JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. LALAN

Sur les propriétés infinitésimales projectives des variétés à trois dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 241-318.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__241_0>

Sur les propriétés infinitésimales projectives des variétés à trois dimensions;

PAR V. LALAN.

INTRODUCTION.

Plusieurs géomètres se sont appliqués à généraliser la méthode du trièdre mobile de Darboux (1), en l'adaptant à des géométries basées sur d'autres groupes que celui du déplacement euclidien (2).

Dans son principe, cette méthode consiste à associer à chaque point de l'espace une figure de référence, un repère, qui dépende d'autant de paramètres qu'il y a d'unités dans l'ordre du groupe fondamental. Quand on se propose d'étudier les propriétés infinitésimales d'une variété, on attache à chacun de ses éléments un repère dont on particularise les paramètres de manière à réduire autant que possible l'arbitraire dans l'opération qui fait passer de ce repère au repère infiniment voisin.

Dans son Mémoire *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien* (3), M. Cartan a montré comment il convenait d'adapter la méthode du trièdre mobile à l'étude des

(1) DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. I, pp. 1, 65, 88, 2e édition (Gauthier-Villars, 1914).

(2) DEMOULIN, *Comptes rendus*, 1904 et 1905 (Géométrie elliptique, Géométrie conforme); WILCZINSKI, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1905 (Géométrie projective).

(3) *Bull. de la Soc. math.*, 1919 et 1920.

variétés de l'espace projectif à n dimensions : je n'ai fait qu'appliquer le procédé aux variétés ponctuelles à trois dimensions (V_3).

Les V_3 jouissant de propriétés infinitésimales projectives déterminées se présentent comme les multiplicités intégrales de certains systèmes différentiels. L'objet principal de ce travail est de préciser la nature et le nombre des éléments arbitraires (constantes ou fonctions) qui entrent dans l'expression analytique des variétés ainsi définies; c'est un problème dont la difficulté disparaît dès qu'on fait usage de la théorie des systèmes de Pfaff en involution, de M. Cartan ([1]).

Au Chapitre I, j'expose les points essentiels de la méthode et je rappelle les principales propriétés infinitésimales projectives des variétés à p dimensions.

Le Chapitre II est consacré à l'examen préalable de la structure projective des variétés à 2 dimensions plongées dans l'hyperespace. Le Mémoire de C. Segre : *Su una classe di superficie degl'iperspazilegata colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* ([2]) m'a été particulièrement utile pour la rédaction de ce Chapitre. Toutefois ce géomètre n'étudie que certaines surfaces, qu'il appelle les V_2 *d'espèce* Φ, en laissant de côté les V_2 les plus générales, qui sont dépourvues de lignes asymptotiques et de lignes caractéristiques. J'établis (n° **21**) l'existence sur les V_2 de cette nature situées dans l'espace à 5 dimensions, de cinq familles de courbes qui répondent à une définition intrinsèque et qui interviennent dans la génération des V_3 ayant une famille triple ou une famille quadruple d'asymptotiques rectilignes.

Les autres Chapitres traitent des variétés à 3 dimensions,

([1]) Les deux Mémoires fondamentaux sur cette belle théorie sont intitulés : *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales* (*Ann. Éc. Norm.*, 1901) et *Sur la structure des groupes infinis de transformations* (*Ibid.*, 1904). On peut en trouver aussi un exposé partiel dans E. Goursat, *Leçons sur le problème de Pfaff* (Hermann, 1922).

La théorie des formes à multiplication extérieure et de la dérivation extérieure des formes de Pfaff est exposée dans E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux* (Hermann, 1922).

([2]) *Atti Accad. Torino*, 1907.

classées d'après le nombre de dimensions de leur hyperplan osculateur du premier ordre.

Sur les V_3 dont l'hyperplan osculateur a 4 ou 5 dimensions, il existe un travail de Sisam (¹), contenant déjà un certain nombre de résultats, que j'indique en note quand je suis amené à les énoncer de nouveau. J'ai étudié plus spécialement les points laissés dans l'ombre par cet auteur. C'est ainsi, par exemple, que je traite assez longuement (n° **26**) des hypersurfaces de l'espace à 4 dimensions dont l'hyperplan tangent ne dépend que de deux paramètres. En général, elles sont engendrées par une famille de tangentes caractéristiques d'une V_2 d'espèce Φ de Segre, ou par les tangentes asymptotiques d'une V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques. J'examine aussi certains problèmes plus particuliers, tels que la détermination de toutes les V_3 admettant à la fois une famille de plans générateurs et une famille doublement infinie de droites génératrices (n° **58**). Il n'existe que deux V_3 de cette nature projectivement distinctes, et l'une, située dans l'espace à 4 dimensions, n'est que la projection de l'autre, qui est située dans l'espace à 5 dimensions, la projection étant faite d'un point extérieur à la variété.

Au sujet des V_3 dont l'hyperplan osculateur a plus de 5 dimensions, je ne connais qu'une note de M. Cartan (²), où sont énoncés plusieurs résultats concernant deux types de V_3. Cette note signale en particulier l'existence d'une V_3 triplement réglée de l'espace à 7 dimensions, d'où je déduis, par projection, quatre V_3 triplement réglées, projectivement distinctes, de l'espace à 6 dimensions (n° **69**).

En étudiant les V_3 dont le réseau asymptotique est constitué par trois plans doubles, j'ai été conduit à généraliser la transformation de Laplace relative aux réseaux conjugués. Il existe en effet sur ces V_3 trois familles de courbes dont la considération permet de déduire, d'une V_3 donnée, six nouvelles V_3 de même structure en général.

(¹) SISAM, *On three-spreads satisfying four or more homogenous linear partial differential equations of the second order* (*Amer. Journ. of Math.*, 1911).

(²) CARTAN, *Sur les variétés à trois dimensions* (*Comptes rendus*, 1918).

Outre les travaux déjà cités sur la géométrie projective infinitésimale des variétés, je signalerai encore une étude de Del Pezzo sur les hyperplans osculateurs à une variété ([1]), et les Mémoires de Servant ([2]), Levi ([3]), Artom ([4]), Moore ([5]), sur les variétés à deux dimensions.

Qu'il me soit permis en terminant d'exprimer toute la reconnaissance que je dois à M. Cartan pour l'intérêt qu'il n'a cessé de montrer pour mon travail et pour les conseils précieux dont il a bien voulu m'aider au cours de ces recherches.

CHAPITRE PREMIER.

I. — Systèmes de référence mobiles dans l'espace projectif.

1. Soit un espace projectif à n dimensions, rapporté à un système quelconque de coordonnées projectives, que nous regarderons comme fixe, ou absolu. Dans cet espace, $n+1$ points A_0, A_1, ..., A_n définissent un nouveau système de coordonnées, pourvu que le déterminant du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre, formé par les coordonnées de ces points, soit différent de zéro. Tout point M peut alors, et d'une seule manière, s'exprimer sous la forme

$$M = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n,$$

égalité qui en condense en réalité $n+1$. Les nombres x_0, x_1, ..., x_n sont les coordonnées *relatives* du point M dans le système de référence constitué par les points A_0, A_1, ..., A_n.

([1]) *Rendic. Accad. Napoli*, 1886.

([2]) Servant, *Sur une extension des formules de Gauss* (*Bull. Soc. math.*, 1902).

([3]) Levi, *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in iperspazio* (*Annali R. Scuola Norm. Pisa*, 1908).

([4]) Artom, *Richerche proiettive sulle linee tracciate in una superficie immersa in uno spazio a piu dimensioni* (*Period. di Matem.*, 1912).

([5]) Moore, *Surfaces in hyperspace which have a tangent line with three-point contact passing through each point* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 1912).

Le choix d'un système de référence ainsi défini dépend de $(n+1)^2$ paramètres, qui seront, par exemple, les $(n+1)^2$ coordonnées absolues des sommets de référence. Le déplacement infinitésimal le plus général d'un tel système de référence s'obtiendra en donnant à ces $(n+1)^2$ paramètres des accroissements arbitraires infiniment petits. Soit $A_i + dA_i$ le point avec lequel vient coïncider A_i; dA_i est un point qui a pour coordonnées absolues les différentielles des coordonnées de A_i. Si l'on rapporte ce point, et les points analogues correspondant aux diverses valeurs de l'indice i, au système de référence mobile, on obtient les formules :

$$dA_i = \omega_{i0} A_0 + \omega_{i1} A_1 + \ldots + \omega_{in} A_n \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{1}$$

Les ω_{ij}, qui sont les coordonnées relatives des points dA_i, sont en même temps les composantes relatives du déplacement instantané du système de référence mobile. Ce sont des formes différentielles linéaires par rapport aux différentielles des paramètres absolus, les coefficients étant des fonctions de ces mêmes paramètres. Si l'on annule toutes ces formes ω_{ij}, les formules (1) montrent que le système de référence reste inaltéré; cette remarque prouve que les formes de Pfaff ω_{ij} sont $(n+1)^2$ combinaisons indépendantes des différentielles des $(n+1)^2$ paramètres absolus.

Le mouvement instantané de notre repère mobile dépend d'un paramètre de plus que celui des systèmes de référence que l'on considère habituellement dans l'espace projectif. Si l'on remarque que les transformations qui changent A_0 en kA_0, A_1 en kA_1, ..., A_n en kA_n correspondent à la transformation identique du groupe projectif, on voit qu'on peut faire disparaître le paramètre surabondant en assujettissant le déterminant des $(n+1)^2$ coordonnées absolues des sommets de référence à conserver une valeur constante, condition qui se traduit par la relation :

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots + \omega_{nn} = 0.$$

2. Les covariants bilinéaires des formes de Pfaff ω_{ij} peuvent s'exprimer au moyen de ces formes elles-mêmes. Pour obtenir leur expression, dérivons extérieurement les deux membres des équations (1); les premiers membres ont une dérivée extérieure nulle, car ce sont des différentielles exactes, et il vient :

$$0 = \omega'_{i0} A_0 + \omega'_{i1} A_1 + \ldots + \omega'_{in} A_n + [dA_0 \omega_{i0}] + [dA_1 \omega_{i1}] + \ldots + [dA_n \omega_{in}].$$

Tenant compte des relations (1) elles-mêmes, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \{ \omega'_{ik} - [\omega_{i0} \omega_{0k}] - [\omega_{i1} \omega_{1k}] - \ldots - [\omega_{in} \omega_{nk}] \} A_k = 0.$$

Comme aucune relation linéaire ne peut exister entre les points $A_0, A_1, \ldots, A_n$, on doit annuler les $n+1$ coefficients qui figurent dans cette égalité, et l'on obtient ainsi les formules fondamentales :

$$(2) \qquad \omega'_{ik} = \sum_{j=0}^{n} [\omega_{ij} \omega_{jk}] \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n),$$

qui sont les formules de structure du groupe projectif à n variables.

5. Rappelons, sans les démontrer, quelques théorèmes dont nous ferons un usage fréquent.

THÉORÈME I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la variété plane à $p-1$ dimensions, définie par p points indépendants, (c'est-à-dire non situés dans une même variété plane à $p-2$ dimensions) $M_1, M_2, \ldots, M_p$, soit fixe, est que les différentielles $dM_1, \ldots, dM_p$ puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $M_1, \ldots, M_p$ seulement.*

Le point M_1 est fixe, par exemple, si

$$dM_1 = \omega_{11} M_1.$$

La transformation subie par M_1 n'est pas un déplacement spatial : ses coordonnées homogènes se trouvent multipliées seulement par un même facteur numérique.

Utilisant les notations de Grassmann, nous désignerons la droite qui passe par les deux points M_1, M_2 au moyen du symbole $[M_1 M_2]$, qui représente le produit extérieur des deux formes de première espèce

$$M_1 = x_0 A_0 + x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n,$$
$$M_2 = y_0 A_0 + y_1 A_1 + \ldots + y_n A_n.$$

La droite $[M_1 M_2]$ est ainsi représentée par une forme de deuxième espèce, linéaire par rapport aux symboles $[A_i A_j]$, les coefficients étant les coordonnées pluckériennes de la droite.

Si les points M_1 et M_2 sont mobiles, on aura pour la droite $[M_1 M_2]$:

$$d[M_1 M_2] = [dM_1 M_2] + [M_1 dM_2].$$

Quand la condition posée dans l'énoncé du théorème est remplie, on a des formules telles que :

$$dM_1 = \omega_{11} M_1 + \omega_{12} M_2,$$
$$dM_2 = \omega_{21} M_1 + \omega_{22} M_2,$$

et par conséquent :

$$d[M_1 M_2] = (\omega_{11} + \omega_{22}) [M_1 M_2].$$

Telle est la relation qui exprime que la droite $[M_1 M_2]$ est fixe.

Pour une variété plane à $p - 1$ dimensions, que nous représenterons par $[M_1 M_2 \ldots M_p]$, la condition énoncée dans le théorème donnera :

$$d[M_1 M_2 \ldots M_p] = (\omega_{11} + \omega_{22} + \ldots + \omega_{pp}) [M_1 M_2 \ldots M_p].$$

THÉORÈME II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le point*

$$x_1 M_1 + x_2 M_2 + \ldots + x_p M_p$$

de la variété plane mobile $[M_1 M_2 \ldots M_p]$ soit encore situé dans la variété après un déplacement infinitésimal de celle-ci, est que le point

$$x_1\, dM_1 + x_2\, dM_2 + \ldots + x_p\, dM_p$$

appartienne lui-même à la variété.

Ce théorème nous servira fréquemment dans la recherche des caractéristiques des variétés planes mobiles [1].

II. — Propriétés infinitésimales projectives des V_p.

4. Pour étudier une V_p, nous particulariserons le système de référence mobile de la façon suivante :

A chaque point A de cette variété, nous adjoindrons p points A_1, A_2, ..., A_p situés dans l'hyperplan tangent en A à la V_p, et $n-p$ autres points provisoirement arbitraires qui, avec les $p+1$ premiers, constitueront le repère mobile. (Au lieu de A_0 nous écrivons A, et ω_i au lieu de ω_{0i}).

Il existe après ce choix des relations identiques entre les composantes ω_{ij} du déplacement instantané. D'abord le point A étant assujetti à rester sur la V_p, le point dA sera situé dans l'II_p tangent en A à la variété; on aura donc identiquement :

$$\omega_{p+1}=0, \qquad \omega_{p+2}=0, \qquad \ldots, \qquad \omega_n=0$$

et, par dérivation extérieure :

$$\begin{gathered}
[\omega_1\omega_{1,p+1}]+[\omega_2\omega_{2,p+1}]+\ldots+[\omega_p\omega_{p,p+1}]=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[\omega_1\omega_{1,n}]+[\omega_2\omega_{2,n}]+\ldots+[\omega_p\omega_{p,n}]=0.
\end{gathered}$$

Les p formes ω_1, ..., ω_p étant linéairement indépendantes, la résolution de ces relations extérieures donne les formules [2] :

$$\omega_{1\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\omega_1}, \qquad \omega_{2\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\omega_2}, \qquad \ldots, \qquad \omega_{p\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\omega_p} \qquad (\alpha=p+1, \ldots, n),$$

où Φ_{p+1}, Φ_{p+2}, ..., Φ_n sont $n-p$ formes quadratiques en ω_1, ω_2, ..., ω_p.

---

[1] Dans ce qui suit, la notation II_p désignera un hyperplan à p dimensions, c'est-à-dire une variété plane à p dimensions; E_n désignera un espace projectif à n dimensions.

[2] En vertu d'un théorème concernant la résolution des relations quadratiques alternées (E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante*, ..., n° 17).

5. Faisons décrire au point A une courbe de la V_p. Le plan osculateur à cette courbe en A sera $[A\, dA\, d^2A]$. Ne conservant dans d^2A que les termes linéaires en A_{p+1}, ..., A_n, il viendra :

$$\begin{aligned} d^2A &= (\omega_1\omega_{1,p+1}+\ldots+\omega_p\omega_{p,p+1})A_{p+1}+\ldots+(\omega_1\omega_{1n}+\ldots+\omega_p\omega_{pn})A_n \\ &= \Phi_{p+1}A_{p+1}+\Phi_{p+2}A_{p+2}+\ldots+\Phi_n A_n. \end{aligned}$$

Le plan osculateur à la courbe considérée est donc défini par le point A, un autre point déterminé de l'H_p tangent, et enfin un point M de la variété plane $[A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_n]$ ayant pour coordonnées homogènes dans cette variété :

$$x_{p+1} = \Phi_{p+1}, \quad \ldots, \quad x_n = \Phi_n.$$

Le point M ne dépend que de la direction de la tangente à la courbe considérée : il est le même pour toutes les courbes ayant la même tangente en A.

Il peut se faire que les $n-p$ formes quadratiques Φ, à p variables, ne soient pas linéairement indépendantes. Soit q le nombre de celles qui sont indépendantes. Le point M ne sort pas alors d'une certaine variété plane à q dimensions située dans $[A_{p+1}, \ldots, A_n]$. On peut choisir les sommets $A_{p+1}, \ldots, A_{p+q}$ dans cette variété plane, et, après ce choix, les formes $\Phi_{p+q+1}, \ldots, \Phi_n$ sont identiquement nulles.

La variété plane à $p+q$ dimensions ainsi définie est la plus petite variété plane qui contienne les plans osculateurs aux différentes courbes tracées sur la variété et passant par A : c'est l'*hyperplan osculateur* à la variété en A. Le lieu des plans osculateurs ne se confond pas d'ailleurs nécessairement avec l'hyperplan osculateur : c'est en général une variété courbe, lieu de l'H_{p+1} projetant à partir de l'H_p tangent le point M qui décrit dans l'hyperplan $[A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_{p+q}]$ une variété à $p-1$ dimensions.

6. Coupons la V_p par un hyperplan à $n-1$ dimensions contenant l'H_p tangent en A, mais ne contenant pas l'hyperplan osculateur en A. L'intersection avec la V_p est une V_{p-1}^* présentant en A un point conique du deuxième ordre, dont les tangentes

vérifient une équation de la forme :

$$\lambda_{p+1}\Phi_{p+1}+\ldots+\lambda_{p+q}\Phi_{p+q}=0.$$

En faisant tourner l'hyperplan sécant autour de l'H_p tangent, on obtient un réseau linéaire de cônes, qu'on appelle le *réseau asymptotique* relatif au point A. Les formes Φ, et toute combinaison linéaire de ces formes, sont les *formes asymptotiques* relatives au point A.

Si une tangente est commune à tous les cônes du réseau asymptotique, elle est appelée *tangente asymptotique*. Toute courbe de la V_p, tangente en A à une tangente asymptotique, a son plan osculateur en A contenu dans l'H_p tangent à la V_p en A, et réciproquement.

Deux tangentes sont dites *conjuguées*, si elles sont conjuguées par rapport à tous les cônes du réseau asymptotique. Lorsque le point A se déplace sur la variété dans la direction d'une de ces tangentes, l'H_p tangent en A a pour caractéristique la direction conjuguée.

7. En considérant les variétés planes à 3 dimensions osculatrices en A aux différentes courbes tracées sur la V_p, on est conduit pareillement à la notion d'*hyperplan osculateur du second ordre* à la V_p en A : c'est la plus petite variété plane contenant tous les H_3 osculateurs en A aux différentes courbes de la V_p. Si cet hyperplan, qui contient naturellement l'hyperplan osculateur (du premier ordre), a $p+q+r$ dimensions, nous choisirons à son intérieur les sommets $A_{p+q+1}, \ldots, A_{p+q+r}$. L'$H_3$ osculateur en A à une courbe de V_p est $[A\, dA\, d^2A\, d^3A]$, et d^3A s'écrit, en négligeant sa projection dans l'hyperplan osculateur :

$$d^3A=\Psi_{p+q+1}A_{p+q+1}+\ldots+\Psi_{p+q+r}A_{p+q+r}.$$

Les coefficients Ψ sont des formes cubiques en $\omega_1, \ldots, \omega_p$, linéairement indépendantes, qui ont pour expression :

$$\Psi_\lambda=\omega_{p+1,\lambda}\Phi_{p+1}+\ldots+\omega_{p+q,\lambda}\Phi_{p+q}$$

et qu'on appelle les *formes asymptotiques du second ordre*.

