JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CERF

Sur les solutions singulières des équations différentielles d'ordre quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 161-172.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__161_0>

Sur les solutions singulières des équations différentielles d'ordre quelconque;

PAR G. CERF.

Une équation différentielle d'ordre n, définie directement, n'admet pas, en général, comme l'a montré M. Goursat ([1]) de solutions singulières, mais il peut se faire qu'elle admette comme telles les solutions appartenant à l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre $n-1$; chacune de ces solutions singulières est alors, en général, enveloppe avec contact d'ordre n de ∞^1 solutions non singulières. Ce cas se présente, en général, comme nous le verrons par la suite, lorsqu'une équation différentielle est obtenue par l' « élimination des constantes ». Nous nous proposons d'étudier les différentes classes de solutions d'une équation obtenue par ce procédé, et, en particulier, leurs relations de contact; M. Burgatti ([2]) s'est occupé de cette question pour des équations du second ordre. Nous appliquerons ensuite les résultats obtenus à l'étude des solutions singulières des équations de Monge.

1. Considérons une famille de courbes planes (C) dépendant de n paramètres essentiels : $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et dont nous prendrons l'équation sous la forme

$$f(x, y; a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0. \tag{1}$$

([1]) E. GOURSAT, *Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées* (*American Journal of Mathematics*, vol. XI, 1889, p. 329).

([2]) P. BURGATTI, *Sugli integrali singolari delle equazioni a derivate ordinarie del second ordine* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XX, 1905, p. 256).

Nous supposons, pour simplifier, que f est un polynome par rapport à tous les arguments qui y figurent. Les éléments de contact d'ordre n : (e_n) portés par les courbes (C) sont définis par les relations

$$(2)\quad \begin{cases} f=0, \quad f_1=\dfrac{df}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+y'\dfrac{\partial f}{\partial y}=0, \quad f_2=\dfrac{d^2f}{dx^2}=0, \quad \ldots, \\ \qquad\qquad f_n=\dfrac{d^nf}{dx^n}=0. \end{cases}$$

En général, ces éléments (e_n) sont les éléments intégraux d'une [1] équation différentielle d'ordre n

$$(3)\qquad (E_n)\qquad \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0,$$

obtenue par l'élimination des paramètres a entre les relations (2); par un élément (e_n) quelconque passe une seule courbe (C); les courbes (C) constituent l'intégrale générale de (E_n). Cette équation admet, en général, d'autres solutions que nous nous proposons de rechercher et d'étudier.

2. Par un élément d'ordre $n-1$, arbitraire, passent des courbes (C), distinctes, en général, et en nombre fini; une courbe quelconque (γ) peut être considérée comme enveloppe [2] de courbes (C) avec contact d'ordre $n-1$; il existe des points de (γ) où le contact est d'ordre plus grand que $n-1$; ce sont ceux où plusieurs des courbes (C) enveloppantes sont confondues, c'est-à-dire ceux où se trouve vérifiée la relation $\Delta=0$,

$$\Delta=\frac{D(f, f_1, \ldots, f_{n-1})}{D(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Nous mettons ainsi en évidence des éléments linéaires de contact d'ordre $n-1$: (e_{n-1}), définis par les relations

$$(4)\qquad f=0, \quad f_1=0, \quad \ldots, \quad f_{n-1}=0, \quad \Delta=0.$$

Lorsqu'un élément intégral (e_n) est porté par un élément (e_{n-1}), il

(1) Il peut y en avoir plusieurs, mais nous ne nous arrêterons pas aux difficultés d'ordre purement algébrique.

(2) Chaque fois qu'il est question d'enveloppe, il conviendra de s'assurer qu'il s'agit d'une véritable enveloppe.

est singulier pour (E_n), car pour lui $\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}}$ est nul puisque plusieurs courbes (C) confondues le portent, et réciproquement.

