) \quad \begin{cases} f_n = \sqrt{u_n}\cos\Phi_n, & \lambda_n \dfrac{df_n}{d\theta} = -\sqrt{u_n}\sin\Phi_n & \left(0 \leqq \rho < \frac{1}{2},\ 0 \leqq \rho_1 < \frac{1}{2}\right), \\ f_n = \sqrt{v_n}\cos\Psi_n, & \dfrac{1}{n+\rho+\rho_1}\dfrac{df_n}{d\theta} = -\sqrt{v_n}\sin\Psi_n & \left(\rho \geqq \frac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \frac{1}{2}\right), \\ f_n = \sqrt{w_n}\cos\Xi_n, & \mu_n \dfrac{df_n}{d\theta} = -\sqrt{w_n}\sin\Xi_n & \left(0 \leqq \rho < \frac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

où $(\lambda_n > 0,\ \mu_n > 0)$,

$$(185) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Phi_n = -\lambda_n \dfrac{d\log f_n}{d\theta}, & \operatorname{tang}\Psi_n = \dfrac{-1}{n+\rho+\rho_1}\dfrac{d\log f_n}{d\theta}, \\ \operatorname{tang}\Xi_n = -\mu_n \dfrac{d\log f_n}{d\theta}. \end{cases}$$

Ainsi, puisque

$$-\frac{d\log f_n}{d\theta} = \left[\frac{-\rho}{1-x} + \frac{\rho_1}{1+x} + \frac{R'_n}{R_n}\right]\sqrt{1-x^2},$$

donc Φ_n croît ([1]) depuis $-\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\dfrac{2\rho}{1-2\rho}}$ jusqu'à

$$n\pi + \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{2\rho_1}{1-2\rho_1}};$$

ψ_n croît depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $n\pi+\frac{\pi}{2}$; Ξ_n croît depuis $-\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\dfrac{2\rho}{1-2\rho}}$ jusqu'à $n\pi+\frac{\pi}{2}$, lorsque θ varie de 0 à π,

Nous allons montrer à présent que dans chaque cas considéré on a pour les fonctions successives $f_n(x)$ de même indice les relations asymptotiques telles que

$$(186)\quad \left\{\begin{array}{l} \bar{f}_{n+k} \sim \sqrt{\bar{u}_n}\cos(\Phi_n + k\theta), \quad \lambda_{n+k}\dfrac{d\bar{f}_{n+k}}{d\theta} \sim -\sqrt{\bar{u}_n}\sin(\Phi_n + k\theta) \\ \qquad\qquad \left(0 \leqq \rho < \dfrac{1}{2},\ 0 \leqq \rho < \dfrac{1}{2}\right), \\ \bar{f}_{n+k} \sim \sqrt{\bar{v}_n}\cos(\Psi_n + k\theta), \quad \dfrac{1}{n+k+\rho+\rho_1}\dfrac{d\bar{f}_{n+k}}{d\theta} \sim -\sqrt{\bar{v}_n}\sin(\Psi_n + k\theta) \\ \qquad\qquad \left(\rho \geqq \dfrac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right), \\ \bar{\bar{f}}_{n+k} \sim \sqrt{\bar{w}_n}\cos(\Xi_n + k\theta), \quad \mu_{n+k}\dfrac{d\bar{\bar{f}}_{n+k}}{d\theta} \sim -\sqrt{\bar{w}_n}\sin(\Xi_n + k\theta) \\ \qquad\qquad \left(\rho < \dfrac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right), \end{array}\right.$$

valables uniformément sur le segment $(-1, +1)$ pourvu que $\frac{k}{n} \to 0$, avec une erreur de l'ordre $O\left(\frac{k}{n}\right)$. Dans les formules (186), *les fonctions $\bar{f}_{n+k}$ ainsi que les fonctions $\bar{u}_n$, $\bar{v}_n$, $\bar{w}_n$ sont bornées supérieurement et diffèrent de celles qui ont été considérées jusqu'à présent par les facteurs*

([1]) Il y a lieu de noter que, sauf le cas où $\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $\beta = \pm\frac{1}{2}$, dans lequel la formule asymptotique (135) est identiquement vraie (pour toute valeur de x et de n), ce n'est que dans le cas, où $\alpha = 0$, $\beta = 0$, que les valeurs extrêmes de l'angle $(-\rho\pi, n\pi + \rho_1\pi)$ données formellement par cette formule classique correspondent aux valeurs exactes de Φ_n.

correspondants qui s'introduisent, lorsqu'on remplace $R_n(x)$ *et* $R_{n+k}(x)$, *par les polynomes normés correspondants* $\overline{R}_n(x)$ *et* $\overline{R}_{n+k}(x)$.

Ainsi, d'après (128),

$$(187)\qquad \bar{f}_n^2 = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)\,f_n^2(x)}{2^{2n+\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}$$

ou bien

$$(187\ bis)\qquad \bar{f}_n(x) \sim \frac{2^{n+\rho+\rho_1}}{\sqrt{2\pi}} f_n(x).$$

On vérifie facilement la relation de récurrence

$$(188)\qquad c_n \overline{R}_{n+1}(x) = (x + a_n)\,\overline{R}_n(x) + \frac{x^2-1}{n+1+\alpha+\beta}\,\overline{R}'_n(x),$$

où

$$(189)\qquad \left\{\begin{aligned} c_n &= \frac{A_n}{A_{n+1}}\left(1 + \frac{n}{n+1+\alpha+\beta}\right) \\ &= \sqrt{\frac{(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)\left(n+\dfrac{\alpha+\beta+1}{2}\right)}{(n+\alpha+\beta+1)\left(n+1+\dfrac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(n+1+\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}} \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ a_n &= \frac{\alpha-\beta}{2(n+1+\alpha+\beta)} \\ &\quad + \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+2+\alpha+\beta)}\left[1 - \frac{\alpha+\beta+2}{2(n+1+\alpha+\beta)}\right] = O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}\right.$$

A_n étant le coefficient de x^n dans $\overline{R}_n(x)$.

Plaçons-nous d'abord dans la première hypothèse, où $|\alpha| < \frac{2}{1}$, $|\beta| < \frac{1}{2}$ et posons, pour simplifier l'écriture, $\alpha = \beta$.

L'équation (188) prend alors, après multiplication par $(1-x^2)^\rho$, la forme

$$(190)\qquad \begin{aligned} c_n \bar{f}_{n+1} &= x\bar{f}_n + \frac{x^2-1}{n+4\rho}\left[\frac{\bar{f}_n}{(1-x^2)^\rho}\right]'(1-x^2)^\rho \\ &= x\left(1 - \frac{2\rho}{n+4\rho}\right)\bar{f}_n + \frac{x^2-1}{n+4\rho}\bar{f}'_n. \end{aligned}$$

D'où

$$(191)\qquad \bar{f}_{n+1} = x\bar{f}_n + \frac{(x^2-1)\bar{f}'_n}{\sqrt{(n+2\rho)^2 + \frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x^2}}} + \varepsilon_n = x\bar{f}_n + \lambda_n\sqrt{1-x^2}\,\frac{d\bar{f}_n}{d\theta} + \varepsilon_n,$$

où

$$\varepsilon_n = (x^2-1)\bar{f}'_n\left[\frac{1}{n+4\rho} - \frac{1}{\sqrt{(n+2\rho)^2 + \frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x^2}}}\right] + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or

$$\left|\frac{\bar{f}'_n(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(n+2\rho)^2 + 2\rho(1-2\rho)}}\right| \leqq \max\sqrt{\bar{u}_n} = \max\bar{f}_n(x) = O(1)$$

et

$$\left|\frac{\sqrt{(n+2\rho)^2(1-x^2) + 2\rho(1-2\rho)}}{n+4\rho} - \sqrt{1-x^2}\right| < \frac{\sqrt{2\rho(1-2\rho)}}{n+4\rho} + \frac{2\rho}{n+4\rho} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$(192)\qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent, d'après (191), (192) et le premier groupe des formules (184), on a

$$(193)\qquad \bar{f}_{n+1} = \sqrt{\bar{u}_n}\cos(\Phi_n + \theta) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'autre part, en différentiant (188) et en tenant compte de l'équation différentielle des polynomes de Jacobi, on a

$$(194)\qquad c_n\bar{R}'_{n+1} = \bar{R}_n + \left(\frac{2x}{n+1+\alpha+\beta} + x + a_n\right)\bar{R}'_n + \frac{x^2-1}{n+1+\alpha+\beta}\bar{R}''_n$$
$$= (n+1)\bar{R}_n + \left(\frac{n+1}{n+1+\alpha+\beta}x + a_n + \frac{\beta-\alpha}{n+1+\alpha+\beta}\right)\bar{R}'_n.$$

En supposant encore $\alpha = \beta$ et en multipliant par $(1-x^2)^\rho$, on a

$$(195)\qquad c_n(1-x^2)^\rho\left[\frac{\bar{f}_{n+1}}{(1-x^2)^\rho}\right]'$$
$$= (n+1)\bar{f}_n + \frac{(n+1)x}{n+4\rho}(1-x^2)^\rho\left[\frac{\bar{f}_n}{(1-x^2)^\rho}\right]'$$
$$= (n+1)\left[\left(1 + \frac{2\rho x^2}{(n+4\rho)(1-x^2)}\right)\bar{f}_n + \frac{x}{n+4\rho}\bar{f}'_n\right].$$

Donc en retranchant de (195) l'équation (190) multipliée par $\frac{2\rho x}{1-x^2}$, on a

$$(196) \qquad c_n \bar{f}'_{n+1} = \left[n+1+\frac{2\rho(1-2\rho)}{(n+4\rho)(1-x^2)}\right]\bar{f}_n + \frac{(n+1+2\rho)x}{n+4\rho}\bar{f}'_n,$$

d'où

$$(197) \qquad \lambda_{n+1}\frac{d\bar{f}_{n+1}}{d\theta} = -\bar{f}_n\sqrt{1-x^2}\left[\frac{n+1+\frac{2\rho(1-2\rho)}{(n+4\rho)(1-x^2)}}{\sqrt{(n+1+2\rho)^2+\frac{2\rho(1-2\rho)}{1-x^2}}}\right]$$
$$+\lambda_n x\frac{d\bar{f}_n}{d\theta}\left[\frac{n+1+2\rho}{n+4\rho}\,\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right]+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent,

$$\lambda_{n+1}\frac{d\bar{f}_{n+1}}{d\theta} = -\bar{f}_n\sqrt{1-x^2}+\lambda_n x\frac{d\bar{f}_n}{d\theta}+\varepsilon_n,$$

où

$$\varepsilon_n = \bar{f}_n\left[\sqrt{1-x^2}-\frac{(n+1)(1-x^2)}{\sqrt{(n+1+2\rho)^2(1-x^2)+2\rho(1-2\rho)}}\right]$$
$$+\lambda_n x\frac{d\bar{f}_n}{d\theta}\left[\frac{(n+1+2\rho)\lambda_{n+1}}{(n+4\rho)\lambda_n}-1\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

uniformément sur tout le segment $(-1, +1)$. Ainsi

$$(198) \qquad \lambda_{n+1}\frac{d\bar{f}_{n+1}}{d\theta} = -\sqrt{u_n}\sin(\Phi_n+\theta)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

En passant successivement à $n+2, \ldots, n+k$ nous obtenons [1]

---

[1] Il suffira d'observer que l'on a

$$\bar{f}_{n+k}-i\lambda_{n+k}\frac{d\bar{f}_{n+k}}{d\theta} = \left[\bar{f}_{n+k-1}-i\lambda_{n+k-1}\frac{d\bar{f}_{n+k-1}}{d\theta}\right](x+\sqrt{x^2-1})+O\left(\frac{1}{n}\right);$$

donc, en supposant qu'il soit établi que

$$\left[\bar{f}_{n+k-1}-i\lambda_{n+k-1}\frac{df_{n+k-1}}{d\theta}\right] = \left[f_n-i\lambda_n\frac{df_n}{d\theta}\right](x+\sqrt{x^2-1})^{k-1}+(k-1)O\left(\frac{1}{n}\right),$$

et en remarquant que $|x+\sqrt{x^2-1}|=1$, on voit

$$\left[\bar{f}_{n+k}-i\lambda_{n+k}\frac{d\bar{f}_{n+k}}{d\theta}\right] = \left(f_n+i\lambda_n\frac{df_n}{d\theta}\right)(x+\sqrt{x^2-1})^k+kO\left(\frac{1}{n}\right).$$

donc le premier groupe des formules asymptotiques (186) valables uniformément sur $(-1, +1)$ avec une approximation de l'ordre $\frac{k}{n}$.

