

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

W. RIVIER

Sur un théorème fondamental de l'Algèbre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 10 (1931), p. 213-218.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10_213_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur un théorème fondamental de l'Algèbre;***PAR W. RIVIER.**

Nous nous proposons de démontrer à nouveau le théorème suivant :

L'équation

$$(1) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_{\mu\nu} x_{\mu}^{\nu} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}).$$

où $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ représentent des coefficients entiers, est résoluble en nombres entiers ⁽¹⁾.

Voici d'abord quelques observations destinées à rappeler l'importance de ce théorème.

En satisfaisant de la manière envisagée à l'équation (1), on satisfait du même coup à l'équation

$$(2) \quad \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m} a_{\mu 1} x_{\mu}, \sum_{\mu=1}^{\mu=m} a_{\mu 2} x_{\mu}, \dots, \sum_{\mu=1}^{\mu=m} a_{\mu n} x_{\mu} \right) = (a_{11}, \dots, a_{mn}).$$

Il s'ensuit que, si l'on réussit à établir que toute équation de la forme (1) possède la propriété d'être résoluble en nombres entiers, cette propriété s'étendra d'elle-même aux équations de la forme

$$(3) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=mr} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} a_{\mu\nu\rho} x_{\mu}^{\nu} z_{\rho} = (a_{111}, \dots, a_{mnr}).$$

⁽¹⁾ La notation $(a, b, c, \dots)$, où $a, b, c, \dots$ désignent des nombres entiers, représente le plus grand commun diviseur des nombres $a, b, c, \dots$.

puis, de ces équations, à celles de la forme

$$(4) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\rho=1}^{\rho=r} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=s} a_{\mu\nu\rho\sigma} x_{\mu} y_{\nu} z_{\rho} w_{\sigma} = (a_{1111}, \dots, a_{mnr s}),$$

et ainsi de suite. La résolution de l'équation (3) peut en effet se ramener à la résolution d'une équation de la forme (2), suivie de celle d'une équation de la forme (1), la résolution de l'équation (4) à celle d'une équation de la forme (2), suivie de celle d'une équation de la forme (3), etc. En particulier, si l'on se donne n entiers premiers entre eux, il sera toujours possible de leur adjoindre $n(n-1)$ autres entiers tels que l'on puisse, avec tous ces entiers, former un déterminant d'ordre n , de valeur égale à 1, qui admette les n entiers donnés comme éléments d'une même colonne. C'est en partie sur ce dernier résultat, en partie directement sur le théorème proposé, que repose le théorème d'existence de la forme réduite

$$c_1 x_1 y_1 + c_2 x_2 y_2 + \dots$$

d'une forme bilinéaire à coefficients entiers ⁽¹⁾.

Pour démontrer le théorème proposé ⁽²⁾, nous nous appuierons sur deux lemmes.

LEMME I. — L'équation

$$(5) \quad u(ax + by) + v(\alpha x + \beta y) = (a, b, \alpha, \beta),$$

où a, b, α et β représentent des coefficients entiers, est résoluble en nombres entiers. (En d'autres termes : le théorème proposé est vrai pour $m = 2, n = 2$.)

Démonstration du lemme I. — Posons

$$(a, b) = d, \quad (\alpha, \beta) = \delta.$$

(¹) Voir FROBENIUS, *Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten* (*Journ. de Crelle*, t. 86, p. 157 et suiv.).

(²) Pour d'autres démonstrations de ce théorème, voir notamment : FROBENIUS, *ibid.*, p. 151 et suiv.

Soient r et s deux entiers tels que l'on ait

$$(6) \quad ar + bs = d.$$

La solution générale de l'équation

$$ax + by = d$$

est alors donnée par les relations

$$(7) \quad x = r + \frac{b}{d}k, \quad y = s - \frac{a}{d}k,$$

où k représente un entier arbitraire.

Portons ces valeurs de x et de y dans la forme $\frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}y$. Nous obtenons identiquement :

$$\frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}y = Mk + N,$$

en posant

$$(8) \quad \frac{b}{d}\frac{\alpha}{\delta} - \frac{a}{d}\frac{\beta}{\delta} = M, \quad r\frac{\alpha}{\delta} + s\frac{\beta}{\delta} = N.$$

Résolvons par rapport à $\frac{\alpha}{\delta}$ et à $\frac{\beta}{\delta}$ le système des relations (8). En tenant compte de (6), nous trouvons :

$$\frac{\alpha}{\delta} = sM + \frac{a}{d}N, \quad \frac{\beta}{\delta} = -rM + \frac{b}{d}N.$$

