JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Cycles orthogonaux à une même sphère. Congruences et opérations paratactiques. Applications

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 179-199.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__179_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Cycles orthogonaux à une même sphère. Congruences et opérations paratactiques. Applications;

Par Bertrand GAMBIER.
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Premier problème : *remplacer chaque cycle orthogonal à une sphère donnée par un système de deux points placés chacun sur un feuillet sphérique.* — Le problème : construire un cercle *perpendiculaire* à deux cercles donnés C_1 et C_2, exige l'étude du système ∞^2 des cercles C cosphériques à C_1 et C_2 simultanément; chacun de ces cercles C est orthogonal à la sphère, unique, Σ orthogonale simultanément à C_1 et C_2; C_1 et C_2 étant réels, Σ est d'équation réelle, de centre réel et de rayon *réel* si C_1 et C_2 ne sont pas enlacés, *nul* si C_1 et C_2 sont sécants en un point, *imaginaire pure* si C_1 et C_2 sont enlacés. Ces déductions successives conduisent à envisager les ∞^1 cercles orthogonaux à Σ; nous nous bornerons au cas où Σ a son rayon imaginaire pur (mais en faisant intervenir des éléments imaginaires, tout ce qui suit s'appliquerait, avec quelques modifications aisées à faire). Nous prendrons pour unité le rayon de Σ, divisé par i; autrement dit, O centre de Σ étant pris pour origine, chaque cercle étudié ici a son plan passant par O, et la puissance de O est égale à -1. J'éviterai systématiquement — sauf dans un dernier paragraphe — l'emploi d'êtres géométriques imaginaires et me bornerai à des démonstrations extrêmement élémentaires.

Soit donc donné un cercle C orthogonal à cette inversion négative, de pôle O et puissance -1. Il existe un cercle C′, conjugué à C, unique, orthogonal à cette même inversion; c étant le centre de C, le plan de C′ est celui, mené par Oc, perpendiculaire au plan de C; sur cette

droite Oc, l'équation $Oc.Oc' = -1$ donne le centre c' de C'; la perpendiculaire en O au plan de C perce la sphère Σ', de centre O et rayon 1, en deux points appartenant à C'; orientons la droite Occ' arbitrairement et soit OA la demi-droite positive ainsi obtenue; l'équation $Oc = \cot\frac{\omega}{2}$ fournit, à 2π près, un angle ω; nous orientons, arbitrairement, la perpendiculaire $O\gamma$ issue de O au plan de C' : en faisant tourner de $-\frac{\omega}{2}$ autour de OA la demi-droite $O\gamma$ nous obtenons une demi-droite perçant Σ' en a; en faisant tourner $O\gamma$ de $\frac{\omega}{2}$, toujours autour de OA, nous obtenons une autre demi-droite coupant Σ' en α; la sphère Σ' peut être regardée comme constituée de deux feuillets l'un, *romain* par exemple, lieu de a, l'autre *grec*, lieu de α. Le changement de ω en $\omega + 2\pi$ par exemple, sans changer $O\gamma$, remplacerait simultanément a et α par les points a', α' diamétralement opposés; laisser ω et remplacer $O\gamma$ par la demi-droite opposée remplace de même (a, α) par (a', α'). De même le changement d'orientation sur OA est indifférent. La construction analogue faite pour C' fait correspondre à C' soit (a, α'), soit (a', α). Le trièdre des coordonnées $Oxyz$ a dû être donné (du moins sa disposition, dextrorsum ou sinistrorsum *ad libitum*) pour que l'expression « faire tourner l'espace autour d'une demi-droite d'un angle donné » ait un sens. On peut convenir de considérer le couple choisi (a, α) ou (a', α') comme définissant le vecteur $\overrightarrow{a\alpha}$ ou $\overrightarrow{a'\alpha'}$ (romain, origine; grec, extrémité) et d'orienter le cercle C de façon que l'observateur placé sur l'axe de C (parallèle à $a\alpha$), dans le sens a (pieds), α (tête), voit le mobile décrivant le *cycle* C tourner autour de lui dans le sens direct; le choix de $a\alpha$, au lieu de $a'\alpha'$, définit un cycle, au lieu de l'opposé, et réciproquement le choix du cycle permet de choisir $a\alpha$ plutôt que $a'\alpha'$; les quatre combinaisons possibles en orientant C et C' chacun arbitrairement se retrouvent dans les quatre choix $(a\alpha, a\alpha')$, $(a\alpha, a'\alpha)$, $(a'\alpha', a\alpha')$, $(a'\alpha', a'\alpha)$. La définition de ω, en vertu de $R^2 - Oc^2 = +1$, prouve que l'on a

$$R = \frac{\pm 1}{\sin\frac{\omega}{2}}, \qquad R' = \frac{\pm 1}{\cos\frac{\omega}{2}},$$

R et R' étant les rayons de C et C'.

2. Problème inverse : *à un système de deux points placés chacun sur un feuillet sphérique faire correspondre un cycle.*

Supposons donné le système (a, α), (a', α'); le plan de C est le médiateur de $a\alpha$, celui de C′ le médiateur de $a\alpha'$; $a\alpha$ est parallèle à l'axe de C, $a\alpha'$ à celui de C′; la perpendiculaire élevée de O sur le plan $Oa\alpha$ est orientée arbitrairement et nous appelons OA la demi-droite positive ainsi obtenue; pour l'observateur placé sur OA, les pieds en O, la tête en A, l'angle $(Oa, O\alpha)$ ou l'angle égal $(Oa', O\alpha')$ a une valeur ω définie (à 2π près) en grandeur et signe (le trièdre $Oxyz$ étant donné à l'avance); le centre c de C a pour abscisse sur OA, $Oc = \cot\frac{\omega}{2}$, celui de C′, $Oc' = -\tan\frac{\omega}{2}$; cela suffit pour déterminer C ou C′, car C perce Σ' aux mêmes points que le diamètre joignant O au milieu de $a\alpha$ et C′ perce Σ' aux points analogues fournis par le diamètre relatif au milieu de $a\alpha'$; le choix de $a\alpha$ pour définir le cercle C, plutôt que le choix de $a'\alpha'$, définit le cycle C comme plus haut.

