JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANDRÉ BLOCH

Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 51-77.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__51_0>

Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin;

PAR ANDRÉ BLOCH.

Dans le présent article, développement de deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 177, 1923, n^os 17 et 19, sont établis certains théorèmes de Géométrie anallagmatique, dont voici les deux principaux :

a. Étant donné un angle V, il existe un système de deux cercles, anallagmatiquement unique, tel qu'une sphère variable passant par l'un quelconque des deux coupe l'autre sous l'angle constant V.

b. Si l'on envisage sur une cyclide de Dupin deux cercles de Villarceau fixes de même système, les sphères qui joignent à ces deux cercles un point variable de la surface : 1° se coupent à angle constant; 2° décrivent des faisceaux anallagmatiquement identiques.

Nous étudions ici les propriétés d'un couple de cercles qui sont l'un par rapport à l'autre dans une certaine position particulière. Le cas général a été traité par M. Hadamard dans ses *Leçons de Géométrie élémentaire*, t. II, p. 572-573; l'étude de ces pages a été, il y a 12 ans, l'origine de la présente théorie.

M. J. L. Coolidge, par son livre : *A Treatise on the Circle and the Sphere* (Oxford, 1916) [1], a introduit dans la Science la notion

[1] Cet Ouvrage est une théorie très développée du cercle et de la sphère, au point de vue métrique, au point de vue anallagmatique, au point de vue enfin des groupes de Laguerre et de Lie; de nombreuses pages y sont également

des cercles qu'il a appelés *paratactiques*. Il en a donné de nombreuses propriétés, dont plusieurs figureront ici. On lui doit également d'avoir mis en lumière les rapports des cercles paratactiques avec les parallèles non euclidiennes de Clifford. Bien que nous n'ayons connu cet Ouvrage fondamental qu'il y a quelques mois, il a cependant puissamment aidé la composition du Mémoire qu'on va lire.

Indiquons sommairement l'ordre dans lequel nous avons obtenu les résultats qui vont être exposés : les propriétés les plus simples des cercles paratactiques (définition, constance de l'angle, constance du rapport anharmonique sur un cercle cosphérique et orthogonal commun, cône du second degré) furent rencontrées de 1911 à 1913; la presque totalité des propositions qui suivent est de 1921; le théorème dont la démonstration termine le paragraphe **5** est de 1923, ainsi que les deux derniers du paragraphe **6**.

1. Les cercles paratactiques. — On appelle *cercles paratactiques*, deux cercles dont les *foyers* (c'est ainsi que Darboux appelle les sommets des cônes isotropes contenant un cercle) sont associés deux à deux, *les distances entre les foyers associés étant toutes deux nulles*. Ce sont aussi deux cercles tels que chacun soit tangent aux cônes isotropes contenant l'autre, ou bien deux cercles dont les quatre plans tangents isotropes sont confondus deux à deux (¹).

Envisageons la sphère orthogonale commune (imaginaire si les cercles sont réels) : les quatre points de la sphère qui sont les pieds des deux cercles sont situés sur deux génératrices de même système. Supposons, par exemple, que la sphère se réduise à un plan, que nous prenons pour plan de figure. Faisons passer une sphère par l'un des cercles C_2; elle a avec l'autre cercle C_1 un certain invariant anallagmatique, pour lequel on peut prendre par exemple leur angle V. On

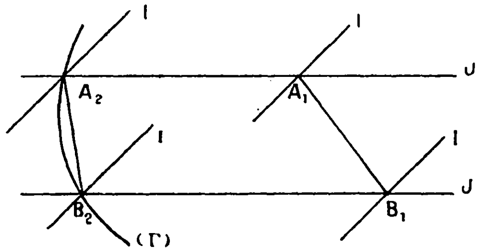
consacrées à la Géométrie du triangle et du tétraèdre; on y trouvera, de plus, d'abondants renseignements bibliographiques.

Mentionnons seulement ici, parmi les auteurs qui ont fourni une contribution à la théorie du système de deux cercles les noms de MM. G. Kœnigs et D. Barrow.

(¹) Ces cercles seront envisagés aux paragraphes **3** et **6** à un point de vue plus concret.

peut prendre aussi pour cet invariant l'invariant de la figure formée par le cercle Γ et les deux points A_1 et B_1 qui sont les intersections du plan de figure avec la sphère et le cercle C_1, c'est-à-dire le rapport anharmonique des quatre points déterminés sur le cercle Γ par les quatre droites isotropes issues de A_1 et B_1; celui-ci, égal au rapport anharmonique $(I_{A_1} I_{B_1} I_{A_2} I_{B_2})$ des quatre droites isotropes du système différent de celui de $A_1 A_2$ et $B_1 B_2$ est constant, l'angle V est donc constant. Ainsi :

Fig. 1.



Étant donné un couple de cercles paratactiques, une sphère variable passant par l'un coupe l'autre sous un angle constant.

L'angle de parataxie demeure le même quand on intervertit les deux cercles. Cela résulte par exemple de la formule suivante que l'on établit sans peine :

$$\operatorname{tang}^2 V = -(I_{A_1} I_{B_1} I_{A_2} I_{B_2}) \text{ (}^1\text{)}.$$

Un cas bien élémentaire et bien connu de deux cercles paratactiques est celui où la parataxie est double, c'est-à-dire où deux foyers quelconques de l'un et de l'autre cercle sont de distance nulle. L'angle V est alors nécessairement droit. Nous appelons de tels cercles *cercles harmoniques*. Ils coupent à angle droit et divisent harmoniquement tout cercle cosphérique commun. Il leur correspond un quadrilatère isotrope, et réciproquement.

En général, si l'on oriente l'un des deux cercles paratactiques, l'autre est orienté *ipso facto;* il y a exception pour les cercles harmoniques. On peut donc parler de cycles paratactiques analogues, dans une certaine mesure, aux cycles tangents du plan.

---

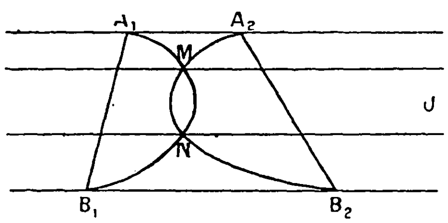
(1) Cette contribution a été apportée en 1921 à la théorie qui nous occupe, par M. Demoulin.

Le cas le plus remarquable se présentant naturellement d'un couple paratactique, non harmonique, est celui d'une focale et d'une section circulaire d'un cône du second degré (répondant à des racines différentes de l'équation en s, ce qui arrivera certainement si tout est supposé réel).

Un plan variable passant par une focale d'un cône du second degré coupe une section circulaire à angle constant.

