

# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

IV. TZÉNOFF

**Sur le mouvement des systèmes non holonomes**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 4 (1925), p. 193-207.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1925\\_9\\_4\\_\\_193\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__193_0)



NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le mouvement des systèmes non holonomes;***PAR M. IV. TZÉNOFF.**

I. Imaginons un système assujéti d'abord à des liaisons exprimables par des relations en termes finis entre les coordonnées des divers points. Soit, en tenant compte de ces liaisons,  $k + p$  le nombre des paramètres indépendants  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}$  qui fixent la position du système.

Supposons maintenant qu'on ajoute aux liaisons précédentes de nouvelles liaisons dépendant du temps, exprimables par  $p$  relations différentielles entre les paramètres  $q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}$ , de la forme

$$(1) \quad dq_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} dq_{\alpha} + a_i dt \quad \text{ou} \quad \dot{q}_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} \dot{q}_{\alpha} + a_i \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Désignons par  $T_0$  et  $S_0$  la demi-force vive et la demi-énergie d'accélération du système, calculées en ne tenant compte que des liaisons finies imposées au système.

D'autre part désignons par  $T$  et  $S$  les quantités analogues, en tenant compte aussi des liaisons différentielles données par (1).

Enfin désignons par  $T_1$  la fonction  $T_0$ , considérée comme fonction de  $\dot{q}'_{k+1}, \dots, \dot{q}'_{k+p}$  seulement, et par  $S_1$  la fonction  $S_0$ , considérée comme fonction de  $\ddot{q}''_{k+1}, \dots, \ddot{q}''_{k+p}$  seulement, en n'oubliant pas, bien entendu, que  $\dot{q}'_{k+1}, \dots, \dot{q}'_{k+p}$  pour  $T_1$ , et  $\ddot{q}''_{k+1}, \dots, \ddot{q}''_{k+p}$  pour  $S_1$ , sont déterminées par (1).

Alors on peut mettre les équations du mouvement des systèmes non

holonomes sous la forme suivante :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k)$$

ou

$$(2') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

$Q_\alpha$  étant le coefficient de  $\delta q_\alpha$  dans l'expression de la somme des travaux virtuels des forces appliquées.

Nous avons obtenu ces résultats en suivant une méthode analogue à celle de Lagrange pour les systèmes holonomes <sup>(1)</sup>.

## 2. Les fonctions $T_0$ et $S_0$ sont liées par la relation

$$\frac{\partial S_0}{\partial q''_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_s} - \frac{\partial T_0}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k, \dots, k+p).$$

En effet, nous avons

$$(3) \quad 2T_0 = \Sigma m(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2),$$

$$(4) \quad 2S_0 = \Sigma m(x_0''^2 + y_0''^2 + z_0''^2).$$

On a

$$(5) \quad x_0' = \frac{dx_0}{dt} + \sum_{s=1}^{k+p} \frac{\partial x_0}{\partial q_s} q'_s, \quad y_0' = \dots, \quad z_0' = \dots,$$

$$(6) \quad x_0'' = \frac{d}{dt} \frac{dx_0}{dt} + \sum_{s=1}^{k+p} \frac{\partial x_0}{\partial q_s} q''_s + \sum_{s=1}^{k+p} q'_s \frac{d}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial q'_s}, \quad y_0'' = \dots, \quad z_0'' = \dots$$

L'équation (4) donne, en tenant compte de (5) et (6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_0}{\partial q''_s} &= \Sigma m \left( x_0'' \frac{\partial x_0''}{\partial q''_s} + \dots + \dots \right) = \Sigma m \left( x_0'' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_0''}{\partial q'_s} + \dots + \dots \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Sigma m \left( x_0' \frac{\partial x_0'}{\partial q'_s} + \dots + \dots \right) - \Sigma m \left( x_0' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_0'}{\partial q'_s} + \dots + \dots \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_s} - \Sigma m \left( x_0' \frac{d}{dt} \frac{\partial x_0'}{\partial q'_s} + \dots + \dots \right), \end{aligned}$$

---

(1) IV. TZÉNOFF, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1920.