Si l'on coupe la V_p par un H_{n-1} passant par l'hyperplan osculateur du premier ordre, mais non par l'hyperplan osculateur du deuxième ordre à la V_p en A, la V_{p-1} d'intersection présente en A un point conique du troisième ordre, l'équation du cône tangent étant :

$$\mu_1 \Psi_{p+q+1} + \ldots + \mu_r \Psi_{p+q+r} = 0.$$

Le réseau linéaire de cônes obtenu en faisant tourner l'H_{n-1} sécant autour de l'H_{p+q} osculateur, est dit le *réseau asymptotique du deuxième ordre*. Une tangente commune à tous les cônes $\Psi_\lambda = 0$ est une *tangente asymptotique du deuxième ordre*. En se reportant à l'expression analytique des formes Ψ_λ, on voit que toute tangente asymptotique du premier ordre est tangente asymptotique du deuxième ordre, mais la réciproque n'est pas vraie.

De même qu'une courbe asymptotique du premier ordre a un contact du deuxième ordre avec l'H_p tangent en chacun de ses points, une tangente asymptotique du deuxième ordre a un contact du troisième ordre en chacun de ses points avec l'H_{p+q} osculateur à la V_p en ce point.

8. Rappelons trois théorèmes de grande importance :

THÉORÈME I. — *Les dérivées partielles du premier ordre d'une forme asymptotique du deuxième ordre sont des formes asymptotiques du premier ordre.*

Il suit de ce théorème qu'une fois connu le réseau asymptotique du premier ordre, le réseau asymptotique du deuxième ordre n'est pas arbitraire.

THÉORÈME II. — *Si le réseau asymptotique du deuxième ordre est identiquement nul, l'hyperplan osculateur du deuxième ordre se confond avec celui du premier ordre, et ce dernier est le même en tous les points de la V_p. La V_p est alors contenue entièrement dans son H_{p+q} osculateur.*

THÉORÈME III. — *Le nombre minimum de variables au moyen* *desquelles peuvent s'exprimer les formes asymptotiques du premier ordre est égal au nombre de paramètres dont dépend l'hyperplan tangent à la V_p. La même relation existe entre les formes asymptotiques du deuxième ordre et l'hyperplan osculateur du premier ordre.*

La méthode employée permet évidemment de définir les hyperplans osculateurs d'ordre quelconque; entre les réseaux asymptotiques de deux ordres consécutifs, il existe des relations qui donnent lieu à des théorèmes analogues aux précédents.

9. Si nous dérivons extérieurement les équations établies au nº **4** :

$$\omega_{i\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial\omega_i} = 0, \qquad \omega_{i\lambda} = 0, \qquad \omega_{i\mu} = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, p; \alpha = p+1, \ldots, p+q; \lambda = p+q+1, \ldots, p+q+r; \mu > p+q+r)$

nous obtiendrons des relations quadratiques de la forme:

$$[\omega_1 \varpi_{i1\rho}] + [\omega_2 \varpi_{i2\rho}] + \ldots + [\omega_p \varpi_{ip\rho}] = 0, \qquad \text{avec} \qquad \varpi_{ij\rho} = \varpi_{ji\rho}.$$

dont la résolution donnera les formules :

$$\varpi_{ij\rho} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2 F_\rho}{\partial\omega_i\,\partial\omega_j} \qquad (\rho = \alpha, \lambda, \mu),$$

où F_{p+1}, F_{p+2}, ..., F_{p+q} désignent q formes cubiques que nous appellerons les *formes biasymptotiques;*

F_{p+q+1}, ..., F_{p+q+r} sont les formes asymptotiques du deuxième ordre $(F_\lambda = \Psi_\lambda)$;

$F_{p+q+r+1}$, ..., F_n sont identiquement nulles, à cause de la particularisation du repère mobile.

Appliquons de nouveau l'opération de la dérivation extérieure aux équations ainsi obtenues; la résolution des relations quadratiques fera à son tour apparaître des formes biquadratiques $F^{(4)}$ parmi lesquelles figureront en particulier, pour les valeurs

$$\mu = p+q+r+1, \quad \ldots, \quad p+q+r+s,$$

les formes asymptotiques du troisième ordre. On peut continuer indéfiniment l'application du même procédé.

10. Dans une Communication récente à l'Académie [1], M. Cartan a montré la signification géométrique des formes différentielles qui s'introduisent de cette façon, pour le cas des hypersurfaces (V_p dans E_{p+1}). Il est facile de généraliser pour les V_p de E_n.

En rapportant la V_p au système de coordonnées projectives attaché au point A de la V_p, l'hyperplan $[AA_1 A_2 \ldots A_p]$ étant l'hyperplan tangent en A à la V_p, les équations de la variété prennent la forme :

$$x_\rho = \varphi_\rho^{(2)}(x_1 \ldots x_p) + \varphi_\rho^{(3)}(x_1 \ldots x_p) + \ldots + \varphi_\rho^{(k)}(x_1 \ldots x_p) + \ldots$$
$$(\rho = p+1, p+2, \ldots, n),$$

où $\varphi_\rho^{(k)}$ désigne un polynome entier et homogène de degré k. Si l'on substitue aux coordonnées courantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les formes de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_p$, on obtient $n-p$ suites de formes différentielles qui ne diffèrent que par des facteurs numériques des formes déjà introduites par dérivation extérieure :

$$\varphi_\rho^{(2)} = \frac{1}{2!}\Phi_\rho, \qquad \varphi_\rho^{(3)} = \frac{1}{3!}F_\rho, \qquad \ldots, \qquad \varphi_\rho^{(k)} = \frac{1}{k!}F_\rho^{(k)}.$$

La loi de formation de ces différentes suites est donnée par les identités suivantes, qui généralisent celles de M. Cartan :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \varphi_\rho^{(2)}}{\partial x_i}\omega_i = \sum_{i=1}^{p} x_i \omega_{i\rho},$$

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\rho^{(k+1)}}{\partial x_i}\omega_i = \overline{d\varphi_\rho^{(k)}} + (\omega_{\rho\rho} - \omega_{00})\varphi_\sigma^{(k)} + \sum_{\sigma \neq \rho} \omega_{\sigma\rho}\varphi_\sigma^{(k)} + (k-2)\left(\sum_i x_i\omega_{i0}\right)\varphi_\rho^{(k-1)}$$
$$- \sum_{i=1}^{p}\sum_{\sigma=p+1}^{n} \omega_{\sigma i} \sum_{a=2}^{k-1} \frac{\partial \varphi_\rho^{(a)}}{\partial x_i}\varphi_\sigma^{(k+1-a)} + \sum_{\sigma=p+1}^{n} \omega_{\sigma 0} \sum_{a=2}^{k-2}(a-1)\varphi_\rho^{(a)}\varphi_\sigma^{(k-a)}.$$

La notation $\overline{d\varphi_\rho^{(k)}}$ désigne la somme de deux quantités : l'une provenant de la différentiation des coefficients de la forme $\varphi_\rho^{(k)}$, l'autre étant l'expression

$$-\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \varphi_\rho^{(k)}}{\partial x_i}\left[x_i\overline{\omega_{ii} - \omega_{00}} + \sum_{j \neq i} x_j \omega_{ji}\right].$$

---

[1] *Comptes rendus*, 7 janvier 1924.

11. Nous avons appelé *tangentes asymptotiques du deuxième ordre*, les tangentes aux courbes qui ont un contact du troisième ordre avec l'hyperplan osculateur du premier ordre à la V_p. Nous aurons parfois à considérer les courbes qui ont un contact du troisième ordre avec l'hyperplan tangent à la V_p; leurs tangentes sont données par les $2q$ équations :

$$\Phi_\alpha(\omega_1 \ldots \omega_p) = 0, \qquad F_\alpha(\omega_1 \ldots \omega_p) = 0 \qquad (\alpha = p+1, p+2, \ldots, p+q)$$

dont q sont du deuxième et q du troisième degré. Nous les appellerons *tangentes biasymptotiques* (¹). Les courbes biasymptotiques ainsi définies sont, parmi les asymptotiques, celles qui ont leur plan osculateur contenu dans tous les hyperplans tangents aux cônes asymptotiques suivant la même génératrice, à moins toutefois que leur plan osculateur ne soit indéterminé.

12. Le système de référence que nous avons attaché au point A, et particularisé dans une certaine mesure, est loin d'être complètement déterminé. Appelons *paramètres principaux* les p paramètres qui définissent la position de A sur la V_p; le repère mobile dépend, en outre, d'une certaine quantité de *paramètres secondaires*, dont le nombre va diminuant chaque fois que nous imposons une nouvelle condition aux sommets de référence.

Il est facile, dans certains cas, de préciser le choix des sommets de référence au moyen de considérations géométriques; mais en dehors de cas relativement simples, le recours à l'analyse est pratiquement nécessaire. Nous utiliserons, pour cette particularisation, ou ce qui revient au même, pour la normalisation des suites de formes différentielles qui s'introduisent successivement, les formules du n° **10**. Le symbole δa désignera la variation infinitésimale que subit la quantité a quand on donne aux para-

(¹) Dans l'ouvrage de STRUIK intitulé : *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie* (Berlin, Springer, 1922), les *biasymptotiques* sont désignées (p. 79) sous le nom de *courbes asymptotiques du deuxième ordre* (*hauptangentenkurven 2-ter ordnung*).

mètres secondaires indépendants une variation infiniment petite, *les paramètres principaux restant fixes;* le symbole e_{ij} désignera ce que devient la forme de Pfaff ω_{ij} quand on y remplace le symbole d par le symbole δ (¹). Il est clair qu'avec cette notation, on aura :

$$e_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

III. — Les systèmes différentiels en involution.

15. Dans la présente étude, je me suis proposé avant tout de rechercher le degré de généralité des V_3 possédant une structure projective donnée, c'est-à-dire ayant un réseau asymptotique réductible à un type projectif donné.

L'application de la théorie de M. Cartan sur les systèmes différentiels en involution s'imposait. Les V_p qui appartiennent à un type projectif déterminé peuvent être définies, en effet, au point de vue analytique, comme les multiplicités intégrales à p dimensions d'un système de Pfaff formé de s équations. Ces équations sont linéaires par rapport aux différentielles de $p + s$ variables (dont p sont indépendantes et s dépendantes), les coefficients de ces équations renfermant, outre les variables, un certain nombre de paramètres auxiliaires. Soit

$$(1) \qquad \theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_s = 0$$

ce système. Choisissons de plus p formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, qui, jointes à $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, forment $p + s$ combinaisons linéaires indépendantes des différentielles des variables.

Les relations quadratiques alternées qu'on déduit du système (1) en égalant à zéro les covariants bilinéaires des formes $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ peuvent s'écrire, quand on tient compte des équations (1) elles-

(¹) Cette méthode de particularisation a été exposée en détail par M. Cartan, dans son Mémoire *Sur la déformation projective des surfaces* (*Ann. Éc. Norm.*, 1920, pp. 280-286). Nous omettrons le plus souvent, pour abréger, les calculs de particularisation.

mêmes, et en supposant le système (1) compatible :

$$(2)\qquad \begin{cases} [\omega_1\varpi_{11}] + [\omega_2\varpi_{21}] + \ldots + [\omega_p\varpi_{p1}] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ [\omega_1\varpi_{1s}] + [\omega_2\varpi_{2s}] + \ldots + [\omega_p\varpi_{ps}] = 0. \end{cases}$$

Les formes ϖ_{ij} sont linéaires par rapport aux différentielles des paramètres auxiliaires, et peuvent aussi contenir les différentielles des variables. Adjoignons-les aux formes θ_k et ω_i, et soit $p+s+q$ le nombre de formes indépendantes obtenues : d'après un théorème général ([1]), le nombre q est le nombre de paramètres essentiels qui figurent dans les coefficients du système (1).

14. Pour reconnaître si le système (1) est en involution, et quel est le degré d'indétermination de ses multiplicités intégrales à p dimensions, nous introduisons p systèmes d'indéterminées :

$$\begin{array}{llll} \xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_p, \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \ldots, & \xi'_p, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \xi_1^{(p-1)}, & \xi_2^{(p-1)}, & \ldots, & \xi_p^{(p-1)}, \end{array}$$

puis nous considérons les sp équations linéaires :

$$\begin{array}{l} \xi_1\varpi_{11} + \xi_2\varpi_{21} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \xi_p\varpi_{p1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_1\varpi_{1s} + \xi_2\varpi_{2s} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \xi_p\varpi_{ps} = 0; \\ \xi'_1\varpi_{11} + \xi'_2\varpi_{21} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \xi'_p\varpi_{p1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi'_1\varpi_{1s} + \xi'_2\varpi_{2s} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \xi'_p\varpi_{ps} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_1^{(p-1)}\varpi_{11} + \xi_2^{(p-1)}\varpi_{21} + \ldots + \xi_p^{(p-1)}\varpi_{p1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi_1^{(p-1)}\varpi_{1s} + \xi_2^{(p-1)}\varpi_{2s} + \ldots + \xi_p^{(p-1)}\varpi_{ps} = 0. \end{array}$$

Appelons s_1 le nombre des formes ϖ_{ij} indépendantes que l'on peut tirer des s premières équations;

$s_1 + s_2$ le nombre des ϖ_{ij} que l'on peut tirer des $2s$ premières équations ;

([1]) E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante* ..., n° 30 (*loc. cit.*).

$s_1+s_2+\ldots+s_p$ le nombre des ϖ_{ij} indépendantes que l'on peut tirer des ps équations, et qui est du reste égal au nombre total des ϖ_{ij} indépendantes.

Résolvons enfin les relations quadratiques (2) en prenant pour les ϖ_{ij} des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, avec le plus grand nombre possible de coefficients arbitraires.

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) *soit en involution est que le nombre des coefficients arbitraires qui s'introduisent dans cette résolution soit égal à*

$$s_1+2s_2+3s_3+\ldots+ps_p.$$

Si cette condition est réalisée avec $s_\alpha > 0$, $s_{\alpha+1}=\ldots=s_p=0$, les multiplicités intégrales les plus générales à p dimensions dépendent de s_α *fonctions arbitraires de* α *arguments.*

Si elle n'est pas réalisée, on devra *prolonger* le système (1) en y adjoignant les équations données par la résolution la plus générale des relations quadratiques (2). Le nouveau système ainsi obtenu aura la même nature que le système primitif; on cherchera par la méthode indiquée s'il est en involution. Un théorème général nous apprend qu'en répétant un nombre suffisant de fois ce prolongement, on arrive nécessairement ou bien à un système incompatible, ou bien à un système en involution ([1]).

Sous certaines réserves, on peut se contenter de prolonger partiellement le système (1), en y adjoignant une partie seulement des équations obtenues par la résolution des relations extérieures (2).

CHAPITRE II.

LES VARIÉTÉS A DEUX DIMENSIONS.

15. Le but du présent Chapitre est d'exposer brièvement les propriétés projectives des V_2 de E_n auxquelles nous ferons allusion dans la théorie des variétés à 3 dimensions.

([1]) E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, n^{os} 10, 11, 12 (*loc. cit.*).

L'hyperplan osculateur à une V_2 ne peut avoir plus de 5 dimensions. Quand il a 3 dimensions en chaque point de la V_2, deux cas sont à distinguer, suivant que la forme asymptotique unique est réductible à un carré, ou non : dans le premier cas, on a les *surfaces développables de* E_n; dans le second cas, on a les *surfaces non développables de* E_3. On doit remarquer, en effet, que toute V_2 qui possède deux familles de lignes asymptotiques est nécessairement contenue dans un espace à 3 dimensions.

Quand l'hyperplan osculateur à une V_2 a, en tout point, 4 dimensions, nous dirons, après Segre, que la V_2 est *d'espèce* Φ. Une V_2 d'espèce Φ admet au plus une famille de lignes asymptotiques.

Enfin, si l'hyperplan osculateur a 5 dimensions en tout point A, il n'est plus le lieu des ∞^2 plans osculateurs aux différentes courbes tracées sur la V_p et passant en A.

I. — Les V_2 développables de E_n ($n \geqq 3$).

16. Soit $\Phi_3 = \omega_1^2$ l'unique forme asymptotique de la V_2. Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_1 = n - 1$; la généralité des V_2 intégrales est donc la même que celle des courbes gauches de E_n. Ce fait s'explique si l'on remarque que ces V_2 peuvent être considérées comme le lieu des tangentes $[AA_2]$ à une courbe gauche, et réciproquement.

En particularisant convenablement le repère mobile, la forme biasymptotique

$$F_3 = \omega_1^2(\omega_{33} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) - 2\omega_1\omega_2\omega_{21}$$

peut toujours être ramenée à zéro. Mais la forme biquadratique $F_3^{(4)}$ contient en général un terme en $\omega_1^3\omega_2$ qu'on ne peut réduire. Les V_2 pour lesquelles ce terme n'existe pas ne dépendent que de $n - 2$ fonctions de 1 argument : la génératrice $[AA_2]$ passe alors par un point fixe, et la V_2 est un *cône* ayant pour directrice une courbe située dans un espace à $n - 1$ dimensions.

II. — Les surfaces non développables de E_3 [1].

17. Les V_2, dont le plan tangent dépend de deux paramètres et dont l'hyperplan osculateur a 3 dimensions, sont des surfaces de E_3. En effet, leur unique forme asymptotique pouvant être ramenée à $2\,\omega_1\,\omega_2$, aucune forme asymptotique du deuxième ordre ne peut exister : l'hyperplan osculateur à la V_2 contient donc toute la variété (n° **8**, Th. I et II).

Le système différentiel qui définit ces variétés est en involution avec $s_2 = 1$. La forme biasymptotique

$$F_3 = -2\omega_1^2\,\omega_{12} + 2\omega_1\,\omega_2(\omega_{33} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) - 2\omega_2^2\,\omega_{21}$$

peut, dans le cas général, être ramenée à

$$F_3 = \omega_1^3 + \omega_2^3.$$

Si l'on suppose que le terme ω_2^3 n'y figure pas, on obtient les surfaces *réglées* : les intégrales du système différentiel correspondant ne dépendent plus que de 3 fonctions de 1 argument. La forme biquadratique $F_3^{(4)}$ peut dans ce cas être réduite à zéro. S'il en est de même de la forme du cinquième degré $F_3^{(5)}$, le système différentiel est complètement intégrable et définit la *surface réglée de Cayley*, qui admet un groupe projectif à 3 paramètres :

$$x_3 = x_1\,x_2 + \frac{1}{6}\,x_1^3.$$

En supposant enfin que la forme biasymptotique F_3 puisse être réduite à zéro, il en est de même de toutes les formes suivantes : le système différentiel est encore complètement intégrable et définit la *quadrique*

$$x_3 = x_1\,x_2.$$

---

(1) *Cf.* CARTAN, *Sur la déformation projective des surfaces* (*Ann. Éc. Norm.*, 1920). Les propriétés projectives des *surfaces réglées* ont été étudiées au moyen de la méthode de M. Cartan par P. MENTRÉ dans sa Thèse *Les variétés de l'espace réglé* (Paris, Presses Universitaires, 1923).

III. — Les V_2 d'espèce Φ.

18. Segre a particulièrement étudié les V_2 dont l'hyperplan osculateur a moins de 5 dimensions, et il les a appelées les surfaces d'espèce Φ. Ici cette expression désignera les V_2 dont l'hyperplan osculateur a exactement 4 dimensions. Deux cas distincts peuvent se présenter, suivant que les formes asymptotiques ont ou n'ont pas de facteur commun.

Les V_2 *d'espèce* Φ *à deux familles de caractéristiques.*

Quand les formes asymptotiques n'ont aucun facteur commun, on peut poser :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = \omega_2^2.$$

Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_2 = 2$: les V_2 de ce type dépendent donc de 2 fonctions de 2 arguments, quel que soit le nombre de dimensions de E_n $(n > 3)$.

Elles n'ont pas de lignes asymptotiques, mais elles admettent deux familles de lignes remarquables, qu'on peut définir de la façon suivante. En général, deux plans tangents consécutifs n'ont aucune droite commune : il y a exception si le second plan est pris dans l'une ou l'autre des directions définies par

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0.$$

Les courbes correspondantes ont été appelées par Segre les *caractéristiques* (¹) de la surface. Les plans tangents à la surface le long d'une caractéristique enveloppent une surface développable, dont les génératrices sont des tangentes caractéristiques de l'autre famille. Le lieu des arêtes de rebroussement des développables correspondant à une famille de caractéristiques est, en général, une surface de même structure que la surface d'où l'on est parti. C'est une transformation analogue à la transformation de Laplace pour les réseaux conjugués.