Envisageons un cercle coupant deux cercles paratactiques, chacun en deux points; les deux sphères ainsi déterminées coupent le plan de figure suivant deux cercles, et sur chacun des cercles on a un rapport anharmonique : (MNA_1B_1) et (MNA_2B_2); ces deux rapports sont égaux, comme égaux à celui (JM, JN, A_1A_2, B_1B_2) des quatre droites isotropes de la figure 2. Donc :

Fig. 2.



Deux cercles paratactiques sont deux cercles tels que tout cercle cosphérique commun fasse avec eux des angles égaux.

En particulier :

Deux cercles paratactiques admettent une infinité de cercles les coupant chacun en deux points et à angle droit; le rapport anharmonique intercepté par eux sur chacun de ces cercles a une valeur constante; les deux sphères passant par les cercles donnés et le cercle en question se coupent sous un angle constant, identique à l'angle de parataxie.

On a d'ailleurs le théorème général suivant :

Soient deux cercles paratactiques; soient deux cercles, dont chacun les coupe en deux points (et par suite sous des angles égaux), *l'angle d'intersection étant de plus le même pour ces deux nouveaux cercles. Alors : 1° ces deux nouveaux cercles sont paratactiques; 2° si l'on considère le quadrilatère à côtés circulaires dont les quatre angles sont égaux, formé par ces quatre cercles, l'angle des sphères qui joignent un côté aux deux côtés adjacents est égal à l'angle analogue obtenu en remplaçant ce côté par le côté opposé; 3° dans le même quadrilatère, les rapports anharmoniques interceptés sur deux côtés opposés sont égaux.*

Nous n'insistons pas sur la démonstration de ces faits, qui peut s'effectuer comme plus haut. Ils résulteront d'ailleurs des propriétés de la cyclide de Dupin établies au paragraphe 3.

2. La congruence paratactique. — Nous appelons *congruence paratactique* la congruence engendrée par les cercles dont les foyers appartiennent à deux droites isotropes fixes non sécantes, dites *bases* de la congruence. Ces cercles sont orthogonaux à la *sphère principale* de la congruence. Parmi eux se trouvent toutes les génératrices de cette sphère du système différent des bases. Les cercles de la congruence peuvent être répartis en couples harmoniques; les foyers d'un des deux cercles sont les pieds de l'autre, et réciproquement.

Deux cercles paratactiques définissent en général une telle congruence et une seule; s'ils sont harmoniques, ils en définissent deux.

Soit une cyclide de Dupin : on sait qu'elle a deux *cercles principaux* orthogonaux chacun à une série de sphères inscrites. Ils sont harmoniques, et orthogonaux à la *sphère principale* de la cyclide; cette sphère coupe la surface suivant le quadrilatère isotrope des foyers des cercles principaux, foyers qui sont les points nodaux de la surface.

Les cercles de Villarceau sont les cercles de la cyclide distincts des lignes de courbure; ils sont orthogonaux à la sphère principale et se répartissent en deux systèmes; ceux d'un système ont leurs foyers et leurs pieds sur un couple de côtés opposés du quadrilatère isotrope. Donc :

Les cercles de Villarceau des deux systèmes d'une cyclide de Dupin appartiennent respectivement aux deux congruences para-

tactiques déterminées chacune par le couple des cercles principaux; les foyers, comme les pieds, sont en relation homographique.

Réciproquement : *Si les foyers ou les pieds d'un cercle d'une congruence paratactique sont en relation homographique, il engendre une cyclide de Dupin.*

Observons que dans cette génération de la cyclide de Dupin, on peut prendre pour définir, par leur intersection avec les bases de la congruence, les foyers ou les pieds de chaque cercle, deux génératrices variables de l'autre système de la sphère fondamentale; ces deux génératrices sont en relation homographique, et les droites doubles de cette homographie sont les deux autres côtés du quadrilatère isotrope fondamental de la cyclide. Si cette homographie est une involution, les foyers peuvent être échangés avec les pieds : les cercles de la série de Villarceau considérée (et par suite de l'autre) peuvent être répartis en couples harmoniques; nous dirons alors que la cyclide est *équilatère* ou *cassinienne*.

Une congruence paratactique peut être, de ∞^2 façons, considérée comme formée par les cercles de Villarceau d'un système d'un faisceau de cyclides de Dupin dont les quatre points nodaux (les deux cercles principaux) sont fixes; en particulier, on peut prendre, d'une manière et d'une seule, un faisceau de tores.

Il existe un seul cercle d'une congruence paratactique passant par un point donné; ses foyers sont les intersections des deux bases avec le cône isotrope issu du point donné.

3. Sur la cyclide de Dupin. — Sur la cyclide, le réseau de Villarceau est non seulement *isogonal* (¹) (ce qui résulte des paragraphes **1** et **2**), mais *isométrique;* envisageons en effet la représentation conforme plane de la cyclide sur un réseau de rectangles : les cercles de Villarceau donnent des droites parallèles aux diagonales des rectangles, pour lesquelles la propriété est évidente. Si la cyclide est équilatère, le réseau de Villarceau est orthogonal et isotherme.

(¹) *Voir* une des compositions du concours d'admission à l'École Normale en 1911, dans la *Revue de Mathématiques spéciales* de la même année.

Réciproquement, on voit aisément, à l'aide de ce qui précède, que toute surface sur laquelle existe un réseau isogonal formé de deux séries de cercles, deux cercles de séries différentes se coupant en deux points, est une cyclide de Dupin, dont les cercles sont ceux de Villarceau (on a toutefois en plus le cas d'une sphère, et de deux faisceaux orthogonaux tracés sur elle).

Soient sur une cyclide de Dupin trois cercles de Villarceau fixes A, B, C de même système, un quatrième Δ mobile de système différent. Considérons les sphères passant par A et Δ, B et Δ : en un point d'intersection de C et Δ, la figure formée par les plans tangents aux deux sphères et la tangente à C demeure égale à elle-même ; donc :

Les sphères passant par deux cercles de Villarceau fixes de même système et un point quelconque de la cyclide se coupent à angle constant.

Le même raisonnement prouve que :

Les faisceaux de sphères passant par deux cercles de Villarceau fixes de même système d'une cyclide de Dupin et un point variable de la surface sont conformes (balaient des angles égaux).

Les réciproques sont vraies, se rapportant aux sphères issues de deux cercles, ou plutôt de deux cycles paratactiques.

Ces théorèmes sont analogues à ceux du Livre II de *Géométrie plane.*

Une sphère passant par un cercle de Villarceau fixe et un point variable d'un cercle, fixe également, de même système, fait en ce point un angle constant avec la surface (demeurant le même après interversion des deux cercles).

Étant donnés trois cercles d'une congruence paratactique, les sphères passent par deux d'entre eux et un point quelconque de l'autre décrivent des faisceaux conformes et se coupent à angle constant.