De ces relations, et du fait que les entiers $\frac{\alpha}{\delta}$ et $\frac{\beta}{\delta}$ sont premiers entre eux, découle que M et N sont des entiers premiers entre eux. Il en résulte qu'on pourra choisir k de manière que $Mk + N$ soit premier avec d ; il suffira, en effet, de prendre $k = 0$, si tout diviseur premier de d entre dans M , sinon, k égal à l'une des solutions de la congruence

$$Mk + N \equiv 1 \pmod{P},$$

où P désigne le produit des diviseurs premiers de d qui n'entrent pas dans M . L'entier k étant ainsi choisi, soient x_0 et y_0 les valeurs correspondantes de x et de y , fournies par les relations (7); il viendra :

$$(9) \quad (ax_0 + by_0, \alpha x_0 + \beta y_0) = (d, (Mk + N)\delta) = (d, \delta) = (a, b, \alpha, \beta).$$

Soient alors u_0 et v_0 deux entiers satisfaisant à la condition

$$(10) \quad u_0(ax_0 + by_0) + v_0(\alpha x_0 + \beta y_0) = (ax_0 + by_0, \alpha x_0 + \beta y_0).$$

En vertu de (9) et de (10), les quatre entiers x_0, y_0, u_0 et v_0 formeront un système de solutions de l'équation (5).

Le lemme I est ainsi démontré.

Nous désignerons dorénavant par $F(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$, ou, plus simplement, par F , l'expression $\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$.

LEMME II. — *Si l'on peut résoudre séparément en nombres entiers chacune des deux équations*

$$(11) \quad F = d',$$

$$(12) \quad F = d'',$$

où d' et d'' représentent deux entiers donnés, on peut aussi résoudre en nombres entiers la suivante :

$$(13) \quad F = (d', d'').$$

Démonstration du lemme II. — Supposons, en effet, deux systèmes de valeurs entières de $x_1, \dots, y_n$:

$$\begin{cases} x_\mu = x'_\mu, & y_\nu = y'_\nu, \\ x_\mu = x''_\mu, & y_\nu = y''_\nu. \end{cases} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, n).$$

satisfaisant, le premier, à l'équation (11), le second, à l'équation (12). Posons

$$\Phi(u_1, u_2; v_1, v_2) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} (u_1 x'_\mu + u_2 x''_\mu) (v_1 y'_\nu + v_2 y''_\nu).$$

On pourra écrire identiquement

$$\Phi = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n A_{\mu\nu} u_\mu v_\nu,$$

les A désignant des entiers déterminés. On pourra donc, en vertu du

lemme I, résoudre en nombres entiers l'équation

$$\Phi = (A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}),$$

et aussi, par conséquent, la suivante:

$$(14) \quad \Phi = (d', d''),$$

puisque, en vertu des relations

$$\Phi(1, 0; 1, 0) = d', \quad \Phi(0, 1; 0, 1) = d'',$$

vérifiées par hypothèse, (d', d'') est divisible par $(A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22})$.

Soit donc

$$u_1 = p, \quad u_2 = q, \quad v_1 = r, \quad v_2 = s$$

un système de valeurs entières de u_1, u_2, v_1 et v_2 satisfaisant à l'équation (14). Les valeurs entières de $x_1, \dots, x_n$:

$$x_\mu = p x'_\mu + q x''_\mu, \quad y_\nu = r y'_\nu + s y''_\nu, \quad (\mu = 1, 2, \dots, m; \nu = 1, 2, \dots, n),$$

constitueront un système de solutions de l'équation (13).

Le lemme II est ainsi démontré.

Démonstration du théorème proposé. — Posons

$$\Delta_\mu = (a_{\mu 1}, a_{\mu 2}, \dots, a_{\mu n}) \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

On peut évidemment résoudre séparément en nombres entiers chacune des m équations

$$F = \Delta_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, m).$$

En vertu du lemme II, on pourra donc résoudre en nombres entiers l'équation

$$(15) \quad F = (\Delta_1, \Delta_2).$$

Pouvant résoudre en nombres entiers l'équation (15) et l'équation

$$F = \Delta_3,$$

on pourra résoudre, en nombres entiers, la suivante :

$$F = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3).$$

En continuant de la sorte, on voit finalement que l'on pourra résoudre en nombres entiers l'équation

$$F = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n).$$

c'est-à-dire la proposée.

C. Q. F. D.

Nous avons pensé que cette démonstration pourrait offrir quelque intérêt à cause de la méthode qu'elle fournit pour la résolution des équations de la forme proposée.