Les éléments (e_{n-1}) sont, en général, les éléments intégraux d'une équation différentielle d'ordre $n-1$

$$(5) \qquad (E_{n-1}) \qquad \psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0;$$

le long d'une courbe intégrale de (E_{n-1}) sont vérifiées les relations

$$(6) \qquad \begin{cases} f_{a_1} da_1 \quad + \ldots + f_{a_n} da_n = 0, \\ f_{1,a_1} da_1 \quad + \ldots + f_{1,\,a_n} da_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-2,a_1} da_1 + \ldots + f_{n-2,\,a_n} da_n = 0, \\ \Delta_{a_1}\, da_1 \quad + \ldots + \Delta_{a_n} da_n + \frac{d\Delta}{dx} dx = 0, \\ f_{n-1,a_1} da_1 + \ldots + f_{n-1,\,a_n} da_n + f_n dx = 0. \end{cases}$$

Les éléments (e_{n-1}) singuliers pour (E_{n-1}) sont ceux pour lesquels $\Delta_1 = 0$:

$$\Delta_1 = \frac{D(f, f_1, \ldots, f_{n-2}, \Delta)}{D(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Par un élément (e_{n-1}) non singulier passe une courbe appartenant à l'intégrale générale de (E_{n-1}), soit (C_1); sur cette courbe, à condition que les déterminants d'ordre $n-1$ déduits de la matrice :

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} f_{a_1} & \ldots & f_{a_n} \\ f_{1,a_1} & \ldots & f_{1,a_n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_{n-2,a_1} & \ldots & f_{n-2,a_n} \end{matrix} \right\|$$

ne soient pas tous nuls, la relation $f_n dx = 0$ est vérifiée; en général, l'élément (e_{n-1}) considéré n'est pas porté par une parallèle à oy et n'est pas non plus relatif à un point singulier de (C_1) et il satisfait à la relation $f_n = 0$; l'élément d'ordre n de (C_1) porté par (e_{n-1}) est un élément (e_n), celui de celles des courbes C contenant (e_{n-1}) et en laquelle plusieurs viennent se confondre.

Appelons maintenant (C_2) une intégrale de (E_{n-1}) le long de laquelle Δ_1 est nul; ce qui précède prouve qu'elle est, en général, une solution singulière de cette équation et qu'il convient de distinguer deux cas suivant que les relations

$$(8) \qquad \delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0,$$

qui expriment que tous les déterminants d'ordre $n-1$ déduits de la matrice (7) sont nuls, ne sont pas ou sont vérifiées le long de cette courbe; nous allons étudier successivement ces deux cas.

3. Supposons d'abord que le long d'une courbe (C_2) que nous appelons (C'_2)

$$(9) \qquad f = 0, \quad \ldots, \quad f_{n-2} = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta = 0, \quad f_{n-1} = 0;$$

sans que δ_1 et δ_2 soient simultanément nuls; en conséquence, $f_n = 0$ et les relations (6) et (6′)

$$(6') \qquad f_{n,a_1} da_1 + f_{n,a_2} da_2 + \ldots + f_{n,a_n} da_n + f_{n+1} dx = 0$$

sont vérifiées.

Des relations (6) on déduit, grâce à $\Delta_1 = 0$,

$$(10) \qquad \frac{d\Delta}{dx} = 0.$$

et d'autre part, comme

$$\frac{d\Delta}{dx} = \begin{vmatrix} f_{a_1} & \ldots & f_{a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-2,a_1} & \ldots & f_{n-2,a_n} \\ f_{n,a_1} & \ldots & f_{n,a_n} \end{vmatrix}$$

de (6) et (6′) il résulte que, sauf peut-être en des points exceptionnels,

$$f_{n+1} = 0,$$

donc C'_2 est enveloppée avec contact d'ordre $n+1$ au moins par des courbes (C).

Réciproquement, pour que le contact d'une courbe (C) avec son enveloppe soit d'ordre $n+1$ au moins, il est nécessaire, si δ_1 et δ_2 ne sont pas simultanément nuls, que la relation (10) soit vérifiée, et alors de deux choses l'une, ou bien l'enveloppe est une courbe (C)

$$da_1 = da_2 = \ldots = da_n = 0,$$

ou bien tout le long de l'enveloppe $\Delta_1 = 0$.

Les éléments singuliers de (E_{n-1}), qui vérifient les relations (9) satisfont à une autre équation d'ordre $(n-1)$: (E'_{n-1}), obtenue en éliminant convenablement les paramètres a de ces relations; en général, ces deux équations n'ont pas de solutions communes et il n'y a pas de courbes C'_2.