Soient, sur une cyclide de Dupin, deux cercles de Villarceau de même système « vus » d'un point de la surface sous l'angle α, de différence de longitude λ par rapport à l'un des cercles principaux (angle de la *rotation* qu'il faut imprimer à l'un autour du cercle principal pour l'amener sur l'autre); α et λ sont proportionnels, puisqu'à $\alpha'+\alpha''$ correspond $\lambda'+\lambda''$; le facteur de proportionnalité s'obtient par la considération d'une révolution complète : $\alpha = \frac{\lambda}{2}$, ce qui est encore analogue à la propriété de Géométrie plane.

La différence de longitude est donc la même par rapport aux deux cercles principaux; ce qui résultait aussi de ce que les deux cercles principaux et un cercle de Villarceau appartenant à une même congruence paratactique, les sphères passant par les deux premiers et un point du dernier, décrivent des faisceaux conformes.

Si ω est l'angle du réseau de Villarceau de la cyclide, un trièdre à un dièdre droit fournit, V étant l'angle de parataxie de deux cercles B et C vus sous l'angle α : $\sin V = \sin\omega \sin\alpha$. Ce trièdre est à faces sphériques, son sommet en un point M de B; une de ses faces passe par B et est tangente en M à la cyclide; une autre passe par C.

Démontrons encore le théorème suivant :

Une sphère d'une série inscrite dans une cyclide de Dupin coupe à angle constant non seulement tout cercle fixe passant par les deux points sphères de la série, mais encore tout cercle de Villarceau fixe d'une cyclide de Dupin ayant mêmes points nodaux que la proposée.

Rappelons à cet effet ce théorème de Géométrie du plan ou de la sphère : un cercle tangent à deux cercles fixes coupe à angle constant tout cercle du faisceau qu'ils déterminent. La première partie de l'énoncé à démontrer en résulte immédiatement : il suffit de considérer ce qui se passe dans une sphère passant par le cercle principal orthogonal à la série.

Pour établir la seconde, observons que, toujours d'après la proposition qui vient d'être rappelée, la sphère inscrite variable coupe toute cyclide fixe du faisceau conodal suivant deux lignes de courbure à angle constant; il suffit alors, pour aboutir, de rapprocher ce fait de l'isogonalité du réseau de Villarceau.

4. Représentation sphérique d'une congruence paratactique. — Consi-

dérons deux surfaces, S', S'', d'une congruence paratactique, se coupant suivant un certain cercle C; soient C', C'' deux cercles infiniment voisins de C sur S', S''; l'angle des surfaces en un point M de C est la limite de l'angle des sphères (M, C'), (M, C''). Or cet angle est indépendant de M; donc : *deux surfaces quelconques d'une congruence paratactique se coupent à angle constant le long d'un cercle commun.*

Sur la sphère principale de la congruence, considérons trois génératrices fixes du second système : tout cercle de la congruence se trouve alors défini par deux rapports anharmoniques, prenons-les pour coordonnées symétriques d'un point d'une sphère de rayon 1. Soient A_1B_1, A_2B_2 les deux cercles, définis par leurs pieds ou leurs foyers, $I_{A_1}I_{B_1}$, $I_{A_2}I_{B_2}$ les génératrices correspondantes, on a, avons-nous dit, pour l'angle de parataxie :

$$\operatorname{tang}^2 V = -(I_{A_1} I_{B_1} I_{A_2} I_{B_2});$$

or si $(x_1 y_1)$ $(x_2 y_2)$ sont les points représentatifs, on a, par une formule de Darboux [1], δ étant leur distance sur la sphère de rayon 1,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2} = -(x_1 y_1 x_2 y_2);$$

donc : $\delta = 2V$.

Considérons maintenant trois cercles de la congruence; nous allons comparer les trois angles sous lesquels d'un point de l'un des cercles est vu le système des deux autres aux angles du triangle rectiligne ayant pour sommets les points représentatifs de la sphère; la formule qui vient d'être établie, rapprochée de $\sin\alpha = \frac{\sin V}{\sin \omega}$, prouve que les sinus de ces angles sont proportionnels; comme, d'ailleurs, la somme est nulle de part et d'autre, ils sont égaux. Comme conséquence, *l'angle sous lequel se coupent deux surfaces de la congruence est égal à l'angle de leurs représentations sphériques.*

On a donc une correspondance entre les propriétés anallagmatiques des cercles d'une congruence paratactique, et les propriétés quelconques des points d'une sphère. A une cyclide de Dupin correspond un cercle, aux cercles principaux de la cyclide les pôles de ce cercle;

---

[1] *Théorie des surfaces*, t. I, 1887, p. 32.

signalons comme corollaires : l'unicité de l'angle de deux cyclides de la congruence, les propriétés du faisceau déterminé par deux cyclides, des faisceaux orthogonaux de cyclides, du faisceau de cyclides équilatères, orthogonal à un faisceau conodal, etc.

Pour définir géométriquement la représentation, considérons un plan fixe parallèle aux bases de la congruence; à tout cercle de la congruence, faisons correspondre le point d'intersection avec ce plan de son axe radical avec la sphère principale : nous obtenons une représentation plane de la congruence; pour obtenir la représentation sphérique dont il vient d'être question, il suffit de transformer le plan par inversion en prenant pour origine un de ses points limites avec la sphère principale.

5. Interprétation non euclidienne. — Les propriétés exposées jusqu'ici sont susceptibles d'une interprétation non euclidienne remarquable, dont nous devons personnellement la suggestion à M. Demoulin.

En effet, la transformation de Darboux [1], appliquée en prenant pour sphère directrice la sphère donnée, supposée de centre réel et de rayon purement imaginaire, change les figures que nous avons étudiées en figures d'un espace non euclidien fini, dont la sphère donnée est la sphère (imaginaire) de l'infini. Dans un tel espace, deux *droites paratactiques* sont deux droites dont les points (imaginaires) à l'infini sont répartis sur deux génératrices de même système. Ces droites ne sont autres que des *parallèles de Clifford* [2]; elles peuvent être définies aussi comme deux droites qui sont avec leurs perpendiculaires principales génératrices d'un système d'une quadrique. Alors :

Tout plan passant par l'une coupe l'autre sous un angle constant, qui demeure le même quand on intervertit les deux droites.

---

[1] *Théorie des surfaces*, t. III, 1894, p. 492.

[2] *Preliminary Sketch on Biquaternions* (*Proceedings of the London Math. Society*, 1873, p. 381-395). *Voir* aussi, par exemple, P. Barbarin, *Études de géométrie analytique non euclidienne* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1900); J.-L. Coolidge, *Elements of non euclidean Geometry* (Oxford, 1909).

Deux telles droites admettent une infinité de perpendiculaires communes dont la longueur est égale à l'angle de parataxie. Les plans passant par elles et la perpendiculaire commune font un angle constant identique au même angle (1).

Toute sécante commune les coupe sous des angles égaux.

