JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL DIENES

Sur la structure mathématique du calcul tensoriel

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 79-106.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__79_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur la structure mathématique du calcul tensoriel;

PAR PAUL **DIENES**.

INTRODUCTION.

1. L'instrument mathématique de la théorie de la relativité générale de M. Einstein (1) est, sous le nom de « Calcul tensoriel », le Calcul différentiel absolu de MM. Ricci et Levi-Civita complété par la notion du parallélisme introduite aussi par M. Levi-Civita (2). Cette théorie est le développement des recherches de Christoffel (3) suggérées par les idées profondes de Riemann (4) sur la structure de la géométrie. Toute la théorie est fondée sur la conception riemannienne de la métrique définie par la forme quadratiqne fondamentale

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

où les fonctions $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ sont données d'une manière arbitraire.

(1) EINSTEIN, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, 1916; *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie* (Princeton), 1922.

(2) RICCI et LEVI-CIVITA, *Méthodes de Calcul différentiel absolu* (*Math. Ann.*, t. LIV, 1901). — LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo* (*Rend. di Palermo*, t. XLII, 1917).

(3) CHRISTOFFEL, *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke* (*Crelle*, Bd 70, 1869).

(4) RIEMANN, *Ueber die Hypothese welche der Geometrie zu Grunde liegen*; *Commentatio Mathematica* (*Werke*, 1876).

D'autre part, l'idée directrice de la relativité est de considérer la géométrie comme déterminée par la physique, c'est-à-dire de considérer les propriétés du cadre espace-temps comme les manifestations des forces physiques. Le premier exemple de cette interprétation géométrique des forces est la théorie de la gravitation de M. Einstein.

Malheureusement, cependant, le Calcul différentiel absolu n'introduit que le seul tenseur géométrique vraiment indépendant g_{ij}. Et, comme M. Einstein s'en est servi pour expliquer la gravitation, on est naturellement amené à généraliser le Calcul afin d'y faire place aux forces non gravitationnelles, en particulier aux forces électromagnétiques.

Des tentatives de ce genre ont été faites par M. Weyl (1) et par M. Eddington (2); mais, chose curieuse, les conditions mathématiques d'une pareille généralisation n'ont pas été envisagées par ces auteurs. Il en résulte un certain nombre d'inexactitudes fâcheuses dont quelques-unes ont été signalées par nous dans des Notes insérées aux *Comptes rendus* (3).

2. Le point délicat du Calcul est la relation entre les tenseurs attachés à des points différents. Et comme, d'après la conception relativiste, une loi physique est une relation entre des mesures effectuées en différents points de l'espace-temps, force nous est d'étudier soigneusement ce problème. D'autre part, on ne peut pas généraliser le Calcul sans modifier assez profondément l'idée riemannienne de la géométrie.

Dans le présent travail, nous nous proposons donc de construire un instrument mathématique plus général que le Calcul différentiel absolu. Premièrement, nous nous affranchirons de toute considération métrique, c'est-à-dire nous construirons un Calcul tensoriel *amétrique* où le réseau de relations entre les divers points de la multiplicité mathématique à n dimensions sera établi par une généralisation convenable de l'idée du déplacement à la Levi-Civita.

---

(1) Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 3e édition, 1920, p. 169.

(2) Eddington, *A generalisation of Weyl's theory* (*Proc. Roy. Soc.*, A. 99), p. 104.

(3) 1922, t. 174, p. 1167; t. 175, p. 209; 1923, t. 176, p. 238 et 370.

En second lieu, nous construirons une théorie complète du déplacement des tenseurs d'ordre et de type quelconque, et, pour éviter toute possibilité de s'égarer dans les dédales des quantités infinitésimales, nous établirons les formules finies du déplacement tensoriel, c'est-à-dire que nous allons intégrer les équations différentielles du déplacement.

En particulier, dans le premier Chapitre, nous étudierons les opérations tensorielles et leurs relations mutuelles du point de vue *local*, c'est-à-dire se rapportant aux tenseurs attachés au même point de la multiplicité. Dans le second Chapitre, nous développerons la théorie générale du déplacement *fini*. Dans un prochain travail, nous nous servirons du calcul amétrique ainsi construit pour étudier le problème de la métrique riemannienne et ses généralisations.

I. — Le calcul tensoriel amétrique.

3. Soient données deux suites finies de symboles, appelés « tenseurs élémentaires »,

$$(1) \qquad e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_n$$

et

$$(2) \qquad e^1, \quad e^2, \quad \ldots, \quad e^n,$$

où l'indice supérieur n'est pas un exposant. La forme entière

$$(3) \qquad A_0+\sum_{i=1}^{n} A_i e^i + \sum_{i_1, i_2=1}^{n} A_{i_1 i_2} e^{i_1} e^{i_2} + \ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_\omega=1}^{n} A_{i_1 i_2 \ldots i_\omega} e^{i_1} \ldots e^{i_\omega} + \ldots,$$

où les coefficients A_0, A_i, $A_{i_1 i_2}$, ..., $A_{i_1 i_2 \ldots i_\omega}$ sont fonctions des variables indépendantes x^1, x^2, ..., x^n, est appelée « un tenseur covariant ». La forme entière correspondante

$$(4) \qquad B_0+\sum_{k=1}^{n} A^k e_k + \sum_{k_1, k_2=1}^{n} A^{k_1 k_2} e_{k_1} e_{k_2} + \ldots + \sum_{k_1, \ldots, k_\omega=1}^{n} A^{k_1 \ldots k_\omega} e_{k_1} \ldots e_{k_\omega} + \ldots$$

est un tenseur contrevariant. Enfin, l'expression

$$(5)\qquad C+\sum_{i=1}^{n} C_i e^i+\sum_{k=1}^{n} C^k e_k+\sum_{i_1,i_2=1}^{n} C_{i_1 i_2} e^{i_1} e^{i_2}$$
$$+\sum_{i,k=1}^{n} C_{i0}^{0k} e^i e_k+\sum_{i,k=1}^{n} C_{0i}^{k0} e_k e^i+\sum_{k_1,k_2}^{n} A^{k_1 k_2} e_{k_1} e_{k_2}+\ldots$$

sera appelée un tenseur mixte. Son terme général (un tenseur homogène d'ordre ω) peut s'écrire

$$(6)\qquad A=\sum_{i_1,k_1,\ldots,i_\omega,k_\omega=1}^{n}\left[A_{i_1 i_2 \ldots i_\omega}^{k_1 k_2 \ldots k_\omega}\prod_{\nu=1}^{\omega} e^{i_\nu} e_{k_\nu}\right],$$

où, par définition, l'un des deux indices i_ν et k_ν est zéro, $e^0=e_0=1$, de sorte que le nombre des e effectifs est ω. Si tous les k_ν sont nuls, le tenseur est covariant. Si tous les i_ν sont nuls, le tenseur est contrevariant. Nous dirons que les tenseurs énumérés sont exprimés dans le système $(x^1, \ldots, x^n; e_1, e_2, \ldots, e_n; e^1, e^2, \ldots, e^n)$.

Pour simplifier l'écriture, nous suivrons l'usage général d'omettre les Σ quand il y a deux indices identiques en haut et en bas dans le même terme, et nous écrirons l'expression (6) sous la forme abrégée

$$(7)\qquad A=A_{\cdot i_\nu \cdot}^{\cdot k_\nu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu},$$

où

$$\cdot i_\nu \cdot = i_1, i_2, \ldots, i_\omega,$$

et nous avons supprimé le signe de produit devant les tenseurs élémentaires. D'habitude, nous désignerons brièvement les tenseurs par des lettres capitales et les coefficients ou composantes tensorielles par la même lettre affectée d'indices convenables.

4. L'addition et la multiplication. — L'égalité de deux tenseurs est définie par l'identité dans le même système.

L'addition consiste dans l'addition des coefficients correspondants s'il y en a, et dans l'addition formelle dans le cas contraire. Par exemple,

$$(8) \qquad A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu} + B^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu} = \left(A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} + B^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \right) e^{i_\nu} e_{k_\nu}.$$

Il est facile à voir que l'addition est associative et commutative.

La multiplication est définie par les conventions suivantes. Les produits $e^i e^j$, $e^i e_j e_k$, ... des tenseurs fondamentaux sont considérés comme des nouveaux tenseurs élémentaires, c'est-à-dire que nous supposerons qu'il n'y a pas de relation entre les produits de ce genre qui permettrait d'exprimer l'un d'eux comme une forme linéaire homogène des autres. Par exemple, $e^i e^j$ et $e^j e^i$ ne sont ni égaux ni opposés; ils sont indépendants l'un de l'autre. Nous supposerons que la multiplication est associative et qu'elle est distributive par rapport à l'addition, c'est-à-dire que le produit de deux tenseurs est déterminé par une multiplication formelle ordinaire sans supposer cependant qu'elle soit commutative. Par exemple,

$$(9) \qquad A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu} . B^{\cdot l_\mu \cdot}_{\cdot j_\mu \cdot} e^{j_\mu} e_{l_\mu} = A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\mu \cdot}_{\cdot j_\mu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu} . e^{j_\mu} e_{l_\mu},$$

où

$$e^{i_\nu} e_{k_\nu} . e^{j_\mu} e_{l_\mu} = \prod_{\nu=1}^{\omega_1} e^{i_\nu} e_{k_\nu} \prod_{\mu=1}^{\omega_2} e^{j_\mu} e_{l_\mu}.$$

Le produit de deux tenseurs homogènes d'ordres ω_1 et ω_2 respectivement est un tenseur d'ordre $\omega_1 + \omega_2$.