(¹) Cette dénomination a trait à la relation qui existe entre ces courbes et l'équation aux dérivées partielles que vérifient les coordonnées homogènes de la surface.

Il peut se faire que l'une des transformées, ou les deux, dégénèrent en une courbe. La surface primitive est alors l'enveloppe d'une famille ou de deux familles de cônes : dans le premier cas elle ne dépend que d'une fonction de deux arguments ; dans le second cas, de $2n$ fonctions d'un argument.

Dans E_5, ces V_2 ont en général une forme asymptotique du second ordre réductible à $\Psi_5 = \omega_1^3 + \omega_2^3$ qui, égalée à zéro, définit trois familles de tangentes asymptotiques du deuxième ordre.

Les V_2 d'espèce Φ à une famille d'asymptotiques.

19. Dans le cas où les formes asymptotiques ont un facteur commun, on peut prendre pour base du réseau

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2$$

et le système différentiel qu'on obtient est en involution avec $s_2 = 1$. Les V_2 considérées, qui peuvent exister dans E_n $(n > 3)$, dépendent seulement d'une fonction de deux arguments.

C'est à ce type qu'appartiennent les V_2 *réglées non développables* de E_n $(n > 3)$. Les asymptotiques définies par l'équation :

$$\omega_1 = 0$$

seront rectilignes, si la forme biasymptotique F_4 ne contient pas de terme en ω_2^3 : le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_1 = 2n - 3$, ce qui est effectivement le degré de généralité des surfaces réglées de E_n.

Le réseau asymptotique du second ordre peut être engendré par les deux formes cubiques ω_1^3, $3\omega_1^2\omega_2$. Examinons le cas où l'hyperplan osculateur ne dépend que d'un paramètre : la seule forme asymptotique du deuxième ordre sera alors :

$$\Psi_5 = \omega_1^3.$$

Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_1 = n + 1$.

L'étude des V_2 intégrales se fait aisément en particularisant par étapes le repère mobile. On trouve que ces V_2 sont toujours *réglées*, la génératrice rectiligne étant située dans le plan osculateur à une courbe gauche arbitraire. Si la génératrice est assujettie, pour chacune des positions du plan osculateur, à passer par le point de contact du plan osculateur et de la courbe, la V_2 ne dépend plus que de n fonctions d'un argument. Enfin, comme cas plus particulier encore, la V_2 peut être engendrée par une droite qui s'appuie sur une droite fixe : il entre alors $n-1$ fonctions arbitraires d'un argument dans sa définition.

Inversement, toute V_2 de E_n $(n > 4)$ engendrée de l'une de ces trois manières, appartient au type que nous étudions, car son hyperplan osculateur ne dépend dans chacun de ces cas que d'un paramètre. L'explication du degré de généralité trouvé par l'analyse est dès lors immédiate.

IV. — Les V_2 dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum de dimensions.

20. Le lieu des plans osculateurs aux différentes courbes de la V_2 passant en A est dans ce cas une variété quadratique à 4 dimensions située dans l'hyperplan osculateur et renfermant l'hyperplan tangent à la V_2 en A.

Le système différentiel de ces V_2 s'écrit :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \omega_3 = 0, & \omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_\lambda = 0, \\ \omega_{13} = \omega_1, & \omega_{14} = \omega_2, & \omega_{15} = 0, & \omega_{1\lambda} = 0, \\ \omega_{23} = 0, & \omega_{24} = \omega_1, & \omega_{25} = \omega_2, & \omega_{2\lambda} = 0 \end{array}\right. \quad (\lambda = 6, 7, \ldots, n),$$

d'où l'on déduit le système dérivé :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} [\omega_1(\omega_{33} - 2\omega_{11} + \omega_{00})] & + [\omega_2(\omega_{43} - \omega_{21})] & = 0, \\ [\omega_1(\omega_{43} - \omega_{21})] & + [\omega_2\omega_{53}] & = 0, \\ [\omega_1(\omega_{34} - 2\omega_{12})] & + [\omega_2(\omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})] & = 0, \\ [\omega_1(\omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})] & + [\omega_2(\omega_{54} - 2\omega_{21})] & = 0, \\ [\omega_1\omega_{35}] & + [\omega_2(\omega_{45} - \omega_{12})] & = 0, \\ [\omega_1(\omega_{45} - \omega_{12})] & + [\omega_2(\omega_{55} - 2\omega_{22} + \omega_{00})] & = 0, \\ [\omega_1\omega_{3\lambda}] & + [\omega_2\omega_{4\lambda}] & = 0, \\ [\omega_1\omega_{4\lambda}] & + [\omega_2\omega_{5\lambda}] & = 0. \end{array}\right.$$

21. Quand l'espace a 5 dimensions, il existe sur cette V_2, en général, cinq familles de courbes remarquables qui ont en chacun de leurs points un contact du troisième ordre avec l'H_4 contenant deux plans tangents consécutifs. Si l'on cherche, en effet, à quelle condition le d^3A d'une courbe est situé dans l'H_4 défini par les cinq points A, A_1, A_2, $\omega_1 A_3 + \omega_2 A_4$, $\omega_1 A_4 + \omega_2 A_5$, on est conduit à annuler la forme différentielle du cinquième degré :

$$\begin{aligned} \Lambda = {} & \omega_1^4 \omega_{35} + \omega_1^3 \omega_2 (2\omega_{45} - \omega_{34}) + \omega_1^2 \omega_2^2 (\omega_{55} - 2\omega_{44} + \omega_{33}) \\ & + \omega_1 \omega_2^3 (2\omega_{43} - \omega_{54}) + \omega_2^4 \omega_{53}. \end{aligned}$$

Il existe une relation intéressante entre cette forme Λ et les formes biasymptotiques F_3, F_4, F_5. Par un choix convenable du repère mobile, la forme F_4 peut d'abord être réduite à zéro, et la forme Λ peut s'écrire :

$$\Lambda = \omega_1^2 F_5 + 2\omega_1 \omega_2 F_4 + \omega_2^2 F_3,$$

ce qui montre que les formes biasymptotiques peuvent être regardées comme les dérivées partielles du second ordre de la forme $\frac{1}{4.5}\Lambda$.

Les V_2 pour lesquelles la forme Λ est identiquement nulle ne dépendent que de constantes arbitraires, et se déduisent de l'une d'entre elles par un déplacement projectif. Après toutes les particularisations possibles du repère mobile, les formules du déplacement instantané deviennent :

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \\ dA_1 &= \omega_{10} A + \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2 + \omega_1 A_3 + \omega_2 A_4, \\ dA_2 &= \omega_{20} A + \omega_{21} A_1 + \omega_{22} A_2 + \omega_1 A_4 + \omega_2 A_5, \\ dA_3 &= \omega_{10} A_1 + (2\omega_{11} - \omega_{00}) A_3 + 2\omega_{12} A_4, \\ dA_4 &= \frac{1}{2}\omega_{20} A_1 + \frac{1}{2}\omega_{10} A_2 + \omega_{21} A_3 + (\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{00}) A_4 + \omega_{12} A_5, \\ dA_5 &= \omega_{20} A_2 + 2\omega_{21} A_4 + (2\omega_{22} - \omega_{00}) A_5. \end{aligned}$$

Cette V_2 admet donc un groupe projectif à huit paramètres, de même structure que le groupe projectif du plan. En coordonnées non homogènes, ses équations peuvent s'écrire :

$$x_3 = \frac{1}{2} x_1^2, \qquad x_4 = x_1 x_2, \qquad x_5 = \frac{1}{2} x_2^2.$$

C'est la surface du quatrième ordre de Véronèse, qui admet deux familles de coniques génératrices. Il est commode, pour obtenir les équations finies du groupe de cette V_2, de la représenter paramétriquement en coordonnées homogènes :

$$X_0 = v^2, \qquad X_1 = u_1 v, \qquad X_2 = u_2 v, \qquad X_3 = \frac{1}{2} u_1^2, \qquad X_4 = u_1 u_2, \qquad X_5 = \frac{1}{2} u_2^2;$$

puis d'effectuer la transformation projective la plus générale sur les paramètres u_1, u_2, v, considérés comme des coordonnées homogènes dans un plan.

22. On peut particulariser le repère mobile de telle sorte que $[AA_1]$ soit toujours tangente à une des courbes définies par $\Lambda = 0$. Ce choix entraîne comme conséquence :

$$\omega_{35} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_2).$$

Cherchons s'il existe des V_2 sur lesquelles les courbes $\omega_2 = 0$ qui vérifient $\Lambda = 0$, sont des sections hyperplanes. Il faut pour cela qu'on ait aussi :

$$\omega_{45} \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_2).$$

On est conduit, par des particularisations successives, à adjoindre au système (1) les équations :

$$\omega_{35} = 0, \qquad \omega_{45} = 0, \qquad \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{42} = 0,$$

et le nouveau système est en involution avec $s_2 = 2$: les V_2 qui jouissent de cette propriété ne dépendent, dans E_5, que de 2 fonctions de 2 arguments. Chacune des courbes $\omega_2 = 0$ est alors contenue dans un H_3 fixe, et deux H_3 consécutifs se coupent suivant un plan.

23. Les V_2 du type étudié dont le réseau asymptotique du second ordre est engendré par deux variétés triples sans autre point commun que le point A, ne dépendent, dans E_n, que de 3 fonctions de 2 arguments. Celles dont l'hyperplan osculateur ne dépend que d'un paramètre n'exigent pour leur définition que 2 fonctions de 2 arguments; elles ont une famille de lignes asymptotiques du second ordre.

CHAPITRE III.

LES V_3 DONT L'HYPERPLAN OSCULATEUR A QUATRE DIMENSIONS.

24. Le nombre des formes asymptotiques linéairement indépendantes d'une V_3 peut varier de 1 à 6. Une étude complète de tous les types projectifs serait très longue : je me bornerai à étudier les propriétés les plus intéressantes des V_3 dont l'hyperplan a 4, 5 ou 6 dimensions.

Les V_3 qui n'ont qu'une forme asymptotique se classent naturellement en trois groupes, suivant le rang de cette forme.

Au premier groupe appartiennent les V_3 développables de E_n. Le second groupe renferme les V_3 de E_4 dont l'hyperplan tangent dépend de 2 paramètres. Enfin le troisième groupe est constitué par les V_3 de E_4 dont l'hyperplan tangent dépend de trois paramètres.

I. — Les V_3 développables de E_n.

25. Ces V_3 appartiennent à un type général qui a été étudié par M. Cartan [1] : celui des V_p de E_n, dont l'hyperplan tangent ne dépend que d'un paramètre. Le résultat obtenu est le suivant :

Une V_p de ce type est l'enveloppe d'un H_p osculateur à une courbe gauche, ou équivalemment, le lieu d'un H_{p-1} osculateur à une courbe gauche; et réciproquement.

Dans le cas actuel, les V_3 sont donc, en général, engendrées

---

[1] *Sur les variétés de courbure constante* ... (n° 48). Voir aussi, pour l'étude des V_3 développables de E_4, E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces* (n^{os} 51-57).

par ∞^1 plans osculateurs à une courbe gauche, mais des cas particuliers peuvent se présenter : on peut avoir soit des *hypercônes*, engendrés par ∞^1 plans projetant d'un point fixe les tangentes à une courbe gauche quelconque située dans un E_{n-1} qui ne contient pas le point de vue; soit des V_3 engendrées par ∞^1 plans projetant à partir d'une *droite fixe* les points d'une courbe quelconque d'un E_{n-2} ne contenant pas cette droite.

Les V_3 développables peuvent exister dans E_n. Au contraire, si l'unique forme asymptotique d'une V_3 est de rang 2 ou 3, les réseaux asymptotiques d'ordre supérieur sont nuls, et la V_3 est une hypersurface de E_4.

II. — Les hypersurfaces de E_4 dont l'hyperplan tangent dépend de deux paramètres.

26. Prenons pour forme asymptotique :

$$\Phi_4 = 2\omega_2\omega_3.$$

Aucune forme asymptotique du second ordre ne pouvant exister, les V_3 sont des hypersurfaces de E_4 (n° **8**).

Elles sont les intégrales du système de Pfaff :

$$(1) \qquad \omega_4 = 0, \qquad \omega_{14} = 0, \qquad \omega_{24} = \omega_3, \qquad \omega_{34} = \omega_2,$$

qui a pour relations dérivées :

$$(2) \qquad \begin{cases} [\omega_2\omega_{13}] + [\omega_3\omega_{12}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{13}] + 2[\omega_2\omega_{23}] + [\omega_3(\omega_{33} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{44})] = 0, \\ [\omega_1\omega_{12}] + [\omega_2(\omega_{33} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{44})] + 2[\omega_3\omega_{32}] = 0. \end{cases}$$

Ce système étant en involution avec $s_2 = 2$, les hypersurfaces en question dépendent de 2 fonctions de 2 arguments.

Les tangentes asymptotiques se répartissent en deux plans, dont l'intersection $[AA_1]$ est une génératrice rectiligne de la V_3 : la première relation (2) montre en effet que les formes ω_{13} et ω_{12} sont indépendantes de ω_1.

Une première particularisation du repère mobile ramène ω_{13} à $a\omega_2$ et ω_{12} à $b\omega_3$.

A. En général $ab \neq 0$, et l'on peut encore particulariser de façon à avoir :

$$(3) \qquad \omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{12} = \omega_3,$$

et réduire la forme biasymptotique à

$$F_4 = 3\omega_1(\omega_2^2 + \omega_3^2).$$

Deux génératrices infiniment voisines se rencontreront si l'on a :

$$\omega_2 \omega_{13} - \omega_3 \omega_{12} = 0.$$

On peut donc réaliser cette condition en liant les paramètres par l'une ou l'autre des deux équations complètement intégrables :

$$\omega_2 - \omega_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

La V_3 est par conséquent engendrée de deux façons différentes par ∞^1 surfaces développables. Les deux points focaux sur la génératrice $[AA_1]$ sont :

$$M_1 = A - A_1 \qquad \text{et} \qquad M_2 = A + A_1.$$

Chacune des nappes focales est, en général, une surface de E_4 d'espèce Φ à deux familles de caractéristiques (nº **18**), les arêtes de rebroussement des développables génératrices constituant une famille de caractéristiques. *La* V_3 *est donc engendrée par une famille de tangentes caractéristiques d'une* V_2 *d'espèce* Φ.

Réciproquement, toute V_3, engendrée par les tangentes caractéristiques d'une V_2 d'espèce Φ située dans E_4, appartient au type étudié. En effet, soient A le point où la tangente $[AA_1]$ touche la V_2, et $[AA_2]$ la seconde tangente caractéristique issue de A. D'après la théorie des V_2 à caractéristiques, la droite $[AA_1]$ admet un second point focal, A_1 par exemple, dont le lieu est une V_2 de même structure. Soit $[A_1 B]$ la seconde tangente caractéristique de cette nouvelle V_2. L'hyperplan tangent à la V_3 lieu de $[AA_1]$ est le même tout le long de $[AA_1]$: c'est $[AA_1A_2B]$. Cette V_3 est donc une hypersurface dont l'hyperplan tangent ne dépend que de deux paramètres.

Le mode de génération des hypersurfaces considérées explique leur degré de généralité.

B. Soit maintenant $a = 0$. Au système (1) on doit adjoindre les équations :

$$\omega_{13} = 0, \qquad \omega_{12} = \omega_3 \tag{4}$$

et le système obtenu est en involution avec $s_2 = 1$.

Dans ce cas, il n'existe plus qu'une famille de développables génératrices, définie par l'équation complètement intégrable :

$$\omega_3 = 0.$$

La génératrice $[AA_1]$ ne possède qu'un point focal, le point A_1. La surface focale, lieu de A_1, est une V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques (nº **19**), si bien que *la V_3 est engendrée par les tangentes asymptotiques d'une V_2 d'espèce Φ.*

Réciproquement, toute V_3 engendrée par les tangentes asymptotiques d'une V_2 d'espèce Φ de E_4 appartient au type étudié. En effet, si cette V_2 a pour formes asymptotiques de base :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2,$$

la V_3 lieu de la tangente asymptotique $[AA_2]$ a le même hyperplan tangent le long de $[AA_2]$, à savoir $[AA_1A_2A_4]$: son hyperplan tangent ne dépend donc que de deux paramètres.

C. En supposant comme précédemment :

$$\omega_{13} = 0,$$

on peut en général résoudre les relations (2) par

$$\omega_{23} = c\,\omega_2,$$

en particularisant le repère mobile. Si $c = 0$, on obtient de nouvelles V_3, intégrales du système (1) auquel on adjoint :

$$\omega_{13} = 0, \qquad \omega_{23} = 0. \tag{5}$$

Ce nouveau système est en involution avec $s_1 = 5$.

L'équation complètement intégrable $\omega_3 = 0$ définit *une famille* *de plans générateurs*, car on a :

$$d[AA_1A_2] \equiv (\omega_{00}+\omega_{11}+\omega_{22})[AA_1A_2] \qquad (\text{mod } \omega_3).$$

Réciproquement, toute V_3 lieu d'un plan de E_4 à un paramètre, non osculateur à une courbe gauche, est une hypersurface du type considéré. En effet, le plan générateur reste tangent à une courbe fixe de E_4 et l'hyperplan tangent à la V_3 qu'il engendre est le même le long de toute droite située dans le plan générateur et passant par le point de contact de ce plan avec la courbe fixe.

D. A ce type appartiennent des hypersurfaces admettant *une famille de plans générateurs* et, en outre, *une famille doublement infinie de droites génératrices.*

Supposons en effet que les équations (5) soient vérifiées. Le système dérivé (2) peut alors se résoudre, en particularisant le repère mobile, par

$$\omega_{13}=0, \quad \omega_{23}=0, \quad \omega_{12}=2\omega_3, \quad \omega_{32}=\omega_1, \quad \omega_{33}+\omega_{22}-\omega_{00}-\omega_{44}=0.$$

Une nouvelle dérivation extérieure permet d'écrire, en particularisant encore :

$$\omega_{10}=0, \quad \omega_{43}-\omega_{20}=0, \quad \omega_{22}-\omega_{11}-\omega_{33}+\omega_{00}=0,$$
$$\omega_{42}-\omega_{30}-\omega_{21}=0, \quad \omega_{31}=\lambda\omega_3.$$

Pour que $[AA_3]$ soit génératrice de l'hypersurface, il faut et il suffit que λ soit nul. En dérivant extérieurement, et résolvant, il vient :

$$\omega_{20}=3\alpha\omega_3, \quad \omega_{40}=3\beta\omega_3, \quad \omega_{21}-\omega_{30}=\alpha\omega_2, \quad \omega_{41}=\alpha\omega_1+2\beta\omega_2.$$

L'examen du système dérivé montre que ce système n'est compatible que si $\alpha=\beta=0$, et, dans ce cas, on obtient un système complètement intégrable.

Les formes ω_1, ω_2, ω_3, ω_{30}, $\omega_{22}-\omega_{00}$, $\omega_{33}-\omega_{00}$ restant indépendantes, les V_3 intégrales du système complètement intégrable admettent un groupe à 6 paramètres. Elles sont toutes égales dans l'espace projectif. En annulant les formes

ω_{30}, $\omega_{22} - \omega_{00}$ et $\omega_{33} - \omega_{00}$, et en posant :

$$\omega_1 = du_1, \qquad \omega_2 = du_2 + u_1\, du_3, \qquad \omega_3 = du_3,$$

les formules de Frenet généralisées s'intègrent aisément et conduisent à l'équation finie de la V_3 :

$$x_4 = x_2 x_3 - x_1 x_3^2.$$

Les transformations infinitésimales du groupe de cette V_3 sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2},\\
X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_4},\\
X_3 f &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + 2 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4},\\
X_4 f &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},\\
X_5 f &= x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + 2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},\\
X_6 f &= (x_2 - x_1 x_3) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (2 x_4 - x_2 x_3) \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_3^2 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}.
\end{aligned}$$

E. Supposons maintenant $a = 0$, $b = 0$. Les équations

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{13} = 0$$

entraîneront par dérivation

$$\omega_{10} = 0,$$

et les V_3 intégrales dépendront de 1 fonction de 2 arguments Ce sont les *hypercônes* projetant du point fixe A_1 une V_2 de l'espace ordinaire.