Des faisceaux de plans égaux issus de l'une et l'autre droite se coupent à angle constant; des faisceaux de plans issus de l'une et l'autre droite se coupant à angle constant sont égaux.

Un segment de longueur constante, dont les extrémités les décrivent, balaie sur elles des segments égaux; un segment balayant sur elles des segments égaux a une longueur constante.

On obtient ces faisceaux et ces séries de segments en faisant couper les deux droites à angle constant par une droite variable.

Il y a deux espèces différentes de parataxie, chacune correspondant à l'un des deux systèmes de droites à l'infini.

On a de même des congruences paratactiques, chacune définie par deux droites à l'infini d'un système, et contenant, par suite, toutes celles de l'autre système; une congruence paratactique contenant une droite contient aussi sa perpendiculaire principale.

Une quadrique appartenant à une congruence paratactique coupe la sphère de l'infini suivant quatre droites et est *doublement de révolution*. Cette surface, appelée quelquefois *hypercycloïde de révolution*, a deux axes, qui sont principalement perpendiculaires. Elle est, par rapport à chacun d'eux, le lieu des points qui en sont à une certaine distance constante.

Pour cette surface, nous obtenons ceci : *deux génératrices de même système sont vues à angle constant d'un point quelconque de la surface, et les faisceaux des plans qui les joignent à ce point sont égaux; les génératrices forment sur la surface un réseau isogonal et isométrique;* etc.

Si le réseau des génératrices est orthogonal et isotherme, la quadrique est sa propre polaire réciproque par rapport à la sphère de

(1) Ce dernier fait résulte de ce qu'un plan fait avec une droite le même angle qu'avec le plan mené par la droite de manière à le couper suivant une perpendiculaire à la droite.

l'infini; elle est *équilatère* (d'une certaine espèce). Deux droites paratactiques et leurs perpendiculaires principales appartiennent à une telle surface doublement de révolution et équilatère. La même représentation sphérique est possible et l'on en tire les mêmes conséquences.

C'est à dessein que nous avons employé dans ce qui précède les termes les plus voisins de ceux de la géométrie euclidienne qui sont étroitement liés à l'idée de déplacement. C'est en effet uniquement par les mouvements sans déformation dont ils sont le siège que les espaces non euclidiens sont intéressants et que leur étude s'impose.

Au sujet de la quadrique doublement de révolution de l'espace elliptique, faisons encore les remarques suivantes (cf. *Encycl. des Sc. math.*, III, 1, p. 134). C'est une surface à courbure constante et égale à -1 (la surface est minima lorsqu'elle est équilatère); les deux rayons de courbure principaux sont constants. Cette surface est applicable avec conservation des longueurs sur un parallélogramme du plan euclidien de Clifford, mais qui se réduit à un losange. Lorsque ce parallélogramme n'est pas un losange, il est aussi impossible de l'appliquer sur une telle surface qu'il est impossible de représenter conformément sur un tore une surface fermée arbitraire de genre un.

6. Sur la notion de puissance et son application a la théorie actuelle. — Appelons *puissance* d'un point par rapport à un cercle de l'espace *le produit des normales menées du point au cercle;* c'est aussi le *produit des distances du point aux foyers du cercle;* en effet, dans le plan, le produit des distances d'un point à deux sommets opposés d'un quadrangle isotrope est égal au produit de ses distances aux deux autres sommets.

Appelons *puissance réduite* d'un point par rapport à un cercle *le quotient de sa puissance par le rayon du cercle*. Par une inversion, *la puissance réduite est simplement multipliée par le rapport des deux rayons vecteurs;* cela se traduit en effet, en représentant le cercle par son couple focal, par une égalité entre distances et rayons vecteurs, dont la vérification est aisée.

Grâce à cette proposition, on obtient, en s'aidant d'inversions appropriées et remarquant que la puissance réduite d'un point par rapport à une droite ou à un plan est telle que nous l'avons définie, le double de la distance du point à la droite (ou au plan), les résultats suivants :

Le carré de la puissance réduite d'un point par rapport à un cercle est égale à la somme des carrés de ses puissances réduites par rapport à deux sphères orthogonales passant par le cercle; la somme des carrés des puissances réduites d'un point par rapport à deux cercles harmoniques et à leur sphère orthogonale commune est nulle.

Dans une rotation infinitésimale autour d'un cercle, le déplacement d'un point est le demi-produit de la puissance réduite par l'angle de rotation.

On peut obtenir de la même manière la proposition suivante, que M. Hadamard a donnée à la suite d'une des Notes précitées aux *Comptes rendus*, en soulignant l'intérêt de la notion dont il s'agit.

La puissance réduite d'un point de l'espace par rapport à un cercle est égale à sa puissance réduite par rapport à une sphère quelconque passant par le cercle divisée par le sinus de l'angle que fait cette sphère avec la sphère du point et du cercle.

Appliquons maintenant les notions précédentes aux cercles paratactiques et à la cyclide de Dupin. D'abord, en transformant la cyclide en tore ou en un cône de révolution, on obtient ceci :

La cyclide de Dupin est le lieu d'un point dont le rapport des puissances réduites par rapport à la sphère principale et à un cercle principal est constant; dont le rapport des puissances réduites par rapport aux deux cercles principaux est constant; l'un ou l'autre de ces rapports peut être pris pour invariant anallagmatique de la surface.

Il résulte de là à l'aide du paragraphe 3 :

Étant donnés deux cercles paratactiques, le rapport des puissances d'un point variable de l'un par rapport à l'autre et à la sphère orthogonale commune est constant; étant donnés trois cer-

cles d'une congruence paratactique, le rapport des puissances d'un point variable de l'un par rapport aux deux autres est constant.

Par conséquent : *Une cyclide de Dupin est de $2 \times \infty^2$ manières le lieu d'un point dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles paratactiques est constant.*

Un tel lieu est en effet engendré par des cercles d'une congruence paratactique, dont les pieds, on le voit sans peine, sont en relation homographique.

Si dans le théorème précédent on fait varier le rapport constant, on obtient un faisceau de cyclides; ce faisceau n'est autre évidemment qu'un des faisceaux de cyclides, signalés au paragraphe 4, ayant en commun deux cercles de Villarceau de même système.

En représentation sphérique, deux cercles par rapport auxquels le rapport des puissances est constant donnent deux points inverses par rapport au cercle image de la cyclide; ce fait pourrait suggérer quelques autres développements.

De même, en interprétation non euclidienne, la plupart des théorèmes précédents se traduisent aisément, et sont d'ailleurs susceptibles d'une démonstration directe très simple.

Mais nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet.

Faisons cependant encore une remarque sur la cyclide de Dupin : soit un faisceau de cyclides tangentes le long d'un cercle de Villarceau commun. Par une transformation arbitraire du groupe de Lie, on obtient un faisceau de cyclides tangentes le long d'une certaine courbe, qu'il conviendrait d'étudier. Ce fait donne à supposer qu'il existe d'autres faisceaux de cyclides de Dupin que ceux considérés jusqu'ici, soit ponctuels, soit tangentiels (sous le groupe de Laguerre ou celui de Lie). Leur détermination générale serait probablement un sujet digne d'intérêt.