5. La loi du produit est valable, c'est-à-dire que *le produit tensoriel est zéro si l'un des facteurs est zéro, et seulement dans ce cas.*

La première partie du théorème est évidente, puisque chaque terme de produit contient comme facteur un coefficient de chaque tenseur. Pour démontrer la seconde partie, considérons d'abord le produit de deux tenseurs homogènes (9). La condition

$$(10) \qquad A . B = 0$$

signifie que

$$(11) \qquad A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\mu \cdot}_{\cdot j_\mu \cdot} = 0$$

pour n'importe quelle combinaison des indices. Par conséquent, si $B \neq 0$, il y a un coefficient $B_{\cdot j_\mu \cdot}^{\cdot l_\lambda \cdot}$ qui n'est pas nul. D'après (11),

$$A_{\cdot i_\nu \cdot}^{\cdot k_\nu \cdot} = 0$$

pour chaque combinaison des indices, c'est-à-dire $A = 0$. C. Q. F. D.

Si nous remarquons enfin que la multiplication est distributive et que tous les termes résultant d'une multiplication formelle sont indépendants, c'est-à-dire doivent être zéro séparément si le produit est supposé nul, le théorème est démontré aussi pour les tenseurs non homogènes.

6. La contraction (Verjuengung). — Posons

$$(12) \qquad \vdash e^i e_k \dashv = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i, \\ 1 & \text{si} \quad k = i; \end{cases}$$

$$(13) \qquad \vdash e_k e^i \dashv = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i, \\ 1 & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

et, plus généralement,

$$(14) \qquad \left| - \prod_{\nu} e^{i_\nu} e_{k_\nu} - \right|_{i_\rho, k_\sigma} = \prod_{(i_\rho, k_\sigma)} e^{i_\nu} e_{k_\nu},$$

où (i_ρ, k_σ) sous le signe Π indique que le facteur $e^{i_\rho} e_{k_\sigma}$ est supprimé.

Nous supposerons que la contraction ainsi définie et l'addition sont intervertibles de façon que

$$(15) \qquad \vdash A \dashv_{i_\rho, k_\sigma} = \left[\sum_{i_\rho = 1}^{n} A_{\cdot i_\nu \cdot}^{\cdot k_\nu \cdot [k_\sigma = i_\rho]} \right] \prod_{(i_\rho, k_\sigma)} e^{i_\nu} e_{k_\nu},$$

où $[k_\sigma = i_\rho]$ indique qu'on a remplacé k_σ par i_ρ.

7. La dérivation. — Le tenseur le plus simple qu'on peut former par dérivation est

$$(16) \qquad \frac{\partial f}{\partial x^i} e^i.$$

Les recherches de Christoffel ont montré cependant que, dans un changement de variables, les dérivées secondes de f, de même que les dérivées premières des composantes tensorielles, ne se transforment pas selon les règles que nous imposons aux tenseurs. Il en résulte que nous devons modifier considérablement le procédé de dérivation afin de l'encadrer dans le Calcul tensoriel. Pour éviter l'introduction de la métrique, nous généralisons la notion de dérivation covariante de Christoffel.

Introduisons à cet effet deux suites de fonctions [1] arbitrairement données, les « paramètres de dérivation »,

$$(17)\qquad c^{i}_{0jm}(x^1, \ldots, x^m) \quad \text{et} \quad c^{0j}_{k0m}(x^1, \ldots, x^m) \qquad (i, j, k, m = 1, 2, \ldots, n)$$

et posons

$$(18)\qquad \frac{\mathrm{D}A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\mathrm{D}x^r} = \frac{\partial A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^r} + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot |i_\zeta \to s|}\, c^{s}_{0 i_\zeta r} + A^{\cdot k_\nu \cdot |k_\zeta \to s|}_{\cdot i_\nu \cdot}\, c^{0 k_\zeta}_{s 0 r},$$

où s parcourt successivement tous les indices en bas et en haut. Nous appellerons le tenseur

$$(19)\qquad \frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}x} = \frac{\mathrm{D}A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\mathrm{D}x^r}\, e^{i_\nu} e_{k_\nu} . e^r$$

la dérivée tensorielle du tenseur $A = A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu}$.

La dérivée tensorielle d'un tenseur d'ordre zéro, c'est-à-dire celle d'une fonction $f(x^1, \ldots, x^n)$ se réduit au tenseur (16). On a donc

$$(20)\qquad \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}x^r} = \frac{\partial f}{\partial x^r}.$$

8. Règles de dérivation. — Comme le second membre de (18) est linéaire et homogène par rapport aux composantes tensorielles et à leurs dérivées, nous avons la règle

$$(21)\qquad \frac{\mathrm{D}(A + B)}{\mathrm{D}x} = \frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}x} + \frac{\mathrm{D}B}{\mathrm{D}x}.$$

Pour établir la règle

$$(22)\qquad \frac{\mathrm{D}\left(A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot}\right)}{\mathrm{D}x^r} = \frac{\mathrm{D}A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\mathrm{D}x^r} B^{\cdot k_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot} + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \frac{\mathrm{D}B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot}}{\mathrm{D}x^r},$$

---

[1] La première suite correspond aux composantes de la connexion affine de M. Weyl (*voir* Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, 3e édition, p. 101).

nous n'avons qu'à remarquer que le premier membre s'écrit

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\left(A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot}\right)}{Dx^r} + c^s_{0 i_\xi r} A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot | i_\xi = s|} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot} + c^{0 k_\xi}_{s 0 r} A^{\cdot k_\nu \cdot | k_\xi = s|}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot} \\
&\quad + c^s_{0 j_\xi r} A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot | j_\xi = s|} + c^{0 l_\xi}_{s 0 r} A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} B^{\cdot l_\lambda \cdot | l_\xi = s|}_{\cdot j_\lambda \cdot} \\
&= \left(\frac{\partial A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^r} + c^s_{0 i_\xi r} A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot | i_\xi = s|} + c^{0 k_\xi}_{s 0 r} A^{\cdot k_\nu \cdot | k_\xi = s|}_{\cdot i_\nu \cdot} \right) B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot} \\
&\quad + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \left(\frac{\partial B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot}}{\partial x^r} + c^s_{0 j_\xi r} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot | j_\xi = s|} + c^{0 l_\xi}_{s 0 r} B^{\cdot l_\lambda \cdot | l_\xi = s|}_{\cdot j_\lambda \cdot} \right) \\
&= \frac{DA^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{Dx^r} B^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot} + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \frac{DB^{\cdot l_\lambda \cdot}_{\cdot j_\lambda \cdot}}{Dx^r}.
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve la règle.

9. La contraction et la dérivation. — Nous allons établir la proposition suivante : *La condition nécessaire et suffisante pour que la contraction et la dérivation soient intervertibles est que l'on ait*

$$c^i_{0jm} + c^{0i}_{j0m} = 0 \qquad (i, j, m = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Pour montrer que la condition est nécessaire, considérons le tenseur $e^i e_j$ $(i \neq j)$, c'est-à-dire le tenseur $A^{0\beta}_\alpha e^\alpha e_\beta$, où tous les coefficients sont zéro, sauf un (quand $\alpha = i$ et $\beta = j$) et ce coefficient est égal à 1.

D'après la règle

$$\frac{D}{Dx}\left(A^{0\beta}_\alpha e^\alpha e_\beta \right) = \left(\frac{\partial A^{0\beta}_\alpha}{\partial x^r} + A^{0\beta}_s c^s_{0\alpha k} + A^{0s}_\alpha c^{0\beta}_{s0r} \right) e^\alpha e_\beta e^r,$$

on a

$$\frac{D}{Dx^r}(e^i e_j) = c^i_{0\alpha r} e^\alpha e_j e^r + c^{0\beta}_{j0r} e^i e_\beta e^r,$$

de sorte que la contraction de $\frac{D}{Dx^r}(e^i e_j)$ par rapport aux deux premiers indices donne

$$\left| \cdot \frac{D}{Dx^r}(e^i e_j) \cdot \right| = (c^i_{0jr} + c^{0i}_{j0r}) e^r.$$

D'autre part,

$$| \cdot e^i e_j \cdot | = 0$$

est un tenseur d'ordre zéro, par suite

$$\frac{D \vdash e^i e_j \dashv}{Dx^r} = \frac{\partial \vdash e^i e_j \dashv}{\partial x^r} = 0.$$

L'équation

$$\vdash \frac{D}{Dx}(e^i e_j) \dashv_{1,2} = \frac{D}{Dx} \vdash e^i e_j \dashv,$$

qui exprime que pour le tenseur considéré la contraction et la dérivation sont intervertibles, exige donc que les conditions (23) soient satisfaites.

10. Pour montrer que les mêmes conditions sont suffisantes, nous remarquons que, d'après (18),

$$\left| \frac{DA^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{Dx^r} \right|_{i_\mu, k_\sigma} = \sum_{i_\mu} \frac{\partial A^{\cdot k_\nu [k_\rho = i_\mu]}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^r} + \sum_{i_\mu} \left(\sum_s A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot [i_\rho = s]} c^{s}_{0 i_\rho r} \right)^{[k_\sigma = i_\mu]}$$
$$+ \sum_{k_\sigma} \left(\sum_s A^{\cdot k_\nu \cdot [k_\rho = s]}_{\cdot i_\nu \cdot} c^{0 k_\rho}_{s 0 r} \right)_{[i_\mu = k_\sigma]},$$

où s parcourt successivement *tous* les indices i_ν et k_ν.