En particulier, en posant

$$\rho = \rho_1 = \frac{1}{4} \qquad (\alpha = \beta = 0),$$

on aura

$$\bar{f}_{n+k} \sim \bar{f}_n \cos k\theta + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 (1-x^2) + \frac{1}{4}}} \frac{d\bar{f}_n}{d\theta} \sin k\theta.$$

Donc en remarquant que le facteur de proportionnalité qu'il faut introduire pour normer les polynomes classiques $P_n(x)$ de Legendre est $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$, nous en concluons aussi que

$$(199) \quad \sqrt{\sin\theta}\, P_{n+k} = \sqrt{\sin\theta} \left[P_n \cos k\theta + \frac{\frac{1}{2} P_n \cos\theta - P'_n \sin^2\theta}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\theta + \frac{1}{4}}} \sin k\theta \right] + O\left(\frac{k}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

uniformément sur tout le segment $(-1, +1)$.

De même, pour $\rho > \frac{1}{2}$, on pourra écrire (190) sous la forme

$$(200) \quad \bar{f}_{n+1} = x\bar{f}_n + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2\rho} \frac{d\bar{f}_n}{d\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{v_n} \cos(\Psi_n + \theta) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et (196) se présentera, après multiplication par $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{n+1+2\rho}$, sous la forme

$$(201) \quad \frac{1}{n+1+2\rho} \frac{d\bar{f}_{n+1}}{d\theta} = -\sqrt{1-x^2}\,\bar{f}_n + \frac{x}{n+2\rho} \frac{d\bar{f}_n}{d\theta} + \varepsilon_n,$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1+2\rho} \left[2\rho - \frac{2\rho(1-2\rho)}{(n+4\rho)(1-x^2)} \right] \bar{f}_n + O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

car, d'après (172), pour $\rho > \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{\bar{f}_n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\bar{f}_n}{\sin\theta} = O\left(\frac{d\bar{f}_n}{d\theta}\right) = O(n).$$

Le second groupe des formules (186) est donc également établi.

Passons, enfin, au cas où $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 > \frac{1}{2}$.

En multipliant (188) par $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$, on obtient

$$\overline{f}_{n+1} = x\overline{f}_n + \frac{(x^2-1)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}}{n+2\rho+2\rho_1}\left[\frac{\overline{f}_n}{(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}}\right]' + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou bien

$$(202)\qquad \overline{f}_{n+1} = x\overline{f}_n + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n+2\rho+2\rho_1}\frac{d\overline{f}_n}{d\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Or, on a, d'après (183),

$$\frac{\mu_n\, d\overline{f}_n}{d\theta} = O(1);$$

donc,

$$\mu_n\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}\left[\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mu_n(n+2\rho+2\rho_1)}\right] = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

car

$$\left|\sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{(1-x^2)(n+\rho+\rho_1)^2+(1+x)\rho(1-2\rho)}}{n+2\rho+2\rho_1}\right|$$

$$= \frac{\sqrt{1+x}}{n+2\rho+2\rho_1}\,\frac{\left|(1-x)\left[2(\rho+\rho_1) - \frac{(\rho+\rho_1)^2}{n+2\rho+2\rho_1}\right] - \frac{\rho(1-2\rho)}{n+2\rho+2\rho_1}\right|}{\sqrt{1-x} + \sqrt{(1-x)\left(\frac{n+\rho+\rho_1}{n+2\rho+2\rho_1}\right)^2 + \frac{\rho(1-2\rho)}{(n+2\rho+2\rho_1)^2}}}$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent, pour $\rho < \frac{1}{2}$, $\rho_1 > \frac{1}{2}$, on a

$$(203)\qquad \overline{f}_{n+1} = x\overline{f}_n + \sqrt{1-x^2}\,\frac{\mu_n\, d\overline{f}_n}{d\theta} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\varpi_n}\cos(\Xi_n+\theta) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

De même, en retranchant de (194) multipliée par $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$, l'équation (188) multipliée par $\frac{\rho-\rho_1+x(\rho+\rho_1)}{(1-x)^{1-\rho}(1+x)^{1-\rho_1}}$, on trouve

$$c_n\overline{f}'_{n+1} = \left[n+1+\frac{\rho_1-\rho-x(\rho_1+\rho)}{1-x^2}(x+a_n)\right]\overline{f}_n$$
$$+\left[\frac{(n+1+\rho+\rho_1)x+\rho_1-\rho}{n+2\rho+2\rho_1}+a_n\right]\left[\overline{f}'_n - \overline{f}_n\frac{(\rho_1-\rho)-x(\rho_1+\rho)}{1-x^2}\right].$$

En multipliant encore par $-\mu_{n+1}\sqrt{1-x^2}$, et en tenant compte de (189), nous aurons

$$
(204)\quad \mu_{n+1}\frac{d\overline{f}_{n+1}}{d\theta}
$$

$$
=\mu_{n+1}\overline{f}_n\left[-(n+1)\sqrt{1-x^2}+\frac{x(\rho_1+\rho)+\rho-\rho_1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x(\rho_1+\rho-1)+\rho-\rho_1}{n+2\rho+2\rho_1}\right]
$$

$$
+\frac{(n+1+\rho+\rho_1)x+\rho_1-\rho}{n+2\rho+2\rho_1}\mu_{n+1}\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).
$$

En observant ensuite que les maxima de $|\overline{f}_n|$ ainsi que μ_n décroissent de gauche à droite, et que pour les valeurs *négatives* de x, on a

$$
\frac{\overline{f}_n}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{d\overline{f}_n}{\xi\, d\theta},
$$

où la valeur de la dérivée peut être prise pour une valeur $\xi < x$, de sorte que $\mu_n(\xi) > \mu_n(x)$, et, par conséquent,

$$
\frac{\mu_n\overline{f}_n}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{O}\left(\mu_n\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}\right),
$$

nous en concluons que

$$
\frac{\mu_{n+1}\overline{f}_{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{O}(1);
$$

donc,

$$
\mu_{n+1}\frac{d\overline{f}_{n+1}}{d\theta}=-(n+1)\sqrt{1-x^2}\,\mu_{n+1}\overline{f}_n
$$

$$
+\frac{(n+1+\rho+\rho_1)x+\rho_1-\rho}{n+2\rho+2\rho_1}\mu_{n+1}\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).
$$

Ainsi, finalement,

$$
(205)\qquad \mu_{n+1}\frac{d\overline{f}_{n+1}}{d\theta}=-\sqrt{1-x^2}\,\overline{f}_n+x\mu_n\frac{d\overline{f}_n}{d\theta}+\varepsilon_n
$$

où

$$
\varepsilon_n=\overline{f}_n\sqrt{1+x}\left[\sqrt{1-x}-\frac{1-x}{\sqrt{\left(1+\frac{\rho+\rho_1}{n+1}\right)^2(1-x)+\frac{\rho(1-2\rho)}{(n+1)^2}}}\right]
$$

$$
+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right),
$$

car en posant $1-x=\frac{A^2}{(n+1)^2}$, on peut écrire l'expression entre parenthèses sous la forme

$$\frac{1}{n+1}\left[\mathrm{A}-\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\rho(1-2\rho)}{\mathrm{A}^2}}}\right].$$

Toutes les formules (186) sont donc établies.

9. *Pour le cas où $\rho < 0$, $\rho_1 < 0$, la considération de la fonction $f_n(x)$ qui devient alors infinie aux points $x = \pm 1$ doit être abandonnée.* On peut alors considérer simplement

$$\text{(206)} \qquad \mathrm{Z}_n(x) = \mathrm{R}_n^2(x) + \frac{\mathrm{R}_n'^2(1-x^2)}{n(n+4\rho)}$$

(en supposant, pour fixer les idées, $\rho = \rho_1$). On a, en général,

$$\text{(207)} \qquad \mathrm{Z}_n' = 2\mathrm{R}_n'\left[\mathrm{R}_n + \frac{\mathrm{R}_n''(1-x^2) - x\mathrm{R}_n'}{n(n+4\rho)}\right] = \frac{8\rho x \mathrm{R}_n'^2}{n(n+4\rho)},$$

de sorte que Z_n atteint son maximum à l'origine et ses minima aux deux bords, lorsque $\rho < 0$. Par conséquent, actuellement [1] le *maximum absolu* de $|\mathrm{R}_n(x)|$ est identique à $\sqrt{\mathrm{Z}_n(0)}$; il est donc asymptotique à

$$\text{(208)} \quad \operatorname{Max}|\mathrm{R}_n(x)| = \left|\frac{\mathrm{R}_n'(0)}{n}\right| = \mathrm{R}_{n-1,\rho+\frac{1}{2}}(0) \sim \frac{1}{2^{n+2\rho-1}} \left(-\frac{1}{4} < \rho \leqq 0\right)$$

(pour n pair, on prendra, au lieu de O, le maximum de R_n' le plus voisin de O).

Ainsi, *actuellement, l'écart de $\mathrm{R}_n(x)$ est lui-même asymptotique à l'écart minimum de $(1-x^2)^\rho \mathrm{P}_n(x)$, au lieu de fournir l'écart minimum de ce produit* que $\mathrm{R}_n(x)$ rendrait forcément infini, si on le substituait à la place de $\mathrm{P}_n(x)$ (ici $\mathrm{P}_n(x)$, comme $\mathrm{R}_n(x)$ ont leur terme supérieur égal à (x^n).

En multipliant $\mathrm{R}_n(x)$ par $\frac{2^{n+2\rho-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$ pour passer au polynome *normé*

---

[1] Au contraire, pour $\rho > 0$, le maximum absolu de $|\mathrm{R}_n(x)| = |\mathrm{R}_n(\pm 1)|$, et il en est de même, naturellement, pour les polynomes de Jacobi correspondants.

$\overline{R}_n(x)$, nous aurons

$$(209)\qquad \operatorname{Max}|\overline{R}_n(x)| = \operatorname{Max}\sqrt{\overline{Z}_n(x)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

D'une façon générale pour $\rho < 0$, $\rho_1 < 0$, on posera

$$\overline{Z}_n(x) = \overline{R}_n(x) + \frac{\overline{R}_n'^2(1-x^2)}{n(n+2\rho+2\rho_1)}.$$

Par conséquent, il conviendra de poser actuellement

$$(210)\qquad \overline{R}_n(x) = \sqrt{\overline{Z}_n(x)}\cos\Delta_n, \qquad \frac{\dfrac{d\overline{R}_n(x)}{d\theta}}{\sqrt{n(n+2\rho+2\rho_1)}} = -\sqrt{\overline{Z}_n}\sin\Delta_n$$

et l'on tire facilement de (188) et (194) que

$$(211)\qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{R}_{n+k}(x) \sim \sqrt{\overline{Z}_n(x)}\cos(\Delta_n + k\theta),\\ &\frac{1}{\sqrt{n(n+2\rho+2\rho_1)}}\frac{d\overline{R}_{n+k}}{d\theta} = -\sqrt{\overline{Z}_n}\sin(\Delta_n + k\theta).\end{aligned}\right.$$

valables uniformément sur $(-1, +1)$ pour $\frac{k}{n} \to 0$.

Dans le cas où une seule des quantités ρ ou ρ_1 (soit $\rho < 0$, par exemple) est négative, on introduira la fonction

$$(212)\qquad F_n = (1+x)^{\rho_1} R_n(x),$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(133\ bis)\qquad \frac{d^2F_n}{d\theta^2} + 2\rho\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dF_n}{d\theta} + \left[(n+\rho_1)(n+2\rho+\rho_1) + \frac{\rho_1(1-2\rho_1)}{1+x}\right]F_n = 0.$$

Soit, pour fixer les idées, $0 < \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$; alors, en posant

$$(213)\qquad \left\{\begin{aligned} &Y_n = F_n^2 + r_n^2\left(\frac{dF_n}{d\theta}\right)^2,\\ &\text{où}\\ &r_n^2 = \frac{1+x}{(n+\rho_1)(n+2\rho+\rho_1)(1+x) + \rho_1(1-2\rho_1)},\end{aligned}\right.$$

on aura

$$\frac{dY_n}{dx} = \frac{dF_n}{d\theta}\left[\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}\left(F_n + r_n^2\frac{d^2F_n}{d\theta^2}\right) + \frac{dr_n^2}{dx}\frac{dF_n}{d\theta}\right]$$
$$= \left(\frac{dF_n}{d\theta}\right)^2\left[\frac{4\rho r_n^2}{1-x} + \frac{dr_n^2}{dx}\right].$$

Donc, Y_n atteint un maximum à l'intérieur au point x_0 déterminé par l'équation

$$4\rho(n+\rho_1)(n+2\rho+\rho_1)(1+x)^2 + \rho_1(1-2\rho_1)[4\rho(1+x)+1-x] = 0,$$

d'où

$$x_0 \sim -1 + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\rho_1(2\rho_1-1)}{2\rho}} < 0$$

et les maxima de $F_n(x)$ vont en diminuant pour $x > x_0$. Or, les maxima de la fonction correspondante $f_n(x) = (1-x)^\rho F_n(x)$ vont en *augmentant* de gauche à droite (d'après 138 *bis*), de sorte que $|f_n(x)| \leqq \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}}$ pour $x < 0$; par conséquent, on a *a fortiori* sur tout le segment $(-1, +1)$,

$$|F_n(x)| < \frac{1}{2^{n+2\rho+\rho_1-1}}.$$

De plus, en remarquant que pour la valeur x_0, on a

$$r_n^2 \sim \lambda_n^2 \sim \frac{1}{n^2}$$

et

$$\frac{dF_n}{d\theta} = (1-x_0)^{-\rho}\frac{df_n}{d\theta} + \rho(1-x_0)^{-\rho-\frac{1}{2}}(1+x_0)^{\frac{1}{2}}f_n$$
$$= 2^{-\rho}\frac{df_n}{d\theta}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] + f_n O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

nous en concluons qu'on a également sur tout le segment pour n assez grand

$$\sqrt{Y_n} < \frac{1}{2^{n+2\rho+\rho_1-\frac{3}{2}}}$$

et pour les polynomes normés

(214) $$\overline{Y}_n < 2^{1-\rho}\sqrt{\frac{1}{\pi}}.$$

$\overline{Y}_n$ pourra donc actuellement jouer le même rôle $\left(\text{pour } \rho < 0,\ 0 \leq \rho_1 \leq \frac{1}{2}\right)$ que les fonctions $\overline{U}_n$, $\overline{W}_n$, $\overline{V}_n$, $\overline{Z}_n$.