7. Surfaces cerclées se coupant le long d'un cercle a angle constant. — Nous avons vu au paragraphe 4 que deux surfaces appartenant à une congruence paratactique se coupent à angle constant le long d'un cercle commun. Dans ce cas, en chaque foyer, les deux déplacements infinitésimaux du foyer ont la même direction et cette direction est isotrope. En réalité, cette dernière condition n'est pas nécessaire pour que la propriété soit vraie; la première suffit. En général, on a le théorème suivant :

Soient deux surfaces cerclées ayant en commun un cercle qui n'est stationnaire sur aucune d'elles. Les conditions pour qu'elles se coupent à angle constant le long du cercle sont les suivantes :

1° Supposons d'abord que sur l'une des surfaces le cercle ne rencontre pas le cercle voisin; c'est le cas général; la condition est alors qu'en chaque foyer les deux déplacements infinitésimaux du foyer aient même direction.

2° Le cercle, sur une surface, rencontre en un point le cercle voisin : alors il faut d'abord qu'il jouisse de la même propriété sur l'autre surface; de plus, en chaque foyer, le plan des deux déplacements infinitésimaux du foyer doit être isotrope.

3° Le cercle, sur une surface, rencontre en deux points le cercle voisin, autrement dit est ligne de courbure : l'unique condition est qu'il jouisse de la même propriété sur l'autre surface.

Bornons-nous, pour abréger, à établir que dans le cas général la condition indiquée est bien suffisante. Étant donnés deux cercles infiniment voisins C et C', on peut de C' déduire un cercle infiniment voisin C'' en multipliant par un nombre k l'accroissement infinitésimal du paramètre qui permet de passer de C à C'; on peut aussi faire tourner C' autour de C d'un certain angle et obtenir ainsi un cercle C''. Après l'une et l'autre opération, la condition relative aux déplacements du foyer est bien vérifiée et d'autre part l'angle est bien constant (nul pour la première opération). Or, en faisant successivement ces deux opérations, on obtient bien tous les systèmes de trois cercles remplissant la condition dont il fallait démontrer la suffisance.

Si l'on considère la congruence engendrée par un cercle dont les foyers décrivent deux courbes données, distinctes ou non, deux surfaces appartenant à cette congruence se coupent à angle constant le long de tout cercle commun.

Soit V cet angle; si u et v sont les paramètres des points des deux courbes, du et dv leurs différentielles pour une surface, $\overline{du}$, $\overline{dv}$ pour l'autre, on reconnaît, à l'aide de ce qui précède, que $e^{2iV} = \frac{du}{dv} : \frac{d\bar{u}}{d\bar{v}}$. Or c'est là la formule donnant l'angle de deux courbes en coordonnées symétriques. Ainsi, *si l'on considère u, v [ou naturellement $\varphi(u)$, $\psi(v)$] comme coordonnées symétriques d'un point d'une sphère (ou d'un plan), l'angle de deux surfaces de la congruence est égal à celui des courbes qui les représentent.*

8. Transformations sphériques générales et particulières. — On appelle *transformation sphérique* de l'espace le produit d'inversions en nombre quelconque. Ce nom est justifié par le fait qu'il n'y a pas d'autres transformations ponctuelles changeant les sphères en sphères.

Toute transformation sphérique est le produit d'une inversion et d'un déplacement (¹).

En effet, le produit de deux inversions est, comme on sait, le produit d'une inversion et d'une symétrie par rapport à un plan; en appliquant cette proposition plusieurs fois de suite, on ramène le produit de plusieurs inversions à celui d'une inversion et de plusieurs symétries; si les symétries sont en nombre impair, il suffit de changer le signe de la puissance d'inversion pour obtenir dans le cas général l'énoncé à démontrer.

Il résulte de là que *pour toute transformation sphérique existe une sphère invariante par ladite transformation.* En effet, la transformation étant considérée comme le produit d'une inversion et d'un déplacement hélicoïdal, envisageons une sphère quelconque coupant la sphère d'inversion suivant un grand cercle de celle-ci : l'inverse de cette sphère est la sphère symétrique par rapport à l'origine d'inversion; le centre d'une sphère invariante dans la transformation considérée se trouve donc défini comme un point qui demeure inaltéré dans une symétrie par rapport à un point donné suivie d'un déplacement hélicoïdal donné : il s'obtient immédiatement.

(¹) Cet énoncé est toutefois en défaut pour le cas où la transformation est un simple déplacement.

Sur la sphère invariante, la transformation sphérique se réduit à une certaine transformation circulaire, qui est manifestement directe; celle-ci est donc le produit de deux rotations, autour des deux couples de sommets opposés d'un quadrangle isotrope. Ces sommets du quadrangle sont les pieds des cercles d'un couple harmonique; considérons le produit des deux rotations égales aux précédentes autour de ces deux cercles. Notre transformation sphérique est identique à ce produit, à moins que ce ne soit avec ce produit combiné avec une inversion par rapport à la sphère invariante; on reconnaît sans peine que c'est le premier cas qui a lieu; ainsi :

Toute transformation sphérique est d'une manière et en général d'une seule le produit permutable de deux rotations autour des cercles d'un couple harmonique.

Il suit de là qu'une transformation sphérique a deux invariants, qui sont les deux angles de rotation.

Une transformation sphérique étant en général le produit d'un déplacement et d'une inversion, on voit qu'à l'inverse de ce qui a lieu pour les transformations circulaires du plan, il n'y a, au point de vue purement algébrique, qu'une seule sorte de transformation sphérique générale : il n'y a pas, algébriquement parlant, de transformations directes ou inverses. Mais ce qui n'a pas lieu au point de vue purement algébrique, a lieu au point de vue de l'espace réel. Répartissons en effet dans une classe les transformations dont l'un des cercles principaux est imaginaire, et dont la rotation composante par rapport à ce cercle a chacun de ses couples de points homologues séparé par le couple des foyers du cercle, a autrement dit un multiplicateur négatif; dans une autre classe toutes les autres transformations. On peut alors passer, de manière continue et réelle, de la transformation identique aux transformations de la seconde classe, mais non aux transformations de la première (1).

La forme canonique, obtenue plus haut pour une transformation

(1) Une observation analogue s'applique aux transformations du groupe engendré par tous les déplacements et toutes les homothéties directes et inverses de l'espace.

sphérique, produit de deux rotations autour de deux cercles harmoniques, s'applique simplement à l'étude du groupe à un paramètre de transformations sphériques, d'ailleurs bien connu dans le cas général. Le groupe à un paramètre est anallagmatiquement caractérisé par un seul invariant, qui est le rapport des rotations infinitésinales. Chaque trajectoire du groupe coupe à angle constant les lignes de courbure d'une certaine cyclide de Dupin; il y a pour un groupe ∞^1 cyclides de Dupin, formant un faisceau conodal, et sur chacune ∞^1 trajectoires.