D'autre part,

$$\frac{D \vdash A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \dashv (i_\mu, k_\sigma)}{Dx^r} = \frac{\partial \vdash A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \dashv (i_\mu, k_\sigma)}{\partial x^r} + \sum_s \vdash A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \dashv_{i_\mu, k_\sigma} {}_{[i_\rho = s]} c^{s}_{0 i_\rho r}$$
$$+ \sum_s \vdash A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \dashv_{i_\mu, k_\sigma}^{[k_\rho = s]} c^{0 k_\rho}_{s o r},$$

où s parcourt tous les indices i_ν et k_ν, *sauf* i_μ et k_σ.

Il s'ensuit que

$$\left| \vdash \frac{DA^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{Dx^r} \dashv \right|_{i_\mu, k_\sigma} - \frac{D \vdash A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \dashv (i_\mu, k_\sigma)}{Dx^r}$$
$$= \sum_{i_\mu} \left(\sum_s A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot [i_\mu = s]} c^{s}_{0 i_\mu r} \right)^{[k_\sigma = i_\mu]} + \sum_{k_\sigma} \left(\sum_s A^{\cdot k_\nu \cdot [k_\sigma = s]}_{\cdot i_\nu \cdot} c^{0k}_{s 0 r} \right)_{[i_\mu = k_\sigma]}$$
$$= \sum_{\alpha, s} A^{\cdot k_\nu \cdot [k_\sigma = \alpha]}_{\cdot i_\nu \cdot [i_\mu = s]} c^{s}_{0 \alpha r} + \sum_{\alpha, s} A^{\cdot k_\nu \cdot [k_\sigma = s]}_{\cdot i_\nu \cdot [i_\mu = \alpha]} c^{0 \alpha}_{s 0 r}$$
$$= \sum A^{\cdot k_\nu \cdot [k_\sigma = \alpha]}_{\cdot i_\nu \cdot [i_\mu = s]} \left(c^{s}_{0 \alpha r} + c^{0 s}_{\alpha 0 r} \right)$$

et cela s'annule bien si les conditions (23) sont satisfaites, ce que nous supposerons dans la suite de ce travail.

11. Changement de variables. — Regardons le changement de variables

$$\xi^i = t^i(x^1, \ldots, x^n), \tag{24}$$

$$d\xi^i = \frac{\partial t^i}{\partial x^j} dx^j = t^i_j \, dx^j. \tag{25}$$

Nous supposons que le déterminant des $t^i_j = \frac{\partial t^i}{\partial x_j}$ n'est pas nul, de sorte que nous pouvons résoudre (24) par rapport aux inconnues $x^1, \ldots, x^n$,

$$x^i = \tau^i(\xi^1, \ldots, \xi^n), \tag{26}$$

$$dx^i = \frac{\partial \tau^i}{\partial \xi^j} d\xi^j = \tau^i_j \, d\xi^j. \tag{27}$$

Nous définissons la transformation des tenseurs par celle des tenseurs élémentaires en posant

$$\varepsilon^i = t^i_j \, e^j, \tag{28}$$

$$\varepsilon_i = \tau^j_i \, e_j, \tag{29}$$

et en exigeant que les tenseurs soient invariants par rapport à une transformation quelconque des coordonnées.

Pour en déduire la loi de transformation pour les coefficients $A^{\cdot\, k_1\, \cdot}_{i_1\, \cdot\, \cdot}$, nous remarquons que

$$e^k = \tau^k_i \, \varepsilon^i, \qquad e_k = t^i_k \, \varepsilon_i \tag{30}$$

car

$$\tau^i_j \, t^j_k = \frac{dx^i}{d\xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases} \tag{31}$$

et, de même,

$$\tau^j_i \, t^k_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases} \tag{32}$$

Si nous appelons A' le tenseur transformé, l'équation

$$A \doteq A', \tag{33}$$

jointe aux équations (28) et (29), donne

$$A_{\cdot\, i_\nu \,\cdot}^{\cdot\, k_\nu \,\cdot} = A'^{\,\cdot\, \gamma_\nu \,\cdot}_{\cdot\, \alpha_\nu \,\cdot} \prod_\nu t_{i_\nu}^{\alpha_\nu} \tau_{\gamma_\nu}^{k_\nu}, \tag{34}$$

ou bien

$$A'^{\,\cdot\, \gamma_\nu \,\cdot}_{\cdot\, \alpha_\nu \,\cdot} = A_{\cdot\, i_\nu \,\cdot}^{\cdot\, k_\nu \,\cdot} \prod_\nu \tau_{\alpha_\nu}^{i_\nu} t_{k_\nu}^{\gamma_\nu},$$

où, au second membre, les variables $x^1, \ldots, x^n$ sont partout remplacées par les fonctions $\tau^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, \tau^n(x^1, \ldots, x^n)$.

12. Nous allons démontrer que le changement de variables et les trois opérations, l'addition, la multiplication et la contraction sont intervertibles, c'est-à-dire que

$$A' + B' = (A + B)', \tag{35}$$

$$A' . B' = (AB)', \tag{36}$$

$$\vdash A' \dashv \; = \; \vdash A \dashv'. \tag{37}$$

Pour démontrer (35) et (36), il suffit de remarquer que les coefficients transformés sont des formes homogènes et linéaires des coefficients anciens et que la multiplication est distributive.

Pour démontrer (37), calculons séparément les deux membres. On a

$$\vdash A \underset{i_\mu, k_\sigma}{\dashv}' = \left[\sum_{i_\mu} A_{\cdot\, i_\nu \,\cdot}^{\cdot\, k_\nu \,\cdot\, (k_\sigma = i_\mu)} \right] \prod_{(i_\mu, k_\sigma)} \tau_{\alpha_\nu}^{i_\nu} t_{k_\nu}^{\gamma_\nu} \prod_{(\alpha_\mu, \gamma_\sigma)} \varepsilon^{\alpha_\nu} \varepsilon_{\gamma_\nu}$$

et

$$\vdash A' \underset{\alpha_\mu, \gamma_\sigma}{\dashv} = \left[A'^{\,\cdot\, \gamma_\nu \,\cdot\, (\gamma_\sigma = \alpha_\mu)}_{\cdot\, \alpha_\nu \,\cdot} \right] \prod_{(\alpha_\mu, \gamma_\sigma)} \varepsilon^{\alpha_\nu} \varepsilon_{\gamma_\nu}.$$

Mais, d'après (31) et (34), ces deux expressions sont identiques, ce qui démontre le théorème.

13. Dérivation et changement de variables. — Théorème : *Pour que la dérivation et le changement de variables soient intervertibles, il faut et il suffit que la transformation des paramètres de dérivation* *soit effectuée d'après la règle*

$$c^{i}_{0jk} = t^{\beta}_{j}\, t^{\gamma}_{k}\, \frac{\partial \tau^{i}_{\beta}}{\partial \xi^{\gamma}} + \tau^{i}_{\alpha}\, t^{\beta}_{j}\, t^{\gamma}_{k}\, \gamma^{\alpha}_{0\beta\gamma}. \tag{38}$$

$$c^{0j}_{i0k} = \tau^{j}_{\beta}\, \frac{\partial t^{\beta}_{i}}{\partial x^{k}} + t^{\alpha}_{i}\, \tau^{j}_{\beta}\, t^{\gamma}_{k}\, \gamma^{0\beta}_{\alpha 0\gamma}. \tag{39}$$

Nous avons à montrer que l'équation

$$\left(\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{D}x}\right)' = \frac{\mathrm{DA}'}{\mathrm{D}\xi} \tag{40}$$

est une conséquence de (38) et (39), et réciproquement.

Il suffit de la faire voir pour les tenseurs homogènes, c'est-à-dire que nous avons à établir l'égalité

$$\frac{\mathrm{DA}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\mathrm{D}x^{m}}\, \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu}\, t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} = \frac{\mathrm{DA}'^{\cdot \gamma_\nu \cdot}_{\cdot \alpha_\nu \cdot}}{\mathrm{D}\xi^{\mu}}. \tag{41}$$

La forme explicite du premier membre s'écrit

$$\left[\frac{\partial \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^{m}} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot \,|i_\rho = s|}\, c^{s}_{0 i_\rho m} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot\, |k_\rho = s|}_{\cdot i_\nu \cdot}\, c^{0 k_\rho}_{s 0 m}\right] \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu}\, t^{\gamma_\nu}_{k_\nu}. \tag{42}$$

Celle du second est

$$\frac{\partial \mathrm{A}'^{\cdot \gamma_\nu \cdot}_{\cdot \alpha_\nu \cdot}}{\partial \xi^{\mu}} + \mathrm{A}'^{\cdot \gamma_\nu \cdot}_{\cdot \alpha_\nu \cdot\, |\alpha_\rho = \sigma|}\, \gamma^{\sigma}_{0 \alpha_\rho \mu} + \mathrm{A}'^{\cdot \gamma_\nu \cdot\, |\gamma_\rho = \sigma|}_{\cdot \alpha_\nu \cdot}\, \gamma^{0 \gamma_\rho}_{\sigma 0 \mu}. \tag{43}$$