De même, si $\rho_1 > \frac{1}{2}$ (avec $\rho < 0$), on posera

$$X_n = F_n^2 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{dF_n}{d\theta}\right)^2 \tag{215}$$

et l'on vérifiera que, dans ce cas, $\overline{X}_n$ reste borné sur $(-1, +1)$. Il suffira de remarquer que $X_n = O(\operatorname{Max} F_n^2)$, car ensuite le maximum de $|F_n|$ se détermine de proche en proche $\left(\text{par augmentation successive de } \rho_1 \text{ de } \frac{1}{2}\right)$ grâce à la relation (175).

CHAPITRE IV.

POLYNOMES ORTHOGONAUX RÉDUCTIBLES AUX POLYNOMES DE JACOBI.

1. Nous allons nous occuper à présent des polynomes orthogonaux correspondant au poids

$$q(x) = \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{t_0(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}}{\sqrt{1-x^2}} = t_0(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \tag{216}$$

$$\left(\alpha = 2\rho - \frac{1}{2},\ \beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}\right),$$

où $t_0(x)$ satisfait dans l'intervalle $(-1, +1)$ à la condition

$$0 < \lambda < t_0(x) < L. \tag{10 bis}$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons toujours $t_0(0) = 1$.

D'après (46 *bis*) et (48 *bis*) du Chapitre III, nous avons

$$L_n(\sqrt{t(x)}) = L_n\left[(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\right] \sim \frac{\sqrt{M_0}}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \tag{217}$$

$$H_n^{(2)}(\sqrt{t(x)}) \sim \frac{\pi M_0}{2^{2n+2\rho+2\rho_1-1}},$$

où

$$\log M_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{218}$$

En supposant d'abord que $t_0(x)$ soit remplacé par un polynome positif de degré h,

$$t_h(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right), \tag{27}$$

nous aurons, pour le polynome orthogonal $R_{n,h}(x)$ correspondant, la formule ([1])

$$\begin{aligned} &(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} R_{n,h}(x)\, t_h(x) \\ &\quad = \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 \ldots a_h} \frac{\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)}{\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h)} (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} \end{aligned} \tag{28 bis}$$

où il faut introduire dans les déterminants (29) et (29 *bis*) du Chapitre I les polynomes de Jacobi $R_n^{\alpha,\beta}(x)$ (ayant le coefficient de x^n égal à 1) qui correspondent au poids $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, nous pouvons nous borner à considérer le cas où $\alpha > -1$, $\beta > -1$, car, dans le cas contraire, $R_{n,h}(x)$ s'annulera pour $x = \pm 1$, de sorte que, après division par le facteur $(1-x)^{[-\alpha]}(1+x)^{[-\beta]}$, il se réduira au polynome orthogonal de degré $n - [-\alpha] - [-\beta]$ correspondant au poids

$$t_h(x)\,(1-x)^{\alpha+[-\alpha]}(1+x)^{\beta+[-\beta]}.$$

L'équation (133) du Chapitre III conduit aux expressions asymptotiques connues des polynomes de Jacobi à l'*extérieur* du segment.

([1]) La formule (28 *bis*) est équivalente à

$$R_{n,h}(x)\, t_h(x) = \sum_{k=0}^{h} A_k R_{n+k}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

où

$$A_k \sim \frac{2^{2n+2k+2\rho+2\rho_1-1}}{\pi} \int_{-1}^{+1} R_{n+k}^{(\alpha,\beta)}(x)\, R_{n,h}(x)\, t_h(x)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx.$$

Ainsi, du moment qu'il sera démontré que

$$R_{n,h}(x)\,(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} = O\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

on peut affirmer que $A_k = O(2^k)$.

On a ainsi

$$(219)\quad R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(x-1)^\rho (x+1)^{\rho_1}} \times \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+\rho+\rho_1}\left[1+O\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{n\sqrt{x^2-1}}\right)\right]$$

où $|x+\sqrt{x^2-1}|>1$. Par différentiation, on obtient des formules de même nature pour les dérivées de $R_n^{(\alpha,\beta)}$, qui sont elles-mêmes des polynomes de Jacobi, à un facteur constant près. Ainsi, en appliquant (219) à la formule (28), nous obtenons la formule asymptotique

$$(220)\quad R_{n,h}(x)\, t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 \ldots a_h} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & R_n^{(\alpha,\beta)}(x) \\ \frac{r_1}{2} & \ldots & \frac{r_h}{2} & R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \left(\frac{r_1}{2}\right)^h & \ldots & \ldots & R_{n+h}^{(\alpha,\beta)}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{r_1}{2} & \ldots & \frac{r_h}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{r_1}{r}\right)^{h-1} & \ldots & \left(\frac{r_h}{2}\right)^{h-1} \end{vmatrix}}$$

où nous écrivons $r_i = a_i + \sqrt{a_i^2 - 1}$ au lieu de ρ_i qui figurait dans la formule (33) (pour ne pas faire de confusion avec les exposants ρ et ρ_1).

En supposant x extérieur au segment $(-1, +1)$, nous aurons donc

$$(221)\quad R_{n,h}(x) \sim \frac{\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+\rho+\rho_1}\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}-r_1}{2}\right]\ldots\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}-r_h}{2}\right]}{(x-1)^\rho(x+1)^{\rho_1}(x-a_1)\ldots(x-a_h)}$$

$$\sim R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{r_1 r_2 \ldots r_h}{(r_1 - x+\sqrt{x^2-1})\ldots(r_h - x+\sqrt{x^2-1})}$$

$$= R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t_h(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}.$$

Nous remarquons donc que *le facteur par lequel il faut multiplier le polynome de Jacobi* $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *pour obtenir l'expression asymptotique de* $R_{n,h}(x)$ *en un point extérieur dépend seulement de* $t_h(x)$ (et non de α

et β). D'ailleurs, pour h fini, l'ordre de l'approximation de (221) est le même que celui de (219).

De même, en utilisant les expressions asymptotiques classiques (135) des polynomes $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ de Jacobi à l'intérieur de $(-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ où ε est un nombre positif donné arbitrairement petit, on trouvera les expressions asymptotiques de $R_{n,h}(x)$ valables pour le même intervalle.

En effet, comme dans le Chapitre II, nous tirons de (220)

$$R_{n,h}(x)\,t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 \ldots a_n (1-x)^\rho (1+x)^{\rho_1}}$$
$$\times\left[\frac{e^{i[(n+\rho+\rho_1)\theta-\rho\pi]}(e^{i\theta}-r_1)\ldots(e^{i\theta}-r_n)+e^{-i[(n+\rho+\rho_1)\theta-\rho\pi]}(e^{-i\theta}-r_1)\ldots(e^{-i\theta}-r_h)}{2^{n+\rho+\rho_1+h}}\right]$$

et, par suite, en posant, comme à l'endroit indiqué,

$$(37\ bis)\qquad \cos\alpha_k = \frac{r_k - x}{\sqrt{2r_k(a_k - x)}},\qquad \sin\alpha_k = \frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2r_k(a_k-x)}}$$

et

$$(38\ bis)\qquad \psi_h(x) = \sum_1^h \alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\log t_h(z) - \log t_h(x)}{z - x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-t^2}}\,dt,$$

nous obtenons

$$(222)\qquad R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)}$$
$$\sim \frac{\sqrt{M_h}}{2^{n+\rho+\rho_1-1}(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}}\cos[(n+\rho+\rho_1)\theta + \psi_h - \rho\pi]$$

où

$$(40\ bis)\qquad M_h = \frac{r_1}{2a_1}\cdots\frac{r_h}{2a_h} = e^{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_h(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

2. L'inconvénient de la formule (222) étant le même que celui de la formule correspondante pour les polynomes de Jacobi, nous allons la remplacer par *des formules asymptotiques valables uniformément sur tout le segment* $(-1, +1)$, en utilisant les formules (186) du chapitre précédent.

Il nous suffira d'examiner en détail un seul des cas correspondant aux différentes de ces formules. Ainsi, nous nous arrêterons, pour fixer les idées, sur celui où $0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}$ $\left(\text{donc } |\alpha| \leqq \frac{1}{2},\ |\beta| \leqq \frac{1}{2}\right)$, qui comprend en particulier le cas où les polynomes $R_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ se réduisent aux polynomes de Legendre.

Nos conclusions s'étendront d'elles-mêmes à tous les cas où $\rho \geqq 0$, $\rho_1 \geqq 0$, moyennant le remplacement de la fonction $U_n(x)$ par $V_n(x)$, $W_n(x)$; l'introduction des fonctions $Z_n(x)$, $Y_n(x)$, $X_n(x)$ du paragraphe **9** du Chapitre III dans le cas où les exposants ρ et ρ_1 (ou l'un des deux seulement) sont négatifs, permettra ensuite d'élucider ce dernier cas.

Nous aurons donc

$$(186\,bis)\qquad \begin{cases} (1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sqrt{u_n}\cos\Phi_n, \\ 2^k(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1} R_{n+k}^{(\alpha,\beta)}(x) \sim \sqrt{u_n}\cos(\Phi_n + k\theta). \end{cases}$$

En substituant ces expressions dans (220), nous trouvons ainsi

$$(223)\qquad (1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1} t_h(x) R_{n,h}(x) \sim \frac{(-1)^h\sqrt{u_n(x)}}{a_1 a_2 \ldots a_h}\left[\frac{e^{i\Phi_n}(e^{i\theta}-r_1)\ldots(e^{i\theta}-r_h) + e^{-i\Phi_n}(e^{-i\theta}-r_1)\ldots(e^{-i\theta}-r_h)}{2^{h+1}}\right].$$

Donc, après division par $\sqrt{t_h(x)}$, il vient

$$(224)\qquad R_{n,h}(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)} \sim \sqrt{M_h u_n(x)}\cos(\Phi_n + \psi_h).$$

Si nous observons qu'actuellement $\left(\text{pour } |\alpha| \leqq \frac{1}{2}, |\beta| \leqq \frac{1}{2}\right)$, on a (Chap. III, § **5**), pour n très grand,

$$(225)\qquad \sqrt{u_n(x)} \leqq \frac{1}{2^{n+\rho+\rho_1-1}};$$

nous voyons que l'on a asymptotiquement sur $(-1, +1)$

$$(226)\qquad \begin{aligned} &|R_{n,h}(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)}| \\ &\leqq \frac{\sqrt{M_h}}{2^{n+\rho+\rho_1-1}} \sim L_n\left[(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)}\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, *les polynomes orthogonaux* $R_{n,h}(x)$ $\left(\text{pour } |\alpha| \leqq \frac{1}{2}, |\beta| \leqq \frac{1}{2}\right)$ *réalisent asymptotiquement l'écart minimum du produit*

$$|P_n(x)|(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_h(x)},$$

où

$$P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n.$$

3. Passons à présent à l'évaluation de l'ordre de grandeur de l'erreur de nos formules asymptotiques, en supposant que h peut aussi croître infiniment sous la condition que $\frac{h}{n}$ tend vers O assez rapidement pour que

$$\frac{\delta}{2} = \sqrt[2h]{\frac{\log n}{n}} = o\left(\frac{1}{h \log^3 n}\right). \tag{227}$$

Nous supposerons de plus que toutes les racines de $t_h(x)$ satisfont à l'inégalité

$$|r_k| - 1 > \frac{1}{\log n} \qquad \left(\text{d'où } \left|\sqrt{1 - a_k^2}\right| > \frac{1}{2\log n}\right); \tag{228}$$

alors, d'après (219), l'erreur (relative) de cette formule asymptotique sera de l'ordre $\frac{\log n}{n}$. Nous introduirons, de plus, provisoirement la restriction exigée par le lemme du paragraphe **1** du Chapitre II que

$$|r_k - r_i| > \delta\,|r_k|. \tag{229}$$

Donc, d'après ce lemme, et en gardant les mêmes notations (sauf le remplacement de ρ_k par r_k), nous aurons [1]

$$\left|\frac{S}{\Delta} - 1\right| < 2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^h = 2h\sqrt{\frac{\log n}{n}} \tag{230}$$

et

$$\left|\frac{S_i - \Lambda_i}{\Delta}\right| < 2(|r_1| + 1)\ldots(|r_h| + 1)h\sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

Ainsi, en reprenant le raisonnement du paragraphe **3** du chapitre indiqué, nous voyons que pour tout point x extérieur à $(-1, +1)$

---

[1] J'observerai qu'une simple modification de la fin de la démonstration du lemme indiqué permettrait d'abaisser la borne $2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^h$, en la remplaçant par $\frac{h\delta^{2h}}{2^h}$, et par suite, d'améliorer un peu les évaluations des erreurs de nos formules asymptotiques.

satisfaisant (comme a_k), à la condition

$$(228\ bis)\qquad |x+\sqrt{x^2-1}|>1+\frac{1}{\log n},$$

l'erreur relative de la formule (¹) (221) *est* $O\left(h\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right)$.