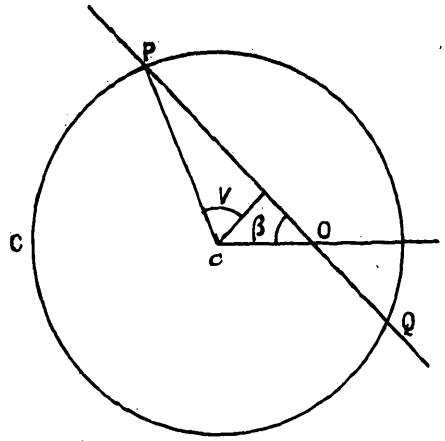
3. *Propriété fondamentale de la représentation des cycles. Cycles ou cercles cosphériques; angle de ces cycles.* — Il est bien clair *a priori* qu'un cercle orthogonal à une sphère peut être représenté par deux points d'un feuillet sphérique : par exemple, par ses pieds sur la sphère, si cette sphère est réelle; le sens du cycle serait donné par l'ordre de succession des pieds sur l'arc intérieur à la sphère. Pour une sphère de rayon imaginaire pur, on pourrait prendre la droite (orientée) joignant les pieds (cette droite est d'ailleurs l'axe du cercle conjugué).

Mais le mode de représentation adopté ici a la propriété importante suivante : *pour que deux cercles (ou deux cycles) C_1, C_2 soient cosphériques, il faut et il suffit que (a_1, α_1), (a_2, α_2) étant les images adoptées, $\widehat{a_1 a_2} = \widehat{\alpha_1 \alpha_2}$; l'angle des deux cycles est mesuré par cette distance sphérique commune $a_1 a_2$ ou $\alpha_1 \alpha_2$.*

La distance sphérique $a_1 a_2$ est comptée sur le grand cercle réunissant a_1 et a_2; elle est inférieure à π; l'angle des deux cycles donnés est l'angle *non orienté* des deux tangentes orientées menées en un point d'intersection. Si l'on remplace C_1 par le cycle opposé $-C_1$, a_1 et α_1 sont remplacés par a'_1 et α'_1, de sorte que $a_1 a_2 = \alpha_1 \alpha_2$ entraîne évidemment $a'_1 a_2 = \alpha'_1 \alpha_2 = \pi - a_1 a_2$.

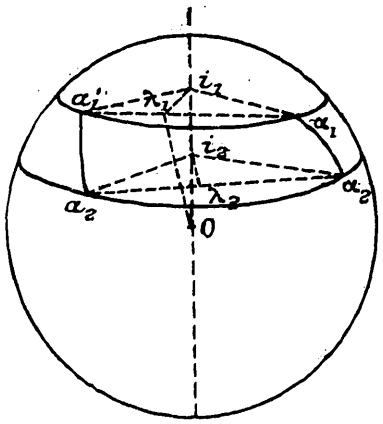
Pour voir simplement les résultats énoncés, figurons, dans un plan passant par O (*fig.* 1), un cercle C et une droite OI faisant avec le rayon

Fig. 1.



Oc l'angle aigu β; elle perce C en P et Q et si $OP = x$, $OQ = y$, on a évidemment $xy = 1$, $x - y = 2Oc\cos\beta$; la connaissance de $Oc\cos\beta$

Fig. 2.



suffit donc pour calculer x et y; d'ailleurs le grand segment OP est tel que les deux demi-droites Oc, OP forment l'angle aigu β, tandis que Oc, OQ forment l'angle obtus $\pi - \beta$.

Cela posé puisque $a_1 a_2 = \alpha_1 \alpha_2$, les plans médiateurs de $a_1 \alpha_1$ et $a_2 \alpha_2$, plans de C_1 et C_2 se coupent suivant une droite OI qui doit porter les

points d'intersection de C_1 et C_2, si ces cercles sont sécants; de plus OI est l'axe d'une rotation qui fait glisser Σ' sur elle-même, amenant le grand cercle $a_1 a_2$ sur $\alpha_1 \alpha_2$ (*fig.* 2), l'angle φ de cette rotation étant $\widehat{a_1 i_1 \alpha_1}$ ou $\widehat{a_2 i_2 \alpha_2}$. L'angle β_1 qui intervient pour la droite OI et le cercle C_1 est manifestement le complément de l'angle $\gamma_1 = IO\lambda_1$ de OI avec le plan $O a_1 \alpha_1$ car $O c_1$ est la normale à ce plan; on a donc

$$O c_1 \cos\beta_1 = O c_1 \sin\gamma_1 = \cot\frac{\omega_1}{2} \sin\gamma_1.$$

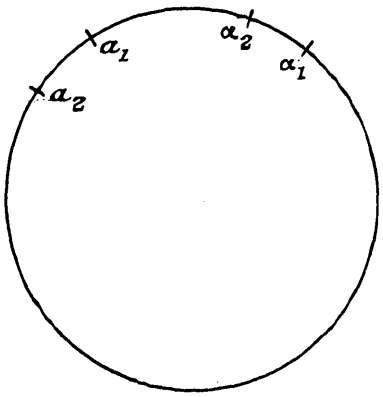
Or la figure donne évidemment

$$\cot\frac{\omega_1}{2} = \frac{\lambda_1 O}{\lambda_1 a_1}, \qquad \sin\gamma_1 = \frac{\lambda_1 i_1}{\lambda_1 O},$$

$$\cot\frac{\omega_1}{2} \sin\gamma_1 = \frac{\lambda_1 i_1}{\lambda_1 a_1} = \cot\frac{\varphi}{2}.$$

Il est donc démontré que la différence $x_1 - y_1$ relative à C_1 pour les segments interceptés à partir de O sur OI par C_1 est la même que la

Fig. 3.



différence analogue $x_2 - y_2$, de sorte que les intersections de OI avec C_1, ou bien coïncident avec les intersections de OI et C_2, ou bien sont respectivement symétriques de ces dernières par rapport à O; pour le décider, il suffit de raisonner par continuité, de laisser a_1 et α_1 fixes et de faire venir par continuité a_2 et α_2 sur le grand cercle $a_1 \alpha_1$ (*fig.* 3) avec la condition complémentaire que les arcs $a_1 \alpha_1$ et $a_2 \alpha_2$ soient égaux et de même sens. Dans ce cas, les relations entre un cycle C_1 et

son image (double) $a_1\alpha_1$ rendent évident qu'un déplacement de la figure, invariable, formée par tous les cycles C autour de O se traduit par le même déplacement sur les images et les deux feuillets sphériques; mais alors dans le cas de la figure 3, la droite OI est le diamètre perpendiculaire au plan de la figure, C_1 et C_2 ne diffèrent que par une rotation autour de OI, qui les coupe donc tous deux aux mêmes points (ces deux points d'ailleurs n'étant pas symétriques relativement à O); donc, dans tous les cas, la relation $a_1\alpha_1 = a_2\alpha_2$ est bien la condition nécessaire et suffisante pour que C_1 et C_2 soient cosphériques.