Si l'on suppose de plus

$$\omega_{23} = 0,$$

les V_3 intégrales ne dépendent plus que de 3 fonctions de 1 argument : la surface directrice de l'hypercône est réglée, si bien que l'hypercône est le lieu de ∞^1 plans passant par un point fixe et tels que deux plans consécutifs n'aient aucune droite commune.

Enfin, en ajoutant l'hypothèse que ω_{32} ne dépende pas de ω_3, on est conduit à adjoindre les nouvelles équations :

$$\omega_{32} = 0, \quad \omega_{33} + \omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{44} = 0, \quad \omega_{42} - \omega_{30} = 0, \quad \omega_{43} - \omega_{20} = 0, \quad \omega_{40} = 0,$$

et l'on obtient un système complètement intégrable. Les surfaces directrices sont des quadriques, et les hypercônes admettent deux familles de plans générateurs.

Réciproquement, toute hypersurface de E_4 admettant deux familles de plans générateurs appartient nécessairement à la classe étudiée, car son cône asymptotique doit se décomposer en deux plans, et en exprimant que ces deux plans sont générateurs de la V_3, on retombe sur le système précédent. Ces hypersurfaces sont donc toujours des hypercônes.

27. Les résultats précédents concernant les V_3 de E_4 dont l'H_3 tangent dépend de deux paramètres pourraient se déduire par dualité de la théorie des V_2 de E_4.

III. — Les hypersurfaces les plus générales de E_4.

28. Les V_3 dont la forme asymptotique est de rang 3 sont contenues tout entières dans un espace à 4 dimensions, car leur réseau asymptotique du second ordre est identiquement nul. Les tangentes asymptotiques forment un véritable cône.

Prenons pour forme asymptotique :

$$\Phi_4 = 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_2\omega_3 + 2\omega_3\omega_1.$$

Ce choix étant fait, la forme biasymptotique F_4 n'est pas encore parfaitement déterminée : une modification du repère mobile la transforme en la nouvelle forme :

$$F_4 + (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \nu\omega_3)\Phi_4,$$

où λ, μ, ν sont arbitraires.

Les tangentes biasymptotiques sont données par les solutions communes aux deux équations :

$$\Phi_4 = 0, \qquad F_4 = 0.$$

Si la cubique $F_4 = 0$ ne dégénère pas en une droite et en la conique $\Phi_4 = 0$, le nombre des tangentes biasymptotiques est fini et ne peut dépasser six. En remarquant que toute génératrice rectiligne est biasymptotique, on en conclut qu'une V_3 de E_4 admet au plus six familles de génératrices rectilignes, si elle en admet un nombre fini. Ce maximum est réalisé dans les V_3 du troisième degré.

29. Supposons que toutes les tangentes asymptotiques, qui constituent le cône $\Phi_4 = 0$, soient aussi biasymptotiques. D'après une remarque précédente, un choix du repère mobile permet alors de réduire F_4 identiquement à zéro. Les formes différentielles d'ordre supérieur peuvent toutes être de même réduites à zéro, et l'on obtient le système complètement intégrable :

$$
\begin{gathered}
\omega_4 = 0, \qquad \omega_{14} = \omega_2 + \omega_3, \qquad \omega_{24} = \omega_3 + \omega_1, \qquad \omega_{34} = \omega_1 + \omega_2, \\
\omega_{12} + \omega_{13} = 0, \qquad \omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{13} - \omega_{23} = 0, \\
\omega_{23} + \omega_{21} = 0, \qquad \omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{21} - \omega_{31} = 0, \\
\omega_{31} + \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{32} - \omega_{12} = 0, \\
\omega_{42} + \omega_{43} - \omega_{10} = 0, \qquad \omega_{43} + \omega_{41} - \omega_{20} = 0, \qquad \omega_{41} + \omega_{42} - \omega_{30} = 0, \qquad \omega_{40} = 0.
\end{gathered}
$$

Les V_3 intégrales, ne dépendant que de constantes arbitraires, sont toutes égales dans l'espace projectif. En annulant les formes ω_{ij} qui sont encore indéterminées et en posant :

$$\omega_1 = du_1, \omega_2 = du_2, \omega_3 = du_3,$$

on obtient les formules de Frenet généralisées :

$$
\begin{aligned}
dA &= du_1 A_1 + du_2 A_2 + du_3 A_3, \\
dA_1 &= (du_2 + du_3) A_1, \\
dA_2 &= (du_3 + du_1) A_2, \\
dA_3 &= (du_1 + du_2) A_3, \\
dA_4 &= 0,
\end{aligned}
$$

d'où l'équation finie de la V_3, en coordonnées non homogènes :

$$x_4 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1.$$

C'est l'*hyperquadrique de* E_4.

Le fait qu'après toutes les particularisations possibles, le mouvement instantané du repère mobile dépend encore des dix formes indépendantes :

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{23}, \quad \omega_{31}, \quad \omega_{10}, \quad \omega_{20}, \quad \omega_{30}, \quad \omega_{44}-\omega_{00}$$

montre que cette hypersurface admet un groupe projectif à 10 paramètres. Les formules du déplacement instantané donnent immédiatement les transformations infinitésimales de ce groupe.

CHAPITRE IV.

LES V_3 DONT L'HYPERPLAN OSCULATEUR A CINQ DIMENSIONS.

30. En général, si l'hyperplan d'une V_3 a 5 dimensions, les cônes du réseau asymptotique de cette V_3 en un point A passent tous par 4 tangentes fixes, qui sont les 4 tangentes asymptotiques. Une V_3 de cette nature a donc 4 familles de lignes asymptotiques. Parmi les cônes asymptotiques, il en est 3 qui dégénèrent en deux plans; les génératrices doubles de ces 3 cônes dégénérés seront appelées les *tangentes fondamentales* de la V_3 en A : elles définissent sur la V_3 3 familles de courbes fondamentales. A une direction arbitraire prise dans l'hyperplan tangent correspond une direction conjuguée bien déterminée. Il n'y a d'exception que pour chacune des tangentes fondamentales, qui est conjuguée à toutes les tangentes situées dans le plan des deux autres tangentes fondamentales.

Si tous les cônes asymptotiques sont tangents le long d'une génératrice commune, les V_3 ont seulement trois familles de lignes asymptotiques, l'une de ces familles étant double, et deux familles de lignes fondamentales, l'une étant confondue avec la famille d'asymptotiques doubles.

Si tous les cônes asymptotiques sont bitangents suivant deux tangentes fixes, il n'existe plus que deux familles d'asymptotiques doubles. Toutes les tangentes contenues dans le plan défini par les tangentes asymptotiques sont fondamentales, et il existe en outre une famille distincte de courbes fondamentales.

Enfin, il peut se faire que les cônes asymptotiques aient suivant une génératrice commune un contact du deuxième ordre ou du troisième ordre. Dans le premier cas, la génératrice commune est tangente asymptotique triple, et il existe une autre tangente asymptotique et une tangente fondamentale. Dans le second cas, la génératrice commune est tangente asymptotique quadruple, et toutes les tangentes situées dans le plan tangent commun à tous les cônes asymptotiques sont des tangentes fondamentales.

Dans tous les cas précédents, le réseau asymptotique contient de véritables cônes. Mais il peut arriver que tous les cônes soient dégénérés. S'ils n'ont en commun qu'une tangente, la V_3 n'a qu'une famille de lignes asymptotiques; s'ils contiennent tous un plan fixe, toutes les tangentes situées dans ce plan sont asymptotiques, mais il faut encore distinguer suivant que l'hyperplan tangent à la V_3 dépend de deux paramètres ou de trois.

Nous étudierons d'abord les V_3 dont le réseau asymptotique ne contient pas de véritables cônes.

I. — Les V_3 dont l'hyperplan osculateur a cinq dimensions et dont tous les cônes asymptotiques sont dégénérés.

V_3 n'ayant qu'une famille de lignes asymptotiques.

31. Nous pouvons prendre pour base du réseau asymptotique :

$$\Phi_4 = \omega_2^2, \qquad \Phi_5 = \omega_3^2.$$

Tous les cônes du réseau asymptotique se décomposent en deux plans passant par la tangente asymptotique $[AA_1]$ et formant un faisceau harmonique avec les deux plans $[AA_1A_2]$ et $[AA_1A_3]$. Toutes les directions de l'hyperplan tangent sont conjuguées à la direction asymptotique. Deux hyperplans tangents en deux points infiniment voisins A et A', ce dernier étant dans le plan $[AA_1A_3]$ se coupent suivant le plan $[AA_1A_2]$, et réciproquement.

Ces V_3 sont définies par le système de Pfaff :

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_\lambda = 0, \\ \omega_{14} = 0, & \omega_{15} = 0, & \omega_{1\lambda} = 0, \\ \omega_{24} = \omega_2, & \omega_{25} = 0, & \omega_{2\lambda} = 0, \\ \omega_{34} = 0, & \omega_{35} = 0, & \omega_{3\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 6, 7, \ldots, n), \end{cases}$$

d'où l'on déduit les relations quadratiques :

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} & & [\omega_2 \omega_{12}] & & & = 0, \\ [\omega_1 \omega_{12}] & + & [\omega_2(2\omega_{22} - \omega_{00} - \omega_{44})] & + & [\omega_3 \omega_{32}] & = 0, \\ & & [\omega_2 \omega_{32}] & - & [\omega_3 \omega_{34}] & = 0, \\ & & & & [\omega_3 \omega_{13}] & = 0, \\ & - & [\omega_2 \omega_{45}] & + & [\omega_3 \omega_{23}] & = 0, \\ [\omega_1 \omega_{13}] & + & [\omega_2 \omega_{23}] & + & [\omega_3(2\omega_{33} - \omega_{00} - \omega_{55})] & = 0, \\ & & [\omega_2 \omega_{4\lambda}] & & & = 0, \\ & & & & [\omega_3 \omega_{5\lambda}] & = 0. \end{array} \right.$$

Ce système est en involution avec $s_2 = 2$.

On constate immédiatement que les lignes *asymptotiques* sont *rectilignes* et que l'hyperplan tangent est le même le long d'une génératrice.

Les plans $[AA_1A_2]$ et $[AA_1A_3]$ sont fixes le long d'une génératrice; ils définissent deux familles de surfaces génératrices qui leur sont respectivement tangentes en chaque point A. Ces surfaces génératrices sont des développables, car leur plan tangent ne dépend que d'un paramètre.

Chaque génératrice de la V_3 a en général deux points focaux distincts. En prenant le sommet A_1 au point focal relatif à $\omega_2 = 0$, on a :

$$\omega_{13} = 0.$$

et l'on peut en général particulariser le choix du repère de façon à avoir :

$$\omega_{12} = \omega_2 \qquad \omega_{10} = \omega_3 \qquad \omega_{23} = 0.$$

Dans ces conditions, le lieu du point A_1, qui décrit une des nappes focales, est une surface à caractéristiques de Segre (n° **18**), les arêtes de rebroussement constituant une famille de caractéristiques. Les V_3 étudiées sont donc *engendrées par une famille de tangentes caractéristiques d'une V_2 d'espèce Φ située dans E_n* ($n \geqq 5$) (1).

La seconde nappe focale n'est autre qu'une transformée de la première par la transformation généralisée de Laplace.

Réciproquement, le lieu d'une famille de tangentes caractéristiques d'une V_2 d'espèce Φ, de la nature la plus générale, non contenue dans E_4, est une V_3 du type étudié. En effet, sur une V_2 de cette structure, on peut toujours prendre :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = \omega_2^2, \qquad \Psi_5 = \omega_1^3, \qquad \Psi_6 = \omega_2^3$$

et

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{34} = 0, \qquad \omega_{35} = \omega_1, \qquad \omega_{3\mu} = 0 \qquad (\mu > 5).$$

Si M est un point de la tangente caractéristique $[AA_1]$, on aura :

$$\begin{aligned} M &= A + uA_1, \\ dM &= (\omega_{00} + u\omega_{10})A + \varpi A_1 + \omega_2 A_2 + u\omega_1 A_3, \\ d^2M &= \omega_2^2 A_4 + u\omega_1^2 A_5. \end{aligned}$$

32. Le cas où la forme ω_{10} peut être ramenée à zéro doit être étudié à part. On parvient à l'involution en adjoignant au système (1) les équations :

$$(3) \qquad \omega_{12} = \omega_2, \qquad \omega_{23} = 0, \qquad \omega_{13} = 0, \qquad \omega_{20} = 0, \qquad \omega_{10} = 0,$$

et les V_3 intégrales ne dépendent plus que d'une fonction de 2 arguments. Le point A_1, qui décrit l'une des nappes focales, a pour lieu une courbe; l'autre nappe sera en général une surface à caractéristiques enveloppe de ∞^1 cônes (n° **18**).

Réciproquement, toute V_3 engendrée par les cônes qui enveloppent une V_2 d'espèce Φ à caractéristiques de cette nature rentre dans le type étudié.

On obtient un cas plus particulier encore en supposant que la première équation dérivée de (3) :

$$[\omega_2(\omega_{00} - \omega_{11} + \omega_1)] - [\omega_3\omega_{32}] = 0,$$

(1) SISAM, *loc. cit.*, p. 112.

peut se résoudre par

$$(4) \qquad \omega_{00} - \omega_{11} + \omega_1 = 0, \qquad \omega_{32} = 0.$$

Les V_3 intégrales du système (1), (3), (4) ne dépendent que de $2n - 2$ fonctions de 1 argument.

Elles sont engendrées par ∞^2 droites rencontrant deux courbes de E_n ($n \geq 5$) et, réciproquement, le lieu de ∞^2 droites s'appuyant sur deux courbes quelconques de E_n est une V_3 du type considéré (¹).

33. Enfin, quand on peut poser :

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{13} = 0,$$

c'est que les deux points focaux de la génératrice sont confondus en A_1. Le point A_1 est alors fixe, car on déduit des équations précédentes :

$$\omega_{10} = 0.$$

Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_2 = 2$, comme dans le cas général : ces 2 fonctions de 2 arguments servent à définir la V_2 directrice de l'hypercône, V_2 qui est une surface d'espèce Φ à caractéristiques (²).

V_3 *ayant* ∞^1 *tangentes asymptotiques formant un plan.*

34. Deux cas sont à distinguer, suivant que l'H_3 tangent dépend de deux ou de trois paramètres.

A. *L'hyperplan tangent dépend de deux paramètres.* — Prenons pour formes de base

$$\Phi_1 = \omega_1^2, \qquad \Phi_3 = 2\omega_1\omega_2.$$

Toutes les tangentes situées dans $[AA_2A_3]$ sont asymptotiques. Les cônes du réseau asymptotique se décomposent en deux plans, dont l'un est toujours $[AA_2A_3]$, l'autre tournant autour de $[AA_3]$. Toutes les directions de l'H_3 tangent sont conjuguées

---

(¹) SISAM, *loc. cit.*, p. 112.

(²) *Ibid.*

à la tangente $[AA_3]$. Deux H_3 tangents en deux points consécutifs A et A′, ce dernier étant pris dans $[AA_2A_3]$, se coupent suivant $[AA_2A_3]$ lui-même.

Le système de Pfaff de définition s'écrit :

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_\lambda = 0, \\ \omega_{14} = \omega_1, & \omega_{15} = \omega_2, & \omega_{1\lambda} = 0, \\ \omega_{24} = 0, & \omega_{25} = \omega_1, & \omega_{2\lambda} = 0, \\ \omega_{34} = 0, & \omega_{35} = 0, & \omega_{3\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 6, 7, \ldots, n), \end{cases}$$

d'où les relations dérivées :

$$(2)\qquad \begin{cases} [\omega_1(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11})] + [\omega_2(\omega_{54} - \omega_{21})] - [\omega_3\omega_{31}] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{54} - \omega_{21})] = 0, \\ -[\omega_1\omega_{31}] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{45} - 2\omega_{12})] + [\omega_2(\omega_{55} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})] - [\omega_3\omega_{32}] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{55} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22})] - 2(\omega_2\omega_{21}) - [\omega_3\omega_{31}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{32}] + [\omega_2\omega_{31}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{4\lambda}] + [\omega_2\omega_{5\lambda}] = 0, \\ [\omega_1\omega_{5\lambda}] = 0. \end{cases}$$

Ce système est en involution avec $s_2 = 1$.

La tangente $[AA_3]$ est une *génératrice rectiligne* de la V_3, et l'H_3 tangent est le même le long de cette génératrice.

Le plan des tangentes asymptotiques $[AA_2A_3]$ est fixe, lui aussi, le long d'une génératrice : il définit une famille de surfaces génératrices, qui sont des développables. D'ailleurs, on peut résoudre (2) en général par

$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = \omega_1,$$

si bien que l'équation

$$\omega_1\omega_{32} - \omega_2\omega_{31} = 0,$$

qui exprime que deux génératrices consécutives se coupent, n'est vérifiée que par $\omega_1 = 0$. Les V_3 ne contiennent donc qu'une famille de développables génératrices.

Le lieu du sommet A_3, point focal sur la génératrice $[AA_3]$, est en général une V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques. Il suffit pour le voir de particulariser le repère de façon à avoir

$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{30} = \omega_2$$

et il vient :

$$dA_3 = \omega_{33} A_3 + \omega_2 A + \omega_1 A_2,$$
$$d^2 A_3 = 2\omega_1 \omega_2 A_1 + \omega_1^2 A_5.$$

La V_3 est donc *engendrée par les tangentes asymptotiques d'une* V_2 *d'espèce* Φ [1].

Réciproquement, le lieu des tangentes asymptotiques d'une V_2 d'espèce Φ de E_n ($n \geqq 5$) est une V_3 du type considéré. En effet, on peut prendre sur cette V_2 (non réglée) :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Psi_5 = 3\omega_1^2\omega_2$$

et choisir les sommets de référence de telle sorte que :

$$\omega_{43} = \omega_2, \qquad \omega_{21} = \omega_2.$$

Si M est un point de la tangente asymptotique, on aura :

$$M = A + u A_2$$

et

$$d^2 M = \omega_1^2 (A_3 + u A_5) + 2u\omega_1\omega_2 A_5.$$

35. Si l'on peut choisir le repère mobile sur la V_3 de façon à avoir :

$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{21} = 0, \qquad \omega_{30} = 0,$$

le point focal A_3 décrit une courbe, et l'équation $\omega_1 = 0$ définit une famille de plans générateurs, car

$$d[AA_2A_3] \equiv (\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{33})[AA_2A_3] \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1).$$

La V_3 est alors un lieu de ∞^1 plans tangents (non osculateurs) à une courbe gauche. Elle dépend de $2n - 3$ fonctions de 1 argument.

Réciproquement, toute V_3 lieu de ∞^1 plans tangents à une courbe gauche de E_n ($n \geqq 5$) appartient au type étudié. En effet, soient (C_1)

[1] SISAM, *loc. cit.*, p. 114.

une courbe de E_n et (C_2) une courbe de E_{n-2}, et donnons-nous une loi de correspondance entre ces deux courbes. Le plan générateur peut être défini par une tangente de (C_1) et le point homologue de (C_2). L'hyperplan tangent à la V_3 engendrée dépend seulement de deux paramètres, car il est le même en tous les points d'un plan générateur qui sont situés sur une même droite passant par le point de contact du plan et de (C_1). Par conséquent le réseau asymptotique de cette V_3 est réductible à

$$2\omega_1\omega_2 = 0 \quad \text{ou à} \quad \lambda\omega_1^2 + 2\mu\omega_1\omega_2 = 0;$$

la première hypothèse doit être exclue, puisqu'on suppose que la V_3 est dans E_n $(n > 4)$.

36. Lorsqu'on peut ramener les formes ω_{31} et ω_{32} à zéro, la V_3 correspondante est un *hypercône* projetant du point fixe A_3 une V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques. Pour que cet hypercône admette ∞^1 plans générateurs, il faut et il suffit que la V_2 directrice soit réglée.