Passons ensuite à la formule asymptotique (224), où nous devons tenir compte de ce que les formules (186 *bis*) ont une erreur $O\left(\frac{k}{n\,2^{n+k}}\right)$. Nous pouvons commencer par introduire dans la dernière colonne de $\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)$ les expressions (186 *bis*) au lieu de $R_{n+k}^{\alpha,\beta}(x)$, alors en désignant par $\Delta_n^0(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)$, le déterminant ainsi modifié, nous déduisons de (28 *bis*) que

$$(231)\quad (1-x)^{\beta}(1+x)^{\beta_1}t_h(x)R_{n,h}(x)=\frac{(-1)^h\Delta_n^0(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)}{a_1a_2\ldots a_h\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h)}+O\left[\frac{h^2}{n\,2^n}\right].$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer l'erreur provenant de la formule (219).

On a, grâce à (230) (*voir* Chap. II, § 1),

$$(232)\quad \begin{aligned} &\frac{(-1)^h}{a_1a_2\ldots a_h}\left\{\frac{\Delta_n^0(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)}{\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h)}\right.\\ &\quad\left.-\sqrt{u_n(x)}\left[\frac{e^{i\Phi_n}(e^{i\theta}-r_1)\ldots(e^{i\theta}-r_h)+e^{-i\Phi_n}(e^{-i\theta}-r_1)\ldots(e^{-i\theta}-r_h)}{2^{h+1}}\right]\right\}\\ &=O\left(\frac{h^2}{2^{n-h}}\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).\end{aligned}$$

Donc, en remarquant que cette dernière erreur est supérieure à (231), nous aurons

$$(233)\quad \begin{aligned}&|R_{n,h}(x)(1-x)^{\beta}(1+x)^{\beta_1}\sqrt{t_h(x)}\\ &\qquad-\sqrt{M_hu_n(x)}\cos(\Phi_n+\psi_h)|=O\left(\frac{h^2}{2^{n-h}}\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right),\end{aligned}$$

(¹) D'après la remarque qui vient d'être faite, cette erreur serait même de l'ordre $O\left(\frac{2^h h}{n}\log n\right)$. Mais dans la suite nous ne ferons pas usage de cette évaluation améliorée et pour les polynomes $\overline{R}_{n,h}(x)$ *normés*,

$$(233\,bis)\qquad \left|\overline{R}_{n,h}(x)(1-x)^{\beta}(1+x)^{\beta_1}\sqrt{t_h(x)} - \sqrt{u_n(x)}\cos(\Phi_n+\psi_h)\right| = O\left(h^2 2^h\sqrt{\frac{\log n}{n}}\right).$$

En appliquant le lemme du paragraphe 4 du Chapitre II, nous pourrons nous débarrasser de la restriction (229). En vertu de ce lemme, si les racines de $S_h(x)$ satisfont à (228), on peut construire un polynome $t_h(x)$ satisfaisant à (227), (228), (229), tel que

$$\left|\log\frac{S_h(x)}{t_h(x)}\right| = O(\delta h^2 \log^2 n),$$

c'est-à-dire que

$$(234)\qquad |S_h(x) - t_h(x)| = O(\delta h^2 \log^2 n).$$

4. Il nous faudra seulement étendre le théorème du paragraphe 5 du Chapitre II.

Si l'on a

$$(235)\qquad |t_0(x) - t_h(x)| = O(\varepsilon)$$

sur le segment $(-1, +1)$, *on a sur le même segment*

$$(236)\qquad (1-x)^{\beta}(1+x)^{\beta_1}\left|\overline{R}_n^0(x) - \overline{R}_{n,h}(x)\right| = O(\varepsilon\log n),$$

où $\overline{R}_n^0(x)$ *et* $\overline{R}_{n,h}(x)$ *sont respectivement les polynomes orthogonaux normés correspondant aux poids*

$$t_0(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \quad \text{et} \quad t_h(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},$$

en supposant que $t_h(x)$ *est un polynome de degré h satisfaisant aux conditions* (227), (228) *et* (229) et que $\varepsilon\log n \to 0$.

A cet effet, posons

$$(237)\qquad \overline{R}_n^0(x) = \sum_0^n a_k \overline{R}_{k,h}(x),$$

où

$$a_n = 1 + O(\varepsilon)$$

et

$$(238)\qquad a_k = \int_{-1}^{+1} \overline{R}_n^0(x)\overline{R}_{k,h}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} t_h(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{+1} \varepsilon'(x)\overline{R}_n^0(x)\overline{R}_{k,h}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx, \qquad \varepsilon'(x) = O(\varepsilon)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1);$$

donc,

$$(239) \qquad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}[\overline{R}_n^0(x) - \overline{R}_{n,h}(x)] = O(\varepsilon) + \Sigma,$$

où

$$(240) \quad \sum = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sum_0^{n-1} a_k \overline{R}_{k,h}(x) = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$$
$$\times \int_{-1}^{+1} \varepsilon'(z)\overline{R}_n^0(z)\sum_0^{n-1}\overline{R}_{k,h}(x)\overline{R}_{k,h}(z)(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}dz$$
$$= \frac{A_{n-1}}{A_n}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$$
$$\times \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon'(z)\overline{R}_n^0(z)[\overline{R}_{n,h}(x)\overline{R}_{n-1,h}(z) - \overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_{n-1,h}(x)](1-z)^{2\rho}(1+z)^{2\rho}dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}},$$

A_n étant le coefficient de x^n du polynome $\overline{R}_{n,h}(x)$, de sorte que

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} \sim \frac{1}{2}.$$

Posons

$$(241) \qquad K_n = (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1}$$
$$\times [\overline{R}_{n,h}(x)\overline{R}_{n-1,h}(z) - \overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_{n-1,h}(x)].$$

Observons d'abord que, d'après (233 *bis*), on a, quel que soit $k > 0$,

$$(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}\overline{R}_k^2(x) = O\left[1 + h^2 2^h\sqrt{\frac{\log k}{k}} + h^4 2^{2h}\frac{\log k}{k}\right].$$

Donc,

$$\sum_0^{n-1}(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}\overline{R}_k^2(x) = O[n + h^2 2^h\sqrt{n\log n} + h^4 2^{2h}\log^2 n] = O(n),$$

à cause de (227).

Par conséquent,

$$(242) \quad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1}\sum_0^{n-1}\overline{R}_{k,h}(x)\overline{R}_{k,h}(z) = O(n).$$

D'autre part, nous déduisons de (186 *bis*) et (233 *bis*) la valeur asymptotique C_n de K_n,

$$(243)\quad K_n \sim C_n = \sqrt{\frac{\bar{u}_n(x)\bar{u}_n(z)}{t_h(x)t_h(z)}}\left[\cos(\Phi_n+\psi_h)\cos(\Phi_n^0-\theta_0+\psi_h^0) - \cos(\Phi_n^0+\psi_h^0)\cos(\Phi_n-\theta+\psi_h)\right]$$
$$= \sqrt{\frac{\bar{u}_n(x)\bar{u}_n(z)}{t_h(x)t_h(z)}}\left\{\sin\left[F_0+F-\frac{\theta_0+\theta}{2}\right]\sin\frac{\theta_0-\theta}{2} + \sin\left[F_0-F+\frac{\theta-\theta_0}{2}\right]\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right\},$$

où Φ_n^0 et ψ_h^0 correspondent à la valeur de la variable $z=\cos\theta_0$ et

$$F_0 = \Phi_n^0+\psi_h^0, \qquad F=\Phi_n+\psi_h.$$

Il importe d'évaluer directement l'erreur de cette dernière expression asymptotique (en appliquant le même procédé qu'au paragraphe 5 du Chapitre II).

A cet effet, observons (¹) que l'introduction dans (241) de la formule asymptotique intermédiaire (231) correspondant aux polynomes normés à elle seule conduirait à une erreur de l'ordre $O\left(\frac{h^2}{n}\right)$ pour la valeur de K_n; soit

$$K'_n = K_n + O\left(\frac{h^2}{n}\right)$$

l'expression ainsi obtenue. On aura

$$K'_n = \frac{\left\{\begin{vmatrix} R_n^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_n^{\alpha,\beta}(a_h) & \tau_1 \\ R_{n-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \dots\dots\dots & \tau_2 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ R_{n-h}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \dots\dots\dots & \tau_{h-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{n-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \sigma_0 \\ R_n^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \sigma_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ R_{n+h-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \sigma_h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} R_n^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_n^{\alpha,\beta}(a_h) & \sigma_1 \\ R_{n-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \dots\dots\dots & \sigma_2 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ R_{n-h}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \dots\dots\dots & \sigma_{h-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{n-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_{n-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \tau_0 \\ R_n^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \dots\dots\dots & \sigma_1 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots \\ R_{n-h-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & \dots\dots\dots & \tau_h \end{vmatrix}\right\}}{2^{2h} M_h(a_1 a_2 \dots \alpha_h)^2 \begin{vmatrix} R_n^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_n^{\alpha,\beta}(a_h) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ R_{n+h-1}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_{n+h-1}^{\alpha,\beta}(a_h) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_n^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_n^{\alpha,\beta}(a_1) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ R_{n+h-2}^{\alpha,\beta}(a_1) & \dots & R_{n+h-2}^{\alpha,\beta}(a_h) \end{vmatrix} t_h(x)t_h(z)}$$

(¹) D'après la remarque faite au sujet des mineurs A_k de (28 *bis*) au commencement du Chapitre IV, p. 255.

et

$$(244)\quad C_n = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \tau_1 \\ r_1 & . & \dots & \tau_2 \\ \dots & . & \dots & \dots \\ (r_1)^h & . & \dots & \tau_{h+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \sigma_0 \\ r_1 & . & \dots & \sigma_1 \\ \dots & . & \dots & \dots \\ (r_1)^h & . & \dots & \sigma_h \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \sigma_1 \\ r_1 & . & \dots & \sigma_2 \\ \dots & . & \dots & \dots \\ (r_1)^h & . & \dots & \sigma_{h+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \tau_0 \\ r_1 & . & \dots & \tau_1 \\ \dots & . & \dots & \dots \\ (r_1)^h & . & \dots & \tau_h \end{vmatrix}}{2^{2h} M_h (a_1 a_2 \dots a_h)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & . & \dots & r_h \\ \dots & . & \dots & \dots \\ (r_1)^{h-1} & . & \dots & (r_h)^{h-1} \end{vmatrix}^2 t_h(x)\, t_h(z)}$$

où nous avons posé ($k = -1, 0, 1, \dots, h$),

$$(245)\quad \tau_{k+1} = \sqrt{\bar{u}_n(x)} \cos(\Phi_n + k\theta), \qquad \sigma_{k+1} = \sqrt{\bar{u}_n(z)} \cos(\Phi_n^0 + \theta_0).$$