Pour achever la démonstration, remarquons, ce qui aurait pu être fait au paragraphe précédent, que si les deux images d'un cycle sont confondues en un même point $a = \alpha$, le plan médiateur de $a\alpha$ est indéterminé; donc le cercle se réduit à la droite Oa $\left(\text{d'ailleurs } R = \frac{\pm 1}{\sin\frac{\omega}{2}} \text{ le prouve aussi}\right)$ et l'on voit aisément aussi que le cycle est la demi-droite aO; le cycle conjugué a pour images a et le point diamétralement opposé; il a pour centre O, pour rayon 1, et pour axe Oa.

Nous allons prendre l'angle de IO, cycle particulier qui a pour images I et I, avec C_1 et montrer que cet angle est égal à $IOa_1 = IO\alpha_1$. Reportons-nous à la figure 2 : l'angle V de OPQ et de C est l'angle des normales issues de c à PQ et à C en P; on a donc

$$\operatorname{tang} V = \frac{x+y}{2Oc\sin\beta}.$$

Ici

$$\operatorname{tang} V_1 = \frac{x_1+y_1}{2Oc_1\sin\beta_1},$$

$$Oc_1 = \cot\frac{\omega_1}{2}, \qquad x_1y_1 = 1, \qquad x_1 - y_1 = 2\cot\frac{\omega_1}{2}\cos\beta_1 = 2\cot\frac{\omega_1}{2}\sin\gamma_1.$$

Donc, d'après la valeur trouvée pour $\cot\frac{\omega_1}{2}\sin\gamma_1$, on a

$$x_1 - y_1 = 2\cot\frac{\varphi}{2}, \qquad x_1 + y_1 = \frac{\pm 2}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\operatorname{tang} V_1 = \frac{\pm 1}{\sin\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\omega_1}{2}\cos\gamma_1}.$$

La figure 2 donne

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\lambda_1 a_1}{i_1 a_1},\qquad \cot\frac{\varphi_1}{2}=\frac{\lambda_1 O}{\lambda_1 a_1},\qquad \cos\gamma_1=\frac{i_1 O}{\lambda_1 O}.$$

De sorte que l'on a

$$\operatorname{tang} V_1=\pm\frac{i_1 a_1}{i_1 O}=\pm\operatorname{tang} IO a_1.$$

Un raisonnement de continuité prouve que l'on a $V_1 = IO a_1$ (il suffit en effet de réduire le second cycle à une droite); mais alors P étant un point commun à C_1 et C_2, la figure formée par les droites OIP, la tangente à C_1, puis la tangente à C_2 en P, est un trièdre égal au trièdre OI, Oa_1, Oa_2; les faces dont OI est une arête sont respectivement égales et les dièdres d'arête OI sont égaux : en effet pour le premier trièdre, l'angle rectiligne de ce dièdre est $(i_1\lambda_1, i_2\lambda_2)$ manifestement égal à l'angle rectiligne $(i_1 a_1, i_2 a_2)$ du second.

Donc les troisièmes faces sont égales, de sorte que l'angle des cycles C_1 et C_2 est bien $a_1 O a_2$ (des raisons de continuité comme plus haut rassurent aussitôt sur la rigueur du résultat).

Je dois ajouter la remarque suivante; il pourrait paraître plus intuitif d'opérer ainsi : de O centre de Σ' menons la parallèle AOA_1 à l'axe du cercle C, avec $OA = OA_1 = R$, rayon de C; de même BOB_1 parallèle à l'axe de C', avec $OB = OB_1 = R'$, rayon de C'. Le losange ABA_1B_1 est circonscrit à la sphère Σ', les quatre points de contact étant précisément les sommets du rectangle $a\alpha a'\alpha'$; mais il faut savoir distinguer les diagonales, romaine aa', grecque $\alpha\alpha'$ de ce rectangle; on est obligé de revenir aux considérations précédentes pour faire cette distinction et l'on doit remarquer alors qu'il est indifférent d'échanger les noms de a et a', car $a\alpha$ est parallèle à l'axe de C, $a\alpha'$ à celui de C'.

Le lecteur remarquera encore que certains problèmes exigent que des cercles déterminés soient orientés, mais que d'autres ne le soient pas. Par exemple deux cycles *quelconques* $a\alpha$, $b\beta$ admettent deux vrais bissecteurs *non orientés*, et deux faux bissecteurs également non orientés.

4. *Cercle perpendiculaire à deux cercles. Cas d'indétermination. Con-*

gruences paratactiques. — Ces résultats prouvent que *toutes les constructions relatives à des cycles orthogonaux à une même inversion négative se traitent par une espèce de géométrie projective, utilisant la projection sur le double feuillet sphérique Σ' de l'espace à quatre dimensions ayant pour point l'image dans cet espace de chaque cycle orthogonal à Σ.*

Soient deux cycles (enlacés, comme il a été dit plus haut) C_1, C_2; leurs images (a_1, α_1), (a_2, α_2) étant marquées sur Σ', on voit que tout cycle perpendiculaire à C_1 a ses images situées sur les grands cercles de pôle a_1 et α_1 tracés chacun sur un des deux feuillets de Σ'; donc, sur le feuillet romain, les deux grands cercles de pôles a_1 et a_2 se coupent en deux points diamétralement opposés p, p' que l'on peut obtenir directement en menant de O la perpendiculaire au plan Oa_1a_2; de même α_1 et α_2 conduisent aux deux points π, π'; on trouve donc *deux* cercles *conjugués* perpendiculaires communs à C_1 et d'images (p, π) ou (p, π'), (ou si l'on veut, quatre cycles). Il y a un cas remarquable : c'est que a_1 et a_2 coïncident, ou soient diamétralement opposés, auquel cas p est indéterminé sur le grand cercle de pôle a_1, ou que α_1 et α_2 soient confondus ou diamétralement opposés.