Si dans (42) nous remplaçons c^{i}_{0jk} et c^{0j}_{i0k} par leurs valeurs données par les équations (38) et (39), les termes ne contenant pas les paramètres $\gamma^{\alpha}_{0\beta\gamma}$, $\gamma^{0\beta}_{\alpha 0\gamma}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^{m}} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot\, |i_\rho = s|}\, t^{\beta}_{i_\rho}\, t^{\gamma}_{m}\, \frac{\partial \tau^{s}_{\beta}}{\partial \xi^{\gamma}} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot\, |k_\rho = s|}_{\cdot i_\nu \cdot}\, \tau^{k_\rho}_{\beta}\, \frac{\partial t^{\beta}_{s}}{\partial x^{m}}\right] \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu}\, t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} \\
&= \frac{\partial \mathrm{A}^{\cdot k_\nu}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^{m}}\, \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu}\, t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot\, |i_\rho = s|}\, \frac{\partial \tau^{s}_{\alpha_\rho}}{\partial \xi^{\mu}} \prod_{(i_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu}\, t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot\, |k_\rho = s|}_{\cdot i_\nu \cdot}\, \frac{\partial t^{\gamma_\rho}_{s}}{\partial x^{m}}\, \tau^{m}_{\mu} \prod_{(k_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu}\, t^{\gamma_\nu}_{k_\nu},
\end{aligned}$$

car

$$t^{\beta}_{i_\rho}\, t^{\gamma}_{m}\, \tau^{m}_{\mu}\, \tau^{i_\rho}_{\alpha_\rho}\, \frac{\partial \tau^{s}_{\beta}}{\partial \xi^{\gamma}} = \frac{\partial \tau^{s}_{\alpha_\rho}}{\partial \xi^{\mu}}$$

et

$$\tau^{k_\rho}_{\beta}\, t^{\gamma_\rho}_{k_\rho} \frac{\partial t^{\beta}_{s}}{\partial x^m} = \frac{\partial t^{\gamma_\rho}_{s}}{\partial x^m}.$$

D'autre part, d'après la règle de la transformation des composantes tensorielles,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot \alpha_\nu \cdot}}{\partial \xi^\mu} &= \frac{\partial A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^m} \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \frac{\partial \tau^{i_\rho}_{\alpha_\rho}}{\partial \xi^\mu} \prod_{(i_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \frac{\partial t^{\gamma_\rho}_{k_\rho}}{\partial x^m} \tau^{m}_{\mu} \prod_{(k_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} \\
&= \frac{\partial A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\partial x^m} \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot |i_\rho = s|} \frac{\partial \tau^{s}_{\alpha_\rho}}{\partial \xi^\mu} \prod_{(i_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k} \\
&\qquad + A^{\cdot k_\nu \cdot |k_\rho = s|}_{\cdot i_\nu \cdot} \frac{\partial t^{\gamma_\rho}_{s}}{\partial x^m} \tau^{m}_{\mu} \prod_{(k_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu},
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que dans l'équation (42) transformée et dans (43) les termes en γ^{i}_{0jk}, γ^{0j}_{i0k} sont identiques.

Les termes en γ dans l'expression (42) transformée s'écrivent

$$\begin{aligned}
&A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot |i_\rho = s|} \tau^{s}_{\alpha} t^{\beta}_{i_\rho} t^{\gamma}_{m} \gamma^{\alpha}_{0\beta\gamma} \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + A^{\cdot k_\nu \cdot |k_\rho = s|}_{\cdot i_\nu \cdot} t^{\alpha}_{s} \tau^{k_\rho}_{\beta} t^{\gamma}_{m} \gamma^{0\beta}_{\alpha 0 \gamma} \tau^{m}_{\mu} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} \\
&= A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot |i_\rho = s|} \tau^{s}_{\alpha} \gamma^{\alpha}_{0\alpha_\rho\mu} \prod_{(i_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} + A^{\cdot k_\nu \cdot |k_\rho = s|}_{\cdot i_\nu \cdot} t^{\alpha}_{s} \gamma^{0\gamma_\rho}_{\alpha 0 \mu} \prod_{(k_\rho)} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu},
\end{aligned}$$

et en remplaçant τ^{s}_{α}, respectivement t^{α}_{s}, dans le produit Π correspondant,

$$= \left(A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} \right)_{|\alpha_\rho = \sigma|} \gamma^{\sigma}_{0\alpha_\rho\mu} + \left(A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} \prod_{\nu} \tau^{i_\nu}_{\alpha_\nu} t^{\gamma_\nu}_{k_\nu} \right)^{|\gamma_\rho = \sigma|} \gamma^{0\gamma_\rho}_{\sigma 0 \mu},$$

ce qui démontre que l'identité (41) est une conséquence des équations (38) et (39). Réciproquement, si l'on écrit que l'équation (41) est satisfaite pour les tenseurs du type $A^k e_k$ et $A_i e^i$, on voit aisément que les équations (38) et (39) doivent être satisfaites. Q. E. D.

Remarquons que le même raisonnement, avec de légères modifications, s'applique aussi au cas d'une ligne tensorielle $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(t)$ définie le long d'une ligne $x^i(t)$ sans que le tenseur soit défini ailleurs. C'est à-dire que *la dérivée de la ligne tensorielle*

$$\frac{\mathrm{DA}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\mathrm{D}t} = \frac{d\mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{dt} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot \,|\, i_\rho = s\,|} \frac{dx^m}{ds} c^{s}_{0 i_\rho m} + \mathrm{A}^{\cdot k_\nu \cdot \,|\, k_\rho = s\,|}_{\cdot i_\nu} \frac{dx^m}{dt} c^{0 k_\rho}_{s 0 m}, \tag{19_1}$$

définie le long de la courbe considérée, se transforme d'après les règles tensorielles.

14. Théorème. — *Si la contraction et la dérivation sont intervertibles dans un système, elles le sont aussi dans le système transformé.* C'est-à-dire, grâce aux relations (38) et (39), les équations

$$\gamma^{\alpha}_{0\beta\gamma} + \gamma^{0\alpha}_{\beta 0\gamma} = 0 \tag{44}$$

sont les conséquences des équations (23).

Comme les équations (38) et (39) sont résolues par rapport aux c^{i}_{0jk}, c^{0j}_{i0k}, nous prenons $\gamma^{\alpha}_{0\beta\gamma}$, $\gamma^{0\beta}_{\alpha 0\gamma}$ pour les paramètres originaires. Etant donné que

$$t^{\beta}_{j} t^{\gamma}_{k} \frac{\partial \tau^{i}_{\beta}}{\partial \xi^{\gamma}} = t^{\beta}_{j} \frac{\partial \tau^{i}_{\beta}}{\partial x^{k}} = -\frac{\partial t^{\beta}_{j}}{\partial x^{k}} \tau^{i}_{\beta},$$

les équations (38) et (39) nous donnent

$$c^{i}_{0jk} + c^{0i}_{j0k} = \tau^{i}_{\alpha} t^{\beta}_{j} t^{\gamma}_{k} (\gamma^{\alpha}_{0\beta\gamma} + \gamma^{0\alpha}_{\beta 0\gamma}) = 0,$$

ce qui prouve la proposition.

15. Résumé. — Dans ce qui précède, nous avons construit un cadre pour le Calcul tensoriel. Partis d'une représentation concrète des tenseurs, nous avons défini quatre opérations fondamentales : l'addition, la multiplication, la contraction et la dérivation. L'un des faits fondamentaux du Calcul est que les résultats de ces opérations ne dépendent pas du système des variables indépendantes dont on se sert dans le Calcul, pourvu qu'on détermine les nouveaux paramètres par les équations (38) et (39).

Pour avoir une idée plus précise de la structure de ce Calcul, nous remarquons que la dérivation ne correspond pas exactement à l'opération du même nom du Calcul différentiel ordinaire. En effet, la dérivation ordinaire concerne les fonctions qui sont déjà des opérations sur des éléments (les nombres) et conduit à une autre opération. Dans le Calcul tensoriel, les éléments mêmes sont des groupes de fonctions, et la dérivation se range ainsi dans la classe des opérations primaires.

D'autre part, les quatre opérations fondamentales sur les tenseurs nous donnent une idée suffisamment claire du passage d'un tenseur à un autre. La combinaison arbitraire de ces opérations, secondée par une notation simple, constitue une idée suffisamment claire de la fonction (opération) tensorielle.

On pourrait se proposer d'étudier, par exemple, la fonction tensorielle homogène et linéaire $\alpha(X)$, définie par la condition

$$\alpha(X+Y) = \alpha(X) + \alpha(Y),$$

où X et Y sont des tenseurs quelconques d'une certaine classe tensorielle. Les fonctions tensorielles

$$c(x^1, \ldots, x^n)X, \quad |cX|, \quad \frac{DX}{Dx}$$

sont des solutions de l'équation proposée.

Considérons, enfin, l'accroissement $\alpha(X+H) - \alpha(X)$, où le tenseur H tend vers le tenseur O, et supposons qu'il existe une fonction tensorielle $\alpha'(X)$ telle que

$$\alpha(X+H) - \alpha(X) - H\alpha'(X) = H\varepsilon(H),$$

où $\varepsilon(H)$ tend vers zéro avec H. L'opération tensorielle conduisant de $\alpha(X)$ à $\alpha'(X)$ correspond cette fois exactement à la dérivation ordinaire. Plus généralement, on peut définir la *différentielle fonctionnelle* de $\alpha(X)$ par la limite

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{d\alpha(X+\varepsilon H)}{d\varepsilon}$$

pourvu que cette limite existe.