4. Un cas particulièrement important est le suivant : mettons entre crochets le symbole Δ, par exemple, si nous voulons indiquer qu'on a remplacé dans $\Delta, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ par leurs expressions tirées de (2); si $[\Delta]=0$ et $[\Delta_1]=0$ ont une racine commune en x, fonction des a, $x=\xi(a)$ (et alors d'après ce que nous savons, racine double de $[\Delta]=0$), les équations (E_{n-1}) et (E'_{n-1}) admettent toutes deux comme solutions celles d'une équation d'ordre $n-1$, (E''_{n-1}), qui peut être l'une d'elles. L'intégration de (E''_{n-1}) est équivalente à celle du système de $n-1$ équations différentielles où les variables sont les paramètres a et que l'on déduit des $n-1$ premières équations (6) par l'opération [ ] et en remplaçant ensuite x par ξ. L'intégration de ces équations différentielles procure le moyen d'associer les courbes C en familles de ∞^1 courbes dont l'enveloppe les touche avec contact d'ordre $n+1$, au moins.

Ce cas, le plus favorable, peut ne pas se présenter; alors la compatibilité des équations (9) en $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ exige une relation entre les paramètres a; et si la courbe (C'_2) ne doit pas être une courbe (C), la condition qui exprime que les $n-1$ premières équations (6), après qu'on y a tenu compte de cette relation entre les a, se réduit à $n-2$ d'entre elles, doit être compatible avec les équations (9).

Dans ce cas, les courbes (C'_2) ainsi obtenues ne dépendent plus que de $n-2$ paramètres; c'est celui où (E_{n-1}) et (E'_{n-1}) admettent les intégrales, en général, d'une équation d'ordre $n-2$. Si la compatibilité dont il vient d'être question introduit une nouvelle relation entre les a, on opère sur les $n-2$ équations différentielles qui ont été retenues, comme on l'a fait sur les $n-1$ précédentes et ainsi de suite.

Les courbes C'_2 étant obtenues, si elles existent, il conviendra de préciser l'ordre du contact avec les C qui les enveloppent; on voit sans difficulté que si la racine en x de $[\Delta]=0$ est triple, c'est-à-dire que si tout le long de l'enveloppe $\frac{d^2\Delta}{dx^2}$ est nul sans que $\frac{d^3\Delta}{dx^3}$ le soit, le contact est d'ordre $n+2$; et de même pour les contacts d'ordre plus élevé.

5. Mais il peut se faire aussi que l'analyse précédente mette en évidence certaines courbes intégrales particulières de (E_{n-1}) qui sont des courbes (C). C'est ce qui se présente lorsque $[\Delta]$ possède un facteur qui ne contient pas x; une famille de ∞^{n-1} courbes (C) que nous appelons $(\overline{C})$ est mise en relief dont les éléments d'ordre n sont des éléments intégraux singuliers de (E_n).

On peut trouver les courbes $(\overline{C})$ à partir de l'équation (E_n) en utilisant une méthode dont s'est servi M. Hamburger [1].

6. Plaçons-nous maintenant dans le cas où le long d'une courbe (C_2) que nous appelons (C'_2), en outre des équations (9) les conditions (8) sont vérifiées, c'est-à-dire que

$$(13)\quad f=0,\quad f_1=0,\quad \ldots,\quad f_{n-3}=0,\quad \delta_1=0,\quad \delta_2=0,\quad f_{n-2}=0.$$

Considérons la matrice

$$(14)\qquad \begin{Vmatrix} f_{a_1} & \ldots & f_{a_n} \\ f_{1,a_1} & \ldots & f_{1,a_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-3,a_1} & \ldots & f_{n-3,a_n} \end{Vmatrix};$$

pour que tous les déterminants d'ordre $n-2$ qu'on en peut déduire soient nuls, il faut et il suffit que 3 d'entre eux le soient, nous les désignerons par μ_1, μ_2, μ_3. Supposons que le long de C''_2 on ait $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$; alors les relations (13) et celles qu'on en déduit par différentiation, entraînent $f_{n-1}=0$; C''_2 est donc, en général, une intégrale de (E_{n-1}); mais pour qu'elle le soit aussi de (E_n), il est nécessaire, en plus, que

(1) HAMBURGER, *Ueber die singulären Lösungen der Algebrischen Diffgleich höherer Ordnung* (*Journal de Crelle*, 121, 1900, p. 265).

la relation suivante soit vérifiée :