37. B. *L'hyperplan tangent dépend de trois paramètres.* — Nous pouvons prendre pour formes de base :

$$\Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_1\omega_3.$$

Les cônes asymptotiques se décomposent en deux plans passant par $[AA_1]$, l'un de ces plans étant $[AA_2A_3]$. Les tangentes asymptotiques sont donc toutes celles du plan $[AA_2A_3]$ et en outre la tangente $[AA_1]$.

Aucune forme asymptotique du second ordre ne peut exister : par suite les V_3 étudiées sont situées dans E_5. Elles sont les intégrales du système de Pfaff :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, \\ \omega_{14} = \omega_2, & \omega_{15} = \omega_3, \\ \omega_{24} = \omega_1, & \omega_{25} = 0, \\ \omega_{34} = 0, & \omega_{35} = \omega_1, \end{array}\right.$$

qui a pour système dérivé :

$$
(2)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
-2[\omega_1\omega_{12}]+[\omega_2(\omega_{44}+\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22})]+[\omega_3(\omega_{34}-\omega_{32})] & =0,\\
{}[\omega_1(\omega_{44}+\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{22})]-2[\omega_2\omega_{21}]-[\omega_3\omega_{31}] & =0,\\
{}[\omega_1(\omega_{34}-\omega_{32})]-[\omega_2\omega_{31}] & =0,\\
-2[\omega_1\omega_{13}]+[\omega_2(\omega_{45}-\omega_{23})]+[\omega_3(\omega_{55}+\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{33})] & =0,\\
{}[\omega_1(\omega_{45}-\omega_{23})]-[\omega_3\omega_{21}] & =0,\\
{}[\omega_1(\omega_{55}+\omega_{00}-\omega_{11}-\omega_{33})]-[\omega_2\omega_{21}]-2[\omega_3\omega_{31}] & =0.
\end{array}
\right.
$$

Pour obtenir l'involution, nous prolongerons, en particularisant le repère, par

$$
(3)\qquad \omega_{21}=0, \qquad \omega_{31}=0;
$$

d'où l'on déduit :

$$
(4)\qquad [\omega_1(\omega_{51}-\omega_{30})]=0, \qquad [\omega_1(\omega_{41}-\omega_{20})]=0.
$$

Le système formé des équations (1) et (3) est en involution avec $s_1=8$.

L'équation complètement intégrable sur la V_3

$$
\omega_1=0
$$

définit une famille de plans générateurs, car on a :

$$
d[AA_2A_3]=(\omega_{00}+\omega_{22}+\omega_{33})[AA_2A_3] \qquad (\text{mod } \omega_1).
$$

La V_3 est donc *engendrée par* ∞^1 *plans*, deux plans générateurs consécutifs n'ayant aucun point commun. *Inversement*, le lieu de ∞^1 plans de E_5 est en général une V_3 de cette nature; deux plans quelconques de E_5 n'ont aucun point commun, et un plan dépend de neuf paramètres, ce qui explique le degré de généralité trouvé par l'analyse.

38. Cherchons dans quel cas la tangente asymptotique isolée $[AA_1]$ est une génératrice de la V_3. On peut toujours résoudre les relations (2) en posant, après particularisation du repère,

$$
\omega_{12}=\alpha\omega_1, \qquad \omega_{13}=\beta\omega_1.
$$

Une variation infiniment petite des paramètres secondaires entraîne pour α et β les variations (n° **12**) :

$$\delta\alpha = (2e_{11} - e_{22} - e_{00})\,\alpha - e_{32}\beta,$$
$$\delta\beta = (2e_{11} - e_{33} - e_{00})\,\beta - e_{23}\alpha.$$

On ne peut donc, *en général*, annuler à la fois α et β, mais seulement l'un de ces coefficients. S'ils sont nuls tous les deux, on a des V_3 qui admettent $[AA_1]$ comme génératrice rectiligne, et qui ont pour système différentiel :

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \omega_{12} = 0, & \omega_{21} = 0, & \omega_{54} - \omega_{32} = 0, \\ \omega_{13} = 0, & \omega_{31} = 0, & \omega_{45} - \omega_{23} = 0, \\ \multicolumn{3}{c}{\omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22} = 0,} \\ \multicolumn{3}{c}{\omega_{55} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{33} = 0.} \end{array}\right.$$

Ce système, obtenu par résolution de (2), et particularisation du repère mobile, donne les relations quadratiques

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} [\omega_2(\omega_{42} - \omega_{10})] + [\omega_3\omega_{52}] = 0, \\ [\omega_2\omega_{43}] + [\omega_3(\omega_{53} - \omega_{10})] = 0, \\ 2[\omega_1\omega_{52}] + [\omega_2(\omega_{51} - \omega_{30})] = 0, \\ 2[\omega_1\omega_{43}] + [\omega_3(\omega_{41} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{41} - \omega_{20})] = 0, \\ [\omega_1(\omega_{51} - \omega_{30})] = 0, \\ 2[\omega_1(\omega_{42} - \omega_{10})] + 2[\omega_2(\omega_{41} - \omega_{20})] + [\omega_3(\omega_{51} - \omega_{30})] = 0, \\ 2[\omega_1(\omega_{53} - \omega_{10})] + [\omega_2(\omega_{41} - \omega_{20})] + 2[\omega_3(\omega_{51} - \omega_{30})] = 0. \end{array}\right.$$

Une nouvelle particularisation permet de résoudre par

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \omega_{52} = 0, & \omega_{41} - \omega_{20} = 0, \\ \omega_{43} = 0, & \omega_{53} - \omega_{10} = 0, \\ \omega_{42} - \omega_{10} = 0, & \omega_{51} - \omega_{30} = 0, \end{array}\right.$$

et une nouvelle dérivation extérieure entraîne :

$$(8)\qquad \omega_{40} = 0, \qquad \omega_{50} = 0.$$

Les 24 équations (1), (5), (7) et (8) forment un système complètement intégrable. En annulant les formes ω_{ij} restées arbitraires, on obtient les formules de Frenet généralisées :

$$\begin{aligned}
dA &= du_1 A_1 + du_2 A_2 + du_3 A_3,\\
dA_1 &= du_2 A_4 + du_3 A_5,\\
dA_2 &= du_1 A_4,\\
dA_3 &= du_1 A_5,\\
dA_4 &= 0,\\
dA_5 &= 0,
\end{aligned}$$

et en intégrant :

$$A = O + u_1 O_1 + u_2 O_2 + u_3 O_3 + u_1 u_2 O_4 + u_1 u_3 O_5.$$

Les V_3 intégrales, sont toutes égales dans l'espace projectif, et leurs équations réductibles à

$$x_4 = x_1 x_2, \qquad x_5 = x_1 x_3.$$

Chacune de ces V_3 admet un groupe projectif à 11 paramètres dont il est facile d'obtenir les équations finies, en représentant paramétriquement la V_3 en coordonnées homogènes, au moyen des formules :

$$X_0 = u_2 v_3, \quad X_1 = u_1 v_3, \quad X_2 = u_2 v_1, \quad X_3 = u_2 v_2, \quad X_4 = u_1 v_1, \quad X_5 = u_1 v_2,$$

et en effectuant sur les paramètres les transformations suivantes :

$$u'_1 = a u_1 + b u_2, \qquad u'_2 = c u_1 + u_2,$$

$$v'_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \qquad v'_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3, \qquad v'_3 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + v_3.$$

Nous avons déjà trouvé, au n° **26** D, une V_3 admettant une famille de plans générateurs et une famille doublement infinie de droites génératrices. Ce sont les deux seules V_3 admettant ce mode de génération. En effet, le réseau asymptotique d'une telle variété est nécessairement réductible à

$$2\omega_2\omega_3 = 0 \qquad \text{ou à} \qquad 2\lambda\omega_1\omega_2 + 2\mu\omega_1\omega_3 = 0;$$

dans le premier cas, l'analyse du n° **26** montre que l'équation finie de la V_3 correspondante peut s'écrire :

$$x_4 = x_2 x_3 - x_1 x_3^2;$$

dans le second cas, l'analyse précédente conduit aux équations :

$$x_4 = x_1 x_2, \qquad x_3 = x_1 x_2.$$

D'ailleurs, la V_3 de E_4 n'est autre que la projection de la V_3 de E_5 sur un hyperplan à 4 dimensions, le point de vue étant pris en dehors de la variété. Le groupe de la V_3 de E_4 est le sous-groupe qui laisse invariant le point de vue : ce sous-groupe est à 6 paramètres, ce qui concorde avec le résultat du n° **26**.

Si la projection était faite d'un point situé sur la V_3, on obtiendrait la V_3 :

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$$

qui est un hypercône ayant son sommet à l'origine et admettant deux familles de plans générateurs : c'est l'hypercône projetant la quadrique (n° **26** E).

II. — Les V_3 dont l'hyperplan osculateur a cinq dimensions et dont les cônes asymptotiques ne sont pas tous dégénérés.

A. — *Cas général : V_3 ayant 4 familles distinctes d'asymptotiques.*

39. Soient les formes de base :

$$\Phi_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \qquad \Phi_5 = \omega_1^2 - \omega_3^2.$$

Ces V_3 sont contenues dans E_5, car aucune forme asymptotique du second ordre ne peut exister. Les deux formes biasymptotiques sont alors :

$$\begin{aligned}
F_4 = {} & \omega_1^2(\omega_{54} + \omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) + \omega_2^2(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{22}) + \omega_3^2\omega_{54} \\
& - 2\omega_1\omega_2(\omega_{12} + \omega_{21}) - 2\omega_1\omega_3\omega_{31} - 2\omega_2\omega_3\omega_{32}, \\
F_5 = {} & \omega_1^2(\omega_{45} + \omega_{55} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) + \omega_2^2\omega_{45} + \omega_3^2(\omega_{55} + \omega_{00} - 2\omega_{33}) \\
& - 2\omega_1\omega_2\omega_{21} - 2\omega_1\omega_3(\omega_{13} + \omega_{31}) - 2\omega_2\omega_3\omega_{23}.
\end{aligned}$$

Le système de Pfaff est en involution avec $s_3 = 2$.

Examinons le cas où les deux formes biasymptotiques peuvent être réduites à zéro.

a. Le calcul de dérivation extérieure et de particularisation du repère montre qu'on peut en général réduire les formes biquadratiques à :

$$F_4^4 = 3(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2, \qquad F_5^4 = 3(\omega_1^2 + \omega_3^2)^2.$$

Le système de Pfaff correspondant est dans ce cas :

$$\begin{array}{llll}
\omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_{12} = 0, & \omega_{31} = 0, \\
\omega_{14} = \omega_1, & \omega_{15} = \omega_1, & \omega_{13} = 0, & \omega_{32} = 0, \\
\omega_{24} = \omega_2, & \omega_{25} = 0, & \omega_{21} = 0, & \omega_{45} = 0, \\
\omega_{34} = 0, & \omega_{35} = \omega_3, & \omega_{23} = 0, & \omega_{54} = 0, \\
\omega_{41} = 0, & \omega_{51} = 0, & \omega_{10} = \omega_1, & \omega_{22} - \omega_{00} = 0, \\
\omega_{42} = -\omega_2, & \omega_{52} = 0, & \omega_{20} = 0, & \omega_{33} - \omega_{00} = 0, \\
\omega_{43} = 0, & \omega_{53} = -\omega_3, & \omega_{30} = 0, & \omega_{44} - \omega_{00} = 0, \\
\omega_{40} = 0, & \omega_{50} = 0, & \omega_{11} - \omega_{00} = 0, & \omega_{55} - \omega_{00} = 0.
\end{array}$$

Il est complètement intégrable, et la V_3 de l'espace projectif qu'il définit admet un groupe à 3 paramètres.

On peut intégrer les formules de Frenet généralisées :

$$\begin{aligned}
dA &= du_1 A_1 + du_2 A_2 + du_3 A_3, \\
dA_1 &= du_1 (A + A_4 + A_5), \\
dA_2 &= du_2 A_4, \\
dA_3 &= du_3 A_5, \\
dA_4 &= -du_2 A_2, \\
dA_5 &= -du_3 A_3.
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
A = {} & O \operatorname{ch} u_1 + O_1 \operatorname{sh} u_1 + O_2 \sin u_2 + O_3 \sin u_3 \\
& + O_4(\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2) + O_5(\operatorname{ch} u_1 - \cos u_3),
\end{aligned}$$

d'où l'équation de la V_3, en coordonnées non homogènes :

$$\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + (x_4 - 1)^2 &= 1, \\
x_1^2 + x_3^2 + (x_5 - 1)^2 &= 1.
\end{aligned}$$

On peut du reste changer l'origine des coordonnées, et remplacer $x_4 - 1$ par x_4, et $x_5 - 1$ par x_5. Les transformations infinitésimales du groupe sont, une fois ce changement effectué :

$$
\begin{aligned}
X_1 f &= (1-x_1^2)\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_1 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_1 x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5},\\
X_2 f &= x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4},\\
X_3 f &= x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_5}.
\end{aligned}
$$

b. Comme cas particulier, il peut arriver que les formes biquadratiques soient réductibles à zéro. Si l'une peut être annulée, l'autre peut l'être aussi. Les V_3 correspondantes sont alors intégrales du système de Pfaff complètement intégrable :

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
\omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_{12} = 0, & \omega_{31} = 0,\\
\omega_{14} = \omega_1, & \omega_{15} = \omega_1, & \omega_{13} = 0, & \omega_{32} = 0,\\
\omega_{24} = \omega_2, & \omega_{25} = 0, & x_{21} = 0, & \omega_{45} = 0,\\
\omega_{34} = 0, & \omega_{35} = \omega_3, & \omega_{23} = 0, & \omega_{54} = 0,\\
\omega_{40} = 0, & \omega_{50} = 0, & \omega_{10} = 0, & \omega_{44} - \omega_{00} = 2(\omega_{11} - \omega_{00}),\\
\omega_{41} = 0, & \omega_{51} = 0, & \omega_{20} = 0, & \omega_{55} - \omega_{00} = 2(\omega_{11} - \omega_{00}),\\
\omega_{42} = 0, & \omega_{52} = 0, & \omega_{30} = 0, & \\
\omega_{43} = 0, & \omega_{53} = 0, & \multicolumn{2}{l}{\omega_{11} - \omega_{00} = \omega_{22} - \omega_{00} = \omega_{33} - \omega_{00}.}
\end{array}
\right.
$$

Les équations de Frenet généralisées sont alors :

$$
\begin{aligned}
dA &= du_1 A_1 + du_2 A_2 + du_3 A_3,\\
dA_1 &= du_1 (A_4 + A_5),\\
dA_2 &= du_2 A_4,\\
dA_3 &= du_3 A_5,\\
dA_4 &= 0,\\
dA_5 &= 0
\end{aligned}
$$

et, en intégrant :

$$
x_4 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \qquad x_5 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2).
$$

Les V_3 intégrales sont toutes égales dans l'espace projectif, et elles admettent un groupe à 4 paramètres, qui a pour équations finies :

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_4 x_1 + a_1, \\
x'_2 &= a_4 x_2 + a_2, \\
x'_3 &= a_4 x_3 + a_3, \\
x'_4 &= a_4^2 x_4 + a_4 a_1 x_1 + a_4 a_2 x_2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2), \\
x'_5 &= a_4^2 x_5 + a_4 a_1 x_1 + a_4 a_3 x_3 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_3^2).
\end{aligned}$$

Les deux V_3 de E_5 qui correspondent au cas où les deux formes biasymptotiques sont nulles sont quatre fois réglées.

B. — *Les V_3 qui ont une famille double d'asymptotiques.*

40. Si l'on prend pour base du réseau :

$$\Phi_4 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_2\omega_3,$$

la tangente $[AA_3]$ est tangente asymptotique double, et le long de cette tangente, tous les cônes asymptotiques sont tangents. La tangente $[AA_3]$ compte aussi deux fois comme tangente fondamentale, l'autre tangente fondamentale étant $[AA_1]$. Deux hyperplans tangents en deux points consécutifs pris sur la tangente asymptotique double se coupent suivant $[AA_1A_3]$ qui est le plan tangent commun à tous les cônes asymptotiques le long de $[AA_3]$.

Les V_3 de ce type sont encore contenues dans E_5 et leur système différentiel est en involution avec $s_3 = 1$: il n'entre dans leur définition qu'une fonction de 3 arguments.

Les deux formes biasymptotiques ont pour expression :

$$\begin{aligned}
F_4 = {} & \omega_1^2(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) + \omega_2^2(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{22}) \\
& - 2\omega_1\omega_2(\omega_{12} + \omega_{21}) - 2\omega_1\omega_3\omega_{31} + 2\omega_2\omega_3(\omega_{54} - \omega_{32}), \\
F_5 = {} & \omega_1^2\omega_{45} + \omega_2^2(\omega_{45} - 2\omega_{23}) - 2\omega_3^2\omega_{32} - 2\omega_1\omega_2\omega_{13} \\
& - 2\omega_1\omega_3\omega_{12} + 2\omega_2\omega_3(\omega_{55} + \omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33}).
\end{aligned}$$

En général, la tangente asymptotique double n'est pas biasymptotique, car la forme F_5 contient un terme en ω_3^3. Elle est biasymptotique si la forme ω_{32} est indépendante de ω_3, et comme

ω_{31}, est toujours indépendante de ω_3, $[AA_3]$ est alors *génératrice rectiligne.*

41. Le système différentiel des V_3 réglées s'obtient en adjoignant aux équations des V_3 générales les nouvelles équations

$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = \omega_1,$$

obtenues en particularisant le repère : la solution générale dépend de 5 fonctions de 2 arguments. Les V_3 réglées de cette nature ne contiennent pas de développables.

On obtient des V_3 réglées plus particulières en supposant que ω_{32} ne dépende pas de ω_1. Les équations précédentes deviennent dans ce cas :

$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = 0$$

et le système différentiel est en involution avec $s_2 = 4$.

Le plan $[AA_1A_3]$ est alors fixe le long d'une génératrice, et l'équation $\omega_2 = 0$ définit une famille de surfaces génératrices développables ([1]). Le lieu du point focal A_3 est en général une surface, car on peut particulariser le repère de façon à avoir :

$$\omega_{30} = \omega_1, \qquad \omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = \omega_1, \qquad \omega_{34} = \omega_2,$$

si bien que

$$dA_3 = \omega_{33} A_3 + \omega_1 A + \omega_2 A_4,$$
$$d^2 A_3 = \omega_1^2 A_1 + 2\omega_1\omega_2 A_2 + \omega_2^2 A_4.$$

La surface focale est donc une V_2 de E_5 dont l'hyperplan osculateur a le maximum de dimensions.

Inversement, prenons sur une V_2 de E_5 du type mentionné, une famille de courbes quelconques. Il faut d'abord trois fonctions de 2 arguments pour définir la V_2, puis une quatrième fonction de 2 arguments pour définir le choix de cette famille de courbes. Les tangentes à ces courbes engendrent une V_3 sur laquelle elles sont génératrices doubles. En effet, fixons sur la V_2 du n° **20**

([1]) Sisam, *loc. cit.*, p. 116.

le choix des courbes coordonnées $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$; nous pourrons résoudre les relations quadratiques, en particularisant le repère par les formules :

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{35} = \omega_1, \qquad \omega_{45} = 0, \qquad \omega_{34} = \omega_1, \qquad \omega_{32} = 0.$$

Posons maintenant :

$$M = A + uA_1,$$

il viendra :

$$\begin{aligned} dM &= (\omega_{00} + u\omega_{10})A + \varpi A_1 + \omega_2(A_2 + uA_4) + u\omega_1 A_3, \\ d^2M &= (2\omega_2\omega_3 + u\omega_1^2)A_4 + (\omega_2^2 + u\omega_1^2)A_5, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $[AA_1]$ est génératrice double de la V_3 lieu de M.