II. — Le déplacement des tenseurs.

16. La définition du déplacement tensoriel. — Le Calcul tensoriel développé dans le premier Chapitre est un Calcul *local*, c'est-à-dire que les opérations (l'addition, la multiplication, la contraction et la dérivation) ne sont définies que pour les tenseurs attachés au même point et conduisent toujours à de tels tenseurs. L'objet de ce Chapitre est d'établir une relation entre les tenseurs attachés à des points différents et d'étudier les propriétés des opérations fondamentales par rapport à une telle relation.

Notre point de départ sera la notion si heureuse du parallélisme de M. Levi-Civita, convenablement généralisée. Imaginons un tenseur $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p_0)$ au point $p_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ et essayons de déterminer une ligne tensorielle le long d'une courbe donnée $C : x^r(t)$ par la condition que l'on ait

$$(45) \qquad \frac{DA^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{Dt} = 0$$

en chaque point $p : x^\nu(t)$ de la courbe. Les équations (45) forment un système d'équations différentielles ordinaires avec les fonctions inconnues $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}$. Comme le nombre des équations est égal à celui des inconnues, les valeurs initiales données $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p_0)$ déterminent un tenseur $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p)$ en chaque point p de la courbe. Le tenseur $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}$ sera appelé « le tenseur $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p_0)$ déplacé en p ». Nous le désignerons au besoin par le symbole $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(C; p_0 \wr p)$.

La forme plus explicite de (45) est

$$(46) \qquad \frac{dA^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{dt} + c^s_{0 i_\rho m} \frac{dx^m}{dt} A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot \,|i_\rho = s|} + c^{0 k_\rho}_{s0m} \frac{dx^m}{dt} A^{\cdot k_\nu \cdot \,|k_\rho = s|}_{\cdot i \cdot} = 0.$$

où dans les fonctions $c^s_{0 i_\rho m}$, $c^{0 k_\rho}_{s0m}$ on remplace les variables x^r par les fonctions de $t : x^r(t)$. Si donc nous changeons la courbe, les coefficients du système (comme fonctions de t) changeront aussi, c'est-à-dire qu'à chaque courbe appartient un système (45). Par conséquent, *les composantes tensorielles déplacées sont des fonctions de lignes.*

17. Le déplacement des tenseurs contrevariants d'ordre un. — Considérons le cas particulier

$$(47) \qquad \frac{DA^k}{Dt} = 0.$$

Ce système se réduit à celui proposé par M. Levi-Civita si l'on pose

$$c^i_{0jk} = \left\{ {jk \atop i} \right\}.$$

Comme ce cas particulier exige l'introduction de la métrique tensorielle, nous nous tiendrons au cas général où l'on ne fait aucune hypothèse particulière sur les paramètres de dérivation, excepté les conditions (23).

Pour intégrer le système (47), nous suivrons d'aussi près que possible la première démonstration de Cauchy du théorème d'existence. A cet effet, partageons l'intervalle (t_0, t) en intervalles (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, \nu$ avec $t_{\nu+1} = t$, et posons

$$-\sum_m \left(c^k_{0\alpha m} \frac{dx^m}{dt} \right)_{t_i} (t_{i+1} - t_i) = \Delta_i c^k_{0\alpha}.$$

Nous aurons

$$A^k(t_1) = A^k(t_0) + \Delta_0 c^k_{0\alpha} . A^\alpha(t_0),$$

ou, plus généralement,

$$A^k(t_{i+1}) = A^k(t_i) + \Delta_i c^k_{0\alpha} . A^\alpha(t_i).$$

Nous trouvons de cette façon

$$\begin{aligned}(48)\quad A^k(t) \equiv A^k(t_0 \mid t_1, t_2, \ldots, t_\nu, t) = A^k(t_0) + A^\alpha(t_0) \\ \times \left\{ \sum_{i=0}^{\nu} \Delta_i c^k_{0\alpha} + \sum_{i_1=1}^{\nu} \left(\sum_{i_2=0}^{i_1-1} \Delta_{i_2} c^{\alpha_2}_{0\alpha} \right) \Delta_{i_1} c^k_{0\alpha_2} + \ldots \right. \\ + \sum_{i_1=\mu-1}^{\nu} \sum_{i_2=\mu-2}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_\mu=0}^{i_{\mu-1}-1} \Delta_{i_\mu} c^{\alpha_\mu}_{0\alpha} \Delta_{i_{\mu-1}} c^{\alpha_{\mu-1}}_{0\alpha_\mu} \ldots \Delta_{i_2} c^{\alpha_2}_{0\alpha_3} \Delta_{i_1} c^k_{0\alpha_2} \\ \left. + \Delta_0 c^{\alpha_\nu}_{0\alpha} \Delta_1 c^{\alpha_{\nu-1}}_{0\alpha_\nu} \ldots \Delta_{\nu-1} c^{\alpha_2}_{0\alpha_3} \Delta c^k_{0\alpha_2} \right\}.\end{aligned}$$

La limite de cette expression quand le maximum des valeurs $|t_{i+1} - t_i|$ tend vers zéro nous conduit à la série

$$\begin{aligned}(49)\quad A^k(C; p_0 \mid p) = A^k(p_0) + A^\alpha(p_0) \\ \times \left\{ \int_{t_0}^{t} dc^k_{0\alpha} + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{\tau} dc^{\alpha_2}_{0\alpha} \right) dc^k_{0\alpha_2}(\tau) + \ldots \right. \\ \left. + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\mu-1}} dc^{\alpha_\mu}_{0\alpha}(\tau_\mu)\, dc^{\alpha_{\mu-1}}_{0\alpha_\mu}(\tau_{\mu-1}) \ldots dc^k_{0\alpha_2}(\tau_1) + \ldots \right\};\end{aligned}$$

où

$$\int_{t_0}^{t} dc_{0\alpha}^{k} = -\int_{t_0}^{t} \sum_{m} c_{0\alpha m}^{k}[x^1(t), \ldots, x^n(t)] \frac{dx^m}{dt} dt.$$

18. Nous allons maintenant démontrer : 1° que, sous certaines conditions générales, la série ainsi trouvée est convergente; 2° que, pour une courbe déterminée C, l'expression $A^k(C; p_0 \wr p)$ comme fonction de t satisfait aux équations (47).

Soit M_ρ la limite supérieure des fonctions $|c_{0\alpha m}^{k}|$ dans l'hypersphère de rayon ρ, le centre au point $x^r(t_0)$, et soit

$$\text{(50)} \qquad L(t) = \sum_{m=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left| \frac{dx^m}{dt} \right| dt.$$

Comme

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \int_{t_0}^{t} L(\tau) \frac{dx^m}{dt} d\tau \right| \leqq L(t) \int_{t_0}^{t} \left| \frac{dx^m}{dt} \right| d\tau = L^2(t),$$

car L est une fonction positive croissante de son argument, on a

$$|A^k(C; p_0 \wr p)| \leqq |A^k(p_0)| + \sum_{\alpha=1}^{n} |A^\alpha(p_0)| \{ LM_\rho + (LM_\rho)^2 + \ldots \}.$$

Cela montre que la série (49) converge absolument et uniformément pour les courbes dans l'hypersphère de rayon $\rho' < \rho$ si le nombre L correspondant est inférieur à $\frac{1}{M_\rho}$.

19. Pour démontrer que les quantités $A^k(C; p_0 \wr p)$ définies par les séries convergentes (49) satisfont aux équations (47), posons

$$\text{(51)} \qquad \overset{(\mu-i)}{F}{}_{\alpha}^{\alpha_{i+1}}(\tau_i) = \int_{t_0}^{\tau_i} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\mu-1}} dc_{0\alpha}^{\alpha_\mu}(\tau_\mu)\, dc_{0\alpha_\mu}^{\alpha_{\mu-1}} \ldots dc_{0\alpha_{i+2}}^{\alpha_{i+1}}.$$

On a de cette façon

$$\text{(52)} \qquad A^k(C; p_0 \wr p) = A^k(p_0) + A^\alpha(p_0)\, s_{0\alpha}^{k}(C; t_0, t)$$

avec

$$\text{(53)} \qquad s_{0\alpha}^{k}(C; t_0, t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \overset{(\mu)}{F}{}_{\alpha}^{k}(t).$$

Mais

$$\overset{(\mu)}{F}{}^k_\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \overset{(\mu-1)}{F}{}^{\alpha_2}_\alpha \, dc^k_{0\alpha_2} = -\int_{t_0}^{t} \overset{(\mu-1)}{F}{}^{\alpha_2}_\alpha(\tau)\, c^k_{0\alpha_2 m}(\tau)\frac{dx^m}{d\tau}\,d\tau,$$

de sorte que

$$\frac{d\overset{(\mu)}{F}{}^k_\alpha(t)}{dt} = -\overset{(\mu-1)}{F}{}^{\alpha_2}_\alpha(t)\, c^k_{0\alpha_2 m}(t)\frac{dx^m}{dt}.$$

Par conséquent,

$$(54)\qquad \frac{ds^k_{0\alpha}}{dt} = \frac{d\overset{(1)}{F}{}^k_\alpha}{dt} - \sum_{\mu=2}^{\infty} c^k_{0\alpha_2 m}(t)\frac{dx^m}{dt}\overset{(\mu-1)}{F}{}^{\alpha_2}_\alpha(t) = \frac{d\overset{(1)}{F}{}^k_\alpha}{dt} - c^k_{0\alpha_2 m}\frac{dx^m}{dt}\sum_{\mu=2}^{\infty}\overset{(\mu-1)}{F}{}^{\alpha_2}_\alpha(t),$$

parce que la série différentiée est aussi convergente (absolument et uniformément). Comme

$$-\frac{d\overset{(1)}{F}{}^k_\alpha}{dt} = c^k_{0\alpha m}\frac{dx^m}{dt},$$

nous voyons que les $A^k(C; p_0; p)$, comme fonctions de t, satisfont réellement aux équations (47). D'après le théorème d'existence de Cauchy, c'est l'unique solution de ce système.