Les groupes algébriques sont ceux pour lesquels les deux rotations infinitésimales sont dans un rapport commensurable: si le groupe est réel, les cercles principaux sont alors nécessairement tous deux réels.

Un cas remarquable est celui *où les deux rotations infinitésimales sont égales;* il résulte alors de ce que l'on a vu au paragraphe **3** que *les trajectoires sont les cercles d'une congruence paratactique:* le groupe est dit *paratactique*.

Par extension, on appelle *transformation paratactique* une transformation finie dont les deux rotations sont égales. Dans une telle transformation, *le rapport anharmonique, sur chaque cercle de la congruence, de deux points homologues et des pieds du cercle sur la sphère principale, est constant.* Ce fait sera évident par l'interprétation non euclidienne donnée quelques lignes plus loin.

La connaissance de ses trajectoires détermine dans tous les cas le groupe à un paramètre de transformations sphériques. Mais tandis qu'en général la connaissance du groupe ou celle de la transformation finie détermine complètement le couple harmonique central, si le groupe ou la transformation finie est paratactique, il y a ∞^2 *couples harmoniques centraux* qui sont tous des couples harmoniques de la congruence paratactique en question.

A la transformation sphérique générale, dont le couple harmonique est supposé orthogonal à une sphère fixe, correspond un déplacement dans l'espace non euclidien fini; si les rotations sont égales, on a dans l'espace non euclidien un déplacement résultant d'un mouvement continu dans lequel *les points décrivent des droites, appartenant à une congruence paratactique*, dans lequel surtout *tous les points* *décrivent des chemins égaux. Les positions d'une même droite, avant et après le mouvement, sont paratactiques.* Un tel déplacement est appelé *translation*.

Les translations forment deux groupes distincts, dont chacun, sous-groupe invariant du groupe des déplacements, laisse en place chaque droite à l'infini d'un certain système ; deux translations du même groupe ne sont pas en général permutables, tandis que deux translations appartenant chacune à un groupe le sont évidemment. Tout déplacement est d'ailleurs, d'une manière et d'une seule, le produit de deux translations de groupes différents.

Nous voyons que la forme canonique du commencement du paragraphe pour une transformation sphérique quelconque peut être remplacée par la suivante, qui n'est d'ailleurs réelle que si la sphère invariante par la transformation est imaginaire (c'est-à-dire si les deux cercles du couple harmonique sont réels) ; *produit de deux transformations paratactiques appartenant respectivement à l'un et à l'autre système de la sphère invariante.* Cette nouvelle forme peut être plus avantageuse que la première, parce que, la sphère invariante étant supposée connue, elle ne se réfère à aucun élément géométrique particulier; aussi est-elle susceptible d'une interprétation particulièrement simple en quaternions (1), bien connue d'ailleurs : si l'on prend un système de coordonnées pentasphériques x_1 x_2 x_3 x_4 x_5, avec, pour la sphère invariante, $x_5 = 0$, et que l'on envisage les quaternions $X = x_2 + ix_2 + jx_3 + hx_4$, la transformation s'écrit $x'_5 = x_5$, $X' = AXB$, A et B désignent deux quaternions fixes de tenseur égal à l'unité. Pour $A = 1$, ou $B = 1$, on a les deux transformations paratactiques.

9. Suggestions complémentaires. — La définition *constructive* que nous venons de donner des cercles paratactiques (trajectoires d'un point dans une transformation sphérique, groupe à un paramètre, dont les rotations sont égales) est *purement géométrique* (*et à trois dimensions seulement*), *anallagmatique et réelle.* Il y aurait lieu d'établir toutes leurs propriétés d'une manière satisfaisant également

(1) *Cf.* par exemple *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, I, 5, p. 453.

à ces conditions. Cela sera réalisé lorsqu'on aura déterminé un ensemble minimum de théorèmes d'où l'on puisse déduire toute la géométrie anallagmatique, comme plusieurs auteurs l'ont fait dans ces derniers temps pour la géométrie projective.

Considérons deux transformations sphériques infinitésimales φ_1 et φ_2; les cercles-bases de la transformation $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ engendrent une certaine surface, dont la définition est, comme on voit, analogue à celle du cylindroïde de Cayley. M. Coolidge, dans le Traité déjà cité, donne quelques propriétés intéressantes de cette surface, dans le cas particulier où les cercles de base de φ_1 et φ_2, et par suite de $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ sont orthogonaux à une même sphère; il l'appelle alors *pseudo-cylindroïde;* la plupart de ces propriétés paraissent susceptibles d'extension au cas le plus général ; celui-ci semble mériter d'être étudié, et cette étude sera sans doute facilitée par la représentation dans l'espace non euclidien à quatre dimensions.

Il est possible de construire une théorie des transformations sphériques continues quelconques, dans le plan ou l'espace, analogue à celle des mouvements sans déformation. Il faut pour cela introduire les invariants différentiels et intégraux de l'inversion, analogues à l'arc, à l'aire, à la courbure, à la torsion définis par M. Tresse dans sa Thèse ([1]) et dont l'étude est facilitée par la représentation dans les espaces non euclidiens. On est amené dans cette théorie à se poser des problèmes analogues à celui de la détermination d'une courbe gauche, connaissant la courbure et la torsion en fonction de l'arc, lequel se réduit comme on sait ([2]) à l'intégration d'un système du troisième ordre identique à son adjoint, c'est-à-dire d'une équation de Riccati ; ici l'on est conduit de même à des systèmes linéaires des quatrième, cinquième et sixième ordres, pour lesquels la somme des carrés des intégrales est constante, c'est-à-dire encore à des *systèmes identiques à leurs adjoints.* Ceux-ci ont été étudiés par MM. Darboux, Vessiot et Goursat dans les *Comptes rendus* de l'année 1909.

([1]) *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* (Stockholm, 1893).

([2]) *Voir* par exemple DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, 1887, Chap. II.

10. Nature analytique des propriétés précédentes (¹). — Nous voudrions maintenant montrer sous un aspect algébrique certaines des propriétés rencontrées au cours de cet article, ce qui permettra des extensions à un nombre quelconque de dimensions.

A. Il va s'agir d'abord d'une propriété des formes quadratiques à nombre pair de variables, ou plutôt des variétés correspondantes. Considérons une telle forme à $2p$ variables indéterminées, à discriminant non nul. Supposons qu'au domaine de rationalité des coefficients, nous adjoignions la racine carrée du discriminant. Faisons sur la forme une des deux opérations suivantes : 1° substitution linéaire quelconque; 2° multiplication de la forme par un coefficient constant arbitraire; la racine carrée du discriminant demeurera-t-elle extraite après chacune de ses opérations? La réponse est évidemment affirmative; pour la première opération, la chose est exacte pour une forme quadratique quelconque; pour la deuxième, elle l'est parce que le nombre des variables est supposé pair.