Il nous reste à évaluer l'ordre de grandeur de la différence $K'_n - C_n$. Or, nous pouvons écrire

$$C_n = \sum_{k=0}^{h} \sum_{i=0}^{h} P_i P_k (\tau_{i+1}\sigma_k - \tau_i \sigma_{k+1})$$

où les nombres P_i sont les coefficients du polynome en y,

$$P_0 y^h + \dots + P_n = \frac{(y - r_1)\dots(y - r_n)}{2^h a_1 a_2 \dots a_h \sqrt{M_h t_h(x) t_h(z)}}$$

et

$$(246)\quad \tau_{i+1}\sigma_k - \tau_i \sigma_{k+1} = \sqrt{\bar{u}_n(x)\, \bar{u}_n(z)} \left\{ \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0 - \theta) \sin\left[\Phi_n^0 + \Phi_n + \frac{i+k-1}{2}(\theta_0 + \theta)\right] + \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0 + \theta) \sin\left[\Phi_n^0 - \Phi_n + \frac{i+k-1}{2}(\theta_0 - \theta)\right] \right\}.$$

Par conséquent, en calculant K'_n de la même façon, et en tenant compte de (230), on a

$$(247)\quad K'_n - C_n = O\left(h\, 2^h \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right) \sum_i \sum_k \left| \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0 - \theta) \sin\left[\Phi_n^0 + \Phi_n + \frac{i+k-1}{2}(\theta_0 + \theta)\right] + \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0 + \theta) \sin\left[\Phi_n^0 - \Phi_n + \frac{i+k-1}{2}(\theta_0 - \theta)\right] \right|$$
$$= O\left(h^4\, 2^h \sqrt{\frac{\log n}{n}}\right) \left[\left| \sin\frac{\theta_0 - \theta}{2} \right| + \left| \sin\frac{\theta_0 + \theta}{2} \right| \right].$$

Donc finalement, d'après (243) et (247),

$$\text{(248)} \qquad \mathrm{K}_n = \sqrt{\frac{\overline{u}_n(x)\overline{u}_n(z)}{t_h(x)t_h(z)}} \left\{ \begin{array}{l} \sin\dfrac{\theta_0-\theta}{2}\left[\sin\left(\mathrm{F}_0+\mathrm{F}-\dfrac{\theta_0+\theta}{2}\right)+\mathrm{O}\left(h^4 2^h\sqrt{\dfrac{\log n}{n}}\right)\right] \\ +\sin\dfrac{\theta_0+\theta}{2}\left[\sin\left(\mathrm{F}_0-\mathrm{F}+\dfrac{\theta-\theta_0}{2}\right)+\mathrm{O}\left(h^4 2^h\sqrt{\dfrac{\log n}{n}}\right)\right] \end{array} \right\} + \mathrm{O}\left(\frac{h^2}{n}\right).$$

Les formules (242) et (248) vont nous permettre d'évaluer

$$\text{(249)} \qquad \mathrm{H} = \int_{-1}^{+1}\left|\frac{\mathrm{K}_n}{x-z}\right|\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int_0^{\pi}\left|\frac{\mathrm{K}_n}{\cos\theta-\cos\theta_0}\right|d\theta_0,$$

sous la condition que $2^h h^4\sqrt{\frac{\log n}{n}} \to 0$, qui est manifestement remplie, d'après (227).

En effet, nous pouvons supposer, pour fixer les idées, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$.

Alors dans les intervalles $\left(\theta-\frac{1}{n},\theta\right)$, $\left(\theta,\theta+\frac{1}{n}\right)$, dont le premier devra être remplacé par (O,θ), lorsque $\theta<\frac{1}{n}$, nous ferons usage de la formule (242); ainsi, la partie de H, correspondant à ces deux intervalles est de l'ordre $\mathrm{O}(1)$. Il nous reste donc à évaluer les deux intégrales dont la première peut se réduire à

$$\mathrm{H}_1 = \int_0^{\theta-\frac{1}{n}}\left|\frac{\mathrm{K}_n}{\cos\theta_0-\cos\theta}\right|d\theta_0, \qquad \mathrm{H}_2 = \int_{\theta+\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\mathrm{K}_n}{\cos\theta_0-\cos\theta}\right|d\theta_0;$$

il suffit de considérer la seconde intégrale qui est, d'après (248), de l'ordre de

$$\int_{\theta+\frac{1}{n}}^{\pi}\left\{\left|\frac{1}{\sin\dfrac{\theta-\theta_0}{2}}\right|+\left|\frac{1}{\sin\dfrac{\theta+\theta_0}{2}}\right|+\frac{h^2}{n}\left|\frac{1}{\cos\theta-\cos\theta_0}\right|\right\}d\theta_0$$
$$= \mathrm{O}(\log n)+\mathrm{O}(h^2) = \mathrm{O}(\log n).$$

Par conséquent,

$$\text{(250)} \qquad \mathrm{H} = \mathrm{O}(\log n).$$

En utilisant cette conclusion pour la formule (240), nous en tirons que

$$\Sigma = O(\varepsilon \log n) \max_{-1 \leq x \leq 1} \left[\overline{R}_n^0(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\right].$$

Ainsi, il résulte de (239) que le maximum de $\overline{R}_n^0(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$ est borné, comme celui de $\overline{R}_{n,h}(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$, et, par conséquent, on a effectivement

$$(236) \qquad (1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\left[\overline{R}_n^0(x) - \overline{R}_{n,h}(x)\right] = O(\varepsilon \log n)$$

uniformément sur tout le segment $(-1, +1)$.

Pour que $\varepsilon \log n \to 0$ dans le cas où $t_0(x) = S_h(x)$, il suffira, d'après (234), que l'on prenne

$$(251) \qquad \log n = A h \log h, \qquad \text{où } A > 12.$$

En effet, on doit avoir, en tenant compte de (227),

$$\delta h^2 \log^4 n = h^2 \log^4 n \sqrt[2h]{\frac{\log n}{n}} \to 0$$

ou bien

$$\frac{1}{2h} \log n - \left(4 + \frac{1}{2h}\right) \log \log n - 2 \log h \to \infty;$$

mais en substituant (251), on a

$$\left(\frac{A}{2} - 6 - \frac{1}{2h}\right) \log h - \left(4 + \frac{1}{2h}\right)(\log \log h + \log A) \to \infty.$$

5. Nous allons de nouveau utiliser les polynomes approchés $S_h(x)$ analogues à ceux du paragraphe **7** du Chapitre II, pour une fonction continue $t_0(x)$ quelconque.

Dans la suite, nous supposons toujours que la fonction $t_0(x)$ *admet une dérivée première continue* $t'_0(x)$ *sur le segment* $(-1, +1)$, *telle que*

$$(252) \qquad t'_0(x+\beta) - t'_0(x) = O\left(\frac{1}{\log^2 \beta}\right).$$

Dans ces conditions, d'après un résultat connu, il est possible de former des polynomes $G_k(x)$, de degré k, tels que

$$(253) \qquad |G_k(x) - \log t_0(x)| = O\left(\frac{1}{k \log^2 k}\right).$$

Donc, en posant

$$(254)\qquad S_h(x) = 1 + G_k(x) + \ldots \frac{[G_k(x)]^{\mu}}{\mu!},$$

où

$$(255)\qquad h = k\mu, \qquad k^2 = \mu^{\mu},$$

on aura

$$|t_0(x) - S_h(x)| = O\left(\frac{1}{k \log^2 k}\right),$$

et puisqu'on déduit de (255), que

$$(256)\qquad k \sim \frac{h}{2} \frac{\log \log h}{\log h},$$

on aura aussi

$$(257)\qquad |t_0(x) - S_h(x)| = O\left(\frac{1}{h \log h \log \log h}\right).$$

Observons que les polynomes $S_h(x)$ satisfont bien à la condition (228), car, d'après la remarque faite à l'endroit cité, on aura

$$|r_i| - 1 > \frac{1}{k} \log \mu = \frac{2 \log k}{h} \sim \frac{2 \log h}{h};$$

or, d'après (251), on a

$$h \sim \frac{\log n}{A \log \log n};$$

donc, on aura, *a fortiori*,

$$|r_i| - 1 > \frac{1}{\log n}.$$

En construisant ensuite les polynomes $t_h(x)$ satisfaisant à (234), nous aurons aussi

$$(258)\qquad |t_0(x) - t_h(x)| = O(\delta h^2 \log^2 n) + o\left(\frac{A}{\log n}\right) = o\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

en supposant A dans (251) borné supérieurement.

Nous arrivons, par conséquent, au résultat suivant :

Si la fonction positive $t_0(x)$ satisfait à la condition (252), les polynomes orthogonaux $\overline{R}_n^0(x)$ correspondant au poids (216) admettent uniformément sur le segment $(-1, +1)$, la représentation asymptotique

$$(259)\qquad \overline{R}_n^0(x)\sqrt{t(x)} = \overline{R}_n^0(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{\overline{u}_n(x)} \cos(\Phi_n + \psi_h),$$

où

(38 *bis*)
$$\psi_h = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\log t_h(z) - \log t_h(x)}{z - x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz,$$

les polynomes $t_h(x)$ étant des polynomes approchés de $t_0(x)$ indiqués plus haut.

Mais d'après le paragraphe 9 du Chapitre II les conditions imposées à $t_0(x)$ sont bien suffisantes pour affirmer que l'on a uniformément sur $(-1, +1)$

$$\psi_h - \psi \to 0,$$

si

(260)
$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\log t_0(z) - \log t_0(x)}{z - x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dt;$$

on a donc également (sous les mêmes conditions)

(261)
$$\overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{\overline{u}_n(x)}\cos(\Phi_n + \psi).$$

En tenant compte des formules (184), on peut écrire aussi

(262)
$$\overline{R}_n^0(x)\sqrt{t(x)} \sim f_{n,\rho,\rho_1}\cos\psi + \lambda_n \frac{df_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\sin\psi.$$

De (261) nous concluons que l'on a pour n très grand

(263)
$$\left|\overline{R}_n^0(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\right| \leqq \sqrt{\overline{u}'_n(x)} \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$
$$\left(0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{2},\ 0 \leqq \rho_1 \leqq \frac{1}{2}\right).$$

Donc *les polynomes orthogonaux $\overline{R}_n^0(x)$ réalisent asymptotiquement l'écart minimum sur le segment* $(-1, +1)$ *du produit*

$$\left|P_n(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}\right|,$$

où $P_n(x)$ est un polynome quelconque de degré n ayant le même coefficient de x^n que $\overline{R}_n^0$.

6. Pour les autres valeurs de $\rho > 0$ et $\rho_1 > 0$, il n'y a rien à modifier dans les raisonnements pour établir les formules asymptotiques analogues. Ainsi on aura

$$(264)\quad \begin{cases} \overline{R}_n^0(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{\overline{v}_n(x)}\cos(\Psi_n+\psi) \\ \quad = f_{n,\rho,\rho_1}\cos\psi + \dfrac{1}{n+\rho+\rho_1}\dfrac{df_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\sin\psi \qquad \left(\rho \geqq \dfrac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right), \\ \overline{R}_n^0(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{\overline{w}_n(x)}\cos(\Xi_n+\psi) \\ \quad = f_{n,\rho,\rho_1}\cos\psi + \mu_n\dfrac{df_{n,\rho,\rho_1}}{d\theta}\sin\psi \qquad \left(0 \leqq \rho \leqq \dfrac{1}{2},\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

Dans ces deux cas, $\overline{R}_n^0(x)(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}$ sont *aussi bornés* (d'après le paragraphe 7 du chapitre précédent) sur $(-1, +1)$, *mais ils ne réalisent plus même asymtotiquement l'écart minimum du produit correspondant.*

Comme nous l'avons vu, il n'y a pas à considérer le cas, où les inégalités

$$\alpha > -1, \qquad \beta > -1 \qquad \left(\rho > -\frac{1}{4},\ \rho_1 > -\frac{1}{4}\right)$$

ne seraient pas satisfaites. Or, en supposant ces inégalités remplies, nous aurons, en appliquant la même méthode, les formules asymptotiques correspondant aux cas, où l'une au moins des quantités ρ et ρ_1 est négative, en utilisant les fonctions X_n, Y_n, Z_n données par les formules (215), (213), (206). Ainsi, *pour* $\rho < 0$, $\rho_1 < 0$ *on aura* [avec les mêmes conditions pour $t_0(x)$]

$$(265)\quad \begin{aligned} &\overline{R}_n^0\sqrt{t_0(x)} \sim \sqrt{Z_n}\cos(\Delta_n+\psi) \\ &\quad = \overline{R}_n^{\alpha,\beta}\cos\psi + \frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha+\beta+1)}}\frac{d\overline{R}_n^{\alpha,\beta}(x)}{d\theta}\sin\psi, \end{aligned}$$

où $\overline{R}_n^{\alpha,\beta}(x)$ *sont les polynomes de Jacobi normés correspondant aux exposants* $\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}$, $\beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}$.