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} f_{a_1} & \ldots & f_{a_n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . \\ f_{n-3,a_1} & \ldots & f_{n-3,a_n} & 0 \\ \delta_{1,a_1} & \ldots & \delta_{1,a_n}, & \dfrac{d\delta_1}{dx} \\ \delta_{2,a_1} & \ldots & \delta_{2,a_n} & \dfrac{d\delta_2}{dx} \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe (C''_2) est intégrale, de l'équation d'ordre $(n-2)$: (E_{n-2}) qu'on obtient en général en éliminant les paramètres a des relations (13); d'ailleurs, la compatibilité de ces relations en $x, y, \ldots, y^{(n-2)}$ conduit à une relation entre les paramètres a qui permet de distinguer ∞^{n-1} courbes (C) que nous désignons par $(\overline{\overline{C}})$; une courbe (C''_2) est l'enveloppe de courbes $(\overline{\overline{C}})$ avec contact d'ordre $n-1$ en général et est intégrale de (E_{n-1}). Pour qu'il existe des courbes C''_2 pour lesquelles le contact soit d'ordre n au moins et que la courbe soit intégrale de (E_n), il est nécessaire que la relation (15) soit vérifiée; si elle est conséquence de (13), toutes les (C''_2) sont solutions de (E_n); sinon, elle fournit une nouvelle relation entre les a; on forme les équations différentielles déduites des $n-2$ premières équations (6), en tenant compte des deux relations trouvées entre les a; si ces équations n'en comportent que $n-3$ distinctes, il existe alors des courbes C''_2 qui ne sont pas des courbes (C) et sont intégrales de (E_n); l'intégration du système de $n-3$ équations différentielles pour les a donne le moyen de grouper les $(\overline{\overline{C}})$ pour que leur enveloppe soit une de ces courbes; on poursuivra de la même manière la discussion.

D'autre part, l'équation (E_{n-2}) admettra à son tour des solutions singulières, en général, qui pourront être d'une espèce ou d'une autre suivant que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ ou non; et ainsi de suite.

7. *Interprétation des résultats précédents pour la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* — Nous allons nous placer dans le cas particulier de $n = 3$ afin de simplifier cette interprétation dont le début est d'ailleurs classique ([1]).

([1]) Cf. *Journal de Mathématiques*, 9e série, t. IV, 1925, p. 318.

Considérons a_1, a_2, a_3 comme les coordonnées cartésiennes d'un point M dans un espace à 3 dimensions S_3. L'équation (1), où $n = 3$, représente une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre ($\mathcal{E}$) ([1]), dans S_3; les deux premières équations (2), où x, y, y' sont les paramètres, représentent les caractéristiques de ($\mathcal{E}$); à un élément linéaire de contact du plan correspond une caractéristique; à toute courbe du plan (γ) correspond une surface intégrale (Σ) de ($\mathcal{E}$), lieu des caractéristiques relatives aux éléments du premier ordre de (γ); les caractéristiques situées sur (Σ) ont une enveloppe (Γ) qui est une courte integrale de ($\mathcal{E}$); les équations de (Γ) se déduisent des trois premières relations (2) et les paramètres de direction de la tangente en un point quelconque de (Γ) des deux premières relations (6). Ces cinq relations font correspondre à un élément de contact du deuxième ordre du plan (e_2) un nombre fini de points M de (S_3), et en chacun de ces points un élément linéaire de contact du premier ordre (l_1); à deux éléments (e_2) unis, correspondent des éléments (l_1) unis. Les éléments (l_1) ne sont pas quelconques, ce sont ceux des cônes des tangentes (T) relatifs à ($\mathcal{E}$), portés par les sommets de ces cônes; à chaque cône élémentaire correspond ainsi une courbe (C) du plan, à chacune de celles-ci un conoïde caractéristique.

Les courbes (C) sont intégrales d'une équation différentielle du troisième ordre (E_3) qui admet une intégrale singulière (E_2). Nous nous proposons de rechercher ce qui correspond dans (S_3) à une courbe (C_1) intégrale non singulière de (E_2). Comme $\Delta = 0$, sur la courbe intégrale (Γ_1) de ($\mathcal{E}$) la troisième relation (6) est vérifiée et par conséquent (Γ_1) présente un contact du deuxième ordre avec les caractéristiques qui l'enveloppent. Les surfaces (Σ), intégrales de ($\mathcal{E}$) ainsi obtenues, sont ces intégrales signalées par Darboux sur lesquelles la surface, contrairement à ce qui se présente habituellement, ne possède pas de rebroussement apparent le long de l'enveloppe des caractéristiques. De même, s'il existe des courbes $\overline{C}$, courbes C intégrales particulières de E_2, pour les conoïdes caractéristiques correspondants, au moins partiellement, le « sommet » ne présente pas l'apparence de point sin-

([1]) Si $n > 3$ on doit considérer un système en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

gulier; il s'agit de conoïdes caractéristiques qui ne sont pas relatifs à des points de l'intégrale singulière de $(\mathcal{E})$, dont nous dirons un mot plus loin.