20. Le déplacement des tenseurs d'ordre et de type quelconque. — Le procédé précédent s'applique sans aucune modification au système

$$(55)\qquad \frac{DA_i}{Dt} = 0.$$

On obtient ainsi la formule

$$(56)\qquad A_i(C; p_0; p) = A_i(p_0) + A_\alpha(p_0)\, s^{0\alpha}_i$$

avec

$$(57)\qquad s^{0\alpha}_i = \int_{t_0}^{t} dc^{0\alpha}_i + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{\tau} dc^{0\alpha}_{\alpha_2}\right)dc^{0\alpha_2}_i(\tau) + \ldots$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_1}\cdots\int_{t_0}^{\tau_{\mu-1}} dc^{0\alpha}_{\alpha_\mu}\, dc^{0\alpha_\mu}_{\alpha_{\mu-1}}\ldots dc^{0\alpha_1}_i + \ldots.$$

Pour indiquer l'extension du procédé aux tenseurs d'ordre supérieur, nous remarquons que

$$\frac{ds^k_{0\alpha}}{dt} + c^k_{0\alpha m}\frac{dx^m}{dt} + c^k_{0\beta m}\frac{dx^m}{dt}s^\beta_{0\alpha} = 0 \tag{58}$$

et

$$\frac{ds^{0\alpha}_i}{dt} + c^{0\alpha}_{i0m}\frac{dx^m}{dt} + c^{0\beta}_{i0m}\frac{dx^m}{dt}s^{0\alpha}_\beta = 0. \tag{59}$$

Et nous allons examiner le cas particulier

$$\frac{\mathrm{D}A^{k_1k_2}}{\mathrm{D}t} = 0, \tag{60}$$

c'est-à-dire

$$\frac{dA^{k_1k_2}}{dt} + A^{\alpha k_2}c^{k_1}_{0\alpha m}\frac{dx^m}{dt} + A^{k_1\alpha}c^{k_2}_{0\alpha m}\frac{dx^m}{dt} = 0. \tag{61}$$

On vérifie aisément que les fonctions de t

$$A^{k_1k_2} = A^{k_1k_2}(p_0) + A^{\alpha k_2}(p_0)s^{k_1}_{0\alpha} + A^{k_1\alpha}(p_0)s^{k_2}_{0\alpha} + A^{\alpha\beta}(p_0)s^{k_1}_{0\alpha}s^{k_2}_{0\beta} \tag{62}$$

forment la solution de (61). On a, en effet,

$$\frac{dA^{k_1k_2}}{dt} = A^{\alpha k_2}(p_0)\frac{ds^{k_1}_{0\alpha}}{dt} + A^{k_1\alpha}(p_0)\frac{ds^{k_2}_{0\alpha}}{dt} + A^{\alpha\beta}(p_0)\frac{ds^{k_1}_{0\alpha}}{dt}s^{k_2}_{0\beta} + A^{\alpha\beta}(p_0)s^{k_1}_{0\alpha}\frac{ds^{k_2}_{0\beta}}{dt},$$

c'est-à-dire, grâce aux équations (58) et (59),

$$\begin{aligned}\frac{dA^{k_1k_2}}{dt} = {} & A^{\alpha k_2}(p_0)\frac{dx^m}{dt}(c^{k_1}_{0\alpha m} + c^{k_1}_{0\gamma m}s^\gamma_{0\alpha}) + A^{k_1\alpha}(p_0)\frac{dx^m}{dt}(c^{k_2}_{0\alpha m} + c^{k_2}_{0\gamma m}s^\gamma_{0\alpha}) \\ & + \frac{dx^m}{dt}A^{\alpha\beta}(p_0)\{(c^{k_1}_{0\alpha m} + c^{k_1}_{0\gamma m}s^\gamma_{0\alpha})s^{k_2}_{0\beta} + s^{k_1}_{0\alpha}(c^{k_2}_{0\beta m} + c^{k_2}_{0\gamma m}s^\gamma_{0\beta})\}.\end{aligned}$$

D'autre part, les deux derniers termes du premier membre de (61) s'écrivent

$$\begin{aligned}& -c^{k_1}_{0\gamma m}\frac{dx^m}{dt}(A^{\gamma k_2}(p_0) + A^{\alpha k_2}(p_0)s^\gamma_{0\alpha} + A^{\gamma\alpha}(p_0)s^{k_2}_{0\alpha} + A^{\alpha\beta}(p_0)s^\gamma_{0\alpha}s^{k_2}_{0\beta}) \\ & -c^{k_2}_{0\gamma m}\frac{dx^m}{dt}(A^{k_1\gamma}(p_0) + A^{\alpha\gamma}(p_0)s^{k_1}_{0\alpha} + A^{k_1\alpha}(p_0)s^\gamma_{0\alpha} + A^{\alpha\beta}(p_0)s^{k_1}_{0\alpha}s^\gamma_{0\beta}).\end{aligned}$$

Par conséquent, *les fonctions* $A^{k_1k_2}$, *définies par* (62), *sont les composantes du tenseur* $A^{k_1k_2}e_{k_1}e_{k_2}$ *déplacé de* p_0 *en* p *le long de* C.

21. On obtient de la même manière la solution du système

$$\frac{DA_{i_1 i_2}}{Dt} = 0 \tag{63}$$

sous la forme

$$A_{i_1 i_2}(C; p_0 \wr p) = A_{i_1 i_2}(p_0) + A_{\alpha i_2}(p_0)\, s^{0\alpha}_{i_1} + A_{i_1 \alpha}(p_0)\, s^{0\alpha}_{i_2} + A_{\alpha\beta}(p_0)\, s^{0\alpha}_{i_1} s^{0\beta}_{i_2}. \tag{64}$$

Celle du système

$$\frac{DA^{0k}_{i}}{Dt} = 0 \tag{65}$$

est donnée par l'expression

$$A^{0k}_{i}(C; p_0 \wr p) = A^{0k}_{i}(p_0) + A^{0\alpha}_{i}(p_0)\, s^{k}_{0\alpha} + A^{0k}_{\alpha}(p_0)\, s^{0\alpha}_{i} + A^{0\beta}_{\alpha}(p_0)\, s^{0\alpha}_{i} s^{k}_{0\beta}. \tag{66}$$

On voit ainsi que la formule générale, c'est-à-dire la solution du système

$$\frac{DA^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{Dt} = 0 \tag{67}$$

s'écrit

$$\begin{aligned} &A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(C; p_0 \wr p) \\ &\quad = A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p_0) + \sum_{r,s=0,1,\dots,\omega}^{1 \leqq r+s \leqq \omega} A^{\cdot k_\nu \cdot \,| k_{\sigma_1}=\beta_1,\dots,k_{\sigma_s}=\beta_s |}_{\cdot i_\rho \cdot \,| i_{\rho_1}=\alpha_1,\dots,i_{\rho_r}=\alpha_r |}(p_0)\, s^{0\alpha_1}_{i_{\rho_1}} \dots s^{0\alpha_r}_{i_{\rho_r}}\, s^{k_{\sigma_1}}_{0\beta_1} \dots s^{k_{\sigma_s}}_{0\beta_s}, \end{aligned} \tag{68}$$

ce qu'on peut d'ailleurs vérifier directement.

22. Opérations et déplacement. — Nous allons maintenant étudier la relation entre les opérations tensorielles et le déplacement des tenseurs. Le résultat général qui se dégagera de cette étude est qu'*on peut intervertir le déplacement et les opérations addition, multiplication et contraction*. Quelques exemples feront voir ce que nous entendons par cela.

On a, d'une part,

$$(A^k + B^k)(C; p_0 \wr p) = (A^k + B^k)(p_0) + (A^\alpha + B^\alpha)(p_0)\, s^{k}_{0\alpha}$$

et

$$A^k(C; p_0 \wr p) = A^k(p_0) + A^\alpha(p_0)\, s^{k}_{0\alpha},$$
$$B^k(C; p_0 \wr p) = B^k(p_0) + B^\alpha(p_0)\, s^{k}_{0\alpha}$$

d'autre part. Par conséquent,

$$(69)\qquad (\mathrm{A}^k + \mathrm{B}^k)(\mathrm{C};\, p_0)(p) = \mathrm{A}^k(\mathrm{C};\, p_0)(p) + \mathrm{B}^k(\mathrm{C};\, p_0)(p).$$

Comme le second membre de (68) est linéaire et homogène par rapport aux composantes tensorielles en p_0, la règle est générale :

La somme de deux tenseurs déplacés est égale à leur somme déplacée.