42. Supposons que les deux formes biasymptotiques soient réductibles à zéro. Des deux formes biquadratiques, l'une sera toujours réductible à zéro : c'est $F_5^{(4)}$; quant à l'autre, elle pourra s'écrire, en général,

$$F_4^{(4)} = 3(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2.$$

Le système différentiel qui correspond à ce cas est complètement intégrable, et les équations de la V_3 intégrale peuvent s'écrire :

$$x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1, \qquad x_5 = x_2 x_3.$$

Elle admet un groupe à quatre paramètres, ayant pour transformations infinitésimales :

$$\begin{aligned} X_1 f &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_5}, \\ X_3 f &= x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5}, \\ X_4 f &= x_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2^2 - 1)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (x_2 x_3 - x_5)\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + (x_2 x_5 - x_3)\frac{\partial f}{\partial x_5}. \end{aligned}$$

Si la forme biquadratique $F_4^{(4)}$ est réductible à zéro, on a encore à intégrer un système de Pfaff complètement intégrable, et l'on obtient la V_3 :

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \qquad x_5 = x_2 x_3,$$

dont le groupe est à 5 paramètres :

$$\begin{aligned}
X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4},\\
X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_5},\\
X_3 f &= \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_5},\\
X_4 f &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + 2x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5},\\
X_5 f &= x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_5}.
\end{aligned}$$

Les équations finies du groupe se déduisent de

$$x'_1 = a_4 x_1 + a_1, \qquad x'_2 = a_4 x_2 + a_2, \qquad x'_3 = a_5 x_3 + a_3.$$

Les lignes asymptotiques des deux V_3 ainsi déterminées sont rectilignes.

C. — *Les V_3 qui ont deux familles doubles d'asymptotiques.*

45. Tous les cônes asymptotiques passent par deux tangentes fixes $[AA_2]$, $[AA_3]$, le long desquelles ils sont tangents. Soit $[AA_1]$ la tangente fondamentale isolée : c'est l'intersection des deux plans tangents communs à tous les cônes.

Nous pouvons prendre pour base :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_2\omega_3.$$

Il peut exister une forme asymptotique du deuxième ordre : d'où deux cas à considérer, suivant que la V_3 sort de E_5 ou y est contenue.

La forme asymptotique du second ordre, quand elle existe, peut se réduire à

$$\Psi_6 = \omega_1^3$$

et les formes biasymptotiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_4 &= \omega_1^2(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) - 2\omega_1\omega_2\omega_{21} - 2\omega_1\omega_3\omega_{31} - 2\omega_2\omega_3\omega_{54} \\ F_5 &= \omega_1^2\omega_{45} - 2\omega_2^2\omega_{23} - 2\omega_3^2\omega_{32} - 2\omega_1\omega_2\omega_{13} - 2\omega_1\omega_3\omega_{12} \\ &\quad + 2\omega_2\omega_3(\omega_{55} + \omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33}). \end{aligned}$$

Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_3 = 1$, quel que soit le nombre des dimensions de l'espace.

L'équation complètement intégrable sur la V_3 :

$$\omega_1 = 0,$$

définit une famille de surfaces génératrices, tangentes en chacun de leurs points au plan qui contient les deux tangentes asymptotiques doubles.

En particularisant le repère mobile, on peut poser :

$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{31} = 0,$$

de sorte que, pour une courbe de la surface génératrice passant en A, on a :

$$\begin{aligned} dA &= \omega_{00}A + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3, \\ d^2A &= 2\omega_2\omega_3 A_5. \end{aligned}$$

Cette surface, ayant deux familles de lignes asymptotiques, est tout entière contenue dans son hyperplan osculateur $[AA_2A_3A_5]$. Le lieu de cet H_3, quand $\omega_1 \neq 0$, est une V_4 développable qui renferme à son intérieur la V_3 étudiée [1].

Variétés réglées. — Si l'une des tangentes asymptotiques doubles est aussi biasymptotique, on voit facilement qu'elle est génératrice de la V_3. Lorsque la V_3 est doublement réglée, les surfaces génératrices sont des quadriques. La solution générale du système différentiel dépend alors de $n + 8$ fonctions d'un argument, dont $n - 1$ servent à définir une courbe de E_n et les neuf autres déterminent la quadrique génératrice dans l'H_3 osculateur à cette courbe.

---

[1] SISAM, *loc. cit.*, p. 121.

D. — *Les V_3 qui ont une famille triple d'asymptotiques.*

44. Les cônes asymptotiques ont un contact du second ordre suivant la tangente $[AA_3]$ et se coupent suivant une autre génératrice $[AA_2]$, qui est une tangente asymptotique simple. Les formes de base seront :

$$\Phi_4 = \omega_1^2 + 2\omega_2\omega_3, \qquad \Phi_5 = 2\omega_1\omega_2$$

et les formes biasymptotiques :

$$\begin{aligned} F_4 = {} & \omega_1^2(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) - 2\omega_2^2\omega_{23} - 2\omega_3^2\omega_{32} + 2\omega_1\omega_2(\omega_{54} - \omega_{13} - \omega_{21}) \\ & - 2\omega_1\omega_3(\omega_{12} + \omega_{31}) + 2\omega_2\omega_3(\omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33}), \\ F_5 = {} & \omega_1^2(\omega_{45} - 2\omega_{12}) - 2\omega_2^2\omega_{21} + 2\omega_1\omega_2(\omega_{55} + \omega_{00} - \omega_{11} - \omega_{22}) \\ & - 2\omega_1\omega_3\omega_{32} + 2\omega_2\omega_3(\omega_{45} - \omega_{31}). \end{aligned}$$

Le réseau du second ordre est identiquement nul : les V_3 intégrales sont donc renfermées dans E_5 et dépendent de 4 fonctions de 2 arguments.

L'équation complètement intégrable sur la V_3 :

$$\omega_2 = 0,$$

définit une famille de surfaces génératrices, qui sont des V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques. On peut en effet poser, en particularisant le repère :

$$\omega_{32} = \omega_1, \qquad \omega_{12} = \omega_3,$$

et il vient, sur la surface génératrice passant en A :

$$d^2A = 2\omega_1\omega_3 A_2 + \omega_1^2 A_4.$$

Les asymptotiques des surfaces génératrices sont les asymptotiques triples de la V_3.

45. Les asymptotiques triples sont toujours biasymptotiques, mais non rectilignes en général. La condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient rectilignes est que la forme ω_{32} soit indépendante de ω_1 ; on peut alors résoudre les relations quadratiques par les formules :

$$\omega_{32} = 0, \qquad \omega_{31} = 0$$

et les V_3 correspondantes ne dépendent plus que de 3 fonctions de 2 arguments.

Les surfaces génératrices $\omega_2 = 0$ d'une V_3 réglée sont des développables, car on peut choisir le repère de façon à avoir

$$\omega_{12} = \omega_1.$$

Le lieu du point focal A_3 est en général une surface. Pour en étudier la structure, nous continuerons de particulariser le repère, et nous pourrons poser :

$$\omega_{30} = \omega_1, \qquad \omega_{43} = \omega_2, \qquad \omega_{41} = 0, \qquad \omega_{42} = \omega_1,$$

si bien que, pour une courbe quelconque de la V_2 focale, il vient :

$$dA_3 = \omega_{33} A_3 + \omega_1 A + \omega_2 A_4,$$
$$d^2 A_3 = \omega_1^2 A_1 + 2\omega_1 \omega_2 A_2 + \omega_2^2 A_3.$$

La nappe focale est donc une V_2 d'hyperplan osculateur maximum.

La V_3 est donc engendrée par les tangentes aux courbes $\omega_2 = 0$ d'une V_2 de cette structure, lesquelles courbes ont un contact du troisième ordre avec l'H_4 qui contient deux plans consécutifs à la V_2. En effet, l'H_3 osculateur en A_3 à la courbe $\omega_2 = 0$ issue de ce point est $[AA_1(A_2 + A_4)A_3]$: il est bien situé dans l'H_4 $[AA_1A_2A_3A_4]$ qui renferme deux plans consécutifs pris dans la direction $\omega_2 = 0$.

Réciproquement, sur une V_2 de E_5, d'hyperplan osculateur maximum, prenons une des cinq familles de courbes (n° **21**) qui ont un contact du troisième ordre avec l'H_4 contenant deux plans tangents consécutifs [1] : le lieu des tangentes à ces courbes sera une V_3 du type étudié.

---

[1] Sisam ne semble pas avoir remarqué que sur toute V_2 de E_5 d'hyperplan osculateur maximum, il existe des courbes jouissant de la propriété mentionnée (*loc. cit.*, pp. 122, 123).

En effet, si les courbes $\omega_2 = 0$ vérifient l'équation (nº **21**) :

$$\lambda = 0,$$

on peut résoudre les relations quadratiques dérivées en posant :

$$\omega_{35} = 0, \qquad \omega_{45} = \omega_1, \qquad \omega_{12} = \omega_1, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{34} = 3\omega_1$$

et, le point M étant pris sur la tangente $[AA_1]$, on aura :

$$M = A + uA_1,$$
$$dM = (\omega_{00} + u\omega_{10})M + \varpi A_1 + \omega_2(A_2 + uA_4) + u\omega_1(A_3 + A_2),$$
$$d^2M = (a\omega_1^2 + \omega_2\omega_3)A_4 + (\omega_2^2 + 2u\omega_1\omega_2)A_5.$$

La tangente $[AA_1]$ est bien génératrice triple sur la V_3 lieu de M.

46. Nous avons supposé, ce qui est le cas général, que la forme ω_{45} dépend effectivement de ω_2. Dans le cas contraire, on peut réduire ω_{45} à zéro, et les V_3 correspondantes ne dépendent que de 2 fonctions de 2 arguments. La structure de la surface focale n'est plus la même que précédemment. On peut en effet poser dans ce cas :

$$\omega_{41} = \omega_2, \qquad \omega_{42} = \omega_1$$

et l'on a, pour une courbe quelconque tracée sur la surface focale :

$$d^2A_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)A_1 + 2\omega_1\omega_2A_2,$$
$$d^3A_3 = (\omega_2^3 + 3\omega_1^2\omega_2)A_5.$$

La V_3 étudiée est donc engendrée par les tangentes asymptotiques du second ordre ($\omega_2 = 0$) d'une V_2 d'espèce Φ à caractéristiques de Segre.

Réciproquement, toute V_3 de E_5, engendrée par une famille de tangentes asymptotiques du second ordre d'une V_2 à caractéristiques dont l'hyperplan osculateur dépend de deux paramètres, admet une famille triple d'asymptotiques rectilignes.

En effet, choisissons le repère de façon à avoir

$$\Phi_3 = \omega_1^2 + \omega_2^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Psi_5 = \omega_2^3 + 3\omega_1^2\omega_2:$$

Sur cette V_2, qui ne sort pas de E_5, on peut poser :

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{34} = \omega_1, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{42} = 0.$$

Soit M un point de la tangente asymptotique du second ordre $[AA_1]$; nous aurons :

$$\begin{aligned} M &= A + uA_1, \\ dM &= (\omega_{00} + u\omega_{10})A + \varpi A_1 + \omega_2(A_2 + uA_4) + u\omega_1 A_3, \\ d^2M &= (u\omega_1^2 + 2\omega_2\omega_3)A_4 + 2u\omega_1\omega_2 A_5, \end{aligned}$$

ce qui établit la proposition.

Notons enfin que les développables génératrices peuvent dégénérer en cônes : il faut et il suffit pour cela que ω_{30} soit réductible à zéro. Les V_3 correspondantes ne dépendent que de 2 fonctions de 2 arguments.

E. — *Les* V_3 *qui ont une famille quadruple d'asymptotiques.*

47. Appelons $[AA_3]$ la tangente asymptotique quadruple; les formes de base seront :

$$\Phi_4 = \omega_1^2 + 2\omega_2\omega_3, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2.$$

Il peut exister une forme asymptotique du second ordre: $\Psi_6 = \omega_2^3$. Nous avons donc deux cas à examiner.

a. V_3 *contenues dans* E_5. — Les deux formes biasymptotiques ont pour expression :

$$\begin{aligned} F_4 = {} & \omega_1^2(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11}) + \omega_2^2(\omega_{34} - 2\omega_{23}) - 2\omega_3^2\omega_{32} - 2\omega_1\omega_2(\omega_{13} + \omega_{24}) \\ & - 2\omega_1\omega_3(\omega_{12} + \omega_{31}) + 2\omega_2\omega_3(\omega_{44} + \omega_{00} - \omega_{22} - \omega_{33}), \\ F_5 = {} & \omega_1^2\omega_{45} + \omega_2^2(\omega_{55} + \omega_{00} - 2\omega_{22}) - 2\omega_1\omega_2\omega_{12} + 2\omega_2\omega_3(\omega_{45} - \omega_{32}). \end{aligned}$$

Le système différentiel correspondant est en involution avec $s_2 = 3$.

Les asymptotiques quadruples sont biasymptotiques, mais non rectilignes en général. Dans la direction asymptotique, l'hyperplan tangent a pour caractéristique le plan $[AA_1A_3]$, qui est le plan tangent commun aux cônes asymptotiques, et qui reste le même le long de la ligne asymptotique : *les lignes asymptotiques sont donc des courbes planes.*

Le plan de chacune des asymptotiques touche la V_3 le long de la ligne asymptotique : la V_3 est donc l'enveloppe du plan à deux paramètres $[AA_1A_3]$. Choisissons le repère de façon à avoir

$$\omega_{32} = \omega_1, \qquad \omega_{12} = 0.$$

Les coordonnées homogènes d'un point caractéristique du plan $[AA_1A_3]$ vérifient les équations :

$$x\,\omega_2 + x_3\omega_1 = 0,$$
$$x_1\omega_1 + x_3\omega_2 = 0,$$

d'où l'équation de la courbe asymptotique située dans $[AA_1A_3]$:

$$xx_1 - x_3^2 = 0.$$

C'est une conique : *la V_3 est donc engendrée par ∞^2 coniques* (1).

48. La condition nécessaire et suffisante pour que les V_3 soient réglées est que la forme ω_{31} soit indépendante de ω_3. Le système correspondant est en involution avec $s_2 = 2$. Ayant particularisé le repère de telle sorte que :

$$\omega_{32} = 0, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{12} = -\omega_1, \quad \omega_{30} = \omega_1, \quad \omega_{41} = 0, \quad \omega_{42} = \omega_1, \quad \omega_{43} = \omega_2,$$

on constate que chaque V_3 admet une famille de développables génératrices et que la surface focale, lieu de A_3, est une V_2 d'hyperplan osculateur maximum. Toutefois, ce n'est pas une V_2 du type le plus général, mais bien du type étudié au nº **22**. Les arêtes de rebroussement, tracées sur cette V_2, vérifient en effet l'équation $\Lambda = 0$ et sont des sections hyperplanes de la V_2. On a vu, au nº **22**, que ces courbes sont renfermées chacune dans un H_3 : par suite, la V_3 est engendrée par un système de développables dont chacune est contenue dans un H_3 et deux H_3 consécutifs se coupent suivant un plan (2).

---

(1) SISAM, *loc. cit.*, p. 128.
(2) *Ibid.*, p. 125.

Inversement, prenons une V_2 de E_5 dont une famille de sections hyperplanes soit solution de l'équation $\Lambda = 0$: les tangentes à ces courbes engendrent une V_3 sur laquelle elles comptent quatre fois comme asymptotiques.

En effet, un choix convenable du repère permet d'écrire, sur cette V_2 :

$$\omega_{35} = 0, \qquad \omega_{45} = 0, \qquad \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{34} = \omega_1$$

si bien que, en posant :

$$M = A + u A_1,$$

il viendra :

$$dM = (\omega_{00} + u\omega_{10})M + \varpi A_1 + \omega_2(A_2 + u A_4) + u\omega_1 A_3,$$
$$d^2 M = (u\omega_1^2 + 2\omega_2\omega_3)A_4 + \omega_2^2 A_5,$$

ce qui démontre la proposition.

49. *b.* V_3 *non contenues dans* E_5. — Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_2 = 2$. La généralité des V_3 qui ne sont pas renfermées dans E_5 est donc moins grande que celle des V_3 de E_5, de même structure. Elles sont toujours *réglées*, car la forme ω_{31} est nécessairement indépendante de ω_3.

Sur ces V_3, l'équation $\omega_2 = 0$ est complètement intégrable et définit une famille de développables génératrices. Particularisons le repère de telle sorte qu'on ait :

$$\omega_{30} = \omega_1, \quad \omega_{31} = 0, \quad \omega_{32} = 0, \quad \omega_{12} = \omega_1, \quad \omega_{41} = 0, \quad \omega_{42} = \omega_1, \quad \omega_{43} = \omega_2.$$

Dans ces conditions A_3 est le point focal sur la génératrice, et décrit en général une surface, sur laquelle on a :

$$dA_3 = \omega_{33}A_3 + \omega_1 A + \omega_2 A_4,$$
$$d^2 A_3 = (\omega_1^2 + \omega_2^2)A_1 + 2\omega_1\omega_2 A_2 + \omega_2^2 A_5,$$
$$d^3 A_3 = \omega_2^3 A_6.$$

La V_2 focale est donc une surface dont l'hyperplan osculateur a 5 dimensions et ne dépend que d'un paramètre : ces V_2 ont été signalées (n° **25**) ; elles ne dépendent effectivement que de 2 fonctions de 2 arguments. La V_3 est donc engendrée par les tangentes asymptotiques du second ordre à une V_2 de ce type.

Réciproquement, toute V_3 engendrée de cette façon admet ses génératrices comme asymptotiques quadruples. En effet, soit une V_2 du type :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2, \quad \Phi_6 = \omega_1^3.$$

On pourra choisir le repère de façon à avoir :

$$\omega_{43} = 0, \qquad \omega_{53} = 0, \qquad \omega_{21} = 0, \qquad \omega_{41} = 0, \qquad \omega_{51} = 0, \qquad \omega_{54} = \omega_2,$$

et si M est un point de la tangente asymptotique du second ordre $[AA_2]$, il viendra :

$$\begin{aligned} M &= A + uA_2, \\ dM &= (\omega_{00} + u\omega_{20})M + \varpi A_2 + \omega_1(A_1 + uA_4) + u\omega_2 A_5, \\ d^2M &= \omega_1^2 A_3 + (2\omega_1\omega_3 + u\omega_2^2)A_4, \end{aligned}$$

ce qui établit la réciproque énoncée.

CHAPITRE V.

LES V_3 DONT L'HYPERPLAN OSCULATEUR A SIX DIMENSIONS OU PLUS.

50. Lorsque trois des formes asymptotiques d'une V_3 sont linéairement indépendantes, le réseau asymptotique s'exprime comme un réseau ponctuel de coniques :

$$\lambda\Phi_4 + \mu\Phi_5 + \nu\Phi_6 = 0. \tag{1}$$

Une direction de tangente en un point de la V_3 n'a pas en général de direction conjuguée; il n'y a exception que pour les directions vérifiant l'équation homogène et du troisième degré :

$$\frac{D(\Phi_4, \Phi_5, \Phi_6)}{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} = 0. \tag{2}$$

Chacune des directions située sur le cône (2), que nous appellerons le *cône des tangentes fondamentales*, est droite double d'un cône dégénéré du réseau asymptotique. La condition pour qu'un cône asymptotique soit dégénéré s'exprime en écrivant que la discriminant de la forme quadratique qui figure au premier membre de (1) s'annule; d'où l'équation homogène et du troisième degré :

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0. \tag{3}$$

En regardant λ, μ, ν, comme les coordonnées homogènes dans un plan, l'équation (3) représente une cubique, la *cubique caractéristique*.

L'équation (3) est invariante vis-à-vis de toute substitution linéaire effectuée sur les ω, c'est-à-dire vis-à-vis de tout changement des sommets A_1, A_2, A_3, dans l'hyperplan tangent. Par contre, un changement des sommets A_4, A_5, A_6 dans l'hyperplan osculateur se traduit par une substitution linéaire sur les formes Φ, et par conséquent sur les paramètres λ, μ, ν : la cubique caractéristique subit alors une transformation homographique, mais elle conserve, vis-à-vis de toutes les transformations de cette nature, un invariant qui exprime le rapport anharmonique des quatre tangentes qu'on peut mener d'un point de la courbe. L'existence de cet invariant entraîne une particularité qui n'existe que dans le cas où les formes asymptotiques linéairement indépendantes sont au nombre de trois : on ne peut pas classer ces variétés en un nombre fini de types projectifs. Cependant la considération de la cubique caractéristique conduit à une classification des divers réseaux de la forme (1). Nous étudierons les cas suivants :

I. L'équation (3) est identiquement vérifiée;
II. La cubique caractéristique se réduit à une droite triple;
III. La cubique se décompose en une droite simple et une droite double;
IV. La cubique se décompose en trois droites distinctes.