Revenons au cas d'une courbe (C_1) quelconque; les courbes (Γ_1) forment une congruence dont les équations différentielles se déduisent des deux premières relations (6); l'intégration de ces équations fournit celle de (E_2), en général, chaque courbe (Γ_1) indiquant le moyen d'associer les courbes C pour qu'elles touchent leur enveloppe avec un contact du troisième ordre.

Supposons qu'il existe, ce qui n'est pas toujours le cas, des courbes intégrales de $(\mathcal{E})$ le long desquelles, en outre des conditions précédentes, Δ_1 est nul tandis que δ_1 et δ_2 ne le sont pas simultanément; ces courbes Γ'_2 possèdent un contact du troisième ordre avec les caractéristiques enveloppantes, car la quatrième relation (6) est vérifiée, $\frac{d\Delta}{dx}$ étant nul; sur la surface intégrale le rebroussement redevient apparent; il correspond à chacune des Γ'_2 une courbe plane C'_2 admettant un contact du quatrième ordre avec les courbes C enveloppantes, et ainsi de suite.

Si maintenant δ_1 et δ_2 sont nuls le long de la courbe intégrale Γ, celle-ci se comporte en général vis-à-vis de $(\mathcal{E})$ comme une courbe intégrale quelconque; elle est un lieu de points multiples, en général doubles $\left(\frac{f_{a_1}}{\frac{df_{a_1}}{dx}} = \frac{f_{a_2}}{\frac{df_{a_2}}{dx}} = \frac{f_{a_3}}{\frac{df_{a_3}}{dx}}\right)$ pour les caractéristiques; le point M doit se trouver sur la surface focale de la congruence des courbes (Γ_1); l'interprétation de la condition (15) est que le plan des tangentes au point double soit le plan tangent à la surface focale; cela met en évidence une courbe sur cette surface focale, conduisant à une intégrale de $(\mathcal{E})$ présentant des singularités inhabituelles.

Remarque. — Nous avons laissé en dehors de nos considérations ce qui se rapporte aux points singuliers des courbes (C). On voit, ici, qu'ils sont liés à l'intégrale singulière de (8)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

8. *Application aux équations de Monge d'ordre quelconque.* — Considérons les courbes (C) situées sur une famille de surfaces (S) dépendant de n paramètres essentiels :

$$(\mathrm{I}) \qquad f(x, y, z; a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0;$$

f est algébrique par rapport à tous ces arguments; définissons la position d'un point sur une courbe (C) par son abscisse x.

Une courbe quelconque (γ) de l'espace est touchée en chacun de ses points par un nombre fini de surfaces (S) avec contact d'ordre $n-1$, en général, et non davantage; cela correspond au fait que les courbes (C) satisfont à une équation de Monge (E_n), d'ordre n, où les fonctions inconnues sont y et z, obtenue par élimination des paramètres a entre les relations (II) analogues aux (2) mais où :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + z'\frac{\partial}{\partial z}.$$

En suivant la discussion faite plus haut, on constate que (E_n) admet des solutions singulières $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z^{(n)}} = 0\right)$ intégrales particulières d'une équation de Monge d'ordre $n-1$: (E_{n-1}), qui résulte de l'élimination des paramètres entre les relations (IV). Chaque courbe (C_1) intégrale non singulière de (E_{n-1}) est enveloppe, avec contact d'ordre n, en général, de courbes (C); ces courbes (C_1) touchent donc en chacun de leurs points des surfaces (S) avec contaet d'ordre n; remarquons que cela résulte, au fond, de ce que la relation $\Delta = 0$ signifie qu'en chaque point de (C_1), deux des surfaces (S) qui la touchent avec contact d'ordre $n-1$ sont venues se confondre; l'élément linéaire d'ordre $n-1$ de (C_1) est donc un élément d'une courbe d'intersection d'une surface S avec une surface infiniment voisine.