Convenons d'appeler *cycles paratactiques de première espèce* (ou romains) deux cycles dont les images romaines coïncident, *cycles antitactiques de première espèce* deux cycles dont les images romaines sont diamétralement opposées; puis *cycles paratactiques ou antitactiques de seconde espèce* (ou grecs) ..., en remplaçant le terme « romains » par « grecs ». Un point a arbitraire (romain) est *l'image d'une congruence paratactique romaine*, obtenue en faisant varier α *ad libitum;* le point a' est l'image de la même congruence, où le sens de chaque cycle a été renversé, de sorte que les ∞^2 congruences paratactiques romaines sont *orientables;* mêmes résultats pour les ∞^2 congruences paratactiques grecques. *La sphère romaine fournit pour chaque congruence paratactique romaine orientée une image d'ensemble réduite à un point, l'image de détail de cette congruence étant fournie par les ∞^2 points de la sphère grecque.*

Deux congruences orientées d'espèce différente ont un seul cycle commun; conservant l'orientation de l'une et renversant le sens de l'autre, on trouve un *cycle commun unique, différent, conjugué du premier.*

Les cercles perpendiculaires communs à deux cercles paratactiques romains (ou grecs) appartiennent à une même congruence paratactique grecque (ou romaine).

Un cycle cosphérique à deux cycles paratactiques les coupe évidemment sous le même angle comme on le voit aussitôt en regardant le feuillet romain, si les cycles sont paratactiques romains.

J'indique quelques propriétés simples : un cycle cosphérique à deux cycles conjugués (a, α), (a, α') a nécessairement son image grecque β sur le grand cercle de pôles α et α', car $ab = \alpha\beta$ et $ab = \alpha'\beta$ entraînent $\alpha\beta = \alpha'\beta = \frac{\pi}{2}$; mais alors ce cycle coupe orthogonalement les deux cycles conjugués. De même si le cycle (b, β) coupe orthogonalement (a, α), il coupe orthogonalement le conjugué (a, α'); mais alors le cycle (b, β') coupe aussi à angle droit (a, α), (a, α').

Si deux cycles (a, α), (b, β) sont cosphériques, les cycles conjugués (a, α'), (b, β') sont cosphériques et se coupent sous le même angle : cette propriété entraîne une transformation analogue à la transformation par polaires réciproques; elle consiste à remplacer chaque cercle par le cercle conjugué.

Si l'on a deux cycles (a_1, α_1), (a_2, α_2), en prenant les milieux m, m' diamétralement opposés, des arcs de grand cercle qui réunissent a_1 et a_2 et de même les milieux μ, μ', on a deux cercles (m, μ) et (m, μ') qui sont les *vrais bissecteurs* des deux cycles (a_1, α_1) (a_2, α_2) ou des cycles opposés (a'_1, α'_1), (a'_2, α'_2) et les *faux bissecteurs* des cycles (a_1, α_1), (a'_2, α'_2) ou des cycles (a'_1, α'_1), (a_2, α_2) obtenus en renversant un seul des cycles primitivement donnés; *deux cycles paratactiques ont deux vrais bissecteurs, et* ∞^1 *faux bissecteurs, tous ces bissecteurs, vrais ou faux, appartenant à la même congruence paratactique que les deux cycles.* (Nous verrons qu'un renversement autour d'un vrai bissecteur échange les deux cycles.)

Je pourrais ainsi citer un grand nombre de propositions (déjà connues d'ailleurs) qui, avec cette nouvelle méthode d'investigation, *restent* faciles à démontrer, si elles étaient déjà aisées à démontrer, ou *deviennent* faciles à démontrer. Je préfère indiquer rapidement diverses propriétés qu'il y aurait lieu de développer plus largement.

5. *Opérations du groupe conforme qui laissent invariante une inver-*

sion négative donnée. — Ces opérations forment un sous-groupe à 6 paramètres du groupe (à 10 paramètres) appelé groupe conforme. Elles transforment nécessairement une congruence paratactique en une autre paratactique, puisque deux cercles ont ou non une infinité de cercles perpendiculaires communs suivant qu'ils sont ou non paratactiques. Donc le feuillet romain de Σ' est soumis à une transformation biunivoque qui en fait un nouveau feuillet romain ou un nouveau feuillet grec; cette transformation conserve, sur les deux feuillets qui se correspondent ainsi, les distances, comme cela se reconnaît par la considération de cycles cosphériques et de leur angle. Les opérations en jeu se réduisent donc à une combinaison des suivantes :

a. Rotation autour d'un de ses diamètres du feuillet romain de Σ'.

b. Symétrie de ce feuillet autour de son centre.

c ou *d*. Opérations respectivement analogues à *a* ou *b*, effectuées sur le feuillet grec.

e. Échange des deux feuillets l'un avec l'autre.

Je ne développe, rapidement, qu'une conséquence. Faisons tourner le feuillet romain autour du diamètre xx'; la congruence paratactique romaine d'image x reste inaltérée; chaque congruence romaine tourne autour de la première; les congruences grecques restent, chacune dans son ensemble, inaltérées, les cycles d'une de ces congruences se permutant avec d'autres cycles de cette congruence (l'angle de parataxie d'un cycle et de son transformé étant égal à la moitié de l'angle de rotation du feuillet romain). La rotation euclidienne d'amplitude ω autour de xx' du feuillet romain équivaut à deux rotations *anallagmatiques* d'amplitude $\frac{\omega}{2}$ autour des *cycles* $x\xi$, $x\xi'$, en appelant ξ et ξ' deux points diamétralement opposés du feuillet grec (on le voit aisément en supposant $\omega = \pi$; chaque cercle dont l'image romaine est sur le grand cercle de pôle x se trouve remplacé par son conjugué; en faisant ensuite $\omega = 2\pi$, un cercle quelconque se retrouve inaltéré, chaque point du cercle se trouvant remplacé par son inverse). Imaginons maintenant que nous fassions en même temps une rotation du feuillet grec autour du diamètre $\xi\xi'$ et même que chaque rotation autour de xx' ou $\xi\xi'$ soit égale à π; l'opération totale peut se décom-