L'extraction de la racine carrée du discriminant Δ doit donc avoir une signification en quelque sorte géométrique. Celle-ci est aisée à trouver. De la décomposition en $2p$ carrés, on passe immédiatement à une décomposition en p produits : $PQ + RS + \ldots + VW$. Il suffit alors de traiter cette décomposition de la même manière dont on opère dans le cas particulier des quadriques pour constater ceci :

Il existe, appartenant à la variété quadratique considérée à $2p$ indéterminées homogènes, deux familles de variétés linéaires à p indéterminées homogènes seulement; si p est pair deux variétés de la même famille ne se rencontrent pas en général; deux variétés de familles différentes ont un point commun, et en général un seul; c'est le contraire si p est impair.

Il est clair que l'extraction de la racine carrée du discriminant ne

---

(¹) Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, I, 2, n° 31; I, 11, n^os 43 et 53.

Nous tentons ici, dans l'étude sommaire de certaines propriétés des formes quadratiques et des substitutions orthogonales, de faire la synthèse des trois points de vue de l'algèbre (A et C), des groupes de transformations (B), de la géométrie (D).

peut que signifier la séparation de ces deux familles, c'est ce qu'il est d'ailleurs facile de vérifier. La racine carrée du discriminant est toute extraite si la mise sous forme d'une somme de p produits est réalisée sans naturellement que la réciproque soit vraie.

Au lieu de nous attarder à ces vérifications, indiquons succinctement une autre manière de traiter la question. Soit $F(x_i, x_j)$ la forme polaire de la forme quadratique considérée, qui est elle-même $f(x_i) = F(x_i, x_i)$. Soient p points à $2p$ coordonnées homogènes :

$$(x_1^1 \ldots x_1^{2p}), \quad (x_2^1 \ldots x_2^{2p}), \quad \ldots, \quad (x_p^1 \ldots x_p^{2p}).$$

Considérons le système des $\frac{p(p+1)}{2}$ équations : $F(x_i, x_j) = 0$, où $i, j = 1, 2, \ldots, p$. *Ce système se décompose en deux, et cette décomposition dépend, au point de vue de la rationalité, de l'extraction de* $\sqrt{(-1)^p \Delta}$.

Pour démontrer ce fait, nous pouvons supposer la forme réduite à une somme de $2p$ carrés; nous pouvons même la supposer sphérique, car on passera immédiatement de ce cas à celui où elle ne l'est pas. Soit donc $\sum_{k=1}^{k=2p} (x^k)^2$. Nous avons à considérer le système

$$\sum_{k=1}^{k=2p} x_i^k x_j^k = 0, \qquad \text{où} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, p.$$

Il se décompose comme il suit: soit d'abord p pair. On écrit la matrice à p lignes et $2p$ colonnes des x_i^k; elle se fractionne en deux déterminants d'ordre p, que l'on égale; on égale de même tous les couples de déterminants en lesquels se fractionne la matrice obtenue en faisant subir aux colonnes de la précédente toutes les permutations paires. On a ainsi l'un des deux systèmes en lesquels se décompose le système donné; pour obtenir l'autre, il suffit de changer le signe de toutes les égalités. Pour p impair, il faut introduire partout le coefficient i. On voit, en passant au cas d'une somme de carrés quelconques, que la décomposition dépend bien de $\sqrt{(-1)^p \Delta}$.

Reste à établir l'exactitude de ce que nous venons d'avancer. Or, en formant les carrés des deux déterminants de la matrice par la règle habituelle, on voit bien évidemment qu'ils sont égaux si p est pair, égaux et de signes contraires si p est impair. Il faudrait ensuite déterminer les signes.

Quant au lien de ce qui précède avec les cercles paratactiques, il est manifeste. Soit la sphère imaginaire $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$. On a ici $\sqrt{(-1)^p \Delta} = 1$. Les deux systèmes de génératrices sont donc tout séparés, et il en est de même par conséquent pour les deux sortes de parataxie des cercles orthogonaux à la sphère.

Le cas de six variables a également une signification géométrique, mais tout à fait banale. Si on les considère en effet comme des coordonnées pluckériennes de droites, liées par une relation quadratique, les variétés dont la séparation est effectuée par l'extraction de $\sqrt{-\Delta}$ ne sont rien autre que les points d'une part, les plans de l'autre.

On pourrait songer aussi à considérer les six variables comme des coordonnées de semi-sphères. Mais on reconnaît alors que les variétés qui s'introduisent sont les droites isotropes, et que la décomposition n'a plus aucune signification géométrique, même imaginaire.

B. Considérons le groupe à $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres des substitutions automorphes d'une forme quadratique, de discriminant non nul, à n variables; il admet comme sous-groupe invariant le groupe des substitutions propres, c'est-à-dire de déterminant égal à $+1$, et comme sous-ensemble la totalité des substitutions impropres, c'est-à-dire de déterminant égal à -1. Le quotient du groupe de toutes les substitutions par celui des substitutions propres est le groupe à deux éléments.

Quant au groupe des substitutions propres, il est simple, sauf pour $n = 4$, auquel cas il est, comme nous l'avons vu par des considérations géométriques, le produit direct de deux groupes à trois paramètres.

Nous nous sommes placé dans les quelques lignes qui précèdent, au point de vue homogène. Pour les applications géométriques, on se place plutôt au point de vue projectif. Les substitutions à considérer sont alors celles qui laissent invariante, non plus la forme, mais la relation obtenue en l'égalant à zéro.

Les différences avec le cas précédent sont les suivantes : d'abord il s'introduit un groupe supplémentaire à un paramètre dans les suites de composition; ensuite pour n pair, il y a encore des substitutions propres et impropres, les premières conservant chacun des deux systèmes de variétés linéaires à $\frac{n}{2} - 1$ dimensions et les secondes les échangeant, tandis que, pour n impair, toutes les substitutions jouent le même rôle (nous laissons bien entendu complètement de côté ici le point de vue réel).

C. Nous allons examiner sommairement la réduction d'une substitution automorphe propre d'une forme quadratique; en la supposant orthogonale, nous ne diminuerons pas la généralité, et nous serons à portée immédiate des applications possibles à la Géométrie anallagmatique.