d'où l'on tire, en observant que  $\frac{d}{dt} \frac{\partial x_0}{\partial q_s} = \frac{\partial x'_0}{\partial q_s}, \dots$ ,

$$(7) \quad \frac{\partial S_0}{\partial q'_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_s} - \frac{\partial T_0}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \dots, k, \dots, k+p).$$

5. En tenant compte de la relation (7), on a

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_x} + \frac{\partial S_1}{\partial q_x} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_x} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q_{k+i}}{\partial q'_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial S_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_x}.$$

En se servant des relations (7) pour  $s = k+1, \dots, k+p$ , et de la relation

$$\frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} = \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_x} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

qu'on déduit facilement de (1), le terme complémentaire prend la forme

$$8) \quad \frac{\partial T_1}{\partial q_x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_x} + \frac{\partial S_1}{\partial q_x} = \sum_{i=1}^p \left[ \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \right].$$

Il s'ensuit que le terme complémentaire qu'il faut ajouter au premier membre des équations de Lagrange, pour obtenir les équations du mouvement des systèmes matériels non holonomes, *ne contient pas les dérivées secondes par rapport au temps.*

Alors les équations du mouvement (2) sont :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_x} - \frac{\partial T}{\partial q_x} + \sum_{i=1}^p \left[ \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_x} - \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \right] &= Q_x, \\ &(\alpha = 1, 2, \dots, k), \\ q'_{k+i} &= \sum_{\alpha=1}^k a_{\alpha i} q'_\alpha + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \right.$$

Ceci nous montre que pour pouvoir écrire les équations du mouvement d'un système non holonome, il n'est pas nécessaire de connaître la fonction  $S$  de M. Appell, ni la fonction  $S_1$  que nous avons introduite. Ceci simplifie beaucoup les calculs, parce que la fonction  $S$  se calcule difficilement.

4. Nous allons maintenant *déduire les équations de M. Appell des nôtres et inversement.*

Nous partirons de l'équation

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

En tenant compte de l'équation (7) pour  $\alpha = 1, 2, \dots, k$ , l'équation ci-dessus devient

$$(10) \quad \frac{\partial S_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha,$$

en posant

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial S_0}{\partial q_{k+i}''} \frac{\partial q_{k+i}''}{\partial q_\alpha}.$$

La fonction  $S$  de M. Appell représente l'énergie d'accélération du système, en tenant compte de toutes les liaisons finies et différentielles; elle peut s'obtenir de  $S_0$  en tenant compte des relations (1). Alors

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial S_0}{\partial q_{k+i}''} \frac{\partial q_{k+i}''}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha},$$

ce qui est égal à  $Q_\alpha$  d'après (10). Donc, on a les équations de M. Appell

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Inversement, comme

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial S_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S_0}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha},$$

nous aurons

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

On en tire facilement les équations (2) en tenant compte de ce que

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

3. Nous allons obtenir les équations du mouvement (2) ou (2') d'une autre manière, en partant de l'équation générale de la dynamique, écrite sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha + \sum_{i=1}^p \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \right) \delta q_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha \delta q_\alpha + \sum_{i=1}^p Q_{k+i} \delta q_{k+i}.$$

Si l'on tient maintenant compte des liaisons différentielles (1) :

$$q'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} q'_\alpha + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

alors

$$\delta q_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} \delta q_\alpha$$

et l'équation générale de la dynamique prend la forme

$$\sum_{\alpha=1}^k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^p \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \right) a_{i\alpha} \right] \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha \delta q_\alpha;$$

en tenant compte des relations (7) pour  $s = k + 1, \dots, k + p$ , et de ce que

$$a_{i\alpha} = \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_\alpha},$$

alors

$$\sum_{i=1}^p \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \right) a_{i\alpha} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial S_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial S_1}{\partial q'_\alpha},$$

et nous aurons

$$\sum_{\alpha=1}^k \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q'_\alpha} \right) \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha \delta q_\alpha;$$

comme les  $\delta q_\alpha$  sont arbitraires, nous obtenons les équations (2').