poser en la série des rotations anallagmatiques suivantes, chacune d'amplitude de $\frac{\pi}{2}$, autour des cycles ci-après :

$$x\xi; \quad x\xi'; \quad x'\xi; \quad x\xi.$$

Les deux rotations intermédiaires s'annulent, puisqu'elles sont faites autour de deux cycles opposés ; il reste donc $x\xi$; $x\xi$, autrement dit une rotation d'amplitude π autour de $x\xi$, ou *renversement*. Ceci justifie les noms de vrais et faux bissecteurs employés précédemment.

Si les rotations autour de xx' et $\xi\xi'$ sont égales à ω (avec $\omega \neq \pi$), le même raisonnement prouve que l'opération totale revient à une rotation anallagmatique d'amplitude ω autour du cycle $x\xi$: on obtient ainsi le moyen simple de figurer les rotations échangeant deux *cycles* $(a\alpha)$, $(b\beta)$; le grand cercle médiateur de (ab) se trouve mis en correspondance ponctuelle avec celui de $(\alpha\beta)$, de sorte que les deux triangles sphériques acb, $\alpha\gamma\beta$ aient le même angle $c = \gamma$; si les deux cycles $(a\alpha)$, $(b\beta)$ sont antitactiques, l'angle $c = \gamma$ est toujours égal à π, de sorte que, dans ce cas et ce cas seulement, toutes ces rotations sont des renversements.

Encore une remarque : une figure F et sa transformée par l'opération b (ou par l'opération bd, ou d, ou e) ne sont pas *déformables* l'une en l'autre par continuité anallagmatique. L'opération bd est un changement de sens général sur chaque cycle ; l'opération b est la transformation déjà signalée qui remplace un cycle par son conjugué (d donne le même changement, augmenté du changement d'orientation). L'opération e revient à remplacer chaque cycle par celui que l'on obtient en renversant le premier autour de la droite qui joint ses traces sur Σ'.

6. *Éléments imaginaires.* — Si l'on introduit la sphère Σ, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, les pieds du cercle C sur Σ sont en même temps foyers de C′ et inversement ; ces pieds sont imaginaires conjugués et situés sur deux génératrices imaginaires conjuguées de Σ, de *même système* : en effet deux droites imaginaires $(P + Qi = 0, S + Ti = 0)$, et $(P - Qi = 0, S - Ti = 0)$ ne peuvent se couper que si les équations (homogènes) $P = 0$, $Q = 0$, $S = 0$, $T = 0$ sont compatibles, et dans ce cas, le point commun est réel : or Σ ne contient aucun point réel. On obtient ainsi un quadrilatère gauche à génératrices isotropes

situé sur Σ et réunissant un foyer de C à un foyer de C'; orienter C et C' c'est donner l'ordre dans lequel on considère les deux génératrices opposées d'un système, et l'ordre dans lequel on prend les deux autres.

Si l'on appelle λ, λ' les paramètres numériques déterminant le premier système, les équations des génératrices G_λ, $G_{\lambda'}$ sont

$$\frac{x+iy}{z+i} = -\lambda, \qquad \frac{x-iy}{z-i} = \frac{1}{\lambda},$$

pour G_λ; la valeur λ' qui correspond à $G_{\lambda'}$ est conjuguée de $\frac{-1}{\lambda}$; les génératrices du second système correspondent à des équations telles que

$$\frac{x+iy}{z-i} = -\mu, \qquad \frac{x-iy}{z+i} = \frac{1}{\mu},$$

pour G_μ; μ' est encore imaginaire conjuguée de $\frac{-1}{\mu}$. On peut maintenant remarquer que la sphère Σ' possède deux génératrices parallèles à G_λ, génératrices de système opposé entre elles; les quatre génératrices G_λ, $G_{\lambda'}$, G_μ, $G_{\mu'}$ fournissent ainsi huit génératrices de Σ' et ce sont les génératrices qui se croisent aux points réels a, a', α, α' que nous avons étudiés. Ces indications suffisent pour indiquer au lecteur la voie, naturelle, qui a conduit à cette représentation des cercles C.

M. E. Cartan m'avait indiqué une marche différente pour arriver à la même représentation. (*voir* la Note complémentaire).

7. *Comparaison avec des résultats antérieurs.* — Si l'on suppose connus les résultats de M. Bloch (*Journal de Mathématiques*, 9e série, t. 3, 1924, p. 51) sur les cercles et congruences paratactiques, puis ceux de M. Hadamard (*Nouvelles Annales*, 6e série, t. 2, p. 257-278 et 289-320), les résultats suivants s'aperçoivent aussitôt en appelant λ et μ les deux séries de congruences paratactiques de sphère principale, Σ :

Les éléments ci-après énumérés se correspondent deux à deux d'une façon biunivoque et, par suite, peuvent se servir mutuellement d'image :

1° Une congruence λ;

2° L'ensemble des deux génératrices de même système, conjuguées d'ailleurs, de Σ, lieux des foyers des cercles de la congruence λ;

3° L'ensemble des deux génératrices respectivement parallèles situées sur le cône isotrope $I(x^2+y^2+z^2=0)$;

4° Le plan de ces deux dernières génératrices;

5° La perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan, droite qui est d'ailleurs l'unique droite de la congruence, c'est-à-dire le cercle unique de la congruence réunissant l'origine au point *opposé* (point à l'infini);

6° Les deux traces du rayon précédent sur une sphère Σ_0 arbitraire, mais fixée, de centre O (autrement dit appartenant au faisceau déterminé par les deux points qui précèdent);

7° Le cercle, unique, de la congruence passant par un point arbitraire, mais fixe ω, et son opposé ω';

8° Les traces de ce cercle sur une sphère du faisceau déterminé par les sphères points ω et ω';

9° Les deux cercles, conjugués, communs à la congruence λ et à une congruence arbitraire, mais fixe μ_0 de système opposé.