Considérons maintenant le produit de deux tenseurs. On a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{A}^{k_1}\mathrm{B}^{k_2})(\mathrm{C};\, p_0)(p)\\
&\quad = (\mathrm{A}^{k_1}\mathrm{B}^{k_2})(p_0) + (\mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{B}^{k_2})(p_0)\, s^{k_1}_{0\alpha} + (\mathrm{A}^{k_1}\mathrm{B}^{\alpha})(p_0)\, s^{k_2}_{0\alpha} + (\mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{B}^{\beta})(p_0)\, s^{k_1}_{0\alpha}\, s^{k_2}_{0\beta}.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\mathrm{A}^{k_1}(\mathrm{C};\, p_0)(p)\,\mathrm{B}^{k_2}(\mathrm{C};\, p_0)(p) = [\mathrm{A}^{k_1}(p_0) + \mathrm{A}^{\alpha}(p_0)\, s^{k_1}_{0\alpha}]\,[\mathrm{B}^{k_2}(p_0) + \mathrm{B}^{\beta}(p_0)\, s^{k_2}_{0\beta}],$$

ce qui montre bien que

$$(70)\qquad (\mathrm{A}^{k_1}\mathrm{B}^{k_2})(\mathrm{C};\, p_0)(p) = \mathrm{A}^{k_1}(\mathrm{C};\, p_0)(p)\,\mathrm{B}^{k_2}(\mathrm{C};\, p_0)(p).$$

La règle est générale : *Le produit de deux tenseurs déplacés est égal au produit déplacé.*

23. Les propriétés des fonctionnelles $s_i^{0\alpha}$ et $s^k_{0\alpha}$. — Avant de passer à la contraction, nous allons établir deux propriétés importantes des fonctionnelles $s_i^{0\alpha}$, $s^k_{0\alpha}$. L'une est exprimée par les équations

$$\begin{aligned}
(71)\quad & s_i^{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_0)(p)\\
&\quad = s_i^{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_0)(p_1) + s_i^{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_1)(p) + s_\beta^{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_0)(p_1)\, s_i^{0\beta}(\mathrm{C};\, p_1)(p)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(72)\quad & s^k_{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_0)(p)\\
&\quad = t^k_{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_0)(p_1) + s^k_{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_1)(p) + s^{\beta}_{0\alpha}(\mathrm{C};\, p_0)(p_1)\, s^k_{0\beta}(\mathrm{C};\, p_1)(p),
\end{aligned}$$

où p_1 est un point de C entre p_0 et p.

Comme l'équation

$$(73)\qquad \frac{\mathrm{DA}^k}{\mathrm{D}t} = 0$$

détermine A^k d'une manière univoque le long de la courbe C quand les valeurs initiales $A^k(p_0)$ sont données, on doit avoir identiquement

$$A^k(C; p_0 \vdots p) = A^k(C; p_0 \vdots p_1 \vdots p).$$

Mais

$$A^k(C; p_0 \vdots p) = A^k(p_0) + A^\alpha(p_0)\, s^k_{0\alpha}(C; p_0 \vdots p) \tag{74}$$

et

$$\begin{aligned} &A^k(C; p_0 \vdots p_1 \vdots p) \\ &\quad = A^k(C; p_0 \vdots p_1) + A^\beta(C; p_0 \vdots p_1)\, s^k_{0\beta}(C; p_1 \vdots p) \\ &\quad = A^k(p_0) + A^\alpha(p_0)\, s^k_{0\alpha}(C; p_0 \vdots p_1) \\ &\qquad + [A^\beta(p_0) + A^\alpha(p_0)\, s^\beta_{0\alpha}(C; p_0 \vdots p_1)]\, s^k_{0\beta}(C; p_1 \vdots p) \\ &\quad = A^k(p_0) + A^\alpha(p_0)\, [s^k_{0\alpha}(C; p_0 \vdots p_1) + s^k_{0\alpha}(C; p_1 \vdots p) \\ &\qquad\qquad + s^\beta_{0\alpha}(C; p_0 \vdots p_1)\, s^k_{0\beta}(C; p_1 \vdots p)]. \end{aligned} \tag{75}$$

Comme les seconds membres des équations (74) et (75) doivent être identiques pour n'importe quel tenseur $A^k(p_0)$, la condition (71) est nécessairement satisfaite. On établit de même la condition (72). On peut d'ailleurs les vérifier directement par la forme explicite des fonctionnelles $s^k_{0\alpha}$ et $s^{0\alpha}_i$.

Cette propriété des fonctionnelles cinématiques fait voir d'une façon explicite que le déplacement des tenseurs est indépendant des arrêts intermédiaires.

L'autre propriété de ces fonctionnelles est exprimée par l'équation

$$s^k_{0i} + s^{0k}_i + s^\alpha_{0i}\, s^{0k}_\alpha = 0. \tag{76}$$

On le démontre sans peine en remarquant que, grâce à l'équation (59),

$$\begin{aligned} &-\frac{d(s^k_{0i} + s^{0k}_i + s^\alpha_{0i}\, s^{0k}_\alpha)}{dt} \\ &= \frac{dx^m}{dt} \{ c^k_{0im} + c^k_{0sm}\, s^s_{0i} + c^{0k}_{i0m} + c^{0s}_{i0m}\, s^{0k}_s \\ &\qquad + (c^{0k}_{\alpha 0m} + {}^0_\alpha c^s_{0m}\, s^{0k}_s)\, s^\alpha_{0i} + s^{0k}_\alpha (c^\alpha_{0im} + c^\alpha_{0sm}\, s^s_{0i}) \} = 0 \end{aligned}$$

en vertu des conditions (23). Comme la valeur initiale de la fonction de t : $s^k_{0i} + s^{0k}_i + s^\alpha_{0i}\, s^{0k}_\alpha$ est zéro, cette fonction est nulle pour toute valeur de t, c'est-à-dire le long de C.

24. Contraction et déplacement. — Prenons maintenant un tenseur mixte quelconque, par exemple $A^k_{0ij}(p_0)$. Sa valeur le long de C est déterminée par l'expression

$$\begin{aligned} & A^k_{0ij}(C;\, p_0 \wr p) \\ & \quad = A^k_{0ij}(p_0) + A^\alpha_{0ij}(p_0)\, s^k_{0\alpha} + A^k_{0\alpha j}(p_0)\, s^{0\alpha}_i + A^k_{0i\alpha}(p_0)\, s^{0\alpha}_j + A^\alpha_{0\beta j}(p_0)\, s^k_{0\alpha}\, s^{0\beta}_i \\ & \qquad + A^\alpha_{0i\beta}(p_0)\, s^k_{0\alpha}\, s^{0\beta}_j + A^k_{0\alpha\beta}(p_0)\, s^{0\alpha}_i\, s^{0\beta}_j + A^\alpha_{0\beta\gamma}(p_0)\, s^k_{0\alpha}\, s^{0\beta}_i\, s^{0\gamma}_j. \end{aligned}$$

La contraction par rapport aux indices k et j donne

$$\begin{aligned} & \left| A^k_{0ij}(C;\, p_0 \wr p) \right|_{k,j} \\ & \quad = A^k_{0ik} + A^\alpha_{0ik}\, s^k_{0\alpha} + A^k_{0\alpha k}\, s^{0\alpha}_i + A^k_{0i\alpha}\, s^{0\alpha}_k + A^\alpha_{0\beta k}\, s^k_{0\alpha}\, s^{0\beta}_i \\ & \qquad + A^\alpha_{0i\beta}\, s^k_{0\alpha}\, s^{0\beta}_k + A^k_{0\alpha\beta}\, s^{0\alpha}_i\, s^{0\beta}_k + A^\alpha_{0\beta\gamma}\, s^k_{0\alpha}\, s^{0\beta}_i\, s^{0\gamma}_k \\ & \quad = A^k_{0ik} + A^k_{0\alpha k}\, s^{0\alpha}_i + A^\alpha_{0ik}\left(s^k_{0\alpha} + s^{0k}_\alpha + s^\beta_{0\alpha}\, s^{0k}_\beta\right) + A^\alpha_{0\beta k}\, s^{0\beta}_i\left(s^k_{0\alpha} + s^{0k}_\alpha + s^\gamma_{0\alpha}\, s^{0k}_\gamma\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire par (76)

$$\left| A^k_{0ij}(C;\, p_0 \wr p) \right|_{k,j} = A^k_{0ik}(p_0) + A^k_{0\alpha k}(p_0)\, s^{0\alpha}_i = (A^k_{0ik})_{p_0}(C;\, p_0 \wr p);$$

ce qui montre bien que *déplacement et contraction sont intervertibles*. La règle s'étend sans peine au cas général.

Une relation pareille entre déplacement et dérivation est impossible. En effet, le déplacement n'est pas défini pour des champs de tenseurs et ce sont les seuls qu'on peut différentier. Notre définition du déplacement tensoriel ne s'applique qu'à un tenseur « numérique » $A^{\cdot\, k_\nu \cdot}_{\cdot\, i_\nu \cdot}(p_0)$ attaché à un point et, en général, la méthode proposée dans ce travail (ni aucune autre méthode connue) ne s'étend pas à la définition par déplacement des champs de tenseurs à dimension 2, etc.

D'autre part, la dérivation d'une ligne de tenseur créée par le déplacement conduit toujours au tenseur zéro. Par conséquent, si l'on imagine le tenseur initial $A^{\cdot\, k_\nu \cdot}_{\cdot\, i_\nu \cdot}(p_0)$ comme une valeur du champ tensoriel constamment égal à cette valeur, on peut dire que, dans ce sens, déplacement et dérivation sont aussi intervertibles.