On a sur $(-1, +1)$, dans ce cas, d'après (209), pour n très grand,

$$\overline{R}_n^0(x)\sqrt{t_0(x)} \leqq \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

On a également

$$(266)\quad \begin{cases} \overline{R}_n^0(x)(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \overline{F}_n\cos\psi + \dfrac{1}{n}\dfrac{d\overline{F}_n}{d\theta}\sin\psi \qquad \left(\rho < 0,\ \rho_1 \geqq \dfrac{1}{2}\right), \\ \overline{R}_n^0(x)(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)} \sim \overline{F}_n\cos\psi + r_n\dfrac{d\overline{F}_n}{d\theta}\sin\psi \qquad \left(\rho < 0,\ 0 \leqq \rho_1 < \dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

où

$$\overline{F}_n = (1+x)^{\rho_1} \overline{R}_n^{(\alpha,\beta)}(x), \qquad r_n = \sqrt{\frac{(1+x)}{(n+\rho)(n+2\rho+\rho_1)(1+x)+\rho_1(1-2\rho_1)}};$$

d'après (214), *les produits* $|\overline{R}_0(x)(1+x)^{\rho_1}\sqrt{t_0(x)}|$ *restent bornés sur le segment* $(-1, +1)$.

Les formules asymptotiques (261-266), dont l'erreur tend uniformément vers zéro sur tout le segment $(-1, +1)$ peuvent servir pour l'étude de la *convergence* des développements en série de polynomes ortogonaux.

7. Observons que dans le cas où $t_0(x)$ est un polynome donné [et, *a fortiori*, si $t_0(x) = 1$, c'est-à-dire si l'on considère simplement les polynomes de Jacobi], l'égalité

$$(250\ bis) \qquad H = \int_{-1}^{+1} \left| \frac{K_n}{x-z} \right| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = O(\log n)$$

donne immédiatement des conditions de convergence uniforme des séries correspondantes.

Il suffira encore d'examiner un seul cas. Considérons, par exemple, celui où $\rho \geqq 0$, $\rho_1 \geqq 0$ (comprenant, en particulier, celui des polynomes de Legendre). Considérons le développement suivant des polynomes orthogonaux correspondants

$$(267) \qquad f(x) = \Sigma a_k \overline{R}_k^0(x)$$

où

$$a_k = \int_{-1}^{+1} f(x) q(x) \overline{R}_k^0(x)\, dx.$$

Posons

$$(268) \qquad f_n(x) = \sum_0^n a_k \overline{R}_k^0(x) = \int_{-1}^{+1} f(z) q(z) \sum_0^n \overline{R}_k^0(x) \overline{R}_k^0(z)\, dz;$$

soit $\varphi_n(x)$ un polynome de degré n quelconque approché de $f(x)$; on a alors

$$(269) \quad f_n(x) - \varphi_n(x) = \int_{-1}^{+1} [f(z) - \varphi_n(z)] q(z) \sum_0^n \overline{R}_k^0(x) \overline{R}_k^0(z)\, dz,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(270)\quad & [f_n(x) - \varphi_n(x)](1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} \\
& = \frac{A_n}{A_{n+1}} \int_{-1}^{+1} [f(z) - \varphi_n(z)] \\
& \quad \times \frac{(1-z)^{2\rho}(1+z)^{2\rho_1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} t_0(z)\left[\overline{R}^0_{n+1}(x)\overline{R}^0_n(z) - \overline{R}^0_{n+1}(z)\overline{R}^0_n(x)\right] dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} \\
& = O\left\{[f(z) - \varphi_n(z)](1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1} \log n\right\}.
\end{aligned}
$$

Donc, *s'il existe des polynomes $\varphi_n(x)$, tels que*

$$
(271)\qquad |f(z) - \varphi_n(z)|(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1} = o\left(\frac{1}{\log n}\right),
$$

le développement (267) *multiplié par* $(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$ *devient uniformément convergent sur tout le segment* $(-1, +1)$.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit, par conséquent, que l'on ait

$$
(272)\qquad f(x) = \frac{f_1(x)}{(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}},
$$

où $f_1(x)$ satisfait à la condition de Dini-Lipschitz, et de plus $f_1(\pm 1) = 0$; en effet, on peut alors construire des polynomes $\varphi_n(x)$ de degré n, tels que [1]

$$
(273)\qquad |f_1(z) - \varphi_n(z)(1-z)^{\rho}(1+z)^{\rho_1}| = o\left(\frac{1}{\log n}\right).
$$

A fortiori, il suffirait donc pour assurer la convergence uniforme de $(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}\Sigma a_n \overline{R}^0_n(x)$ que la fonction $f(x)$ elle-même satisfasse à la condition de Dini-Lipschitz.

Dans le cas, où l'une au moins des quantités ρ et ρ_1 deviendrait négative, on aurait un résultat analogue. Il nous suffira de formuler

---

[1] En supposant, par exemple, $\rho < 1$, $\rho_1 < 1$, il suffit de former un polynome $P_n(z)$ de degré $\sqrt[4]{n}$, tel que $|f_1(z) - P_n(z)(1-z)(1+z)| = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$, et ensuite, on peut choisir $\varphi_n(z)$, de sorte que

$$
|P_n(z)(1-z)^{1-\rho}(1+z)^{1-\rho_1} - \varphi_n(z)| = o\left(\frac{1}{\log n}\right).
$$

la conclusion pour

$$\rho \leqq 0, \qquad \rho_1' \leqq 0 \qquad \left(\rho > -\frac{1}{4}, \ \rho_1 > -\frac{1}{4}\right),$$

alors le développement lui-même

$$f(x) = \Sigma a_n \overline{R}_n(x)$$

est uniformément convergent, pourvu que la fonction

$$f_1(x) = f(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1} \tag{274}$$

satisfasse à la condition de Dini-Lipschitz et que $f_1(\pm 1) = 0$.

Je n'insisterai pas sur d'autres conditions de convergence et sur la détermination de l'approximation fournie par ces développements. Je me bornerai à indiquer un exemple qui montre que le développement (267) lui-même pour $\rho > 0$, $\rho_1 > 0$ peut, en général, ne pas converger lorsque la fonction satisfait à la condition de Dini-Lipschitz.

Nous supposerons $\rho = \rho_1 = \frac{1}{2}$, $t_0(x) = 1$. Alors le polynome orthogonal est

$$\overline{R}_n^0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

Considérons la fonction

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos n^4\theta}{n^2} = \sum_1^\infty \frac{\cos n^4 \operatorname{arc}\cos\theta}{n^2}. \tag{275}$$

On vérifie facilement que cette fonction de x satisfait sur le segment entier $(-1, +1)$ à la condition de Lipschitz de degré $\alpha = \frac{1}{8}$ (considérée comme une fonction de θ, la fonction satisfait même à une condition de Lipschitz de degré $\frac{1}{4}$).

Cependant le développement

$$f(x) = \sum_1^\infty a_k \overline{R}_k^0(x), \tag{268 bis}$$

où

$$a_k = \int_{-1}^{+1} f(x)\overline{R}_k^0(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{+1} \sum \frac{\cos n^4\theta}{n^2}\sin(k+1)\theta\sin\theta\,d\theta$$

est *divergent* pour $x = \pm 1$, car on a

$$a_k = \frac{1}{2n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \text{pour } k = n^4,$$

$$a_k = -\frac{1}{2n^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \text{pour } k = n^4 - 2,$$

$$a_k = 0 \qquad \text{pour toutes les autres valeurs entières de } k.$$

De sorte que les termes du développement $f(\pm 1)$ croissent infiniment, puisque

$$R_k^0(\pm 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(k+1).$$

[Conformément à ce qui précède, le développement (268 *bis*) devient uniformément convergent après multiplication par $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$.]

Ainsi, les développements en série de polynomes de Jacobi de paramètres $\alpha = 2\rho - \frac{1}{2}$, $\beta = 2\rho_1 - \frac{1}{2}$, ainsi que ceux suivant les polynomes orthogonaux qui s'y réduisent, doivent être surtout utilisés si l'on veut approcher la fonction donnée $f_1(x)$ au moyen des polynomes multipliés par $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$. *On pourra développer alors*

$$\frac{f_1(x)}{(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}} = f(x),$$

et c'est en multipliant ce développement par $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$ *que l'on obtiendra, en général, un développement bien convergent pour* $f_1(x)$.

L'ordre de grandeur de son approximation, qui n'est que $\log n$ *fois plus grand que celui de la meilleure, résulte de* (271), ce qui généralise le résultat classique de M. Lebesgue concernant les séries trigonométriques.

J'indiquerai encore, en particulier, la conséquence suivante de ce qui précède.

Soit $\rho \geqq 0$, $\rho_1 \geqq 0$. *Si*

$$(272\ bis) \qquad f_1(x) = f(x)(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1},$$

où $f_1(x)$ *satisfait à une condition de Lipschitz de degré* $\alpha > \frac{1}{2}$ et $f_1(\pm 1) = 0$ *le développement de* $f(x)$ *suivant les polynomes orthogonaux* $R_n^0(x)$ *correspondant au poids* $q(x) = (1-x)^{2\rho-\frac{1}{2}}(1+x)^{2\rho_1-\frac{1}{2}}t_0(x)$

devient absolument et uniformément convergent après multiplication par $(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}$. La démonstration est pareille à celle que j'ai donnée autrefois pour les séries trigonométriques ([1]).

8. Dans le cas général, où $t_0(x)$ satisfait seulement à la condition (252) de sorte que nous savons seulement que l'erreur de la formule asymptotique (26.1) tend uniformément vers zéro sur $(-1, +1)$, la condition suffisante de convergence uniforme du développement en série des polynomes orthogonaux correspondants doit être un peu modifiée ([2]).

En effet, à présent le raisonnement qui nous a amené à (250) n'est plus immédiatement applicable.

Mais il est en tout cas facile de voir que

$$H_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{K_n}{x-z}\,dz = O(\log n). \tag{276}$$

En effet, on a toujours

$$\begin{aligned}(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1}(1-z)^\rho(1+z)^{\rho_1}\left[\overline{R}^0_{n+1}(x)\overline{R}^0_n(z) - \overline{R}^{n+1}_0(z)\overline{R}^0_n(x)\right] \\ = K_n = O(1),\end{aligned} \tag{277}$$

et d'autre part, en se reportant à la démonstration de (236), on voit que l'on a *a fortiori*

$$\left|\overline{R}^0_k(x) - \overline{R}_{k,h}(x)\right|(1-x)^\rho(1+x)^{\rho_1} = O(\varepsilon\log n),$$

si $k < n$, d'où il résulte que

$$\begin{aligned}\Sigma\overline{R}^{0\,2}_k(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1} \\ = \Sigma\overline{R}^2_{k,h}(x)(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1} + nO(\varepsilon^2\log^2 n) = O(n),\end{aligned} \tag{242 bis}$$

de sorte que

$$\frac{K_n}{x-z} = O(n). \tag{278}$$

([1]) *Voir*, par exemple, L. Tonelli, *Serie trigonometriche*, p. 268.

([2]) Pour le cas où $\rho = \rho_1 = 0$, et plus généralement si

$$\rho(1-2\rho) = \rho_1(1-2\rho_1) = 0,$$

la condition (252) relative à $t_0(x)$ peut être remplacée par celle (18) de la première Partie.

En appliquant la dernière remarque à l'intervalle $\left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$ et l'égalité (277) sur tout le reste du segment $(-1, +1)$, on obtient immédiatement la formule (276).

Ainsi, en reprenant la formule (270), nous pouvons affirmer seulement que

$$\begin{aligned}[f_n(x)-\varphi_n(x)](1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1} \\ = O\left\{[f(z)-\varphi_n(z)](1-z)^{\rho-\frac{1}{2}}(1+z)^{\rho_1-\frac{1}{2}}\log n\right\}.\end{aligned}$$

Donc, pour affirmer la convergence uniforme sur tout le segment ([1]) du développement de $f(x)$ multiplié par $(1-x)^{\rho}(1+x)^{\rho_1}$, nous sommes obligés d'exiger que

$$|f(z)-\varphi_n(z)|(1-z)^{\rho-\frac{1}{2}}(1+z)^{\rho_1-\frac{1}{2}}=o\left(\frac{1}{\log n}\right). \tag{279}$$

En d'autres termes, il suffit que la fonction

$$f_1(x)=f(x)(1-x)^{\rho-\frac{1}{2}}(1+x)^{\rho_1-\frac{1}{2}}$$

satisfasse à la condition de Dini-Lipschitz avec $f_1(\pm 1)=0$.

