

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. WEDENISSOFF

Sur les espaces métriques complets

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 9 (1930), p. 377-381.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9_377_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les espaces métriques complets ⁽¹⁾;

PAR N. WEDENISSOFF.

(Moscou.)

Dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (t. 178, 1924, p. 185), M. P. Alexandroff a caractérisé au point de vue topologique les espaces métriques séparables complets de M. Fréchet ⁽²⁾. Il a donné aussi une définition topologique intrinsèque des ensembles G_δ situés dans de tels espaces. Ces résultats sont contenus dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un espace métrique séparable soit complet, il faut et il suffit que l'on puisse extraire de tout système déterminant ⁽³⁾ de cet espace un système déterminant clos ⁽⁴⁾.*

⁽¹⁾ Après avoir achevé la démonstration des résultats ci-dessous (dont l'exposé a été lu au Séminaire topologique de M. Alexandroff en décembre 1926) j'apprends que M. Hausdorff est parvenu aux mêmes résultats en octobre 1926, sans les avoir publiés. Je tiens à mentionner en outre que M. Sierpinski a, lui aussi, obtenu des résultats équivalents (à paraître dans les *Fundamenta Mathematicæ*, t. XI).

⁽²⁾ On trouvera dans la Note citée de M. Alexandroff les définitions de toutes les notions élémentaires dont nous faisons usage dans le présent travail.

⁽³⁾ Le système $\gamma = \{V\}$ de sous-ensembles ouverts de l'espace (ou de l'ensemble) E est dit système déterminant de l'espace (ou de l'ensemble) E, si tout ensemble ouvert dans E peut être obtenu par réunion de certains ensembles du système γ .

⁽⁴⁾ Un système déterminant de l'espace E est appelé clos si, quelle que soit la suite décroissante de ce système : $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \dots$, il y a des points communs à tous les $\bar{V}_n$ (où $\bar{V}_n$ désigne l'ensemble V_n augmenté de tous ses points d'accumulation). De même un système déterminant d'un ensemble M est clos, si pour toute suite décroissante d'ensembles de ce système : $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \dots$ on a

$$M \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{V}_n \neq \emptyset.$$

THÉOREME II. — *Pour qu'un ensemble M situé dans un espace métrique séparable complet soit un ensemble G_2 , il faut et il suffit que l'on puisse extraire de tout système déterminant de cet ensemble un système déterminant clos.*

Ces deux théorèmes ont pour conséquence le suivant :

THÉOREME III. — *Soit M un ensemble G_2 quelconque situé dans un espace séparable complet E ; si l'on considère M comme espace relatif (par rapport à E), cet espace est nécessairement complet.*

La réciproque de cette proposition subsiste elle aussi; on a même plus : tout ensemble M (situé dans n'importe quel espace séparable E) est un G_2 dans E , si M considéré comme espace relatif est complet.

M. Hausdorff ⁽¹⁾ a généralisé par un raisonnement direct le théorème III; il le démontre notamment sans supposer que l'espace est séparable.

Dans la présente Note je me propose d'étendre au cas des espaces métriques quelconques les théorèmes I et II; je remplace en outre le critère caractéristique qui figure dans ces théorèmes par une condition moins restrictive. J'obtiens ainsi les théorèmes suivants :

THÉOREME I. — *Pour qu'un espace métrique E soit complet, il faut et il suffit qu'il possède au moins un système déterminant clos.*

THÉOREME II. — *Pour qu'un ensemble M situé dans un espace métrique E soit un G_2 , il faut et il suffit qu'il possède un système déterminant clos.*

Nous démontrerons la suffisance de notre condition pour les ensembles G_2 en reproduisant avec de légères modifications un raisonnement de M. Sierpinski ⁽²⁾.

Soit M un ensemble possédant un système déterminant clos $\gamma = \{V\}$, ensemble situé dans un espace métrique quelconque E . Nous prouverons que M est un G_2 dans E .

Quels que soient le point $x \in M$ et le nombre naturel n , il existe

⁽¹⁾ *Fund. Math.*, t. VI, p. 146.

⁽²⁾ *Fund. Math.*, t. VI, p. 106.

un ensemble du système γ , $V_n(x)$ tel que $\delta[V_n(x)] < \frac{1}{n}$ ⁽¹⁾. $V_n(x)$ étant ouvert dans M , il existe une sphère $S_n(x, \delta_n)$ de rayon δ_n inférieur à $\frac{1}{n}$ et telle que $S_n(x, \delta_n) \cdot M \subset V_n(x)$. En posant :

$$G_n = \sum_{x \in M} S_n(x, \delta_n),$$

on voit que G_n est un ensemble ouvert dans E . Démontrons qu'on a

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Comme on a évidemment $M \subset G_n (n=1, 2, 3, \dots)$, donc $M \subset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$,

il suffit de démontrer que $M \supset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Soit en effet y un point de

l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Le point y faisant partie de G_1 , il existe un point $x_1 \in M$, tel que $S_1(x_1, \delta_1) \supset y$. Soient σ_1 la distance $\rho(y, x_1)$, n_2 un nombre naturel supérieur à $\frac{2}{\delta_1 - \sigma_1}$. Le point y appartenant à G_{n_2} , on voit qu'il existe un point $x_2 \in M$, tel que $S_{n_2}(x_2, \delta_{n_2}) \supset y$.