6. Nous pouvons *déduire le théorème des forces vives* des équations (2) ou (2'). Le théorème, déduit du principe de d'Alembert, s'énonce ainsi : si les liaisons sont indépendantes du temps, la différentielle de la demi-force vive est égale à la somme des travaux élémentaires des forces données. Comme les liaisons sont indépendantes du temps, les déplacements réels sont compris parmi les déplacements virtuels, compatibles avec les liaisons; c'est pourquoi on peut remplacer  $\delta q_s$  ( $s = 1, 2, \dots, k+p$ ) par  $dq_s$ . Les équations (1) dans ce cas sont :

$$(11) \quad q'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les coefficients  $a_{i\alpha}$  étant des fonctions de  $q_1, \dots, q_{k+p}$ .

Le théorème des forces vives s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha q'_\alpha.$$

Il s'agit de déduire cette équation des équations (2) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha} + \frac{\partial S_1}{\partial q'_\alpha} = Q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Multiplions-les par  $q'_\alpha$  et ajoutons-les. Nous obtenons alors, en supposant les équations (2) remplacées par (9) :

$$(12) \quad \sum_{\alpha=1}^k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^k \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q_{k+i}}{\partial q'_\alpha} \right) q'_\alpha \\ - \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha q'_\alpha.$$

Comme la fonction  $T$  est une forme quadratique des  $q'_1, \dots, q'_k$ , on a

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = 2T.$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^k \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha &= \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha = \frac{d_\lambda T}{dt} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha \\ &= \frac{d_\lambda T}{dt} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha - \sum_{\alpha=1}^k q''_\alpha \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} \\ &= \frac{d_\lambda T}{dt} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha - \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha. \end{aligned}$$

Le deuxième terme de (12) s'écrit :

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha.$$

Alors l'équation (12) prendra la forme

$$\begin{aligned} \frac{d_\lambda T}{dt} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial T_0}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^k \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha + \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha \right) \\ = \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha q'_\alpha, \end{aligned}$$

ou bien en tenant compte des équations (11) :

$$\frac{d_\lambda T}{dt} - \sum_{s=1}^{k+p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_s} q''_s - \sum_{s=1}^{k+p} \frac{\partial T_0}{\partial q'_s} q'_s = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha q'_\alpha;$$

enfin

$$\frac{d_\lambda T}{dt} - \frac{dT_0}{dt} = \frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha q'_\alpha \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**7.** Cherchons maintenant la forme que doivent avoir les liaisons différentielles imposées au système pour que l'équation de Lagrange puisse s'appliquer à l'un des paramètres.

Nous allons considérer le cas spécial où toutes les liaisons sont indépendantes du temps, et où les quantités  $q_{k+i}, \dots, q_{k+p}$  ne figurent pas dans les équations du mouvement. Alors les équations (1) ont la

forme

$$(13) \quad dq_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} dq_{\alpha} \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

les  $a_{i\alpha}$  ne dépendant que des  $q_1, q_2, \dots, q_k$ .

Dans ce cas, les équations (9) prennent la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_{\alpha}} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \Gamma_0}{\partial q_{k+i}} \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) &= Q_{\alpha} \quad (\alpha=1, 2, \dots, k), \\ q'_{k+i} &= \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} \dot{q}_{\alpha} \quad (i=1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} &= \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{d}{dt} a_{i\alpha} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_j - \sum_{j=1}^k \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j. \end{aligned}$$

et les équations du mouvement sont :

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_{\alpha}} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial \Gamma_0}{\partial q_{k+i}} \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{\alpha}} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = Q_{\alpha} & (\alpha=1, 2, \dots, k) \\ q'_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} \dot{q}_{\alpha} & (i=1, 2, \dots, p). \end{cases}$$

Si l'on avait

$$(15) \quad \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_{\alpha}} = \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} \quad \left( \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p \\ j=1, 2, \dots, k \end{matrix} \right),$$

alors l'équation de Lagrange, par rapport au paramètre  $q_{\alpha}$ , donnerait une équation différentielle du mouvement du système non holonome.