Cette condition moins générale que (272) que nous formulons ici n'est probablement pas essentielle, mais pour s'en débarrasser en faisant le moins possible de restrictions sur $t_0(x)$ il faudrait discuter directement l'erreur de la valeur asymptotique de K_n qui dans tous les cas peut être mise sous la forme (243).

9. Passons à présent à l'extension bien plus facile de la formule asymptotique (221) pour un point extérieur, en supposant $t_0(x)$ quelconque. Nous n'avons rien d'essentiel à ajouter aux raisonnements correspondants du Chapitre II.

Ainsi le lemme du paragraphe **6** du chapitre indiqué subsiste sans modification et l'on a

$$|\overline{R}_n^0(x)-\overline{R}_{n,h}(x)|=O\left[M\varepsilon\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right], \tag{83 bis}$$

où δ est la plus petite distance de x au segment $(-1, +1)$ et M la plus

([1]) Il est évident que la formule (276) est suffisante pour affirmer la convergence uniforme à *l'intérieur* de $(-1, +1)$ sous la condition (271).

grande des deux valeurs $\overline{R}_{n,h}(x)$ et $\overline{R}_{n-1,h}(x)$ en supposant que

$$|t_0(x) - t_h(x)| = O(\varepsilon).$$

Par conséquent, dans *l'hypothèse que* $t_0(x) > 0$ *sur* $(-1, +1)$ *est continue on a la formule asymptotique*

$$(280) \qquad R_n^0(x) = R_n^{\alpha,\beta}(x)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}(1+\gamma_n)$$

$$\sim \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{n+\rho+\rho_1} \frac{e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}}{(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_1}},$$

où γ_n *tend uniformément vers zéro dans toute région fixe extérieure au segment* $(-1, +1)$, et pour les polynomes normés, on a

$$(280\ bis) \qquad \overline{R}_n^0(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\rho+\rho_1}}{\sqrt{2\pi(x-1)^{\rho}(x+1)^{\rho_1}}}\, e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}}(1+\gamma_n)$$

$$\sim \overline{R}_n^{\alpha,\beta}(x)\, e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Indiquons quelques applications de ces formules :

1° Déterminons le minimum N_n de

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, t_0(x)\,(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx,$$

si $P_n(x)$ *est donné en point extérieur* $x = \xi$. On aura

$$P_n(x) = a_0\overline{R}_0^0 + a_1\overline{R}_1^0(x) + \ldots + a_n\overline{R}_n^0(x),$$

où

$$a_i = a_0\frac{\overline{R}_i^0(\xi)}{\overline{R}_0^0};$$

donc

$$P_n(x) = \frac{a_0}{\overline{R}_0^0}\sum_0^n \overline{R}_i^0(x)\overline{R}_i^0(\xi) = \frac{A_n}{A_{n-1}}\,\frac{\overline{R}_{n+1}^0(\xi)\overline{R}_n^0(x) - \overline{R}_{n+1}^0(x)\overline{R}_n^0(\xi)}{\xi - x}\,\frac{a_0}{\overline{R}_0^0},$$

$$P_n(\xi) = \frac{A_n}{A_{n-1}}\left[\overline{R}_{n+1}'^0(\xi)\,\overline{R}_n^0(\xi) - \overline{R}_n'^0(\xi)\,\overline{R}_{n+1}^0(\xi)\right]\frac{a_0}{\overline{R}_0^0}$$

et

$$(281)\quad \lambda_n = \sum_0^n \left(\frac{\overline{R}_l^0(\xi)}{\overline{R}_0^0}\right)^2 a_0^2 = \frac{\Lambda_{n+1}}{\Lambda_n}\,\frac{P_n^2(\xi)}{\overline{R}'^{\,0}_{n+1}(\xi)\,\overline{R}_n^0(\xi) - \overline{R}^0_{n+1}(\xi)\,\overline{R}'^{\,0}_n(\xi)}$$
$$\sim \frac{4\pi(\xi-1)^{\alpha+1}(\xi+1)^{\beta+1}}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{2n+\alpha+\beta+2}}\, e^{-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_n(z)\,dz}{(z-\xi)\sqrt{z^2-1}}}$$

en supposant $P_n(\xi) = 1$.

2° Les formules peuvent être utilisées pour *la détermination de l'oscillation minima des polynomes monotones assujettis (et multiplement monotones) à plusieurs conditions.*

Ainsi, proposons-nous, par exemple, de déterminer l'oscillation minima M du polynome monotone $Q_m(x)$ de degré m sur le segment $(-1, +1)$, *si sa dérivée s'annule en h points extérieurs $a_1, a_2, \dots, a_h$ et prend la valeur* 1 *au point extérieur* ξ.

Supposons $m - h = 2n + 1$, impair; on vérifie alors sans peine que le polynome réalisant l'extremum peut être mis sous la forme (¹)

$$Q_m(x) = \int_{-1}^{x} P_n^2(x)\, t_h(x)\, dx,$$

où $t_h(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\dots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right)$.

La solution résulte donc de la formule (281), et l'oscillation minima cherchée a pour valeur asymptotique

$$(282)\quad M \sim \frac{4\pi(\xi^2-1)}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{m-h+1}}\, e^{-\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_h(z)\,dt}{(z-\xi)\sqrt{1-z^2}}}$$
$$= \frac{4\pi\, t_h(\xi)\,(\xi^2-1)}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^{m+1}}\,\frac{[r_1(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-1]\dots[r_h(\xi+\sqrt{\xi^2-1})-1]}{[r_1-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})]\dots[r_h-[\xi+\sqrt{\xi^2-1})]},$$

où $r_i = a_i + \sqrt{a_i^2 - 1}$ (le signe devant le radical étant toujours pris tel que $(r_i| > 1)$.

3° La formule asymptotique (280) permet dans tous les cas de déterminer les valeurs asymptotiques des coefficients du polynome

(¹) *Voir* mon article *Sur les polynomes monotones* (*Communications de la Société mathématique de Kharkow*, série IV, t. I).

orthogonal

$$R_n^0(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_k x^{n-k} + \ldots + A_n, \tag{283}$$

pour k fini.

En effet, en supposant $|x| > 1$, on a

$$\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_n(z)\,dz}{\left(1-\frac{z}{x}\right)\sqrt{1-z^2}} = \left[1 - \frac{1}{2x^2} - \ldots\right]\left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_k}{x^k} + \ldots\right],$$

où

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{z^k \log t_n(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}} \tag{284}$$

reste borné, de sorte que le développement de

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}\right)\frac{\log t_n(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}} = e^{-\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_0 - 2\alpha_1}{2x^2} + \ldots} = 1 - \frac{\alpha_1}{x} + \ldots \tag{285}$$

a également ses coefficients bornés.

D'autre part, à cause de (219), les coefficients du polynome de Jacobi sont asymptotiquement les mêmes que ceux de

$$\begin{aligned} T_n(x)\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2(x-1)}\right)^{\rho}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2(x+1)}\right)^{\rho_1} &= \left[x^n - \frac{n}{2^2}x^{n-2} + \ldots (-1)^l \frac{n(n-l-1)\ldots(n-2l+1)}{l!\,2^{2l}}x^{n-2l} + \ldots\right] \\ &\quad \times\left[1 + \frac{\rho}{x} + \ldots\right]\left[1 - \frac{\rho_1}{x} + \ldots\right], \end{aligned} \tag{286}$$

où $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n \arccos x$ lorsque $\frac{k}{n} \to 0$. Par conséquent, pour $\frac{k}{n} \to 0$, les coefficients du produit de (285) par (286) sont asymptotiques à ceux de

$$\begin{aligned} &x^n + (\rho - \rho_1 - \alpha_1)x^{n-1} - \frac{n}{4}x^{n-2} + \ldots + \left(-\frac{n}{4}\right)^l \frac{x^{n-2l}}{l!} \\ &\quad + \left(-\frac{n}{4}\right)^l \frac{(\rho - \rho_1 - \alpha_1)x^{n-2l-1}}{l!} + \ldots, \end{aligned} \tag{287}$$

à moins qu'on ait $\rho - \rho_1 - \alpha_1 = 0$, en quel cas l'ordre de grandeur des coefficients correspondant à $k = 2l + 1$ impair est abaissé, et leurs valeurs asymptotiques s'obtiendront de même, en faisant intervenir les termes suivants de (285).

Il est évident que pour k fini les coefficients A_k sont asymptotiques à ceux du développement (287), car les coefficients du développement de γ_n dans (280) suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ seront de l'ordre de $\gamma_n R^k$ où $R > 1$ est un nombre positif quelconque.

Si k croît indéfiniment, les coefficients A_k ne seront asymptotiques à ceux de

$$\begin{aligned} P_n(x) &= R_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log f_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}} \\ &= x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_k x^{n-k} + \ldots \end{aligned} \tag{288}$$

que sous la condition que γ_n ne tende pas trop lentement vers zéro.

On aura, en effet,

$$A_k - B_k = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P_n(z)\gamma_n\,dz}{z^{n-k+1}}, \tag{289}$$

où C est une ellipse, ayant $(-1, +1)$ pour foyers et $1+\delta\,(\delta > 0)$ pour somme des demi-axes.

Donc

$$A_k - B_k = O\left\{\left(\frac{1+\delta}{2}\right)^{n-1} \frac{\gamma_n}{\left[\frac{1}{2}\left(1+\delta-\frac{1}{1+\delta}\right)\right]^{n-1-k}}\right\} = O\left[\frac{(1+\delta)^{2n-2-k}\gamma_n}{2^k(\delta^2+2\delta)^{n-1-k}}\right];$$

en supposant que $\lim \frac{k}{n} < 1$, posons $1+\delta = \sqrt{\frac{2n+2-k}{k}}$; on a ainsi

$$A_k - B_k = O\left[\frac{(2n+2-k)^{n+1-\frac{k}{2}}\gamma_n}{(2^n k^{\frac{k}{2}}(n+1-k)^{n-1-k}}\right]. \tag{290}$$

Si l'on désigne par C_k le coefficient de x^{n-k} du polynome $T_n(x)$, où $k = 2l$ est pair, la formule (290) prend la forme

$$A_k - B_k = O(C_k\gamma_n\sqrt{k}), \tag{291}$$

car

$$\begin{aligned} |C_k| &= \frac{n\left(n-\frac{k}{2}-1\right)!}{(n-k)!\left(\frac{k}{2}\right)!\,2^k} \sim \frac{n\left(n-\frac{k}{2}-1\right)^{n-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}}{(n-k)^{n-k}(2k)^{\frac{k}{2}}}\frac{e}{\sqrt{\pi k(n-k)}} \\ &= \frac{n(2n-k-2)^{n-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}}{2^{n-\frac{1}{2}}(n-k)^{n-k}k^{\frac{k}{2}}}\frac{e}{\sqrt{\pi k(n-k)}}. \end{aligned} \tag{292}$$

Par conséquent, *pour avoir*

$$(293) \qquad \lim \frac{A_k}{B_k} = 1,$$

il suffit que

$$(294) \qquad \gamma_n C_k \sqrt{k} = o(B_k).$$

En particulier, si $\frac{k}{n} \to 0$, on a, d'après (286), $B_k \sim C_k$ pour k pair, donc *il suffit que*

$$(295) \qquad \gamma_n \sqrt{k} \to 0.$$

On a un résultat analogue, mais plus restrictif, pour k impair; il suffit alors pour avoir (293) que $\gamma_n \sqrt{n} \to 0$.

En observant que les coefficients C_k vont en croissant plus rapidement que les termes d'une progression géométrique, ayant $r > 1$ pour raison, tant que l'on a $\lim \frac{k}{n} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut étendre la conclusion précédente au cas où $\lim \frac{k}{n} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette circonstance, d'après (213) et (221), se présentera en particulier, quels que soient ρ et ρ_1, lorsque $t_n(x)$ est un polynome donné. Observons que dans ce cas

$$(296) \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{z \log t_h(z)\, dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{2} \sum_1^h \frac{1}{r_i}.$$

Dans le cas, où la fonction $t_n(x)$ est paire, et $\rho = \rho_1$, il est évident par raison de symétrie que les polynomes orthogonaux correspondants ne contiendront que des puissances de même parité.

Si nous admettons de plus que $\rho = \rho_1 = 0$, de sorte, d'après la formule (16), $\overline{R}_n''(x)$ *atteint asymptotiquement son maximum absolu avec des signes opposés en* $n + 1$ *points du segment* $(-1, +1)$, *il réalise* (*asymptotiquement*) *l'écart minimum du produit*

$$P_n(x) \sqrt{t_n(x)},$$

$P_n(x)$ *étant assujetti à avoir le même coefficient* A_k de x^{n-k} que $R_n''(x)$.