M. E. Cartan a fait remarquer (*voir* le second article cité plus haut de M. Hadamard, article résultant d'un échange de vues entre MM. Hadamard et Cartan) que deux congruences λ se coupent en un point de l'espace sous un angle invariable : cela entraîne que cet angle, qui n'est défini qu'à π près, est l'angle des deux rayons 5° correspondants ou encore la distance sphérique des traces 6° correspondantes en prenant le rayon de Σ_0 égal à l'unité.

Soient deux cercles conjugués C, C' orthogonaux à Σ; de ce système est issue une seule congruence λ, une seule μ; si nous prenons la sphère Σ_λ image des ∞^2 congruences λ, et une sphère analogue Σ_μ image des ∞^2 congruences μ, le système C, C' est représenté par un couple a, a' porté sur Σ_λ et un couple α, α' porté par Σ_μ. On retrouve ainsi d'une façon intuitive tous les résultats que j'ai indiqués dans ce travail : mais cette marche nouvelle suppose déjà connue la théorie, tandis que la marche que j'ai suivie dans ce travail constitue au contraire une méthode simple pour établir la théorie. Je suis même arrivé à orienter chaque congruence et chaque cycle. Les

remarques que je viens d'exposer permettent aussi de coordonner la plupart des résultats connus.

8. *Applications.* — Supposons que les dix couples (a_i, a'_i) $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ offrent sur Σ' la configuration de Petersen-Morley, chaque rayon étant perpendiculaire à trois autres rayons j, k, l (cette configuration est obtenue avec trois droites OA, OB, OC, arbitraires, le trièdre suplémentaire OA_1, OB_1, OC_1, la droite D commune aux plans OAA_1, OBB_1, OCC_1, les trois droites d'intersection des couples de plans OBC, OB_1C_1, puis OCA, OC_1A_1, puis OAB, OA_1B_1; elle dépend de 6 paramètres). Sur le feuillet grec de Σ' prenons une configuration analogue (α_i, α'_i), indépendante de la première. Les vingt cercles (a_i, α_i), (a_i, α'_i) forment dix couples réels, tels que les cercles conjugués de chaque couple soient perpendiculaires aux six cercles de trois autres couples.

Ce problème : trouver 10 (ou 20) cercles tels que chacun soit perpendiculaire à 3 (ou 6) autres cercles, paraît difficile *a priori;* il est résolu intuitivement; et c'est à ce propos que M. Cartan m'a suggéré la représentation donnée ici, représentation que j'ai ensuite obtenue de nouveau par la méthode exposée ici, tandis que M. Cartan employait certaines considérations de géométrie non euclidienne.

Dans ce problème si le trièdre OABC de départ a *un*, *deux*, *trois* angles droits, il se produit des dégénérescences remarquables de la configuration des 20 cercles en ce sens que certains couples, restés distincts, deviennent, paratactiques.

Les 10 congruences λ ainsi obtenues donnent, en les coupant par une congruence μ_0 arbitraire, mais fixe, 20 cercles tels que chacun ait, comme angle de parataxie avec six autres, l'angle $\frac{\pi}{4}$.

9. *Note complémentaire* (¹) : *suggestions de M. Élie Cartan.* — J'ai remis le présent travail en octobre 1929, pour l'impression, à M. Villat. Depuis, divers résultats importants sur des sujets analogues à celui de

(¹) Ce qui précède a été rédigé en octobre 1929; cette Note est rédigée en avril 1930.

ce travail (en particulier sur la représentation du cycle-*général*, dépendant de 6 paramètres) ont été signalés par M. Delens (*C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 126 et 292) puis par moi-même (*Ibid.*, t. 190, 1930, p. 157 et 564). En Roumanie, MM. Barbilian et Tzitzéica ont obtenu des théorèmes intéressants (*Bulletin de Mathématiques et Physique de l'École Polytechnique de Bucarest*, 1re année 1929, p. 1-17 et 17-21), auxquels j'ai fait allusion dans la dernière de mes deux Notes citées plus haut. En France, en dehors des travaux de MM. Bloch et Hadamard que j'ai rappelés au paragraphe **7** de ce travail, M. Robert a indiqué des résultats importants dans l'*Enseignement scientifique*, t. 1, 1928, p. 108, et t. 2, 1929, p. 230; un autre article de M. Robert est à l'impression. M. Labrousse doit aussi faire paraître dans le *Journal de Mathématiques* un travail élégant sur les cycles orthogonaux à une même sphère.

L'importance de cette branche de la géométrie anallagmatique m'entraîne donc à donner dès maintenant (avril 1930) des extraits de lettres que M. Cartan m'a écrites les 15 et 19 juin 1929 en réponse à une lettre du 13 juin 1929 par laquelle je communiquais à M. Cartan divers résultats intéressants sur le problème résolu au paragraphe **8** de ce travail; ce problème me faisait prévoir (sans la trouver) la représentation signalée ici : par retour du courrier, M. Cartan me l'indiquait, en la rattachant à des considérations de géométrie non euclidienne dans l'espace à 3 ou 4 dimensions. Les lettres de M. Cartan contiennent aussi de nombreuses suggestions relatives au problème de 20 cercles indiqué au paragraphe **8** et je crois intéressant de les donner ici : mais auparavant je demande au lecteur la permission d'expliquer, en quelques mots, comment les idées déjà énoncées avant le mois de juin 1929 contenaient en germe la représentation (et ceci sera tout à fait conforme aux idées de M. Robert); cette représentation exige deux feuillets sur une même sphère, une rotation de chacun d'eux autour du centre étant, au fond, indifférente, bien que, pratiquement, la représentation indiquée ici s'impose parmi les ∞^6 possibles, car elle est susceptible de la démonstration élémentaire que j'ai imaginée en octobre 1929 et qui a été exposée plus haut. Sans avoir à connaître les démonstrations, nous admettons les propriétés suivantes :

1° Deux congruences paratactiques orientées d'espèce opposée et de même inversion fondamentale ont un cycle commun et un seul; réciproquement un cycle orthogonal à l'inversion fondamentale définit deux congruences, et deux seulement, une dans chaque espèce.