Nous allons définir  $p$  fonctions  $F_1, F_2, \dots, F_p$  de  $q_1, q_2, \dots, q_k$  par les conditions

$$F_s = \int_{q_s^0}^{q_s} a_{s\alpha} dq_{\alpha} \quad (s=1, 2, \dots, p);$$

on en déduit

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_{\alpha}} = a_{s\alpha};$$

de même

$$\frac{\partial F_s}{\partial q_\gamma} = \int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} \frac{\partial a_{s\alpha}}{\partial q_\gamma} dq_\alpha = \int_{q_\alpha^0}^{q_\alpha} \frac{\partial a_{s\gamma}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = a_{s\gamma} - a_{s\gamma}^0,$$

d'après (15) et en désignant par  $a_{s\gamma}^0$  la valeur de  $a_{s\gamma}$  pour  $q_\alpha = q_\alpha^0$ .

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dF_s}{dt} &= a_{s1}q'_1 + \dots + a_{s\alpha}q'_\alpha + \dots + a_{sk}q'_k \\ &\quad - a_{s1}^0q'_1 - \dots - 0 - \dots - a_{sk}^0q'_k; \end{aligned}$$

L'équation (13) nous donne

$$dq'_{k+i} = \frac{dF_s}{dt} + a_{s1}^0q'_1 + \dots + a_{s\alpha-1}^0q'_{\alpha-1} + a_{s\alpha+1}^0q'_{\alpha+1} + \dots + a_{sk}^0q'_k.$$

Donc, les liaisons différentielles prennent la forme

$$dq_{k+i} = dF_i + \sum_{r=1}^{\alpha-1} a_{ir}^0 dq_r + \sum_{r=\alpha+1}^k a_{ir}^0 dq_r \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

Par conséquent, l'équation de Lagrange est applicable au paramètre  $q_\alpha$  si les liaisons imposées (13) peuvent se mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte suivie d'une expression différentielle ne contenant pas  $q_\alpha$ .

8. On sait que les équations de Lagrange peuvent être mises sous une autre forme donnée par Hamilton et qu'il a appelée *forme canonique*. Nous nous proposons de faire la même chose avec les équations (9),

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^p \left[ \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial q''_{k+i}}{\partial q'_\alpha} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} \right] &= Q_\alpha \\ &\quad (\alpha=1, 2, \dots, k), \\ \frac{dq_\alpha}{dt} &= q'_\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, k), \\ \frac{dq_{k+i}}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} q'_\alpha + a_i \quad (i=1, 2, \dots, p). \end{aligned} \right.$$

Ces équations, au nombre de  $2k+p$ , déterminent  $q_1, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}, q'_1, \dots, q'_k$  en fonction de  $t$ .

Prenons comme nouvelles variables, au lieu de  $q'_1, \dots, q'_k$ , les quantités

$$(17) \quad p_1 = \frac{\partial T}{\partial q'_1}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q'_2}, \quad \dots, \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial q'_k};$$

ces équations sont linéaires par rapport à  $q'_1, \dots, q'_k$ . On en tire inversement  $q'_1, \dots, q'_k$  en fonction de  $p_1, \dots, p_k$ , et les équations (16) détermineront  $q_1, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}, p_1, \dots, p_k$  en fonction de  $t$ . Nous chercherons la forme que prennent les équations (16) quand on effectue ce changement de variables.

La fonction  $T$  dépend de  $t, q_1, \dots, q_{k+p}, q'_1, \dots, q'_k$ . Laissons  $t$  fixe et donnons aux variables  $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$  des accroissements infiniment petits, indépendants et arbitraires.  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k, \delta p_1, \dots, \delta p_k$ . On tire les accroissements  $\delta q_{k+1}, \dots, \delta q_{k+p}$  des équations

$$(18) \quad \delta q_{k+i} = \sum_{x=1}^k a_{ix} \delta q_x \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

et les accroissements  $\delta q'_1, \dots, \delta q'_k$  des équations (17), supposées résolues par rapport aux  $q'_1, \dots, q'_k$ .

