

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Sur des propositions d'arithmétique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 6 (1927), p. 121-125.

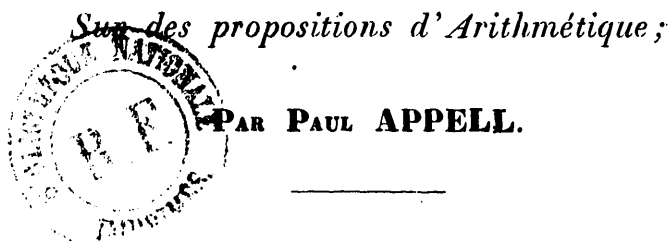
http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__121_0



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>



Le présent travail est un Mémoire d'arithmétique. La méthode employée est fondée sur un théorème (n° 1) élémentaire, d'une démonstration facile, qui revient au fond à ce fait que, dans les égalités entre sommes algébriques de fractions irréductibles, il y a forcément deux fractions qui contiennent au dénominateur une même puissance maximum d'un nombre premier quelconque. On arrive, par l'application de ce théorème, à démontrer certaines propositions sur la somme des n premiers termes de la série harmonique.

1. THÉOREME. — Soient des fractions irréductibles $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ positives ou négatives, en nombre limité j , dont la somme algébrique est nulle

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \dots + \frac{\lambda_j}{\mu_j} = 0,$$

si l'un des dénominateurs, μ_j par exemple, est divisible par une puissance entière positive k d'un nombre premier p , les autres dénominateurs sauf un, μ_1 pour fixer les idées, sur lequel on ne sait rien, étant divisibles par des puissances positives α de p moindres que k (où α peut être nul), μ_1 est divisible par p^k .

En-effet, on peut écrire

$$\mu_2 = -p^{\alpha_2} \nu_2, \quad \mu_3 = -p^{\alpha_3} \nu_3, \quad \dots, \quad \mu_j = -p^k \nu_j,$$

$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{j-1}$ étant des entiers inférieurs à k , dont certains peuvent être nuls, $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_j$ n'étant pas divisibles par p , pas plus que λ_j ,

et étant par suite premiers avec p^k , puisque p est premier. On a alors

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{p^{\alpha_2} \nu_2} + \frac{\lambda_3}{p^{\alpha_3} \nu_3} + \dots + \frac{\lambda_j}{p^k \nu_j},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2 p^{k-\alpha_2} \nu_3 \nu_4 \dots \nu_j + \lambda_3 p^{k-\alpha_3} \nu_2 \nu_4 \dots \nu_j + \dots + \lambda_j \nu_2 \nu_3 \dots \nu_{j-1}}{p^k \nu_2 \nu_3 \dots \nu_j}.$$

Comme $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ est irréductible on a, en désignant par ρ un entier,

$$\lambda_2 p^{k-\alpha_2} \nu_3 \nu_4 \dots \nu_j + \lambda_3 p^{k-\alpha_3} \nu_2 \nu_4 \dots \nu_j + \dots + \lambda_j \nu_2 \nu_3 \dots \nu_{j-1} = \rho \lambda_1, \\ p^k \nu_2 \nu_3 \dots \nu_j = \rho \mu_1.$$

Cet entier ρ n'est pas divisible par p , car les premiers termes du premier membre de la première équation le sont, mais pas le dernier $\lambda_j \nu_2 \nu_3 \dots \nu_{j-1}$ qui, composé de facteurs non divisibles par p , n'est pas divisible par p .

Alors ρ est premier avec p^k . Donc, d'après la deuxième équation μ_1 est divisible par p^k .

C. Q. F. D.

Remarque. — La condition indiquée explicitement dans l'énoncé, que le nombre des fractions est *fini*, est essentielle, le théorème ne s'applique plus si le nombre des fractions est infini. Ainsi on a

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{9^n} + \dots$$

et cependant aucun terme du second membre n'a de dénominateur divisible par 8, et 3 est élevé à une puissance paire quelconque; ce résultat se rattache à la remarque suivante.

2. Si dans la somme d'un nombre fini de fractions irréductibles $\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \dots + \frac{\lambda_j}{\mu_j}$ aucun dénominateur n'est divisible par une puissance p^k d'un nombre premier p , la somme $\frac{\lambda}{\mu}$ mise sous forme irréductible est telle que μ n'est pas divisible par p^k . Mais si ce nombre est infini, la proposition est fausse, ainsi l'on a

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^n} + \dots$$

Le dénominateur 6 est divisible par 2 et par 3 et cependant aucun des dénominateurs de la suite ne l'est.