Pour tout point $z \in V_{n_2}(x_2)$ on a

$$\rho(z, x_1) \leq \rho(y, x_1) + \rho(y, x_2) + \rho(z, x_2) < \sigma_1 + \frac{2}{n_2} < \delta_1.$$

Il s'ensuit que

$$V_{n_2}(x_2) \subset S(x_1, \delta_1) \cdot M \subset V_1(x_1).$$

Posons $\sigma_2 = \rho(y, x_2) < \delta_{n_2}$ et choisissons $n_3 > \frac{2}{\delta_{n_2} - \sigma_2}$.

Il existe un point x_3 dans M , tel que $S_{n_3}(x_3, \delta_{n_3}) \supset y$, et l'on voit que

$$V_{n_3}(x_3) \subset S_{n_2}(x_2, \delta_{n_2}) \cdot M \subset V_{n_2}(x_2).$$

En procédant ainsi de suite on finit par obtenir une suite infinie d'ensembles :

$$V_1(x_1) \supset V_{n_2}(x_2) \supset V_{n_3}(x_3) \supset \dots$$

(1) $\delta(P)$ désignant le diamètre de l'ensemble P .

Le système γ étant clos, il existe un point

$$x \in M \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{V_{n_k}(x_k)}$$

et, comme les rayons des sphères $S_1(x_1, \delta_1)$, $S_{n_2}(x_2, \delta_{n_2})$, $S_{n_3}(x_3, \delta_{n_3})$, ... tendent vers zéro, le point x coïncide avec y . On voit ainsi que $\gamma \subset M$.

C. Q. F. D.

Soit maintenant E un espace métrique possédant un système déterminant clos. D'après un résultat fondamental de M. Hausdorff ⁽¹⁾, l'espace E peut être envisagé comme un sous-ensemble dense d'un espace métrique complet $\tilde{E}$.

Notre condition (pour les ensembles G_δ) étant suffisante, on voit que E est un G_δ dans $\tilde{E}$; il en résulte [d'après le résultat de M. Hausdorff cité p. 378 sous ⁽¹⁾] que E est lui-même un espace complet.

La suffisance de la condition du théorème I (pour les espaces complets) se trouve ainsi démontrée.

Soit maintenant $\gamma = \{V\}$ un système déterminant quelconque d'un espace complet E .

La démonstration des deux théorèmes sera achevée si nous prouvons que de γ on peut extraire un système déterminant clos.

Or cette dernière assertion est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Quel que soit le système déterminant $\gamma = \{V\}$ d'un espace métrique E , on peut extraire de γ un système déterminant $\gamma^* = \{V^*\}$, vérifiant la condition suivante :

Si

$$V_1^* \supset V_2^* \supset V_3^* \supset \dots$$

est une suite décroissante formée par des ensembles quelconques de γ^* , on a nécessairement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(V_n^*) = 0.$$

Soit en effet $\gamma_n = \{V^{(n)}\}$ l'ensemble de tous les ensembles ouverts du

⁽¹⁾ F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, Veit, 1914, Chap. VIII.

système γ tels que

$$\frac{1}{n+1} \leq \delta(V_n^m) < \frac{1}{n}.$$

En vertu du théorème de M. Zermelo on peut ranger les ensembles de γ_n en une suite bien ordonnée

$$(1) \quad V_1^n, V_2^n, V_3^n, \dots, V_\alpha^n, \dots, V_\alpha^n, \dots, \alpha < \Omega_n.$$

Soit maintenant γ_n^* le système d'ensembles ouverts qu'on obtient en enlevant de γ_n tous les ensembles V_α^n vérifiant la condition

$$V_\alpha^n \subset \sum_{\beta < \alpha} V_\beta^n.$$

Le système $\gamma^* = \{\gamma_n^*\}$ obtenu par réunion de tous les γ_n^* est évidemment un système déterminant.

Soit de plus

$$V_1^* > V_2^* > V_3^* > \dots > V_k^* > \dots$$

une suite d'ensembles ouverts faisant partie de γ^* . Il est impossible que tous les ensembles de cette suite appartiennent à un même γ_n . En effet supposons par impossible que les V_k^* ($k = 1, 2, 3, \dots$) se trouvent tous parmi les V_α^n , n ayant une valeur fixe, d'ailleurs quelconque. Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ les indices respectifs de $V_1^*, V_2^*, \dots, V_k^*, \dots$ dans (1).

Il résulte de notre construction que les α_k vont en décroissant, ce qui est impossible, toute suite décroissante de nombres ordinaux étant nécessairement finie.

Il résulte du raisonnement précédent qu'un système γ_n^* quelconque ne contient qu'un nombre fini (peut-être nul) de V_k^* ; les diamètres de ces derniers ensembles deviennent par conséquence infiniment petits

avec $\frac{1}{k}$.

C. Q. F. D.