2° Étant donnée une congruence paratactique orientée, il existe un cycle et un seul de cette congruence issu d'un point M arbitraire.

3° Deux congruences paratactiques de même espèce et de même inversion fondamentale se coupent sur un angle constant en tout point de l'espace (remarque due à M. Cartan).

Cela posé, il existe ∞^2 congruences paratactiques de la seconde espèce (*grecques*, pour adopter le langage de ce travail); les ∞^2 tangentes en M aux cercles de ces congruences forment une *figure indépendante de* M; G_1, G_2 étant deux telles congruences fixes, attribuons à G_1, G_2 deux points α_1, α_2 de la sphère Σ', $x^2+y^2+z^2-1=0$, choisis tels que la distance sphérique $\alpha_1\alpha_2$ représente l'angle $(G_1 G_2)$, mais à part cela *arbitraires;* une congruence grecque G quelconque est alors représentée par un point α tel que le triangle sphérique $\alpha_1\alpha_2\alpha$ ait pour côtés les angles connus de G_1, G_2, G; *il en résulte que deux points du feuillet sphérique grec sont les images de deux congruences grecques et que l'angle de ces congruences est la distance sphérique des images.* Nous pouvons de même donner sur le feuillet sphérique romain l'image des ∞^2 congruences romaines R; chaque feuillet grec ou romain se trouve ainsi *a priori* défini à une rotation près autour du centre de Σ'. Mais alors un cycle C a deux images α, a, grecque et romaine bien définies (remarque n° **1**); soit maintenant un autre cycle $\bar{C}$ cosphérique à C; la distance des images α, $\bar{\alpha}$ est l'angle des congruences grecques issues de C et $\bar{C}$, c'est-à-dire l'angle $(C, \bar{C})$, d'après la remarque **3**; pour la même raison la distance $(a, \bar{a})$ est encore égale à l'angle $(C, \bar{C})$, nous avons retrouvé la propriété fondamentale.

Voici maintenant des extraits de la lettre de M. Élie Cartan datée du 15 *juin* 1929.

Soit la sphère Σ d'équation $x^2+y^2+z^2+1=0$; le groupe conforme, si l'on n'en garde que les transformations laissant Σ invariante

se réduit au groupe de la géométrie elliptique non euclidienne à trois dimensions; c'est du reste évident, car toute sphère orthogonale à Σ a pour équation

$$h(x^2+y^2+z^2-1)-2ax-2by-2cz=0$$

et peut être définie par quatre nombres a, b, c, h liés par la relation

$$a^2+b^2+c^2+h^2=1.$$

Le cosinus de l'angle de deux de ces sphères est

$$\cos V = aa'+bb'+cc'+hh', \ldots.$$

On peut donc représenter une sphère orthogonale à Σ par un point (a, b, c, h) de l'espace elliptique, un cercle orthogonal à Σ par une droite; deux cercles orthogonaux à Σ perpendiculaires l'un à l'autre sont représentés par deux droites qui se rencontrent en se coupant sous un angle droit, etc. En appliquant cela au problème des 20 cercles on voit apparaître dans l'espace elliptique une configuration analogue à celle de Petersen-Morley.

On peut voir cela encore mieux, car toute droite de l'espace elliptique peut être représentée par un couple de points pris sur deux sphères fixes, de rayon égal à un par exemple. Analytiquement une circonférence orthogonale à Σ peut être définie par ses coordonnées plückériennes construites avec les coordonnées

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & h, \\ a'; & b', & c', & h' \end{matrix}$$

de deux sphères la contenant; on peut supposer $\Sigma p_{ij}^2=1$. En posant

$$\begin{aligned} p_{23}+p_{14}&=\xi_1, & p_{23}-p_{14}&=\eta_1, \\ p_{31}+p_{24}&=\xi_2, & p_{31}-p_{24}&=\eta_2, \\ p_{12}+p_{34}&=\xi_3, & p_{12}-p_{34}&=\eta_3, \end{aligned}$$

on a

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1, \quad \eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2=1.$$

La condition pour que deux droites se coupent est

$$\xi_1\xi_1'+\xi_2\xi_2'+\xi_3\xi_3'=\eta_1\eta_1'+\eta_2\eta_2'+\eta_3\eta_3'.$$

Autrement dit soit (A, a) le couple de points qui définit une droite :

elle est également définie par le couple de points antipodes $(A, \bar{a})$; *si deux droites* (A, a), (B, b) *se coupent c'est que la distance* AB *sur la première sphère est égale à la distance ab sur la deuxième et l'angle au centre correspondant est l'angle (non euclidien) sous lequel se coupent les deux droites (ou les deux cercles orthogonaux à* Σ).

Cela posé, revenons à la configuration type des dix droites de Petersen-Morley issues de l'origine dans l'espace ordinaire (trièdre OA, OB, OC; trièdre supplémentaire OA_1, OB_1, OC_1; puis OA_2 perpendiculaire au plan OAA_1; de même OB_2, OC_2; puis OD intersection des trois plans OAA_1, OBB_1, OCC_1); nous avons sur cette sphère une configuration de 20 points deux à deux diamétralement opposés A, $\bar{A}$; B, $\bar{B}$; ....

Chaque point est le pôle du grand cercle réunissant six autres, antipodes deux à deux. Revenons maintenant aux deux sphères qui permettent de représenter les droites de l'espace elliptique, c'est-à-dire les cercles orthogonaux à Σ. Le premier cercle A est représenté par un couple (A, a) et le couple antipode $(\bar{A}, \bar{a})$; le cercle $(\bar{A})$ conjugué de (A) est $(A, \bar{a})$ ou $(\bar{A}, a)$, ...; la configuration des 20 cercles est donc ramenée à la configuration de Petersen-Morley.