3. Le théorème du n° 1 permet de montrer que la somme des n premiers termes de la série harmonique

$$H(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

n'est jamais entière, excepté pour $n = 1$. En effet, appelons 2^k la puissance de 2 immédiatement inférieure ou égale à n . Alors

$$2^k \leq n, \quad 2^{k+1} > n.$$

Le terme $\frac{1}{2^k}$ figure dans $H(n+1)$; 2^k ne peut être en facteur au dénominateur d'aucun terme suivant, car ce dénominateur serait de la forme $2^k \nu$, où ν serait un entier ≥ 2 , il serait donc supérieur ou égal à 2^{k+1} ; c'est-à-dire supérieur à n , ce qui est contre l'hypothèse. Alors en posant $H(n+1) = \frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\lambda}{\mu}$ étant une fraction irréductible, μ est divisible par 2 au moins et ne peut pas être 1.

Ainsi

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} = \frac{989}{420}.$$

4. Il est évident dès lors qu'un produit tel que

$$h H(n+1) = h \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

n'est pas entier quand h désigne un entier non divisible par les puissances des facteurs premiers qui, d'après le théorème du n° 1, figurent au dénominateur de $H(n+1)$. En particulier, pour que le produit soit entier, il faut que h soit divisible par 2^k , la puissance entière et positive, 2^k , étant immédiatement inférieure ou égale à n ; ainsi

$$6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right).$$

n'est certainement pas entier parce que 6 n'est pas divisible par 4;

on a

$$6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = \frac{137}{10},$$

le dénominateur 10 étant, d'après le théorème du n° 1, divisible par 2 et par 5. De même

$$12\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{147}{5},$$

ici $k = 2$, $2^k = 4$, 12 est divisible par 4 et 3, mais pas par 5.

Des théorèmes analogues s'appliquent aux sommes obtenues en élevant les termes de $H(n+1)$ à une puissance entière et positive.

5. Un incommensurable i est de la famille d'un autre incommensurable j , si i est une fonction rationnelle à coefficients entiers de j . Par exemple π^2 , π^3 , ... sont de la famille de π ; $i = 3\sqrt{2} + 5$ est de la famille de $j = \sqrt{2}$, car on a

$$i = 3j^2 + 5.$$

Deux incommensurables i et j sont de la même famille, si i est de la famille de j et j de celle de i . Alors i et j sont liés par une relation homographique à coefficients entiers

$$Aij + Bi + Cj + D = 0,$$

A, B, C, D entiers. Par exemple

$$i = \pi, \quad j = \frac{2\pi + 3}{4\pi + 5}$$

sont de la même famille.

Il est probable que $\log_e 2$ et $\log_e 3$ ne sont pas de la même famille, A étant ≥ 0 , ni en général $\log_e h$ et $\log_e k$, h et k étant des entiers et k n'étant pas une puissance entière de h .

6. Dans ce qui précède, on pourrait employer la terminologie suivante. Une fraction irréductible $\frac{\lambda}{\mu}$ sera dite multiple d'un entier n , si son numérateur λ est divisible par n ; elle sera dite multiple de $\frac{1}{n}$ si son dénominateur μ est divisible par n . Avec cette terminologie,

l'énoncé du théorème du n° 1 est plus bref : on le donnera sans peine.

Cette notion peut-elle être étendue aux nombres incommensurables ? Non ; en effet, un nombre incommensurable est la limite de fractions irréductibles $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ ($i = \infty$) qui peuvent être multiples de n ou de $\frac{1}{n}$. Mais il faudrait montrer que, quelles que soient les fractions $\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}$ dont le même incommensurable est limite, $\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}$ est multiple de n ou de $\frac{1}{n}$. Or ceci est manifestement impossible, car en prenant des nombres commensurables ε_i dont la limite est nulle, on a

$$\frac{\lambda'_i}{\mu'_i} = \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \varepsilon_i,$$

et les $\frac{\lambda'_i}{\mu'_i}$ peuvent ne pas être multiples de n ou de $\frac{1}{n}$.