Alors la variation de  $T$  sera

$$\delta T = \sum_{x=1}^k \frac{\partial T}{\partial q_x} \delta q_x + \sum_{x=1}^k \frac{\partial T}{\partial q'_x} \delta q'_x + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} \delta q_{k+i},$$

ou bien, en tenant compte des équations (17) et (18),

$$\delta T = \sum_{x=1}^k p_x \delta q'_x + \sum_{x=1}^k \left( \frac{\partial T}{\partial q_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} a_{ix} \right) \delta q_x.$$

Si l'on pose

$$(19) \quad K = \sum_{x=1}^k p_x q'_x - T,$$

on aura

$$\delta K = \sum_{x=1}^k q'_x \delta p_x - \sum_{x=1}^k \left( \frac{\partial T}{\partial q_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q_{k+i}}{\partial q_x} \right) \delta q_x.$$

Nous avons obtenu ainsi une expression pour la différentielle totale  $\delta K$  qui remplace  $\delta T$ . Nous aurons une nouvelle expression

pour  $\delta K$  en supposant que  $K$  est exprimé en fonction de  $t, q_1, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}, p_1, \dots, p_k$ , et que  $q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k$  subissent des variations arbitraires  $\delta q_1, \dots, \delta q_k, \delta p_1, \dots, \delta p_k$ . Alors

$$\delta K = \sum_{x=1}^k \frac{\partial K}{\partial p_x} \delta p_x + \sum_{x=1}^k \left( \frac{\partial K}{\partial q_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial K}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \right) \delta q_x.$$

En identifiant ces deux expressions pour  $\delta K$ , on obtient

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial q_x} - \sum_{i=1}^p \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_x} &= \frac{\partial K}{\partial q_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial K}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \\ q'_x &= \frac{\partial K}{\partial p_x} \end{aligned} \right. \quad (x = 1, 2, \dots, k).$$

Dans ces équations, les dérivées partielles de  $T$  sont prises en considérant  $T$  comme une fonction de  $t, q_1, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}, q'_1, \dots, q'_k$ , tandis que  $K$  est supposé exprimé en fonction de  $t, q_1, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}, p_1, \dots, p_k$ .

Alors, d'après (20), les équations (16), en remarquant que

$$\frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} = \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} + \sum_{l=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+l}} \frac{\partial q'_{k+l}}{\partial q_{k+i}}$$

et

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial T}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \sum_{l=1}^p \frac{\partial q'_{k+l}}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+l}}{\partial q'_x}$$

prennent la forme suivante :

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} + \frac{\partial K}{\partial q_x} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial K}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} \\ + \sum_{i=1}^p \left[ \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_x} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q'_{k+j}}{\partial q'_x} \right) \right] &= Q_x \\ & \quad (x = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dq_x}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_x} & (x = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dq_{k+i}}{dt} &= \sum_{x=1}^k a_{ix} \frac{\partial K}{\partial p_x} + a_i & (i = 1, 2, \dots, p); \end{aligned} \right.$$

le quatrième terme de la première équation, en vertu de la deuxième et de la troisième équation, est une fonction de  $t, q_1, q_2, \dots, q_k, \dots, q_{k+p}, p_1, \dots, p_k$ .

Ces équations (21) au nombre de  $2k + p$  sont donc du premier ordre par rapport aux  $2k + p$  variables  $q_1, \dots, q_{k+p}, p_1, \dots, p_k$ . On peut les résoudre et obtenir les variables ci-dessus comme fonctions de  $t$  et de  $2k + p$  constantes arbitraires.

Supposons maintenant que les forces données dérivent d'une fonction  $U$ , qui dépend de  $t, q_1, q_2, \dots, q_{k+p}$ , mais ne dépend pas de  $p_1, p_2, \dots, p_k$ ; alors  $\frac{\partial U}{\partial p_x} = 0$ . On a

$$Q_x^0 = \frac{\partial U}{\partial q_x} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

$$Q_{k+i}^0 = \frac{\partial U}{\partial q_{k+i}} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$Q_x = Q_x^0 + \sum Q_{k+i}^0 \frac{\partial q_{k+i}'}{\partial q_x'} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k).$$

Alors, en posant

$$H = K - U,$$

nous aurons

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial K}{\partial p_x}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_x} = \frac{\partial K}{\partial q_x} - \frac{\partial U}{\partial q_x} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k),$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{k+i}} = \frac{\partial K}{\partial q_{k+i}} - \frac{\partial U}{\partial q_{k+i}} \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

et les équations (21) prennent la forme

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & \frac{dp_x}{dt} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial q_{k+i}} \frac{\partial q_{k+i}'}{\partial q_x'} \\ & + \sum_{i=1}^p \left[ \frac{\partial T_0}{\partial q_{k+i}} \left( \frac{\partial q_{k+i}'}{\partial q_x} - \frac{\partial q_{k+i}'}{\partial q_x'} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial q_{k+i}^0}{\partial q_{k+j}} \frac{\partial q_{k+j}'}{\partial q_x'} \right) \right] = - \frac{\partial H}{\partial q_x} \\ & \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \\ & \frac{dq_x}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \\ & \frac{dq_{k+i}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_x} + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, p). \end{aligned} \right.$$

Ces équations représentent la forme canonique avec un terme complémentaire des équations du mouvement des systèmes non holo-  
nômes.