L'équation (E_{n-1}) admet à son tour des solutions singulières caractérisées par la condition $\Delta_1 = 0$, qui entraîne $\frac{d\Delta}{dx} = 0$. Observons d'abord que la dernière condition seule met en évidence des courbes (C) intégrales de (E_{n-1}) : l'équation $[\Delta] = 0$ est ici une equation différentielle en z d'ordre $n-1$, où figurent les n paramètres a; la condition $\left[\frac{d\Delta}{dx}\right] = 0$, tandis que $\Delta_1 \neq 0$, nous procure des solutions du système considéré avec $da_1 = \ldots = da_n = 0$, par conséquent les paramètres a étant constants, et z solution de l'équation $[\Delta] = 0$.

Les courbes $(\overline{C})$ obtenues dépendent de $2n-1$ constantes arbitraires; d'après la remarque précédente, ce sont les courbes d'intersection de chaque surface (S) avec les surfaces infiniment voisines de la famille. Les courbes $(\overline{C})$ qui, analytiquement, ne sont pas solutions singulières de (E_{n-1}) apparaissent géométriquement comme telles.

Supposons maintenant que Δ_1 étant nul, δ_1 et δ_2 ne le soient pas tous deux; l'élimination des paramètres entre les relations (IX) nous donne deux équations de Monge d'ordre $n-1$, (E_{n-1}) et puis (E'_{n-1}); les courbes intégrales (C'_1) de ces deux équations, qui dépendent en général de $2n$ constantes arbitraires, admettent un contact d'ordre $n+1$ au moins, avec des surfaces (S), en chacun de leurs points; le contact est d'ordre plus élevé si les conditions $\frac{d^2\Delta}{dx^2}=0, \ldots$ sont compatibles avec les précédentes.

Étudions encore le cas où δ_1 et δ_2 sont nuls simultanément, l'élimination des paramètres entre les relations (XIII) conduit, en général, à une équation de Monge d'ordre $(n-2)$ qui procure des solutions singulières de (E_{n-1}); celles-ci, pour appartenir à (E_n), doivent satisfaire à (XV), c'est-à-dire à une nouvelle équation d'ordre $n-1$, et alors elles touchent les surfaces (S) avec contact d'ordre n, au moins.

Nous n'indiquerons que les résultats les plus immédiats; pour une discussion plus complète, on continuerait suivant les mêmes principes.

9. Plaçons-nous dans le cas particulier où les surfaces (S) proviennent, par les transformations d'un groupe à n paramètres, de l'une d'entre elles, qui n'admet, afin de ne pas compliquer, aucune transformation infinitésimale du groupe. Les différentes équations de Monge, qu'on obtient par les calculs du paragraphe précédent, sont invariantes par rapport à ce groupe, et l'on pourra les exprimer, au moins localement, au moyen des invariants différentiels du groupe; il est du reste évident qu'une équation de Monge d'ordre n, même invariante par rapport au groupe, ne peut jouer en général le rôle d'une équation (E_n). Pour s'assurer qu'une équation donnée jouit de cette propriété, on cherchera, en suivant la méthode indiquée plus haut, si elle possède des courbes intégrales formant une famille de ∞^{2n-1} courbes analogues à $(\overline{C})$, ce qu'on pourra toujours reconnaître par des calculs algébriques, dans l'affirmative le système différentiel qui définit les courbes $(\overline{C})$ admettant le groupe en question, on s'occupera de la répartition de ces courbes sur ∞^{n} surfaces S; celles-ci sont déterminées, quand elles existent, par un système complètement intégrable admettant aussi le groupe et dont l'intégration est, théoriquement, aisée.

On peut appliquer les considérations précédentes au cas où le groupe est celui des déplacements [1], et il pourra être utile de se servir des résultats obtenus par M. Study[2] pour ne faire intervenir que des expressions qui sont effectivement des invariants différentiels du groupe.

Remarque. — Nous avons constamment supposé que f est un polynome par rapport aux arguments qui y figurent; on peut évidemment étendre les résultats obtenus à des cas beaucoup plus généraux qui sont limités par la condition de pouvoir appliquer la théorie de l'élimination et celle de l'existence des solutions des équations différentielles considérées.

---

(1) B. Gambier, *Contact des courbes gauches, etc.* (*Journal de Mathémathiques*, 9e série, t. VII, 1928, p. 75).

(2) E. Study, *Zur Df. geometrie der analytischen Curven* (*Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 10, 1909, p. 1).