Donc, en particulier, dans l'hypothèse que $\frac{k}{n} \to 0$, à cause de $B_k \sim C_k$, le rapport de cet écart minimum à celui qui correspond à $t_0(x) = 1$ est asymptotiquement égal à $e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}$, comme dans le cas, où $k = 0$, *quelle que soit la fonction continue positive* $t_0(x)$.

La valeur asymptotique de A_k, pour $\lim \frac{k}{n} = 1$, ne peut être déduite de (280); mais on peut la déduire de (28) dans l'hypothèse que $t_0(x)$ est un polynome, et passer ensuite à la limite pour l'obtenir dans le cas général. Sans entrer dans les détails de la démonstration, je me bornerai à indiquer la conclusion pour le cas où $\rho = \rho_1$ et $t_0(x)$ est paire, alors

$$(297) \qquad \lim \frac{A_k}{C_k} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}} \qquad \left(\text{si } \lim \frac{k}{n} = 1\right).$$

Donc les formules de W. Markoff subsistent asymptotiquement, lorsque $\frac{k}{n} \to 1$ $\Big($mais, elles ne sont pas vraies, d'après ce qui précède, pour $\lim \frac{k}{n} = 0\Big)$ quelle que soit la fonction continue positive $t_0(x)$.

Ainsi, en particulier, l'écart minimum de

$$|p_0 + x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n|\sqrt{t_0(x)}$$

sur $(-1, +1)$ est asymptotiquement égal à $\frac{1}{n}\cdot$ Ce dernier résultat subsiste, d'ailleurs, dans le cas où $t_0(x)$ contiendrait $(1-x)^{2\rho}(1+x)^{2\rho_1}$ en facteur avec $\rho\rho_1 \gtrless 0$, et peut être déduit du même raisonnement, que la proposition générale suivante que nous allons démontrer :

Si la fonction $\varphi(x)$ jouit de la propriété qu'il existe un nombre fixe k tel que

$$E_n[x\varphi(x)] = o\,\{E_n[\varphi(x)]\}$$

et

$$(298) \qquad \frac{1}{n^k} = o\,\{E_n[\varphi(x)]\},$$

où $E_n[f(x)]$ désigne la meilleure approximation de $f(x)$ par des polynomes de degré n sur $(-1, +1)$, alors, quelle que soit la fonction continue positive $p(x)$ donnée telle que $p(0) = 1$, on a

$$(299) \qquad E_{n,p(x)}[\varphi(x)] \sim E_n[\varphi(x)],$$

où $E_{n,p(x)}[\varphi(x)]$ *est l'écart minimum du produit*

$$(300) \qquad |\varphi(x) - P_n(x)|\,p(x)$$

sur le même segment, $P_n(x)$ *étant un polynome de degré n.*

En effet, soient $p_h(x)$ un polynome de degré h, approché de $p(x)$, et $q_k(x)$ un polynome de degré k, approché de $\frac{1}{p(x)}$, tels que, ε étant un nombre positif donné arbitraire,

$$(301) \qquad 1-\varepsilon < \frac{p_h(x)}{p(x)} < 1+\varepsilon, \qquad 1-\varepsilon < q_k(x)\,p(x) < 1+\varepsilon.$$

de sorte que

$$(302) \qquad (1-\varepsilon)^2 < p_h(x)\,q_k(x) < (1+\varepsilon)^2.$$

Or, en posant

$$p_h(x) = 1 + x\,R(x),$$

nous concluons de (298) que

$$(303) \qquad E_n[p_h(x)\,\varphi(x)] \sim E_n[\varphi(x)]$$

et, par conséquent, puisqu'on a manifestement

$$E_{n,p_h(x)}[\varphi(x)] \geqq E_{n-h}[p_h(x)\,\varphi(x)],$$

nous pourrons choisir n assez grand pour avoir

$$(304) \qquad E_{n,p_h(x)}[\varphi(x)] > E_{n-h}[\varphi(x)](1-\varepsilon).$$

De même,

$$(305) \qquad E_{n,p_h(x)q_k(x)}[\varphi(x)] > E_{n+k,p_h(x)}[q_k(x)\,\varphi(x)] \sim E_{n+k,p_h(x)}[\varphi(x)]:$$

donc, en vertu de (302) et (305), on a

$$(306) \qquad E_n[\varphi(x)] > E_{n+k,p_h(x)}[\varphi(x)](1-\varepsilon)^3.$$

En tenant compte de (301), (304) et (306), nous avons donc la double inégalité

$$(307) \qquad \frac{1}{(1-\varepsilon)^4} E_{n-k}[\varphi(x)] > E_{n,p(x)}[\varphi(x)] > E_{n-h}[\varphi(x)](1-\varepsilon)^2,$$

ce qui prouve notre affirmation.

Le théorème s'applique, en particulier, à $|x|^\alpha$, quel que soit $\alpha > 0$. Il est évident aussi que l'introduction d'un facteur s'annulant sur $(-1, +1)$ de la forme $\left|1-\frac{x}{a_1}\right|^{\mu_1}\cdots\left|1-\frac{x}{a_h}\right|^{\mu_h}$ dans la fonction $p(x)$ ne modifie pas la valeur asymptotique de $E_{n,p(x)}[\varphi(x)]$ lorsque $\varphi(x)$ est assujetti aux conditions (298).

10. Pour terminer, montrons, comment on pourra calouler la valeur asymptotique de $E_{n,\sqrt{t_0 x}}[\varphi(x)]$ lorsque $\varphi(x)$ est une fonction analytique. Nous nous bornerons au cas où $t_0(x)$ est positive et continue sur $(-1, +1)$ en ajoutant provisoirement la condition (18), dont nous pourrons ensuite nous débarrasser.

Supposons que $\varphi(x)$ admet *un pôle unique réel positif*, pour fixer les idées, $a > 1$, sur son ellipse de convergence.

Commençons par observer que dans le cas où le poids trigonométrique $t_0(x)$ satisfait à la condition (18) que

$$t_0(x+\delta) - t_0(x) = O\left(\frac{1}{\log\delta}\right)^{1+\varepsilon},$$

où $\varepsilon > 0$, on a non seulement la formule

$$\overline{R}_n^0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}}\cos(n\theta + \psi), \tag{16}$$

mais on obtient par la même méthode la formule asymptotique pour la dérivée

$$\frac{1}{n}\overline{R}_n'^0(x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}}\sin(n\theta + \psi) + \varepsilon_n, \tag{308}$$

où ε_n tend uniformément vers zéro surtout le segment $(-1, +1)$.

En effet, en supposant, d'abord, que $t_0(x)$ est un polynome $t_h(x)$, en remplaçant le polynome $T_n(x)$ de Tchebichef dans la dernière colonne du déterminant (28) par $\frac{1}{n}T_n'(x)\sqrt{1-x^2}$, on vérifie que la formule (308) est exacte avec le même ordre de l'erreur que la formule correspondante (64). Ensuite, en appliquant un théorème bien connu, on constate que

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left[\overline{R}_n'^0(x) - \overline{R}_{n,h}'(x)\right] = O(\varepsilon\log n)$$

du moment qu'il est démontré que

$$|\overline{R}_n^0(x) - \overline{R}_{n,h}^0(x)| = O(\varepsilon \log n).$$

Ceci posé, formons le polynome

$$(309) \qquad S_{n+1}(x) = (x-a)\left[\overline{R}_n^0(x)\cos\delta - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\overline{R}_n'^0(x)\sin\delta\right]$$
$$= \overline{R}_n^0(x)(ax-1) + \frac{\sqrt{a^2-1}}{n}(x^2-1)\overline{R}_n'^0(x),$$

où

$$\cos\delta = \frac{ax-1}{x-a}, \qquad \sin\delta = \frac{\sqrt{(a^2-1)(1-x^2)}}{x-a},$$

de sorte que, d'après (16) et (308), on a

$$(310) \qquad \frac{S_{n+1}(x)}{x-a} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t_0(x)}}\cos(n\theta + \psi + \delta).$$

Puisque δ croît de $-\pi$ à zéro, lorsque θ varie de zéro à π, la fonction

$$(311) \qquad \frac{\sqrt{t_0(x)}S_{n+1}(x)}{x-a} = \left[\frac{S_{n+1}(a)}{x-a} - P_n(x)\right]\sqrt{t_0(x)},$$

où $P_n(x)$ est un polynome de degré n, atteint $n+1$ fois sur le segment $(-1, +1)$ son écart maximum asymptotiquement égal à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Donc $\frac{P_n(x)}{S_{n+1}(a)}$ fournit asymptotiquement la meilleure approximation

$$E_{n,\sqrt{t_0(x)}}\left(\frac{1}{x-a}\right) \sim \frac{1}{|S_{n+1}(a)|}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Pour obtenir la valeur asymptotique de $S_{n+1}(a)$, on observe que, d'après (16) et (310), on a $S_{n+1}(x) + a\overline{R}_{n+1,a}(x) = o(1)$, où $\overline{R}_{n+1,a}(x)$ est le polynome orthogonal normé relatif au poids trigonométrique $t_0(x)\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$, uniformément sur le segment $(-1, +1)$; donc, d'après un théorème connu, on a au point a

$$S_{n+1}(a) = -a\overline{R}_{n+1,a}(a) + o[(a+\sqrt{a^2-1})^n],$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{S_{n+1}(a)}{\overline{R}_{n+1,a}(a)} = -a.$$

Or

$$\overline{R}_{n+1,n}(a) \sim \frac{(a+\sqrt{a^2-1})^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)-2\log\left(1-\frac{z}{a}\right)}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}dz}$$

$$= \frac{2\left(a-\frac{1}{a}\right)}{\sqrt{2\pi}}(a+\sqrt{a^2-1})^n e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(z-a)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Donc,

$$(312)\qquad E_{n,\sqrt{t_0}(x)}\left(\frac{1}{x-a}\right) \sim \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} e^{-\frac{\sqrt{a^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}},$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$(312\ bis)\qquad E_{n,t_0(x)}\left(\frac{1}{x-a}\right) \sim E_n\left(\frac{1}{x-a}\right) e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}}.$$

On pourrait aussi déduire la valeur asymptotique de $S_{n+1}(a)$ de l'expression (309).

Il suffirait d'observer que *les formules asymptotiques pour les dérivées qu'on obtient par différentiation de* (280) *sont également valables en tout point extérieur*, car la démonstration de ceci résulte directement de la méthode développée dans ce Mémoire.

D'ailleurs, il suffirait que la formule (312) soit établie pour un polynome positif quelconque $t_h(x)$ [1], pour en conclure son exactitude pour une fonction continue positive quelconque.

En différentiant par rapport à a l'identité

$$(311\ bis)\qquad \sqrt{t_0(x)}\frac{S_{n-1}(x)}{S_{n-1}(a)}\frac{1}{x-a} = \left[\frac{1}{x-a} - \frac{P_n(x)}{S_{n-1}(a)}\right]\sqrt{t_0(x)}$$

et en observant que, d'après (309), les dérivées successives de $S_{n-1}(x)$ par rapport à a sont sur le segment $(-1, +1)$ de l'ordre $O(1)$ pour $n \to \infty$, nous en concluons que le second membre, qui après k différentiations devient égal à

$$\left[\frac{k!}{(x-a)^{k-1}} - Q_{n,k}(x)\right]\sqrt{t_0(x)},$$

---

[1] C'est ainsi que j'ai obtenu pour la première fois cette formule sous une forme équivalente (comme produit de facteurs, qui met ainsi en évidence la nature algébrique de l'intégrale considérée) dans une Note des *Comptes rendus* (séance du 26 mars 1928, p. 840).

où $Q_{n,k}(x)$ est un polynome de degré n, est asymptotique à

$$\frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{1}{S_{n+1}(a)}\right)\sqrt{t_0(x)}\,\frac{S_{n+1}(x)}{x-a} \sim \frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\frac{1}{S_{n+1}(a)}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi+\delta).$$

Par conséquent, d'après la remarque faite plus haut, on a

$$(313)\qquad E_{n,\sqrt{t_0(x)}}\left(\frac{1}{(x-a)^{k+1}}\right) \sim E_n\left(\frac{1}{(x-a)^{k+1}}\right)e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}}.$$

Donc, *si la fonction analytique* $\varphi(x)$ *admet un pôle unique réel a d'ordre quelconque sur son ellipse de convergence, on a toujours*

$$(314)\qquad E_{n,t_0(x)}[\varphi(x)] \sim E_n[\varphi(x)]e^{\frac{\sqrt{a^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_0(z)\,dz}{(a-z)\sqrt{1-z^2}}}$$

quelle que soit la fonction $t_0(x)$ *positive et continue sur* $(-1, +1)$.

Cette égalité asymptotique doit aussi très probablement être exacte dans le cas où la singularité de $\varphi(x)$ est algébrique ou logarithmique.