On peut aussi introduire des nombres complexes; une droite (ou un cercle orthogonal à Σ) étant définie par les trois coordonnées

$$\varepsilon_1\xi_1+\varepsilon_2\eta_1, \quad \varepsilon_1\xi_2+\varepsilon_2\eta_2, \quad \varepsilon_1\xi_3+\varepsilon_2\eta_3$$

avec

$$\varepsilon_1^2=\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2^2=\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon_1=0$$

ou encore par les trois coordonnées

$$\frac{\xi_1+\eta_1}{2}+\varepsilon\frac{\xi_1-\eta_1}{2}, \quad \ldots \quad \text{avec} \quad \varepsilon^2=1 \quad (^1),$$

ce qui ramène tous les calculs au cas où les coefficients de ε sont nuls, c'est-à-dire $p_{14}=p_{24}=p_{34}=0$: on a alors des grands cercles situés par exemple sur la sphère $x^2+y^2+z^2-1=0$ (les cercles conjugués relativement à Σ sont les axes des grands cercles précédents) : c'est

(1) M. Labrousse, sans connaître ces résultats de M. Cartan, a lui aussi introduit les nombres complexes ε tels que $\varepsilon^2=1$.

une autre manière de se ramener à la configuration élémentaire de Petersen-Morley.

Extrait de la lettre de M. Cartan du 19 juin 1929.

Le cas de cercles orthogonaux à une sphère réelle est assez intéressant. Bien qu'il ne donne naissance qu'à une configuration de 10 cercles réels, il se relie d'une manière simple à la figure formée par *un triangle et ses trois hauteurs en géométrie plane non euclidienne.*

Tout cercle réel orthogonal à une sphère *réelle* Σ peut être représenté par la droite qui joint ses deux points d'intersection P et Q avec Σ; cette droite peut elle-même être représentée par une forme quadratique binaire à coefficients complexes, celle qui a pour racines les deux valeurs de la variable complexe ζ correspondant sur la sphère aux points P et Q. La condition pour que deux cercles orthogonaux à Σ soient perpendiculaires est que les deux formes binaires correspondantes soient conjuguées ($AC' + CA' - 2BB' = 0$) ou géométriquement que les droites images se rencontrent et soient conjuguées par rapport à Σ, ou encore soient perpendiculaires entre elles au sens de la géométrie cayleyenne dont Σ serait l'absolu. On voit ainsi apparaître dans l'espace non euclidien la configuration des 10 droites de Petersen-Morley. Son existence repose donc sur un théorème d'algèbre relatif à dix formes quadratiques binaires, théorème dont la démonstration algébrique est simple.

Il suffit que cette démonstration soit faite pour les formes binaires *réelles;* or si nous prenons une conique réelle Γ, toute forme binaire définie représente un point intérieur à la conique et toute forme indéfinie un point extérieur, ou encore sa polaire par rapport à la conique; Γ est l'absolu d'une géométrie cayleyenne. Le théorème qu'il s'agit de démontrer est celui de la géométrie plane non euclidienne : *les trois hauteurs d'un triangle* ABC *sont concourantes.* La configuration contient 10 éléments : les points A, B, C et le point de rencontre D des hauteurs, plus 6 droites

$$\begin{array}{lll} BC(=A_1), & CA(=B_1), & AB(=C_1), \\ AD(=A_2), & BD(=B_2), & CD(=C_2). \end{array}$$

Ici la conjugaison de deux formes binaires signifie ou bien qu'un point et une droite sont incidents, ou bien que deux droites sont perpendi-

culaires. Dans le cas que j'indique, 4 des formes binaires sont définies et 6 indéfinies : il pourrait se présenter d'autres possibilités, le nombre des points pouvant s'abaisser, celui des droites s'élevant en conséquence. Remarquons du reste que les trois hauteurs d'un triangle peuvent parfaitement ne pas se rencontrer, mais c'est qu'alors elles sont perpendiculaires à une même droite (l'élément D correspondant alors à une forme indéfinie).

Le passage de la figure *réelle* plane à la figure *complexe* de l'espace (configuration de Petersen-Morley en géométrie non euclidienne, ou configuration de 10 cercles orthogonaux à une même sphère réelle) est ici mis en évidence.

On pourrait aussi regarder Σ comme l'image de la droite projective complexe : le couple de points P, Q définit alors une involution sur cette droite et l'on obtient une configuration de 10 involutions dont chacune est conjuguée par rapport à 3 autres (deux involutions étant conjuguées lorsque les points doubles de l'une forment une division harmonique avec ceux de l'autre; sur la droite projective *réelle*, on pourra avoir une configuration de 4 involutions elliptiques et de 6 hyperboliques, configuration qui correspond par exemple au triangle avec ses hauteurs de la géométrie plane non euclidienne.

Il serait intéressant et sans doute facile de discuter toutes les figures planes non euclidiennes possibles. L'une d'elles est formée par un hexagone dont tous les angles sont droits, un point intérieur et trois droites issues de ce point, dont chacune est perpendiculaire à deux côtés opposés. Les 10 éléments sont les 6 côtés de l'hexagone, le point intérieur et les 3 droites issues de ce point. Comme arbitraires il y a le point intérieur et deux côtés de l'hexagone qui ne sont ni adjacents ni opposés (mais satisfont à des conditions purement qualitatives : il faut en particulier que les deux côtés ne se rencontrent pas). On pourrait aussi se donner les trois droites concourantes et une perpendiculaire à l'une d'entre elles. Dans le demi-plan de Poincaré, on a la figure formée par une chaîne formée de 6 cercles ayant leur centre sur Ox, dont chacun est orthogonal au précédent et au suivant, plus trois cercles ayant deux points communs et dont chacun est orthogonal à deux cercles opposés de la chaîne.

Une autre configuration de géométrie plane non euclidienne, banale

en géométrie euclidienne, est la suivante : on prend deux points A, B et une droite C; on abaisse de A et B les perpendiculaires B_1 et A_1 sur C; puis de A la perpendiculaire A_2 sur A_1 et de B la perpendiculaire B_2 sur B_1; le théorème est le suivant : par le point C_2 commun à la droite AB et à la droite C, il passe une droite D perpendiculaire commune à C, A_2, B_2 : naturellement la droite C doit être prise de manière que les constructions puissent se faire, autrement dit C doit rencontrer la droite AB.

Ces propositions reviennent à la suivante qui est bien connue : *un triangle et son triangle polaire relativement à une conique sont homologiques*. L'existence de la configuration de Morley-Petersen dans l'espace non euclidien et celle des 10 cercles orthogonaux à Σ en résulte.