On peut toujours regarder trois coniques comme les polaires de trois points par rapport à une même courbe du troisième degré. En d'autres termes, chacune des trois formes quadratiques données s'exprime linéairement au moyen des dérivées partielles d'une même forme cubique et, inversement, les dérivées partielles de cette forme cubique s'expriment linéairement en fonction des trois formes quadratiques. Il suit de là que lorsque le réseau asymptotique d'une V_3 contient trois formes de base, il peut toujours exister au moins une forme asymptotique du second ordre.

31. Pour les V_3 dont l'hyperplan osculateur a plus de 6 dimensions, nous nous bornerons à indiquer la classification des divers types projectifs.

S'il existe quatre formes asymptotiques linéairement distinctes, la classification se ramène à celle des faisceaux de quatre coniques, laquelle se déduit elle-même de la classification des faisceaux de deux coniques. En effet, toutes les coniques du faisceau déterminé par quatre coniques de base ont des coefficients a_{ij} qui vérifient deux relations homogènes :

$$\sum_{(ij)} A_{ij} a_{ij} = 0, \qquad \sum_{(ij)} B_{ij} a_{ij} = 0.$$

On peut ramener ces deux relations à une forme canonique, au moyen d'un choix convenable de A_1, A_2, A_3 dans l'hyperplan tangent, comme s'il s'agissait de réduire le faisceau ayant pour base les deux coniques

$$\sum_{(ij)} A_{ij} u_i u_j = 0, \qquad \sum_{(ij)} B_{ij} u_i u_j = 0.$$

On obtient donc huit types projectifs différents (Chap. III).

Le point M, projection de d^2A dans l'hyperplan $[A_4 A_5 A_6 A_7]$ a pour lieu, dans le cas général, une surface de Steiner. Le lieu des plans osculateurs aux différentes courbes tracées sur la V_3 et passant par A est une hypersurface à 6 dimensions, du quatrième degré, contenant l'H_3 tangent à la V_3 en A.

S'il existe 5 formes asymptotiques linéairement indépendantes, les cônes du réseau ont des coefficients qui vérifient une relation

$$\sum_{(ij)} A_{ij} a_{ij} = 0,$$

qu'on peut toujours ramener à l'une des trois formes :

$$a_{11} = a_{23}, \qquad a_{23} = 0, \qquad a_{11} = 0.$$

I. — V_3 dont tous les cônes asymptotiques sont dégénérés.

A. — L'hyperplan tangent dépend de deux paramètres.

32. Ces V_3 rentrent dans un type général étudié par M. Cartan, celui des V_p dont l'hyperplan tangent dépend de $q < p$ paramètres et dont l'hyperplan osculateur a le nombre maximum $p + \frac{q(q+1)}{2}$ de dimensions (¹). Leur système différentiel peut être prolongé jusqu'à l'involution, qui est obtenue avec $s_2 = n - 3$.

Ces V_3 sont des *hypercônes*, projetant des V_2 d'hyperplan osculateur maximum. Les $n - 3$ fonctions de 2 arguments servent à définir la V_2 directrice dans une variété plane à $n - 1$ dimensions ne contenant pas le sommet de l'hypercône.

B. — L'hyperplan tangent dépend de trois paramètres.

33. Nous pouvons prendre pour formes de base :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_1\omega_3.$$

Toutes les tangentes situées dans le plan $[AA_2A_3]$ sont des tangentes asymptotiques. A une direction quelconque située dans ce plan est conjuguée toute autre direction du même plan.

Le système de Pfaff n'est pas immédiatement en involution, mais en particularisant le repère, on peut le prolonger partiellement par les deux équations :

$$\omega_{21} = 0, \qquad \omega_{31} = 0$$

et l'involution est obtenue avec $s_1 = 3n - 7$.

(¹) *Sur les variétés de courbure constante...,* n° 47 (*loc. cit.*).

Ces V_3 sont *engendrées par des plans*. En effet, on a :

$$d[AA_2A_3] \equiv (\omega_{00} + \omega_{22} + \omega_{33})[AA_2A_3] \qquad (\text{mod.}\, \omega_1);$$

par conséquent, l'équation complètement intégrable sur la V_3

$$\omega_1 = 0$$

définit une famille de plans générateurs. Deux plans générateurs consécutifs n'ont aucun point commun.

Réciproquement, les V_3 les plus générales de E_n $(n \geqq 6)$ engendrées par des plans appartiennent au type étudié. En effet, tout cône asymptotique en un point A de cette V_3 doit se décomposer en deux plans, dont l'un est le plan générateur passant par A. Le réseau asymptotique de cette V_3 a donc nécessairement pour expression :

$$\omega_1(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + \nu\omega_3) = 0.$$

Un plan de E_n dépendant de $3(n-2)$ paramètres, le lieu de ∞^1 plans dépendra de $3n-7$ fonctions de 1 argument, ce qui est le résultat trouvé par l'analyse.

II. — La cubique caractéristique se réduit à une droite triple.

34. Les formes asymptotiques de base sont réductibles à

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_6 = \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_3.$$

La seule tangente asymptotique est $[AA_3]$. Elle est conjuguée à toutes les directions situées dans le plan $[AA_2A_3]$.

Le système de Pfaff est immédiatement en involution avec $s_2 = 4$.

On vérifie facilement que l'équation

$$\omega_1 = 0$$

est complètement intégrable sur la V_3 : il existe donc une famille de surfaces génératrices tangentes en chacun de leurs points au plan $[AA_2A_3]$ dont toutes les directions sont conjuguées à la tangente asymptotique.

Pour une courbe tracée sur la V_2 génératrice qui passe en A, on a :

$$d^2A = (\omega_2\omega_{21} + \omega_3\omega_{31})A_1 + \omega_2^2 A_6$$

et l'on peut poser, en général,

$$\omega_{21} = \omega_3, \qquad \omega_{31} = \omega_2.$$

Les V_2 génératrices sont donc des V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques, leurs asymptotiques étant celles de la V_3.

55. Pour que la V_3 soit réglée, il faut et il suffit qu'on puisse choisir le repère de façon à avoir :

$$\omega_{31} = 0, \qquad \omega_{32} = 0.$$

Le système différentiel ainsi obtenu est en involution avec $s_2 = 3$.

Dans ce cas, les V_2 génératrices sont des développables. Le point A_3, qui est le point focal sur la génératrice, décrit en général une surface. Après avoir particularisé le repère de façon à avoir :

$$\omega_{30} = \omega_2, \qquad \omega_{61} = \omega_2, \qquad \omega_{62} = 0, \qquad \omega_{64} = 0, \qquad \omega_{65} = 0,$$
$$\omega_{67} = \omega_1, \qquad \omega_{6\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 8, 9, \ldots, n),$$

il vient, pour une courbe tracée sur la surface focale :

$$dA_3 = \omega_{33}A_3 + \omega_2 A + \omega_1 A_6,$$
$$d^2A_3 = 2\omega_1\omega_2 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_1^2 A_7.$$

La surface focale est donc une V_2 d'hyperplan osculateur maximum. Les arêtes de rebroussement, qui sont données par l'équation $\omega_1 = 0$, sont des courbes asymptotiques du second ordre ayant un contact du troisième ordre avec l'H_4 $[AA_1A_2A_3A_6]$ qui contient deux plans tangents consécutifs.

Réciproquement, toute V_3 lieu des tangentes à une famille de courbes asymptotiques du second ordre tracées sur une V_2 de E_n $(n \geqq 6)$ d'hyperplan osculateur maximum, et ayant un contact du troisième ordre avec l'H_4 qui renferme deux plans tangents consécutifs, est une V_3 réglée du type étudié. Soit, en effet, pour cette V_2 :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2;$$
$$\Psi_6 = 3\omega_1^2\omega_2, \qquad \Psi_7 = 3\omega_1\omega_2^2, \qquad \Psi_8 = \omega_2^3.$$

Si les courbes asymptotiques du second ordre $\omega_2 = 0$ jouissent de la propriété mentionnée, on pourra poser, en particularisant le repère :

$$\omega_{12} = 0, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{34} = \omega_1, \qquad \omega_{35} = 0, \qquad \omega_{45} = 0,$$

et, en appelant M un point de la tangente $[AA_1]$, il viendra :

$$\begin{aligned} M &= A + uA_1, \\ dM &= (\omega_{00} + u\omega_{10})A + \varpi A_1 + \omega_2(A_2 + uA_4) + u\omega_1 A_3, \\ d^2M &= (u\omega_1^2 + 2\omega_2\omega_3)A_4 + \omega_2^2(A_5 + uA_7) + 2u\omega_1\omega_2 A_6, \end{aligned}$$

ce qui démontre la réciproque.

Quand la surface focale, lieu de A_3, dégénère en courbe, la V_3 est engendrée par des cônes, et elle ne dépend que de 2 fonctions de 2 arguments.

III. — La cubique caractéristique se décompose en deux droites dont une double.

56. A ce cas correspondent trois types différents de variétés :

A. Nous avons d'abord les V_3 dont le cône des tangentes fondamentales se décompose en deux plans, dont l'un est double, et qui ont deux tangentes asymptotiques, l'une double. Nous pourrons prendre :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_2\omega_3.$$

B. Le cône fondamental étant le même que précédemment, on peut avoir aussi des V_3 qui n'ont qu'une tangente asymptotique :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_1\omega_3.$$

C. Enfin, dans le cas où le cône fondamental se décompose en trois plans, on peut prendre :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_3(\omega_1 + \omega_2),$$

A. — *Variétés à deux familles d'asymptotiques, l'une double.*

37. Soient $[AA_2]$ et $[AA_3]$ les deux tangentes asymptotiques passant en A, la dernière étant l'asymptotique double, et soit $[AA_1A_3]$ le plan tangent commun à tous les cônes asymptotiques le long de $[AA_3]$. On aura pour formes de base :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_2\omega_3.$$

Toutes les directions du plan $[AA_1A_3]$ sont conjuguées à la tangente asymptotique double $[AA_3]$. Les directions du plan $[AA_2A_3]$ se correspondent deux à deux, $[AA_3]$ se correspondant à elle-même, ainsi que $[AA_2]$.

Le réseau asymptotique du second ordre contient au maximum deux formes cubiques indépendantes. Plaçons-nous d'abord dans le cas où ces deux formes existent, l'espace ayant au moins 8 dimensions, et soient les formes de base :

$$\Psi_7 = 3\omega_1^2\omega_2, \qquad \Psi_8 = \omega_1^3.$$

Le système de Pfaff correspondant est en involution avec $s_2 = 3$.

En examinant les relations quadratiques dérivées, on constate que les lignes asymptotiques doubles sont des *génératrices rectilignes* de la V_3.

Il existe une famille de surfaces génératrices, définie par l'équation complètement intégrable sur la V_3 :

$$\omega_1 = 0.$$

Ces surfaces sont tangentes en chacun de leurs points A au plan $[AA_2A_3]$ qui contient les deux tangentes asymptotiques de la V_3. Ce sont des V_2 réglées, $[AA_3]$ étant la génératrice rectiligne qui passe en A, mais $[AA_2]$ n'est pas en général tangente asymptotique pour la V_2. Leur hyperplan osculateur ne dépend que d'un paramètre; elles rentrent donc dans le type étudié au n° **19**.

Le mode de génération de ces V_2 a été décrit. Leur hyperplan osculateur est la variété plane osculatrice à 4 dimensions à une certaine courbe décrite, si l'on veut, dans le cas actuel, par le point A_6, ayant pour tangente $[A_6A_3]$ et, pour plan osculateur, le plan $[AA_3A_6]$ qui contient la génératrice de la V_2.

En particularisant le repère mobile de façon à avoir :

$$\omega_{60}=\omega_1, \quad \omega_{61}=0, \quad \omega_{62}=0, \quad \omega_{63}=\omega_2+\lambda\omega_1, \quad \omega_{64}=0, \quad \omega_{65}=0,$$
$$\omega_{30}=\omega_2, \quad \omega_{31}=0, \quad \omega_{32}=\omega_1,$$

le lieu du point A_6 est une surface dont l'hyperplan osculateur a 4 dimensions et dont le plan tangent est $[AA_3A_6]$. Quand $\omega_1=0$, A_6 décrit une courbe asymptotique de cette surface et la droite $[AA_3]$, située dans le plan tangent, engendre une V_2 génératrice de la V_3 étudiée.

58. Comme cas particulier, il peut arriver que les surfaces génératrices soient des surfaces réglées non développables, contenues chacune dans un espace à 3 dimensions : c'est ce qui arrive lorsque $[AA_2]$ est tangente asymptotique sur la V_2 génératrice passant en A. En particularisant le repère mobile de façon que $[AA_2A_3A_6]$ soit l'hyperplan osculateur en A à la V_2 génératrice passant en A, on pourra résoudre par :

$$\omega_{65}=0, \quad \omega_{31}=0, \quad \omega_{21}=0, \quad \omega_{64}=0, \quad \omega_{61}=0,$$

et le nouveau système différentiel sera en involution avec $s_2=2$.

Pour se rendre compte de la génération de ces nouvelles V_3, continuons de particulariser le repère mobile. On peut se ramener à

$$\omega_{30}=0, \quad \omega_{32}=\omega_1, \quad \omega_{60}=\omega_1, \quad \omega_{62}=0.$$

Par conséquent, chaque V_2 génératrice est engendrée par une droite $[AA_3]$ qui s'appuie sur une droite fixe, $[A_3A_6]$. Le lieu de $[A_3A_6]$, quand $\omega_1\neq 0$, est une V_2 non développable. Deux droites infiniment voisines de cette V_2 définissent la variété plane à 3 dimensions $[AA_2A_3A_6]$ dont le lieu est une V_4 qui contient la V^3 étudiée.

59. Lorsque l'hyperplan osculateur à la V_3 ne dépend que d'un paramètre, ce qui correspond au cas où la seule forme asymptotique du second ordre est ω_1^3, le système différentiel peut être prolongé jusqu'à l'involution, qui est obtenue avec $s_2 = 2$. Il est à remarquer que, dans ce cas, les V_2 génératrices ont deux familles d'asymptotiques; l'une de ces familles étant rectiligne, on se trouve donc toujours dans le cas particulier étudié précédemment.

Par contre, si le réseau asymptotique du second ordre est identiquement nul, la V_3 est contenue dans E_6 et le système différentiel est en involution avec $s_2 = 3$. La généralité des V_3 est la même que dans E_n, et la structure des surfaces génératrices est aussi la même que lorsque les deux formes cubiques existent.

60. Examinons encore le cas où l'hyperplan osculateur dépend de deux paramètres, mais où la forme cubique unique est

$$\Psi_7 = 3\omega_1^2\omega_2.$$

L'hyperplan osculateur du second ordre est alors fixe, et les V_3 ne sortent pas de E_7. Le système de Pfaff correspondant peut être prolongé jusqu'à l'involution et sa solution générale ne dépend que d'une fonction de deux arguments.

L'équation $\omega_1 = 0$ donne encore des surfaces génératrices réglées dont l'hyperplan osculateur a 4 dimensions. Mais il existe en outre une seconde famille de surfaces génératrices, intégrales de

$$\omega_2 = 0,$$

qui sont réglées et *développables*. En prenant A_3 au point focal de $[AA_3]$, il vient sur la surface focale lieu de A_3 :

$$\begin{aligned}
d\mathrm{A}_3 &= \omega_{33}\mathrm{A}_3 + \omega_1\mathrm{A} + \omega_2\mathrm{A}_6,\\
d^2\mathrm{A}_3 &= \omega_1^2\mathrm{A}_1 + 2\omega_1\omega_2\mathrm{A}_2,\\
d^3\mathrm{A}_3 &= \omega_1^3\mathrm{A}_4 + 3\omega_1^2\omega_2\mathrm{A}_5,\\
d^4\mathrm{A}_3 &= 4\omega_1^3\omega_2\mathrm{A}_7.
\end{aligned}$$

Cette surface focale est donc une V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques. Les arêtes de rebroussement, données par l'équation :

$$\omega_2 = 0,$$

sont des courbes asymptotiques du troisième ordre, mais non du premier ni du second ordre.

Réciproquement, si une V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques située dans E_7 a un hyperplan osculateur du second ordre à 6 dimensions dépendant de deux paramètres, les tangentes aux courbes asymptotiques du troisième ordre engendrent une V_3 du type particulier que nous étudions.

En effet, on peut poser, sur une telle V_2 :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Psi_5 = \omega_1^3, \qquad \Psi_6 = 3\omega_1^2\omega_2, \qquad H_7 = 4\omega_1^3\omega_2,$$

et résoudre le système dérivé, en particularisant le repère, au moyen de :

$$\omega_{21} = \omega_2, \qquad \omega_{43} = \omega_2, \qquad \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{32} = 0, \qquad \omega_{34} = 0.$$

Soit maintenant M un point de la tangente asymptotique du troisième ordre; il viendra :

$$\begin{aligned}
M &= A + uA_1, \\
dM &= (\omega_{00} + u\omega_{10})M + \varpi A_1 + \omega_2(A_2 + uA_4) + u\omega_1 A_3, \\
d^2M &= 2\omega_2\omega_3 A_4 + u\omega_1^2 A_5 + 2u\omega_1\omega_2 A_6, \\
d^3M &= 3u\omega_1^2\omega_2 A_7.
\end{aligned}$$

La V_3 lieu du point M a donc la structure annoncée.

B. — *Variétés ayant une famille d'asymptotiques doubles.*

61. Prenons pour formes de base :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_1\omega_2.$$

La seule tangente asymptotique est $[AA_3]$, et tous les cônes asymptotiques sont tangents suivant cette génératrice commune. Une tangente quelconque située dans le plan $[AA_2A_3]$ est conjuguée à $[AA_3]$, et la tangente $[AA_2]$ est conjuguée à toutes les directions du plan $[AA_1A_3]$.

Le système différentiel qui définit ces V_3 est en involution avec $s_2 = 5$.

Elles sont engendrées de deux façons différentes par ∞^1 surfaces, car les équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0$$

sont l'une et l'autre complètement intégrables.

Les surfaces génératrices intégrables de $\omega_1 = 0$ sont en général des V_2 d'espèce Φ à caractéristiques de Segre : les asymptotiques de la V_3 sont des caractéristiques sur ces surfaces génératrices.

Les surfaces intégrales de $\omega_2 = 0$ sont des V_2 d'espèce Φ à lignes asymptotiques : leurs asymptotiques sont les asymptotiques de la V_3.

62. Comme cas particulier, il peut arriver que la forme ω_{31} soit indépendante de ω_3 : les V_3 sont alors *réglées* et ne dépendent que de 4 fonctions de 2 arguments.

Les surfaces génératrices intégrales de $\omega_2 = 0$ conservent la même structure, mais les surfaces intégrales de $\omega_1 = 0$ sont dans ce cas des *développables*.

Soit A_3 le point focal sur la génératrice. Le lieu de A_3 sera en général une V_2 sur laquelle on aura :

$$\begin{aligned} dA_3 &= \omega_{33} A_3 + \omega_2 A + \omega_1 A_6, \\ d^2 A_3 &= 2\omega_1 \omega_2 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_1^2 A_7, \\ d^3 A_3 &= 3\omega_2 \omega_1^2 A_4 + \omega_2^3 A_5 + \omega_1^3 A_{10}. \end{aligned}$$

La surface focale est donc une V_2 d'hyperplan osculateur maximum, mais n'ayant que trois formes asymptotiques indépendantes du second ordre. Les arêtes de rebroussement des développables génératrices sont telles que trois plans tangents consécutifs, pris en suivant une de ces courbes, sont contenus dans un H_5, alors que sur une V_2 de la structure mentionnée, trois plans tangents consécutifs définissent en général un H_6.