Soit donc une substitution orthogonale à n variables, de déterminant $+1$. Pour la réduire, comme une substitution linéaire quelconque, à la forme canonique $Y_i = s_i y_i$, nous formons l'équation caractéristique, qui s'obtient en égalant à zéro le déterminant de la substitution, où l'on a retranché l'inconnue s des éléments de la diagonale. *Cette équation est réciproque*, ainsi que Brioschi l'a montré le premier. On obtient ainsi n formes linéaires, chacune correspondant à une racine de l'équation caractéristique; ces n formes ne sont déterminées d'ailleurs par les considérations qui précèdent qu'à un facteur constant près, le même pour toutes (1).

Des transformations analogues à celles utilisées pour l'équation en s des formes quadratiques donnent les résultats suivants :

Deux quelconques des n formes correspondant à des racines de l'équation en s non inverses l'une de l'autre sont orthogonales.

---

(1) La forme canonique obtenue est unique, mais, considérée par rapport aux variables y, elle n'est pas orthogonale. Pour obtenir une substitution orthogonale par rapport aux nouvelles variables, posons : $y_1 = \alpha(u_1 + iu_n)$; $y_n = \frac{1}{\alpha}(u_1 - iu_n)$, et de même pour les autres couples (y_i, y_{n-i+1}); les u sont n variétés rectangulaires; si q est la partie entière de $\frac{n}{2}$, la substitution se compose de q substitutions, également orthogonales, et portant chacune sur deux variables seulement. On voit que cette forme canonique orthogonale n'est pas unique, mais dépend des q constantes α.

Le facteur de proportionnalité étant convenablement déterminé, les n formes $y_1, \ldots, y_n$ satisfont pour n pair à l'identité

$$2(y_1 y_n + y_2 y_{n-1} + \ldots) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

et pour n impair à l'identité

$$2(y_1 y_n + \ldots) + y_{\frac{n+1}{2}}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

Voici d'autre part une propriété de l'équation en s dans le cas de n pair. Il résulte aisément de la proposition établie en A que dans ce cas, si l'on considère les substitutions du groupe de l'équation composées uniquement de transpositions de deux racines inverses, le nombre de ces transpositions doit être pair. Donc :

Si n est pair, le produit des différences des racines inverses de l'équation en s est une fonction rationnelle des coefficients de la substitution orthogonale ; si n est multiple de 4, cette fonction a ses coefficients rationnels ; si n n'est pas multiple de 4, c'est le produit de i par une fonction à coefficients rationnels.

Il est clair que pour une équation réciproque arbitraire de degré pair, c'est seulement le carré du produit des différences des racines inverses qui s'exprime rationnellement.

Le théorème qui précède peut se vérifier de la manière suivante. On connaît, depuis Cayley, les liens qui unissent les déterminants orthogonaux et les déterminants symétriques gauches. Si l'on pose $\frac{1-s}{1+s} = \sigma$, σ est racine de l'équation caractéristique d'un déterminant symétrique gauche à coefficients rationnels; on retombe ainsi sur cette proposition bien connue : un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est carré parfait ([1]).

Observons qu'une substitution orthogonale propre à n variables a un nombre d'invariants égal à la partie entière de $\frac{n}{2}$; ce sont les racines de l'équation caractéristique.

([1]) Dans le cas particulier d'une substitution orthogonale infinitésimale, le déterminant symétrique gauche est tout trouvé : c'est le déterminant de la substitution ; le calcul habituel de transition, très simple d'ailleurs, est tout fait.

D. Les considérations que nous venons de développer en C s'adaptent simplement aux applications géométriques. Pour deux et trois variables, on a une rotation autour d'un point dans le plan et dans l'espace; pour quatre variables, une transformation circulaire du plan; pour cinq variables, une transformation sphérique de l'espace; pour six variables, une transformation du groupe de Lie (ou si l'on veut une transformation droites-droites, mais celle-ci est une simple homographie de l'espace).

Pour cinq variables, on retrouve la première forme canonique donnée pour une transformation sphérique, les cinq formes linéaires sont la sphère invariante et les quatre sphères-points, pieds des cercles principaux.

Pour quatre variables, le théorème établi quelques lignes plus haut revient à ceci : lorsque l'on fixe un ordre de succession entre deux sommets opposés d'un quadrangle isotrope du plan, la même chose est réalisée par le fait même pour les deux autres sommets.

Revenant au cas de cinq variables, on trouve l'explication du fait constaté que si dans une transformation sphérique, les deux rotations sont égales, il y a ∞^2 couples harmoniques centraux; on a en effet pour l'équation caractéristique deux racines doubles, inverses l'une de l'autre, chacune annulant les premiers mineurs; chacune introduit, comme on le sait, une indétermination ∞^1; d'où une indétermination résultante ∞^2.

Le groupe à un paramètre s'obtient très simplement à partir de la forme réduite par l'introduction d'exponentielles. Dans le cas de cinq variables, il est aisé de retrouver le fait que chaque trajectoire appartient à une cyclide de Dupin : on a en effet $\frac{y_1 y_3}{y_2 y_4} = \text{const.}$, ce qui est bien l'équation d'une cyclide de Dupin rapportée à ses deux cercles principaux.

D'autre part, tout ce qui se rapporte aux cinq variables peut être aussi interprété en cycles du plan.

Voyons ce que signifie la forme réduite dans le cas de six variables : on a trois couples de semi-sphères; deux semi-sphères quelconques non associées sont tangentes; il y a quatre systèmes de trois semi-sphères ayant une génératrice commune, et quatre systèmes de trois semi-sphères dont les semi-sphères opposées ont une génératrice commune. La transformation du groupe de Lie se décompose en trois transformations élémentaires, une par rapport à chaque couple de semi-sphères associées. La transformation élémentaire est la suivante : elle consiste à considérer la série de Dupin déterminée par la semi-sphère arbitraire et les deux semi-sphères du couple et à prendre dans cette série la semi-sphère telle que le rapport anharmonique des quatre ait une certaine valeur constante donnée.

Pour obtenir le système fondamental des six semi-sphères, on prend d'abord quatre semi-sphères en ordre circulaire, chacune tangente à la suivante ; les deux autres semi-sphères sont celles obtenues en joignant en croix les quatre génératrices communes.

Nous avons dit plus haut que dans le cas des coordonnées hexasphériques, l'extraction de la racine carrée du discriminant n'avait plus de signification géométrique ; en réalité, cette signification existe, mais est de peu d'intérêt; on sépare ainsi les congruences de semi-sphères ayant une génératrice commune des congruences de semi-sphères dont les semi-sphères opposées ont une génératrice commune.

Pour le cas de six variables, qu'il s'agisse de semi-sphères ou de droites, on peut se proposer d'étudier le groupe continu à un paramètre; ses trajectoires appartiennent à un complexe algébrique défini en coordonnées de droites par la constance des rapports des quantités LX, MY, NZ. Il conviendrait aussi d'examiner le cas des transformations particulières par lesquelles l'équation caractéristique a une racine double annulant les premiers mineurs, ou une racine triple annulant les seconds mineurs, et des groupes continus correspondants.