25. La dérivation généralisée. — Toutes les propriétés de la translation tensorielle établies dans ce qui précède s'étendent sans modification au cas général où l'on remplace la définition (19_1) (§ **13**) de la dérivée tensorielle le long d'une courbe donnée par la définition plus générale

$$\frac{\mathrm{D}\mathrm{A}_{\cdot\, i_\nu \cdot}^{\cdot\, k_\nu \cdot}}{\mathrm{D}t} = \frac{d\mathrm{A}_{\cdot\, i_\nu \cdot}^{\cdot\, k_\nu \cdot}}{dt} + f_{i_\rho}^{0,\alpha}\, \mathrm{A}_{\cdot\, i_\nu \cdot\, |i_\rho=\alpha|}^{\cdot\, k_\nu} + f_{0,\alpha}^{k_\rho}\, \mathrm{A}_{\cdot\, i_\nu \cdot}^{\cdot\, k_\nu \cdot\, |k_\rho=\alpha|} \tag{77}$$

où $f_i^{0,\alpha}$ et $f_{0,\alpha}^k$ sont des fonctions arbitraires des variables

$$x^i, \quad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad \ddot{x}^i, \quad \ldots.$$

On vérifie aisément que la dérivation ainsi définie est intervertible avec l'addition et que

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{AB})}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{D}t}\mathrm{B} + \mathrm{A}\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{D}t}.$$

Contraction et dérivation sont intervertibles si et seulement si

$$f_{0,\alpha}^k + f_\alpha^{0,k} = 0. \tag{78}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée tensorielle (77) se transforme comme un tenseur de type $\mathrm{A}_{\cdot\, i_\nu \cdot}^{\cdot\, k_\nu \cdot}$ est que les paramètres $f_i^{0,\alpha}$ et $f_{0,\alpha}^k$ soient transformés d'après les règles

$$-\frac{d\tau_i^k}{dt} + f_{0,\alpha}^{\rho}\,\tau_i^\alpha = \varphi_{0,i}^\alpha\,\tau_\rho^k, \tag{79}$$

$$-\frac{dt_k^i}{dt} + f_k^{0,\alpha}\,t_\alpha^i = \varphi_\rho^{0,i}\,t_k^\rho. \tag{80}$$

où $\varphi_{0,\alpha}^k$ et $\varphi_i^{0,\alpha}$ sont des paramètres pour les variables ξ^i. Lorsque $f_{0,\alpha}^k$, $f_\alpha^{0,k}$ sont les polynomes en $\dot{x}^i$, $\ddot{x}^i$, …, les conditions (78) seront remplies pour *toutes* les courbes si les coefficients satisfont à (78). Les conditions (79) et (80) sont satisfaites pour toutes les courbes si l'on transforme les coefficients de $\dot{x}^m$ comme les $c_{0,\alpha,m}^k$ et $c_{\alpha\ ,0,m}^{0,k}$ et si l'on transforme les autres coefficients comme des *tenseurs* $\mathrm{C}_{0,\alpha,m_1,m_2,\ldots}^k$ et $\mathrm{C}_{\alpha,0,m_1,m_2,\ldots}^{0,k}$.

26. LA TRANSLATION GÉNÉRALISÉE. — On vérifie aussi sans peine que la solution du système d'équations différentielles

$$\frac{DA^k}{Dt} = 0$$

se réduisant à $A^k(t_0)$ pour $t = t_0$ est donnée par l'expression

$$A^k(C; p_0 ; p) = A^k(p_0) = A^\alpha(p_0) s^k_{0.\alpha}(C; p_0 ; p)$$

avec

$$s^k_{0.\alpha} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\mu-1}} f^{\alpha_\mu}_{0.\alpha}(\tau_\mu)\, d\tau_\mu f^{\alpha_{\mu-1}}_{0.\alpha_\mu}(\tau_{\mu-1}) \ldots f^{\alpha_2}_{0.\alpha_3}(\tau_2)\, d\tau_2 f^k_{0.\alpha_2}(\tau_1)\, d\tau_1.$$

La série est convergente pour toutes courbes C si les paramètres cinématiques restent bornés le long de C. On généralise de la même façon la translation des tenseurs covariants du premier ordre, de même que celui des tenseurs d'ordre et de type quelconque.

Les propriétés fondamentales des fonctionnelles cinématiques $s^k_{0,\alpha}$ et $s^{0,\alpha}_{i}$ s'étendent aussi sans aucune modification à leurs formes généralisées. Par conséquent les relations entre translation et les opérations d'addition, multiplication et contraction ne changent pas non plus.

27. L'intégration tensorielle. — Le problème de résoudre l'équation

$$\frac{DX}{Dt} = 0 \tag{81}$$

correspond au problème de l'Analyse ordinaire où l'on propose de déterminer les fonctions à dérivée nulle. De la même manière, le problème de résoudre l'équation

$$\frac{DX}{Dt} = B, \tag{82}$$

où $\frac{D}{Dt}$ indique la dérivation tensorielle généralisée ou non, correspond à l'intégration. Nous appellerons les solutions de (82) les *primitives tensorielles de* B.

La méthode dont nous nous sommes servis pour résoudre (81) s'applique sans difficulté à l'équation plus générale (82). Par exemple si $B = B^k e_k$, nous aurons

$$X^k(C; p_0 \between p) = A^k(C; p_0 \between p) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \int_{t^0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\mu-1}} B^{\alpha_{\mu-1}}\, d\tau_\mu\, f_{0,\alpha_{\mu-1}}^{\alpha_{\mu-2}}\, d\tau_{\mu-1} f_{0,\alpha_1}^{k}\, d\tau_1$$

où

$$\frac{DA^k}{Dt} = 0.$$

L'expression

$$_{(C)}\overline{\int}_{t_0}^{t} B^k\, dt = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau_1} \cdots \int_{t_0}^{\tau_{\mu-1}} B^{\alpha_{\mu-1}}\, d\tau_\mu\, f_{0,\alpha_{\mu-1}}^{\alpha_{\mu-1}}\, d\tau_{\mu-1} \ldots f_{0,\alpha_2}^{k}\, d\tau_1$$

pourra être appelée l'*intégrale tensorielle de* B^k. Les propriétés fondamentales

$$_{(C)}\overline{\int}_{t_0}^{t_1} + {}_{(C)}\overline{\int}_{t_1}^{t_2} = {}_{(C)}\overline{\int}_{t_0}^{t_2}$$

et

$$_{(C)}\overline{\int}_{t_0}^{t_1} B^k\, dt + {}_{(C)}\overline{\int}_{t_0}^{t_1} C^k\, dt = {}_{(C)}\overline{\int}_{t_0}^{t_1} (B^k + C^k)\, dt,$$

du moins pour un intervalle fini (t_0, t_1), résultent immédiatement du fait que l'intégrale est une solution d'un système d'équation de type (82).

On obtient des résultats analogues pour les tenseurs d'ordre et de type quelconque.

L'intégration tensorielle appliquée à un champ de tenseur

$$B^k(x^1, \ldots, x^n)$$

conduit à un champ « fonctionnel » $X^k(C; p_0 \between p)$ de tenseurs parce qu'on intègre des différentielles non exactes. C'est ainsi même dans le cas le plus simple où le champ de tenseurs s'évanouit complètement. La translation à la Levi-Civita correspond à ce dernier cas.

28. La dérivation tensorielle par rapport a une ligne. — D'après nos résultats précédents, un champ ponctuel de tenseurs n'est qu'un cas de dégénérescence. Le champ de tenseurs introduit par la translation dans toute considération géométrique et physique sur les tenseurs est une notion beaucoup plus générale. On doit supposer qu'un tenseur est attaché à chaque élément d'une certaine classe de lignes. Il serait bien opportun d'étudier les fonctionnelles ainsi définies.

On peut leur appliquer par exemple la dérivation globale ou locale par rapport à la ligne, c'est-à-dire calculer leur variation première quand on change la ligne globalement (¹) ou bien quand on ne le change qu'aux environs d'un point de la ligne (²). Pour en donner un exemple (³), nous avons calculé la dérivée globale $\frac{DA^k}{DC}$ de $A^k(C; p_0 \between p)$ par rapport à la ligne et nous sommes arrivé au résultat remarquable que, dans le cas des équations de M. Levi-Civita, cette dérivée s'exprime au moyen du seul tenseur Riemann-Christoffel. Il résulte en particulier de notre formule que $\frac{DA^k}{DC_p}$, la dérivée locale de $A^k(C; p_0 \between p)$ par rapport à la ligne au point p, est un simple champ de tenseur : celui du tenseur Riemann-Christoffel.

Dans un travail prochain, nous nous servirons du Calcul tensoriel, amétrique, local et intégral, développé dans ce qui précède, pour étudier la Géométrie cinématique amétrique engendrée par le déplacement tensoriel, de même que les conditions mathématiques de l'introduction de la métrique.

(¹) P. Lévy, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*. Paris, Gauthier-Villars, 1922 (collection de M. Borel), p. 48.

(²) V. Volterra, *Fonctions de lignes*. Paris, Gauthier-Villars, 1913 (collection de M. Borel), p. 25.

(³) P. Dienes, *Sur l'intégration des équations du déplacement parallèle de M. Levi-Civita* (*Rendiconti di Palermo*, t. 47, 1923).