Réciproquement, soit une V_2 dont l'hyperplan osculateur a 5 dimensions, et l'hyperplan osculateur du second ordre 8 dimensions, la forme cubique $3\omega_1\omega_2^2$ faisant défaut; si de plus les courbes $\omega_1 = 0$ tracées sur cette V_2 sont telles que trois plans tangents consécutifs, puis en suivant une de ces courbes, ne sortent pas d'un H_3, le lieu des tangentes à ces courbes est une V_3 du type que nous étudions. En effet, prenons une V_2 ayant pour formes asymptotiques :

$$\Phi_3 = \omega_1^2, \qquad \Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2,$$
$$\Psi_6 = \omega_1^3, \qquad \Psi_7 = 3\omega_1^2\omega_2, \qquad \Psi_8 = \omega_2^3,$$

et supposons réalisée la condition supplémentaire : ω_{13} ne dépendra pas de ω_2. On peut alors résoudre le système dérivé par les formules :

$$\omega_{13} = 0, \qquad \omega_{21} = 0, \qquad \omega_{31} = 0, \qquad \omega_{33} = 0, \qquad \omega_{34} = 0,$$

et, en posant :

$$M = A + uA_2,$$

il viendra :

$$dM = (\omega_{00} + u\omega_{20})M + \varpi A_2 + \omega_1(A_1 + uA_4) + u\omega_2 A_5,$$
$$d^2M = 2\omega_1\omega_3 A_4 + \omega_1^2(A_3 + uA_7) + u\omega_2^2 A_8.$$

Le lieu de la tangente $[AA_2]$ est donc une V_3 du type considéré.

C. — *Variétés dont le cône fondamental se décompose en trois plans.*

65. Si nous prenons pour base :

$$\Phi_4 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2, \qquad \Phi_6 = 2\omega_3(\omega_1 + \omega_2),$$

la tangente $[AA_3]$ est asymptotique double.

L'hyperplan osculateur dépend au plus de deux paramètres. S'il en dépend effectivement, supposons que l'hyperplan osculateur du second ordre soit le plus grand possible :

$$\Psi_7 = \omega_1^3. \qquad \Psi_8 = \omega_2^3.$$

Les V_3 correspondantes sont données par un système de Pfaff en involution avec $s_2 = 4$. Ce sont des *variétés réglées*. Les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ sont l'une et l'autre complètement intégrables, et les deux familles de surfaces génératrices sont des V_2 d'espèce Φ réglées.

Lorsque l'espace n'a que 6 dimensions, les V_2 dépendent de 6 fonctions de 2 arguments. Elles sont encore réglées, mais les équations $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$ ne sont plus nécessairement intégrables.

IV. — La cubique caractéristique se décompose en trois droites distinctes.

64. Les V_3 correspondantes se classent en deux types :

A. Les trois coniques $\Phi_1 = 0$, $\Phi_5 = 0$, $\Phi_6 = 0$ ont un triangle autopolaire commun. En le prenant comme triangle de référence, il vient :

$$\Phi_1 = \omega_1^2, \qquad \Phi_5 = \omega_2^2, \qquad \Phi_6 = \omega_3^2.$$

B. Les trois coniques passent par trois points fixes. On a alors :

$$\Phi_1 = 2\omega_2\omega_3, \qquad \Phi_5 = 2\omega_3\omega_1, \qquad \Phi_6 = 2\omega_1\omega_2.$$

Dans le premier cas, il n'existe pas de tangentes asymptotiques, mais il existe trois tangentes remarquables, intersection des plans fondamentaux deux à deux. Nous les appellerons *tangentes caractéristiques*, par analogie avec les tangentes caractéristiques de Segre.

A. — *Variétés à trois familles de caractéristiques.*

65. Le cône fondamental a pour équation :

$$\omega_1\omega_2\omega_3 = 0.$$

Chacun des trois plans dont il est composé a pour direction conjuguée la tangente qui est l'intersection des deux autres plans. Deux hyperplans tangents en deux points A, A' infiniment voisins, le second étant situé sur $[AA_1]$ par exemple, se coupent suivant le plan $[AA_2A_3]$. Le lieu de ce dernier plan, quand on suit la caractéristique tangente en chaque point à $[AA_1]$, est donc une V_3 développable.

Les V_3 étudiées ont pour système différentiel :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_6 = 0, & \omega_\lambda = 0, \\ \omega_{14} = \omega_1, & \omega_{15} = 0, & \omega_{16} = 0, & \omega_{1\lambda} = 0, \\ \omega_{24} = 0, & \omega_{25} = \omega_2, & \omega_{26} = 0, & \omega_{2\lambda} = 0, \\ \omega_{34} = 0, & \omega_{35} = 0, & \omega_{36} = \omega_3, & \omega_{3\lambda} = 0 \qquad (\lambda = 7, \ldots, n), \end{array}\right.$$

et pour relations quadratiques :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} [\omega_1(\omega_{44} + \omega_{00} - 2\omega_{11})] & -[\omega_2\omega_{21}] & -[\omega_3\omega_{31}] & = 0, \\ -[\omega_1\omega_{21}] & +[\omega_2\omega_{54}] & & = 0, \\ -[\omega_1\omega_{31}] & & +[\omega_3\omega_{64}] & = 0, \\ [\omega_1\omega_{45}] & -[\omega_2\omega_{12}] & & = 0, \\ -[\omega_1\omega_{12}] & +[\omega_2(\omega_{55} + \omega_{00} - 2\omega_{22})] & -[\omega_3\omega_{32}] & = 0, \\ & -[\omega_2\omega_{32}] & +[\omega_3\omega_{65}] & = 0, \\ [\omega_1\omega_{46}] & & -[\omega_3\omega_{13}] & = 0, \\ & [\omega_2\omega_{56}] & -[\omega_3\omega_{23}] & = 0, \\ -[\omega_1\omega_{13}] & -[\omega_2\omega_{23}] & +[\omega_3(\omega_{66} + \omega_{00} - 2\omega_{33})] & = 0, \\ [\omega_1\omega_{4\lambda}] & & & = 0, \\ & [\omega_2\omega_{5\lambda}] & & = 0, \\ & & [\omega_3\omega_{6\lambda}] & = 0. \end{array}\right.$$

Ce système est en involution avec $s_2 = 6$.

Chacune des trois équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

est complètement intégrable sur la V_3 et définit une famille de V_2 génératrices qui sont, on le voit aisément, des surfaces à caractéristiques de Segre.

66. Les tangentes caractéristiques telles que $[AA_1]$ forment une famille de droites à trois paramètres, dont chacune appartient à trois surfaces développables. En effet, la droite $[AA_1]$ a un déplacement instantané qui se déduit de

$$dA = \omega_{00} A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,$$
$$dA_1 = \omega_{10} A + \omega_{11} A_1 + \omega_{12} A_2 + \omega_{13} A_3 + \omega_1 A_4.$$

Pour qu'un point $xA + x_1 A_1$ de cette droite soit caractéristique, il faut et il suffit que l'on ait (nº **5**, théorème II) :

$$x\omega_2 + x_1\omega_{12} = 0,$$
$$x\omega_3 + x_1\omega_{13} = 0,$$
$$x_1\omega_1 = 0.$$

On obtient une première solution en liant les paramètres par

$$\omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

et il faut alors $x_1 = 0$: le point A est le point caractéristique. La droite $[AA_1]$ enveloppe donc, comme il était évident, la courbe caractéristique tracée sur la V_3 étudiée.

Une seconde solution s'obtient en posant :

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_3 = 0;$$

dans ces conditions, si l'on ne particularise pas le système de référence, il vient :

$$\omega_{12} = \alpha\omega_2.$$

Le point caractéristique est alors, sur $[AA_1]$, le point dont les coordonnées vérifient :

$$x + \alpha x_1 = 0;$$

c'est-à-dire :

$$M_2 = A_1 - \alpha A.$$

Enfin, de façon analogue, on obtient une troisième famille de développables, en posant :

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0;$$

comme on a de plus :

$$\omega_{13} = \beta\omega_3,$$

le point caractéristique est dans ce cas :

$$M_3 = A_1 - \beta A.$$

Sur chaque tangente caractéristique, il existe ainsi trois points focaux: A, M_2, M_3. Le lieu du point focal A, quand les trois paramètres varient, est la V_3 étudiée. Montrons que le lieu de chacun des autres points focaux est aussi une V_3 du même type.

Nous pouvons particulariser le système de référence de sorte que A_1 décrive la V_3 focale lieu des arêtes de rebroussement vérifiant $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$. Dans ces conditions, ω_{12} ne dépend pas de ω_2, et l'on voit aisément qu'on peut aussi le supposer indépendant de ω_1; donc

$$\omega_{12} = 0. \tag{3}$$

Une nouvelle particularisation permet de supposer que ω_{13} ne dépend pas de ω_1 et que

$$\omega_{13} = \omega_3.$$

Par ailleurs, ω_{32} peut être ramené à zéro. La dérivée extérieure de (3) nous donne alors :

$$[\omega_1 \omega_{42}] - [\omega_2 \omega_{10}] = 0. \tag{4}$$

On peut ramener à zéro le coefficient de ω_1 dans ω_{10} et à l'unité le coefficient de ω_2, en général :

$$\omega_{10} = \omega_2.$$

Le déplacement instantané de A_1 est maintenant :

$$dA_1 = \omega_2 A + \omega_{11} A_1 + \omega_3 A_3 + \omega_1 A_4,$$
$$d^2 A_1 = (\omega_2^2 + \omega_1 \omega_{42}) A_2 + \omega_1 \omega_{45} A_5 + (\omega_3^2 + \omega_1 \omega_{46}) A_6 + \sum \omega_1 \omega_{4\lambda} A_\lambda.$$

D'après les relations quadratiques (2) et (4), les formes ω_{42}, ω_{45}, ω_{46}, $\omega_{4\lambda}$, sont linéaires en ω_1, si bien que l'on a, en choisissant convenablement A_7 :

$$d^2 A_1 = \omega_2^2 A_2 + \omega_3^2 A_6 + \omega_1^2 A_7.$$

Le lieu de A_1 est bien une V_2 à 3 familles de caractéristiques, et les arêtes de rebroussement des développables $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$ constituent une des familles de caractéristiques.

Il est clair que la troisième nappe focale a, en général, la même structure.

Nous obtenons ainsi une généralisation aux variétés à 3 dimensions de E_n de la transformation de Laplace pour les surfaces de l'espace ordinaire. La considération des tangentes caractéristiques d'une V_3 du type étudié permet d'en déduire six nouvelles V_3 de même structure, dont les familles de caractéristiques correspondent à celles de la V_3 primitive.

B. — *Variétés à trois familles d'asymptotiques.*

67. Nous prendrons pour formes de base du réseau asymptotique :

$$\Phi_4 = 2\omega_1\omega_2, \qquad \Phi_5 = 2\omega_2\omega_3, \qquad \Phi_6 = 2\omega_3\omega_1.$$

La seule forme asymptotique du second ordre qui puisse exister est $\Psi_7 = 6\,\omega_1\omega_2\omega_3$, et il ne peut exister de forme d'ordre supérieur : les V_3 du type étudié sont donc contenues soit dans E_6, soit dans E_7.

Elles sont intégrales du système différentiel :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \omega_4 = 0, & \omega_5 = 0, & \omega_6 = 0, \\ \omega_{14} = \omega_2, & \omega_{15} = 0, & \omega_{16} = \omega_3, \\ \omega_{24} = \omega_1, & \omega_{25} = \omega_3, & \omega_{26} = 0, \\ \omega_{34} = 0, & \omega_{35} = \omega_2, & \omega_{36} = \omega_1; \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \omega_7 = 0, & \\ \omega_{17} = 0, & \omega_{47} = \omega_3, \\ \omega_{27} = 0, & \omega_{57} = \omega_1, \\ \omega_{37} = 0, & \omega_{67} = \omega_2. \end{array}\right.$$

Le système (1), qui est seul à considérer pour les V_3 situées dans E_6, est immédiatement en involution avec $s_2 = 6$. Les lignes asymptotiques de ces V_3 ne sont pas des droites en général. De plus, les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ ne sont pas en général complètement intégrables.

68. La détermination de toutes les V_3 de E_6 triplement réglées serait un problème intéressant. Elles se divisent en deux classes : celles sur lesquelles chacune des équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ est complètement intégrable, et celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les premières peuvent être déduites par projection sur un hyperplan à 6 dimensions d'une V_3 triplement réglée située dans E_7 : c'est ce que nous verrons tout à l'heure. Parmi les autres, il en existe une remarquable, ne dépendant que de constantes arbitraires, et pour laquelle les équations de Frenet généralisées prennent la forme :

$$\begin{aligned}
dA &= \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3,\\
dA_1 &= -4\omega_1 A + \omega_2 A_3 + \omega_2 A_4 + \omega_3 A_6,\\
dA_2 &= -4\omega_2 A + \omega_3 A_1 + \omega_1 A_4 + \omega_3 A_5,\\
dA_3 &= -4\omega_3 A + \omega_1 A_2 + \omega_2 A_5 + \omega_1 A_6,\\
dA_4 &= 2\omega_3 A - 3\omega_2 A_1 - 5\omega_1 A_2 + \omega_2 A_5 - 2\omega_1 A_6,\\
dA_5 &= 2\omega_1 A - 3\omega_3 A_2 - 5\omega_2 A_3 - 2\omega_2 A_4 + \omega_3 A_6,\\
dA_6 &= 2\omega_2 A - 5\omega_3 A_1 - 3\omega_1 A_3 + \omega_1 A_4 - 2\omega_3 A_5.
\end{aligned}$$

Cette V_3 triplement réglée admet un groupe à 3 paramètres, qui a les mêmes formules de structure que le groupe des rotations :

$$\omega'_1 = [\omega_2\omega_3], \quad \omega'_2 = [\omega_3\omega_1], \quad \omega'_3 = [\omega_1\omega_2].$$

69. Dans l'espace à 7 dimensions, les V_3 sont définies par les équations (1) et (2), qui forment un système non immédiatement en involution. On peut remarquer que, dans ce cas, les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ sont toujours complètement intégrables sur la variété.

Il existe dans E_7 une V_3 triplement réglée, qui est engendrée de trois façons différentes par ∞^1 quadriques et peut s'exprimer au moyen des équations :

$$x_4 = x_1 x_2, \quad x_5 = x_2 x_3, \quad x_6 = x_3 x_1, \quad x_7 = x_1 x_2 x_3 \text{ (}^1\text{)}.$$

Elle admet un groupe à 9 paramètres dont les transformations infinitésimales s'obtiennent sans difficulté. Les équations finies de ce groupe sont obtenues en effectuant sur les paramètres des trois familles de droites génératrices, trois transformations homographiques arbitraires. Il est commode de représenter paramétriquement la V_3 en coordonnées homogènes au moyen des formules:

$$\begin{aligned}
&X_0 = v_1 v_2 v_3, && X_1 = u_1 v_2 v_3, && X_2 = u_2 v_3 v_1, && X_3 = u_3 v_1 v_2,\\
&X_4 = u_1 u_2 v_3, && X_5 = u_2 u_3 v_1, && X_6 = u_3 u_2 v_2, && X_7 = u_1 u_2 u_3;
\end{aligned}$$

(1) Cette V_3 a été signalée par M. Cartan (*Comptes rendus*, 2 septembre 1918).

puis de faire subir aux paramètres les transformations :

$$u'_1 = a_1 u_1 + b_1 v_1, \qquad u'_2 = a_2 u_2 + b_2 v_2, \qquad u'_3 = a_3 u_3 + b_3 v_3,$$
$$v'_1 = c_1 u_1 + v_1, \qquad v'_2 = c_2 u_1 + v_2, \qquad v'_3 = c_3 u_3 + v_3.$$

Vis-à-vis de ce groupe à 9 paramètres (G_9), un point peut occuper quatre positions essentiellement distinctes, d'après le nombre de paramètres de son sous-groupe de stabilité. Si l'on projette la V_3 sur un hyperplan à 6 dimensions, la V_3 obtenue sera une V_3 triplement réglée de E_6, dont le groupe sera le sous-groupe de G_9 qui laisse invariant le point de vue : il pourra être à 6, 5, 3 ou 2 paramètres.

A. Si l'on prend comme point de vue un point de la V_3 elle-même, la V_3 de E_6 admet un G_6. Ses équations peuvent être écrites :

$$x_4 = x_1 x_2, \qquad x_5 = x_2 x_3, \qquad x_6 = x_3 x_1$$

et les équations du G_6 qui l'admet comme multiplicité invariante s'obtiennent en effectuant sur les paramètres des génératrices rectilignes trois transformations linéaires non homogènes :

$$x'_1 = a_1 x_1 + b_1, \qquad x'_2 = a_2 x_2 + b_2, \qquad x'_3 = a_3 x_3 + b_3,$$
$$x'_4 = a_1 a_2 x_4 + a_1 b_2 x_1 + a_2 b_1 x_2 + b_1 b_2,$$
$$x'_5 = a_2 a_3 x_5 + a_2 b_3 x_2 + a_3 b_2 x_3 + b_2 b_3,$$
$$x'_6 = a_3 a_1 x_6 + a_3 b_1 x_3 + a_1 b_3 x_1 + b_3 b_1.$$

B. On obtient une V_3 admettant un G_5, si l'on prend comme point de vue un point situé sur l'une ou l'autre des trois V_4 :

$$\left\{\begin{array}{l} x_4 = x_1 x_2, \\ x_5 = x_2 x_3, \\ x_7 = x_2 x_6, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_5 = x_2 x_3, \\ x_6 = x_3 x_1, \\ x_7 = x_3 x_4, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x_6 = x_3 x_1, \\ x_4 = x_1 x_2, \\ x_7 = x_1 x_5, \end{array}\right.$$

c'est-à-dire un point situé sur l'un des H_3 osculateurs aux quadriques génératrices de la V_3 de E_7, et non situé sur la V_3 elle-même. Les équations de la V_3 de E_6 correspondante peuvent s'écrire :

$$x_4 = x_1 x_2, \qquad x_5 = x_2 x_3 + x_3 x_1, \qquad x_6 = x_1 x_2 x_3.$$

Pour obtenir les équations finies du groupe, il est commode de représenter paramétriquement la V_3 par les formules :

$$X_0 = v_1 v_2 v_3, \qquad X_1 = u_1 v_2 v_3, \qquad X_2 = u_2 v_1 v_3, \qquad X_3 = u_3 v_1 v_2,$$
$$X_4 = u_1 u_2 v_3, \qquad X_5 = u_3(u_2 v_1 + u_1 v_2), \qquad X_6 = u_1 u_2 u_3,$$

puis d'effectuer sur les paramètres les transformations :

$$u'_1 = \alpha u_1 + \beta v_1, \qquad u'_2 = \alpha u_2 + \beta v_2, \qquad u'_3 = a u_3 + b v_3,$$
$$v'_1 = \gamma u_1 + v_1, \qquad v'_2 = \gamma u_2 + v_2, \qquad v'_3 = v_3.$$

C. Les V_3 admettant un groupe à 3 paramètres correspondent au cas où le point de vue est situé sur la V_6 d'équation :

$$\begin{aligned}&(x_7 - 2x_1x_2x_3 - x_1x_5 - x_2x_6 - x_3x_4)^2 \\ &\quad + 4(x_4 - x_1x_2)(x_5 - x_2x_3)(x_6 - x_3x_1) = 0.\end{aligned}$$

Elles s'écrivent :

$$x_4 = x_1x_3 + x_1x_2, \qquad x_5 = x_2x_3 + x_1x_2, \qquad x_6 = x_1x_2x_3$$

et leur groupe G_3 s'obtient en partant de

$$x'_1 = ax_1 + b_1, \qquad x'_2 = ax_2 + b_2, \qquad x'_3 = ax_3 + b_1 + b_2.$$

D. Enfin, si l'on projette à partir d'un point quelconque, non situé sur la V_6 précédente, on obtient une V_3 d'équations réductibles à :

$$x_4 = x_1(x_3 + x_1x_2), \qquad x_5 = x_2(x_3 + x_1x_2), \qquad x_6 = x_1x_2(x_3 + x_1x_2)$$

et qui admet un G_2 qu'on peut exprimer sous forme finie :

$$x'_1 = ax_1, \qquad x'_2 = bx_2, \qquad x'_3 = abx_3,$$
$$x'_4 = a^2bx_4, \qquad x'_5 = ab^2x_5, \qquad x'_6 = a^2b^2x_6.$$