*Cas particulier.* — Supposons que les liaisons soient indépendantes du temps; alors  $t$  ne figurera pas dans  $H$  et  $T_0$ ; les  $\alpha_i$  seront nulles. Alors  $T$  sera une forme quadratique par rapport aux  $q'_1, \dots, q'_k$  et par conséquent

$$\sum_{\alpha=1}^k q'_\alpha \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} = \sum q'_\alpha p_\alpha = 2T,$$

$$K = \sum p_\alpha q'_\alpha - T = 2T - T = T,$$

et

$$(23) \quad H = K - U = T - U.$$

Le théorème des forces vives, donné par l'équation

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha q'_\alpha,$$

devient ici

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k \left( Q_\alpha^0 + \sum_{i=1}^p Q_{k+i}^0 \alpha_{i\alpha} \right) q'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{i=1}^p \frac{\partial U}{\partial q_{k+i}} q'_{k+i} = \frac{dU}{dt},$$

ou bien en intégrant

$$T = U + h, \quad \text{d'où} \quad H = h.$$

On peut déduire ce résultat des équations (22). En effet, la fonction  $H$  dépend de  $q_1, \dots, q_{k+p}, p_1, \dots, p_k$ . Pendant le mouvement, ces quantités sont des fonctions du temps, et par conséquent

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{dp_\alpha}{dt} \right) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial q_{k+i}} \frac{dq_{k+i}}{dt},$$

qui devient en tenant compte de (22), et de ce que  $a_i = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= - \sum_{\alpha=1}^k q'_\alpha \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left( \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \left( \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^k q'_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} q'_{k+j} \right). \end{aligned}$$

Mais on a

$$q''_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \sum_{j=1}^p \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} q'_{k+j} + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha,$$

d'autre part

$$q''_{k+i} = \sum_{\alpha=1}^k \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q''_\alpha;$$

en comparant, on tire

$$\sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha + \sum_{j=1}^p \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q_{k+j}} q'_{k+j} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_{k+i}}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

donc

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad H = h.$$

Dans le cas plus particulier où  $T_0$  et  $T$  ne dépendent pas des paramètres  $q_{k+1}, \dots, q_{k+p}$ , les équations (22) prennent la forme

$$\begin{aligned} \frac{dp_\alpha}{dt} + \sum_{i=1}^p \frac{\partial T_0}{\partial q'_{k+i}} \sum_{j=1}^k \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_j} \right) \frac{\partial H}{\partial p_j} &= - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{dq_\alpha}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dq_{k+i}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^k a_{i\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, p). \end{aligned}$$

9. On sait que dans le cas des systèmes holonomes on peut obtenir les équations de Lagrange en partant de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_{\alpha=1}^k Q_\alpha \delta q_\alpha \right) dt.$$

Il est facile de montrer que dans le cas des systèmes non holonomes, il faut ajouter à la demi-force vive  $T$  les fonctions  $-T_1$  et  $T_1^0$ ,  $T_1^0$  désignant la fonction  $T_0$ , considérée comme fonction seulement des  $q'_{k+1}, \dots, q'_{k+p}$ , et par conséquent  $T_1$  est la fonction  $T_1^0$  en tenant compte des liaisons différentielles (1) ; alors les équations du mouvement d'un système non holonome se déduisent de l'équation

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} [\delta(T - T_1 + T_1^0) + \sum Q_x \delta q_x] dt = 0,$$

à condition que

$$\delta q_{k+i} = \sum_{x=1}^k a_{ix} \delta q_x \quad (i=1, 2, \dots, p),$$

les  $\delta q_x$  étant arbitraires.

